

www.e-rara.ch

Euklids Elemente

Euclides

Halle, 1781

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5364

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-9137>

Erstes Buch.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]



Euklids Elemente

Erstes Buch.

Definitionen.

I.

- E**in Punkt ist, was keine Theile hat.
2. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.
3. Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine gerade Linie ist, welche den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt.
5. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Enden einer Fläche sind Linien.
7. Eine ebne Fläche, (Ebne) ist, welche den auf ihr befindlichen geraden Linien gleichförmig liegt.

¶

8. Ein

8. Ein ebner Winkel ist die Neigung zweier Linien gegen einander, wenn solche in einer Ebne einander berühren, ohne in Einer geraden Linie zu liegen.
9. Sind die Linien, welche den Winkel einschließen, gerade; so heist derselbe ein geradlinicher Winkel.
10. Steht eine gerade Linie auf einer andern so, daß die Nebenwinkel gleich sind; so heist sie senkrecht, (perpendikular) auf der andern, und jeder der beyden gleichen Winkel heist ein rechter.
11. Ein stumpfer Winkel heist, der grösser als ein rechter;
12. Ein spitzer aber, der kleiner als ein rechter ist.
13. Grenze heist, was das Ende eines Dinges ist;
14. Figur, was von einer, oder mehrern Grenzen, eingeschlossen wird.
15. Ein Cirkel ist eine ebne Figur, von einer einigen Linie, Peripherie genannt, so eingeschlossen, daß die geraden Linien, welche bis zu derselben, aus Einem innerhalb der Figur befindlichen Punkte, gezogen werden, alle einander gleich sind;
16. Dieser Punkt heist des Cirkels Mittelpunkt, (Centrum.)
17. Des Cirkels Durchmesser, (Diameter) ist jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt gehet und an beyden Seiten von der Peripherie begrenzt wird; welche auch den Cirkel halbiret.
18. Ein Halbcirkel ist eine Figur, welche vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittnen Cirkelbogen, oder Theil der Peripherie, eingeschlossen wird.
19. Ein Cirkelabschnitt (Segment) ist, so von einer geraden Linie und dem Cirkelbogen eingeschlossen wird.
20. Geradliniche Figuren sind, die von geraden Linien eingeschlossen werden; und zwar
21. dreyseitige (Triangel) die, so von dreyen,
22. vierseitige, welche von vieren,
23. vielseitige, (Polygone) die von mehr als vier geraden Linien eingeschlossen werden.
24. Unter den Triangeln heist derjenige gleichseitig, welcher drey gleiche Seiten hat,

25. gleichschentlich aber, welcher nur zwey gleiche Seiten hat,
26. ungleichseitig, welcher drey ungleiche Seiten hat.
27. Ferner heist unter den Triangeln derjenige rechtwinklich, welcher Einen rechten Winkel hat,
28. stumpfwinklich, welcher Einen stumpfen Winkel hat,
29. spigwinklich, welcher drey spize Winkel hat.
30. Unter den vierseitigen Figuren heist diejenige ein Quadrat, welche gleichseitig und rechtwinklich ist,
31. Ein Oblongum, welche zwar rechtwinklich, aber nicht gleichseitig ist,
32. Ein Rhombus, welche zwar gleichseitig, aber nicht rechtwinklich ist,
33. Ein Rhomboides, deren Gegenseiten und Gegenwinkel gleich sind, die aber weder gleichseitig noch rechtwinklich ist.
34. Jede andre vierseitige Figur heisse Trapezium.
35. Parallel sind gerade Linien in Einer Ebne, die, so weit man sie auch an beyden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.

Postulate.

1. Man fodre, von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen,
2. desgleichen, eine begrenzte gerade Linie stetig in gleicher Richtung zu verlängern,
3. desgleichen aus jedem Punkte in jedem Abstände einen Cirkel zu beschreiben.

Axiome.

1. Zwey Dinge, so Einem Dritten gleich, sind selbst einander gleich.
2. Wenn zu Gleichem Gleiches hinzukommt, so sind auch die Aggregate gleich.

¶ 2

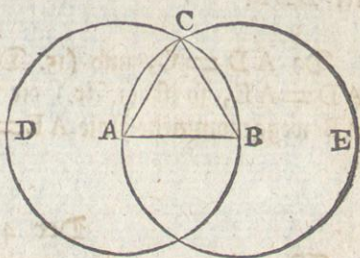
3. Wenn

3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, so sind auch die Reste gleich.
4. Wenn zu Ungleichem Gleiches hinzukommt, so sind die Aggregate ungleich.
5. Wenn von Ungleichem Gleiches weggenommen wird, so sind die Reste ungleich.
6. Zwey Dinge, deren jedes das Doppelte von Einem Dritten, sind einander gleich.
7. Zwey Dinge, deren jedes die Hälfte von Einem Dritten, sind einander gleich.
8. Dinge, die einander decken, sind einander gleich.
9. Das Ganze ist grösser als sein Theil.
10. Alle rechte Winkel sind einander gleich.
11. Zwey gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so daß die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwey rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.
12. Zwey gerade Linien schliessen keinen Raum ein.

Der 1. Satz.

Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie, AB , einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben.

Aus dem Punkte A beschreibe (3. Post.) mit AB den Cirkel BCD , und aus dem Punkte B mit BA den Cirkel ACE . Vom Punkte C , in dem sich beyde Cirkel schneiden, ziehe (1. Post.) nach A , B , die geraden Linien CA , CB .

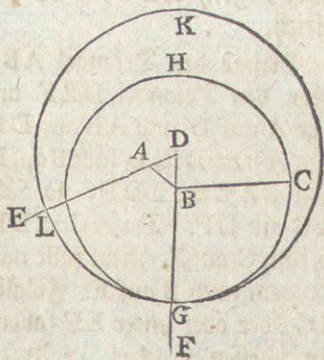


Da (15. Def.) $AC = AB$ und $BC = BA$, so ist (1. Ur.) $AC = BC$. Demnach ist $AC = AB = BC$, folglich (24. Def.) der auf AB beschriebne $\triangle CAB$ gleichseitig.

Der 2. Satz.

An einen gegebenen Punkt, A , eine der gegebenen, BC , gleiche gerade Linie, zu legen.

Ziehe von A nach B die gerade Linie, AB . Auf dieser beschreibe (1. S.) den gleichseitigen Triangel DAB . Verlängere (2. Post.) die Schenkel DA , DB , nach E , F . Aus B beschreibe mit BC den Cirkel CGH , und aus D mit DG den Cirkel GKL .

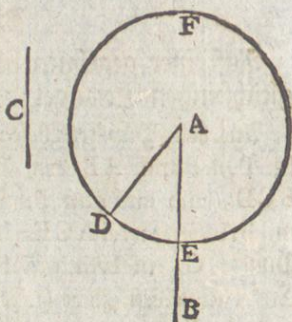


Da (15. Def.) $DL = DG$, und (24. Def.) $DA = DB$, so ist (3. Ur.) $AL = BG$. Nun ist (15. Def.) $BC = BG$. Folglich (1. Ur.) $AL = BC$.

Der 3. Satz.

Es sind zwey ungleiche gerade Linien, AB , C , gegeben; man soll von der grössern, AB , eine der kleinern, C , gleiche Linie wegnehmen.

An A lege (2. S.) $AD = C$, und beschreibe aus A mit AD den Kreis DEF.

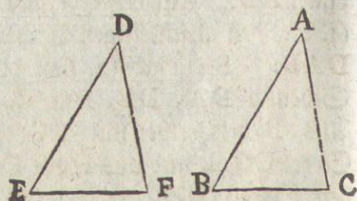


Da $AD = C$, und (15. Def.) $AD = AE$, so ist (1. Ur.) die von AB weggenommene Linie $AE = C$.

Der 4. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, gleich sind, (die eine, AB, nämlich der einen DE, und die andre, AC, der andern, DF); und ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich ist, der nämlich, den die gleichen Seiten einschließen; so ist auch die dritte Seite BC, der dritten, EF, gleich, auch sind die Triangel, ABC, DEF, selbst einander gleich, und von den übrigen Winkeln sind die, so gleichen Seiten gegenüber liegen, ABC, DEF; ACB, DFE, ebenfalls einander gleich.

Bringe den Triangel ABC über den Triangel DEF und lege A auf D und AB auf DE. Da $AB = DE$, so fällt B auf E. Da $BAC = EDF$, so fällt AC auf DF. Da $AC = DF$, so fällt C auf F. Nun fällt nach



Obigem auch B auf E. Folglich fällt BC auf EF. (Denn sollte BC über oder unter EF fallen, so würden BC, EF, einen Raum einschließen, welches (12. Ur.) unmöglich ist.) Folglich ist (8. Ur.) $BC = EF$; $\triangle ABC = \triangle DEF$; $ABC = DEF$; $ACB = DFE$.

Der 5. Satz.

In jedem gleichschenkligen Triangel, ABC, sind die Winkel an der Grundlinie, ABC, ACB, einander gleich; auch sind, wenn man die Schenkel AB, AC, verlängert, die Winkel unter der Grundlinie, DBC, ECB, einander gleich.

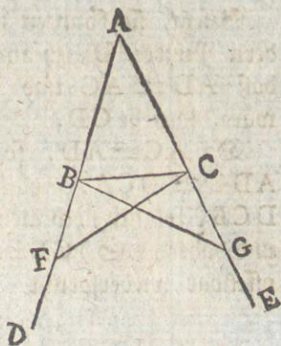
Auf

Auf BD nimm willkürlich einen Punkt F . Von AE nimm (3. S.) $AG = AF$, und ziehe FC , GB .

In den $\triangle ACF$, ABG , ist $AF = AG$ und $AC = AB$, auch der Winkel bey A beyden gemein, folglich ist (4. S.) $FC = GB$, $\angle ACF = \angle ABG$, $\angle AFC = \angle AGB$.

Nun ist $AF = AG$, $AB = AC$, und daher (3. Ur.) $BF = CG$. Demnach, (in den $\triangle FBC$, GCB), ist $BF = CG$, $FC = GB$, $\angle AFC = \angle AGB$, folglich (4. S.) $\angle BCF = \angle CBG$ und $\angle FBC = \angle GCB$, das ist, die Winkel unter der Grundlinie sind gleich.

Da $\angle ABG = \angle ACF$ und $\angle CBG = \angle BCF$, so ist (3. Ur.) $\angle ABC = \angle ACB$, das ist, die Winkel an der Grundlinie sind gleich.

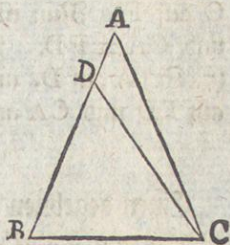


Der 6. Satz.

Wenn in einem Triangel, ABC , zwey Winkel, $\angle ABC$, $\angle ACB$, einander gleich sind: so sind auch die Gegenseiten solcher Winkel, AC , AB , einander gleich.

Wären AC , AB , ungleich, so wär eine davon grösser, etwa AB . Es sey daher (3. S.) $BD = AC$. Ziehe DC .

In den Triangeln ABC , DBC , wär demnach $BD = CA$, BC beyden gemein und $\angle DBC = \angle ACB$, folglich (4. S.) $\triangle DBC = \triangle ABC$, welches (9. Ur.) unmöglich.

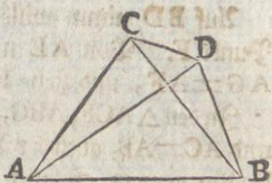


Der 7. Satz.

Wenn auf einer geraden Linie, AB , in ihren Endpunkten A , B , zwey gerade Linien, AC , BC , aufgestellt sind, daß sie in einem Punkte, C , zusammen treffen; und zwey andre gerade Linien, welche den erstern gleich sind, (die eine nämlich der einen, AC , die andre der andern, BC), in eben denselben Endpunkten, A , B , aufgestellt werden: so können dieselben in keinem andern Punkte an eben derselben Seite zusammentreffen.

Gesetzt, sie könnten in einem andern Punkte, D, zusammen treffen, daß $AD = AC$ und $BD = BC$, wäre, so ziehe CD.

Da $AC = AD$, so ist (5. S.) $ADC = DCA$, folglich $ADC > DCB$, folglich noch mehr $CDB > DCB$. Nun ist $CB = DB$, und daher (5. S.) $CDB = DCB$, welches jenem, $CDB > DCB$, offenbar widerspricht.

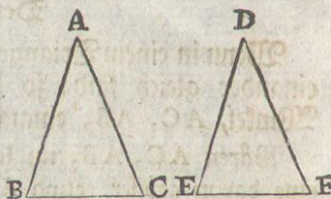


Der 8. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, gleich sind, (die eine, AB, nämlich der einen DE, die andre, AC, der andern, DF,) und die dritte Seite, BC, der dritten, EF, gleich ist: so ist auch ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich, der nämlich, welchen die gleichen Seiten einschließen.

Bringe den Triangel ABC über den $\triangle DEF$ und lege B auf E und BC auf EF.

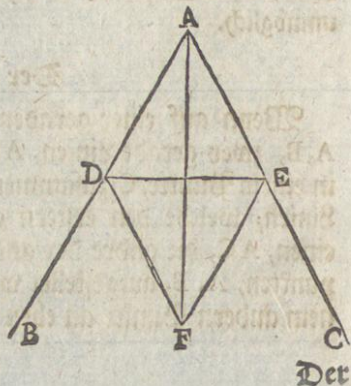
Da $BC = EF$, so fällt C auf F. Nun ist $BA = ED$ und $CA = FD$. Folglich fällt (7. S.) A auf D, und daher BA auf ED und CA auf FD, folglich ist (8. Nr.) $BAC = EDF$.



Der 9. Satz.

Einen gegebenen geradlinichen Winkel, BAC, zu halbiren.

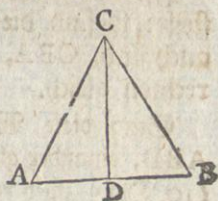
Auf AB nimm willkürlich den Punkt D. Von AC nimm (3. S.) $AE = AD$. Ziehe DE, und beschreibe (1. S.) auf derselben den gleichseitigen $\triangle DEF$. Ziehe AF, so halbirt diese den Winkel bey A, weil $DA = AE$, auch AF benden Triangeln gemein und $DF = FE$; folglich (8. S.) $DAF = EAF$.



Der 10. Satz.

Eine gegebne begrenzte gerade Linie, AB , zu halbiren.

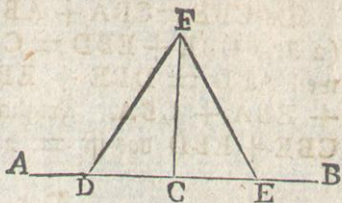
Auf AB beschreibe (1. S.) den gleichseitigen $\triangle ABC$. Halbire (9. S.) den Winkel ACB durch CD , so wird die AB in D halbirt, weil $AC=CB$ und CD beyden Triangeln gemein, auch $ACD=BCD$, folglich (4. S.) $AD=DB$.



Der 11. Satz.

Auf einer gegebenen geraden Linie, AB , in einem auf ihr gegebenen Punkte, C , einen Perpendikel aufzurichten.

Auf AC nimm willkürlich einen Punkt, D . Von CB nimm (3. S.) $CE=CD$. Auf DE beschreibe (1. S.) den gleichseitigen $\triangle FDE$ und ziehe FC , so ist diese senkrecht auf AB im Punkte C ; weil $CD=CE$, und CF beyden Triangeln gemein, auch $DF=EF$, folglich (8. S.) $DCF=FCE$, folglich (10. Def.) FC senkrecht auf AB .

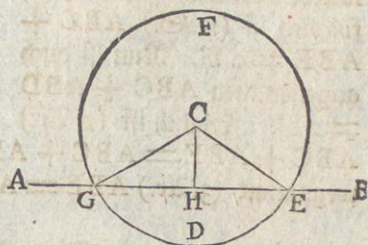


Der 12. Satz.

Auf eine gegebne unbegrenzte gerade Linie, AB , von einem außerhalb derselben gegebenen Punkte, C , einen Perpendikel zu fallen.

Nimm an der andern Seite von AB willkürlich einen Punkt, D , beschreibe aus C mit CD , den Cirkel EFG , halbire (10. S.) GE in H und ziehe CH , so ist diese senkrecht auf AB .

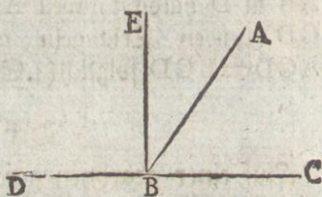
Ziehe CG, CE , so ist, weil $GH=HE$, CH gemeinschaftlich und (15. Def.) $GC=CE$, (8. S.) $GHC=CHE$, folglich (10. Def.) CH senkrecht auf AB .



Der 13. Satz.

Ist eine gerade Linie, AB, auf einer andern, CD, aufgestellt: so sind die Winkel, die sie macht, was für welche es auch sind, CBA, ABD, entweder zwey rechte, oder zweyen rechten gleich.

Sind diese Winkel, CBA, ABD, einander gleich, so sind sie (10. Def.) zwey rechte; sind sie aber ungleich, so mache (11. S.) BE auf CD in B senkrecht, folglich sind (10. Def.) CBE, EBD, zwey rechte Winkel.



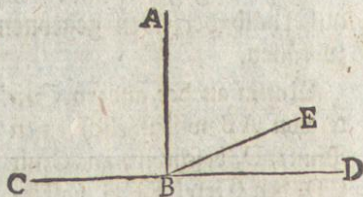
Da $CBE = CBA + ABE$, so ist, wenn EBD hinzukommt, (2. A.) $CBE + EBD = CBA + ABE + EBD$. Eben so, weil $ABD = DBE + EBA$, ist $ABD + CBA = DBE + EBA + CBA$. Folglich ist (1. A.) $ABD + CBA = CBE + EBD$ das ist $= 2 R$.

Der 14. Satz.

Wenn mit einer geraden Linie AB, in Einem Punkte derselben, B, zwey andre nicht an Einer Seite befindliche gerade Linien, BC, BD, Nebenwinkel ABC, ABD, machen, die zweyen rechten gleich sind: so liegen solche nach Einer geraden Linie, CBD, an einander.

Wäre CBD keine gerade Linie, so sey es irgend eine andre welche man will, etwa, CBE, folglich ist (13. S.) $ABC + ABE = 2 R$. Nun ist auch angenommen $ABC + ABD = 2 R$. Folglich ist (1. A.)

$ABC + ABE = ABC + ABD$, folglich, wenn man ABC wegnimmt, (3. A.) $ABE = ABD$, welches (9. A.) unmöglich.

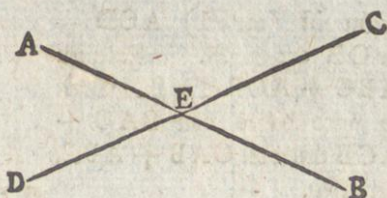


Der 15. Satz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, die einander schneiden, machen gleiche Scheitelwinkel, CEA, DEB; CEB, AED.

Da

Da (13. S.) $CEA + AED = 2R$. und $AED + DEB = 2R$, so ist (1. Ur.) $CEA + AED = AED + DEB$, folglich wenn man AED wegnimmt, (3. Ur.) $CEA = DEB$. Eben so wird bewiesen, daß $CEB = AED$.



Zusatz.

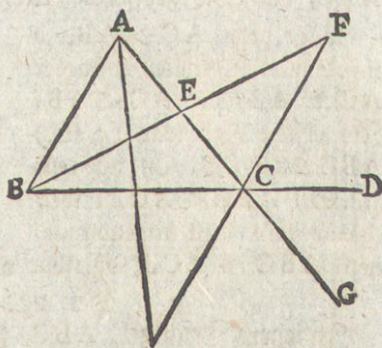
Hieraus erhellet, wenn gerade Linien, so viel ihrer sind, einander in Einem Punkte schneiden, daß alle Winkel an solchem Durchschnittspunkte vier rechten gleich sind.

Der 16. Satz.

Bei jedem Triangel, ABC , ist, wenn man eine seiner Seiten, BC , verlängert, der Aussenwinkel, ACD , grösser, als jeder seiner innern Gegenwinkel, CBA , BAC .

Halbire (10. S.) AC in E , ziehe BE , und verlängre sie, bis $EF = EB$. Ziehe FC .

Da $BE = EF$, $AE = EC$, und (15. S.) $AEB = FEC$, so ist (4. S.) $BAE = ECF$. Nun ist (9. Ur.) $ACD > ECF$. Folglich ist $ACD > BAE$.



Eben so wird auch BC halbiret und bewiesen, daß BCG , das ist, (15. S.) $ACD > CBA$.

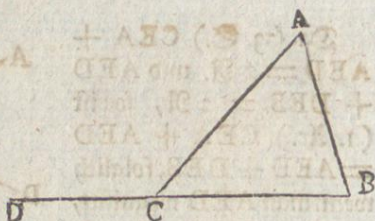
Der 17. Satz.

In jedem Triangel, ABC , sind jegliche zwey Winkel zusammen kleiner als zwey rechte.

Verlängre BC nach D , so ist (16. S.) $ACD > ABC$ oder $ABC < ACD$, folglich (4. Ur.) $ABC + ACB < ACD + ACB$.

Nun

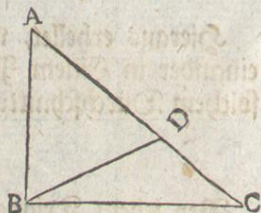
Nun ist (13. S.) $ACD + ACB = 2 R.$ Folglich $ABC + ACB < 2 R.$ Eben so wird dieses von $BAC + ACB$ und von $CAB + ABC$, bewiesen.



Der 18. Satz.

In jedem Triangel, ABC , liegt der grössern Seite, AC , auch der grössere Winkel, ABC , gegenüber.

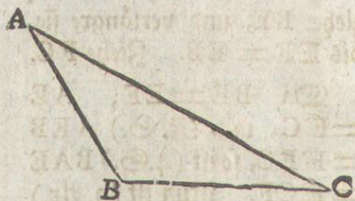
Da $AC > AB$, so mache (3. S.) $AD = AB$ und ziehe BD , so ist (5. S.) $ADB = ABD$. Nun ist (16. S.) $ADB > ACB$. Folglich ist auch ABD und also noch mehr $ABC > ACB$.



Der 19. Satz.

In jedem Triangel, ABC , liegt dem grössern Winkel, ABC , auch die grössere Seite, AC , gegenüber.

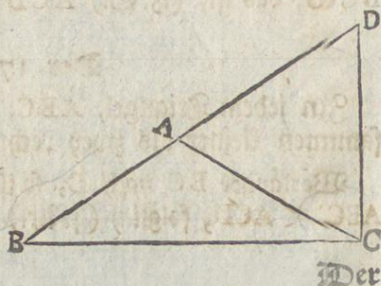
Wäre nicht $AC > AB$, so müste man annehmen entweder $AC = AB$ oder $AC < AB$. Im ersten Fall wär (5. S.) $ABC = ACB$, im zweiten, (18. S.) $ABC < ACB$, welches beides dem angenommenen, $ABC > ACB$, offenbar widerspricht.



Der 20. Satz.

In jedem Triangel, ABC , sind jegliche zwei Seiten zusammen grösser als die dritte.

Verlängre BA nach D , mache $AD = AC$ und ziehe DC . Da $AD = AC$, so ist (5. S.) $ACD = ADC$, folglich $BCD > ADC$, folglich (19. S.) BD , das ist $BA + AC > BC$. Eben so wird bewiesen, dass $AB + BC > AC$ und dass $BC + CA > AB$.

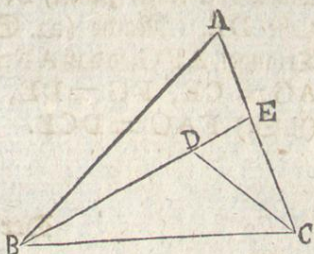


Der

Der 21. Satz.

Wenn in einem Triangel, ABC , auf einer seiner Seiten, BC , in ihren Endpunkten, B, C , zwei gerade Linien BD, CD , aufgestellt werden, welche innerhalb zusammentreffen: so sind solche kleiner als die beyden übrigen Seiten des Triangels, AB, AC , schliessen aber einen grössern Winkel, BDC , ein.

Verlängre BD bis E , so ist im $\triangle ABE$ (20. S.) $BA + AE > BE$, folglich, wenn EC hinzukommt, $BA + AC > BE + EC$. Nun ist im $\triangle CDE$ (20. S.) $CE + ED > CD$, und daher, wenn DB hinzukommt, $CE + EB > CD + DB$. Folglich ist noch vielmehr $BA + AC > CD + DB$.

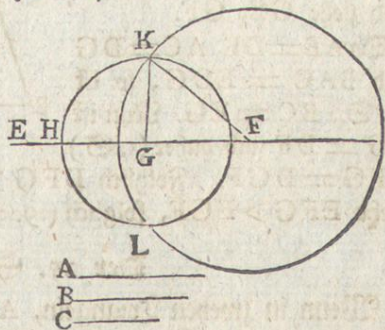


Da (16. S.) $BDC > BEC$ und $BEC > BAC$, so ist noch vielmehr $BDC > BAC$.

Der 22. Satz.

Aus dreien geraden Linien, welche dreien andern gegebenen, A, B, C , gleich, so daß jegliche zwey zusammen grösser als die dritte sind, einen Triangel zu machen.

Ziehe eine gerade Linie, DE , welche in D begrenzt, nach E zu aber unbegrenzt sey. Mache $DF = A$, $FG = B$, $GH = C$. Aus F beschreibe mit FD den Cirkel DKL , und aus G mit GH den Cirkel KLH . Ziehe KF, KG , so ist $\triangle KFG$ der verlangte.



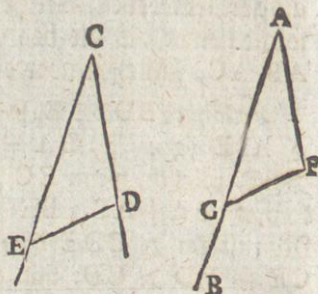
Da (15. Def.) $FD = FK$ und $GH = GK$, aber $FD = A$ und $GH = C$, so ist (1. Ur.) $FK = A$ und $KG = C$. Nun war auch $FG = B$. Demnach sind die Seiten des $\triangle KFG$ den gegebenen Linien A, B, C , gleich.

Der

Der 23. Satz.

Auf eine gegebne gerade Linie, AB , an einen auf ihr gegebenen Punkt, A , einen dem gegebenen, DCE , gleichen geradlinichen Winkel zu setzen.

Auf CD sowohl als CE nimm willkührlich einen Punkt, D , E , und ziehe DE . Mache (22. S.) den Triangel, AFG , so daß $AF = CD$, $AG = CE$, $FG = DE$, so ist (8. S.) $FAG = DCE$.



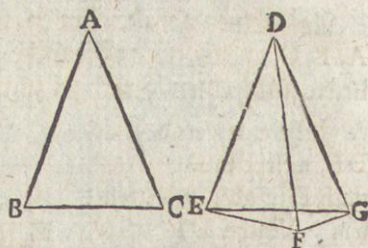
Der 24. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC , DEF , zwey Seiten AB , AC , zweyen Seiten, DE , DF , gleich sind, (die eine AB , nämlich der einen DE , die andre AC , der andern DF); ein Winkel, BAC , aber grösser ist als ein Winkel, EDF , der nämlich welchen die gleichen Seiten einschliessen: so ist auch die dritte Seite, BC , grösser als die dritte, EF .

Da $BAC > EDF$, so mache (23. S.) $EDG = BAC$, auch $DG = AC = DF$, und ziehe GE , GF .

Da $AB = DE$, $AC = DG$ und $BAC = EDG$, so ist (4. S.) $BC = EG$. Nun ist $DG = DF$ und daher (5. S.)

$DFG = DGF$. Folglich $DFG > EGF$, folglich noch vielmehr $EFG > EGF$, folglich (19. S.) EG , das ist $BC > EF$.

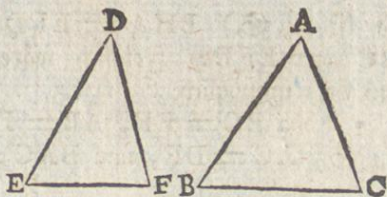


Der 25. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC , DEF , zwey Seiten, AB , AC , zweyen Seiten, DE , DF , gleich sind, (die eine AB nämlich der einen DE , und die andre AC , der andern, DF); die dritte Seite, BC , aber grösser ist als die dritte, EF : so ist auch ein Winkel, BAC , grösser als ein Winkel, EDF , der nämlich, den die gleichen Seiten einschliessen.

Wäre

Wäre nicht $BAC > EDF$,
 so wäre entweder BAC
 $= EDF$, oder $BAC < EDF$,
 folglich im ersten Fall (4. §.)
 $BC = EF$; im zweyten
 (24. §.) $BC < EF$, wel-
 ches beydes dem angenom-
 men, $BC > EF$, widerspricht.



Der 26. Satz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC , DEF , zwey Winkel,
 ABC , BCA , zweyen Winkeln, DEF , EFD , gleich sind,
 (der eine, ABC , nämlich dem einen, DEF , und der andre
 BCA , dem andern EFD .) und eine Seite einer Seite gleich
 ist; sie mag nun an den gleichen Winkeln, oder einem dersel-
 ben gegenüberliegen: so sind auch die beyden übrigen Seiten
 den beyden übrigen, auch der dritte Winkel BAC , dem drit-
 ten EDF , gleich.

Erster Fall.

Wenn die an den gleichen Winkeln
 liegenden Seiten, BC , EF ,
 einander gleich sind: so ist

1.) $AB = DE$. Denn wären
 AB , DE , nicht gleich, so müste
 eine davon, etwa AB , grösser seyn.
 Es sey daher $BG = ED$. Ziehe GC .

Da $BG = ED$, $BC = EF$, $GBC = DEF$, so ist (4. §.)
 $BCG = EFD$. Nun war angenommen $BCA = EFD$.
 Folglich wäre $BCA = BCG$, welches (9. Nr.) unmöglich.

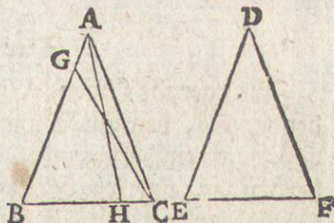
2.) Da $AB = DE$, $BC = EF$, $ABC = DEF$, so ist
 (4. §.) $AC = DF$, und $BAC = EDF$.

Zweyter Fall.

Wenn die, einem der gleichen Winkel gegenüberliegenden,
 Seiten, AB , DE , einander gleich sind: so ist

1.) $BC = EF$. Denn wären BC , EF , nicht gleich, so müste
 eine davon, etwa BC , grösser seyn. Es sey daher $BH = EF$.
 Ziehe AH . Da $BH = EF$, $AB = DE$, $ABC = DEF$,

so



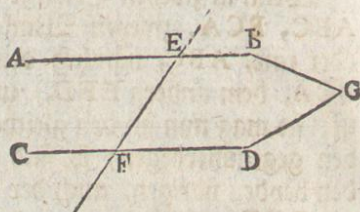
so ist (4. S.) $BHA = EFD$. Nun war angenommen $BCA = EFD$. Folglich wäre $BHA = BCA$, welches (16. S.) unmöglich.

2.) Da $BC = EF$, $AB = DE$, $ABC = DEF$, so ist (4. S.) $AC = DF$, und $BAC = EDF$.

Der 27. Satz.

Zwei gerade Linien, AB , CD , mit denen eine dritte schneidende, EF , gleiche Wechselwinkel, AEF , EFD , macht, sind parallel.

Wären AB , CD , nicht parallel, so würden sie genugsam verlängert an irgend einer Seite zusammentreffen. Ge-
setzt es geschähe dies in G .
Folglich wär im $\triangle EFG$
(16. S.) $AEF > EFD$, welches dem angenommenen $AEF = EFD$ widerspricht.

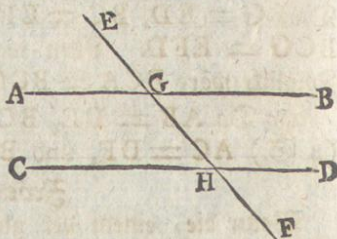


Der 28. Satz.

Zwei gerade Linien, AB , CD , mit denen eine dritte schneidende, EF , den Außenwinkel, EGB , dem ihm an derselben Seite gegenüberliegenden innern Winkel GHD , oder die beyden an einerley Seite liegenden innern Winkel, BGH , GHD , zweyen rechten gleich macht, sind parallel.

Erster Theil.

Da $EGB = GHD$ und (15. S.) $EGB = AGH$, so ist (1. Ar.) $AGH = GHD$, folglich (27. S.) AB , CD , parallel.



Zweyter Theil.

Da $BGH + GHD = 2R$. und (13. S.) $AGH + BGH = 2R$, so ist (1. Ar.) $BGH + GHD = AGH + BGH$, folglich, wenn man BGH wegnimmt, (3. Ar.) $AGH = GHD$, folglich (27. S.) AB , CD , parallel.

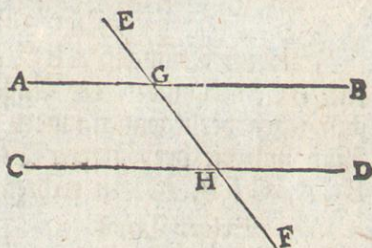
Der

Der 29. Satz.

Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, parallel sind: so macht eine dritte schneidende, EF, mit ihnen die Wechselwinkel, AGH, GHD, einander; desgleichen den Aussenwinkel, EGB, dem ihm an derselben Seite gegenüberliegenden innern Winkel, GHD; ferner die beyden an einerley Seite liegenden innern Winkel, BGH, GHD, zweyen rechten, gleich.

Erster Theil.

Wären AGH, GHD, nicht gleich, so müste einer davon, etwa AGH, grösser seyn, folglich, wenn BGH hinzukommt, ist (4. Ur.) $AGH + BGH > GHD + BGH$. Nun ist (13. S.) $AGH + BGH = 2R$. Folglich $GHD + BGH < 2R$, folglich müsten (11. Ur.) AB, CD, an dieser Seite verlängert zusammentreffen und wären (35. Def.) nicht parallel, gegen das Angenommene.



Zweyter Theil.

Da $AGH = GHD$ und (15. S.) $AGH = EGB$, so ist (1. Ur.) $EGB = GHD$.

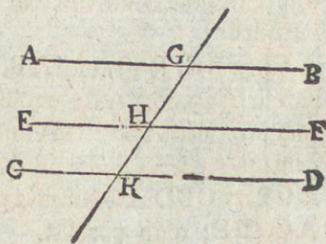
Dritter Theil.

Da $EGB = GHD$, so ist, wenn BGH hinzukommt, (2. Ur.) $EGB + BGH = GHD + BGH$. Nun ist (13. S.) $EGB + BGH = 2R$. Folglich ist (1. Ur.) $GHD + BGH = 2R$.

Der 30. Satz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, welche Einer dritten, EF, parallel, sind einander selbst parallel.

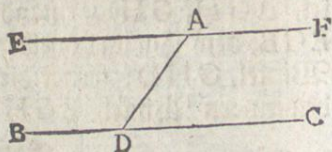
Es schneide sie die gerade Linie, GK. Da AB, EF, parallel, so ist (29. S.) $AGH = GHF$. Nun ist, weil EF, CD, parallel, (29. S.) $GHF = GKD$. Folglich ist (1. Ur.) $AGH = GKD$, folglich (27. S.) AB, CD, parallel.



Der 31. Satz.

Durch einen gegebenen Punkt, A, eine gerade Linie einer gegebenen, BC, parallel zu ziehen.

Auf BC nimm willkürlich einen Punkt D, ziehe DA, mache (23. S.) $\angle DAE = \angle ADC$, und verlängere EA nach F, so ist (27. S.) EF der BC parallel.

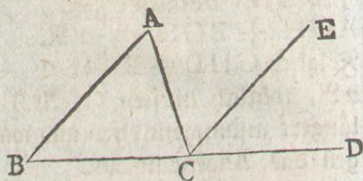


Der 32. Satz.

In jedem Triangel, ABC, ist, wenn man eine seiner Seiten, BC, verlängert, der Aussenwinkel, ACD, den beyden ihm gegenüberliegenden innern Winkeln, CAB, ABC, gleich. Auch sind die drey innern Winkel eines Triangels, ABC, BCA, CAB, zweyen rechten gleich.

Erster Theil.

Durch C ziehe (31. S.) der AB die CE parallel, so ist (29. S.) $\angle BAC = \angle ACE$, (wenn AC die schneidende Linie) und $\angle ABC = \angle ECD$, (wenn BD die schneidende Linie) folglich ist (2. Ur.) $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$.



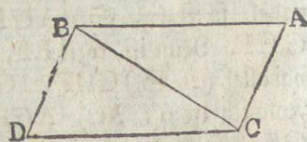
Zweyter Theil.

Da $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$, so ist, wenn $\angle ACB$ hinzukommt (2. Ur.) $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ACD + \angle ACB$. Nun ist (13. S.) $\angle ACD + \angle ACB = 2R$. Folglich (1. Ur.) auch $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 2R$.

Der 33. Satz.

Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, gleich und parallel sind: so sind die geraden Linien, AC, BD, durch welche man ihre Endpunkte an einerley Seite verbindet, auch gleich und parallel.

Ziehe BC, so ist, weil AB, CD, parallel, (29. S.) $\angle ABC = \angle BCD$, folglich, weil $AB = CD$ und BC gemein, (4. S.) $AC = BD$, auch $\angle ACB = \angle CBD$ und daher (27. S.) AC, BD, auch parallel.



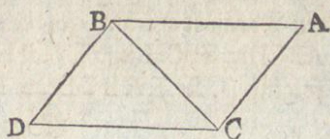
Der 34. Satz.

In jedem Parallelogramm, $ACDB$, sind die Gegenseiten und Gegenwinkel einander gleich. Auch wird dasselbe von der Diagonale, BC , halbirt.

Erster Theil.

Da AB , CD , und so auch AC , BD , parallel, so ist (29. S.) $\angle ABC = \angle BCD$ und $\angle ACB = \angle CBD$.

Nun ist BC gemein. Folglich (26. S.) $AB = CD$, $AC = BD$, $\angle BAC = \angle BDC$. Auch ist, weil $\angle ABC = \angle BCD$ und $\angle CBD = \angle ACB$, (2. Nr.) $\angle ABC + \angle CBD = \angle BCD + \angle ACB$, das ist, $\angle ABD = \angle ACD$.



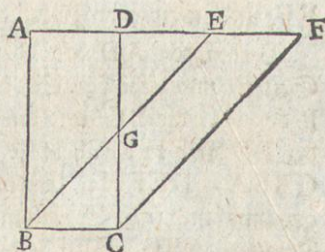
Zweyter Theil.

Da $AB = CD$, und BC gemein, auch $\angle ABC = \angle BCD$, so ist (4. S.) $\triangle ABC = \triangle CBD$.

Der 35. Satz.

Parallelogramme, $ABCD$, $EBCF$, auf einerley Grundlinie, BC , und in einerley Parallelen, AF , BC , sind einander gleich.

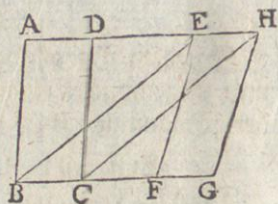
Da (34. S.) $BC = AD$ und $BC = EF$, so ist (1. Nr.) $AD = EF$, folglich, wenn DE hinzukommt (2. Nr.) $AE = DF$. Nun ist auch (34. S.) $AB = DC$ und (29. S.) $\angle FAB = \angle FDC$. Folglich ist (4. S.) $\triangle ABE = \triangle CDF$, folglich, wenn $\triangle EDG$ hinwegkommt, (3. Nr.) das Trapezium $ABGD = EGCF$, folglich, wenn $\triangle GBC$ hinzukommt, (2. Nr.) das Parallelogramm $ABCD = EBCF$.



Der 36. Satz.

Parallelogramme, $ABCD$, $EFGH$, auf gleichen Grundlinien, BC , FG , und in einerley Parallelen, AH , BG , sind einander gleich.

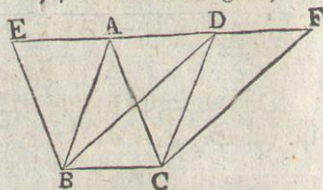
Ziehe BE , CH . Da $BC = FG$ und (34. S.) $FG = EH$, so ist (1. Ar.) $BC = EH$. Nun sind BC , EH , auch parallel, folglich sind (33. S.) EB , CH , gleich und parallel. Folglich ist $EBC H$ ein Parallelogramm, folglich (35. S.) $ABCD = EBC H$ und $EFGH = EBC H$, folglich (1. Ar.) $ABCD = EFGH$.



Der 37. Satz.

Triangel, ABC , DBC , auf einerley Grundlinie, BC , und in einerley Parallelen, AD , BC , sind einander gleich.

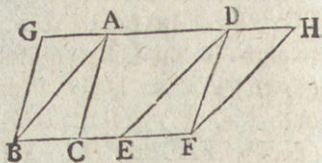
Verlänge AD an beyden Seiten und ziehe (31. S.) durch B der AC die BE und durch C der BD die CF parallel: so sind $EBCA$, $DBC F$, Parallelogramme und (35. S.) einander gleich. Nun sind (34. S.) die Triangel ABC , DBC , die Hälften dieser Parallelogramme, folglich (7. Ar.) auch einander gleich.



Der 38. Satz.

Triangel, ABC , DEF , auf gleichen Grundlinien, BC , EF , und in einerley Parallelen, AD , BF , sind einander gleich.

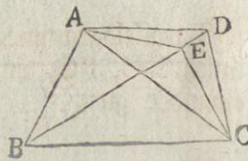
Verlänge AD an beyden Seiten, und ziehe (31. S.) durch B der AC die BG und durch F der ED die FH parallel: so sind $GBCA$, $DEFH$, Parallelogramme und (36. S.) einander gleich. Nun sind (34. S.) die Triangel ABC , DEF , die Hälften dieser Parallelogramme, folglich (7. Ar.) auch einander gleich.



Der 39. Satz.

Gleiche Triangel, ABC , DBC , auf einerley Grundlinie, BC , und an einerley Seite, sind in einerley Parallelen, AD , BC .

Wäre der BC die AD nicht parallel, so sey es jede andre, etwa AE . Ziehe EC , so ist (37. S.) $\triangle ABC = \triangle EBC$. Nun war angenommen $\triangle ABC = \triangle DBC$. Folglich wäre (1. Ar.) $\triangle DBC = \triangle EBC$, welches (9. Ar.) unmöglich.

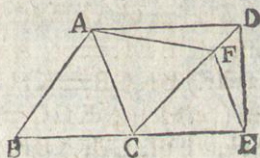


Der

Der 40. Satz.

Gleiche Triangel, ABC , DCE , auf gleichen Grundlinien, BC , CE , und an einerley Seite, sind in einerley Parallelen, AD , BE .

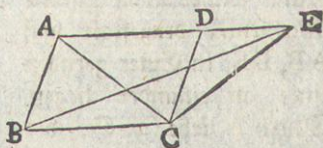
Wäre der BE die AD nicht parallel, so sey es jede andre, etwa AF . Ziehe FE , so ist (38. S.) $\triangle ABC = \triangle FCE$. Nun ist angenommen $\triangle ABC = \triangle DCE$. Folglich wäre (1. Nr.) $\triangle DCE = \triangle FCE$, welches (9. Nr.) unmöglich.



Der 41. Satz.

Wenn ein Parallelogramm, $ABCD$, und ein Triangel, EBC , auf einerley Grundlinie, BC , und in einerley Parallelen, BC , AE , sind: so ist das Parallelogramm doppelt so groß als der Triangel.

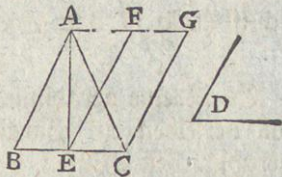
Ziehe AC , so ist (37. S.) $\triangle ABC = \triangle EBC$. Nun ist (34. S.) $ABCD = 2 \triangle ABC$. Folglich ist auch $ABCD = 2 \triangle EBC$.



Der 42. Satz.

Es ist ein Triangel, ABC , gegeben; man soll demselben ein Parallelogramm unter einem gegebenen geradlinichen Winkel, D , gleich machen.

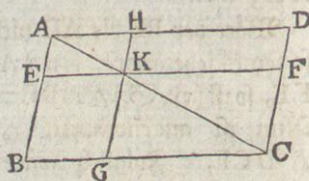
Halbire (10. S.) BC in E , und ziehe AE . An CE setze (23. S.) $CEF = D$. Ziehe (31. S.) durch A der BC die AG , und durch C der EF die CG parallel, so ist $FECG$ ein Parallelogramm unter dem Winkel $CEF = D$, und (41. S.) $FECG = 2 \triangle AEC$. Nun ist auch (38. S.) $\triangle ABE = \triangle AEC$ und daher $\triangle ABC = 2 \triangle AEC$. Folglich ist (6. Nr.) $FECG = \triangle ABC$



Der 43. Satz.

In jedem Parallelogramm, $ABCD$, haben die um die Diagonale, AC , herumliegenden Parallelogramme, EH , FG , gleiche Ergänzungen, BK , KD .

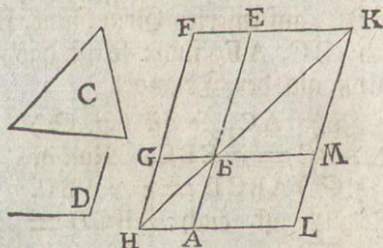
Da (34. S.) $\triangle ABC = \triangle CAD$, und $\triangle AEK = \triangle AHK$, so ist (3. Ar.) $EKCB = KHDC$. Nun ist (34. S.) $\triangle KGC = \triangle KCF$. Folglich ist (3. Ar.) $BK = KD$.



Der 44. Satz.

Auf einer gegebenen geraden Linie, AB , ein Parallelogramm, einem gegebenen Triangel, C , gleich, unter einem gegebenen geradlinichen Winkel, D , zu beschreiben.

Mache (42. S.) ein Parallelogramm $BEFG = \triangle C$, so daß $EBG = D$, und bringe solches an die gegebne Linie AB , dergestalt daß AB, BE , in Einer geraden Linie an einander liegen. Durch A ziehe (31. S.) der



EF die AH parallel, verlängre FG bis H und ziehe HB : so ist (29. S.) $AHF + EFH = 2R.$, folglich $BHF + EFH < 2R.$, folglich werden (II. Ar.) HB, FE , an dieser Seite verlängert zusammentreffen. Dies geschehe in K . Ziehe (31. S.) durch K der FH die KL parallel, so ist $HLKF$ ein Parallelogramm, dessen Diagonale HK , folglich, wenn man HA, GB , bis L, M , verlängert, (43. S.) $LB = BF$. Nun war $BF = \triangle C$. Folglich ist (I. Ar.) $LB = \triangle C$ und (15. S.) $ABM = GBE = D$.

Der 45. Satz.

Es ist eine geradliniche Figur, $ABCD$, gegeben; man soll derselben ein Parallelogramm, unter einem gegebenen geradlinichen Winkel, E , gleich machen.

Ziehe DB . Mache (42. S.) das Parallelogramm $FH = \triangle ABD$, so daß $FKH = E$. Auf GH beschreibe (44. S.) das Parallelogramm $GM = \triangle DBC$, so daß $GHM = E$, folglich ist (I. Ar.) $GHM = FKH$, folglich, wenn GHK hinzukommt, (2. Ar.)

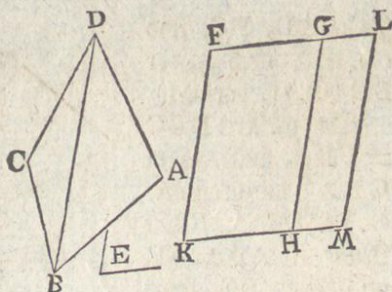
(2. Nr.) $GHM + GHK =$
 $FKH + GHK =$ (29. S.)
 2 R., folglich sind (14. S.)
 KH, HM, in Einer geraden
 Linie.

Da FG, KM, parallel, so
 ist (29. S.) $FGH = GHM$,
 folglich $FGH + LGH =$
 $GHM + LGH =$ (29. S.)

2 R., folglich sind (14. S.) FG, GL, in Einer geraden Linie.

Da (34. S.) FK der GH und GH der LM, gleich und parallel, so ist (30. S.) FK der LM gleich und parallel, folglich sind (33. S.) FL, KM, auch gleich und parallel, folglich KFLM ein Parallelogramm, dessen Winkel $FKM = E$.

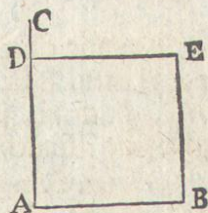
Da $FH = \triangle ABD$ und $GM = \triangle DBC$, so ist (2. Nr.) $KFLM = ABCD$.



Der 46. Satz.

Auf einer gegebenen geraden Linie, AB, ihr Quadrat zu beschreiben.

Auf AB ziehe (11. S.) aus A die AC senkrecht. Mache $AD = AB$. Ziehe (31. S.) durch D der AB die DE, und durch B der AD die BE parallel, so ist ADEB ein Parallelogramm, folglich (34. S.) dessen Gegenseiten einander gleich. Nun ist $AB = AD$. Folglich das Parallelogramm ADEB gleichseitig.



Da AB, DE, parallel, so ist (29. S.) $A + D = 2 R.$ Nun ist A, folglich auch D ein rechter Winkel. Nun sind (34. S.) die Gegenwinkel gleich. Folglich ist das Parallelogramm ADEB auch rechtwinklich, folglich (30. Def.) ein Quadrat.

Der 47. Satz.

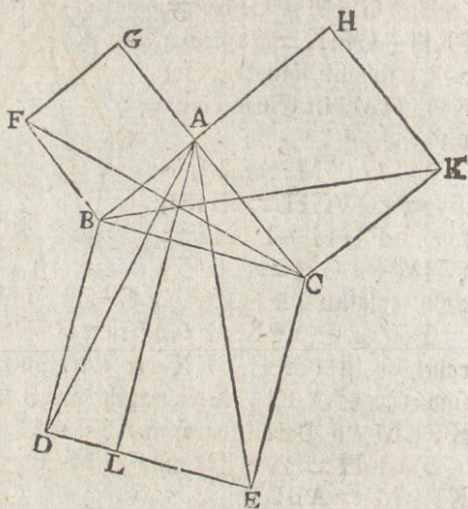
In jedem rechtwinklichen Triangel, ABC, ist das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, BC, den Quadraten der ihn einschliessenden Seiten, BA, AC, gleich.

Beschreibe (46. S.) auf BC ihr Quadrat BDEC, und auf BA, AC, ihre Quadrate, GB, HC, so sind BAC, BAG, rechte Winkel, folglich (14. S.) CA, AG, in Einer geraden Linie.

Ziehe AD, FC, und
(31. S.) durch A, der
BD die AL parallel.

Da (10. Nr.) $DBC = FBA$, so ist, wenn
CBA hinzukommt,
(2. Nr.) $DBA = FBC$.
Nun ist $AB = BF$
und $DB = BC$, folg-
lich (4. S.) $\triangle ABD =$
 $\triangle FBC$. Nun ist,
weil AL der BD, und
GC der FB parallel,
(41. S.) $BL = 2 \triangle$
 ABD und $GB =$
 $2 \triangle FBC$, folglich ist

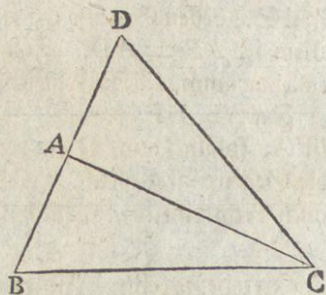
(6. Nr.) $BL = GB$. Nun ist, wenn man AE, BK, ziehet,
aus eben dem Grunde, $CL = CH$. Folglich ist (2. Nr.)
 $BDEC = GB + CH$.



Der 48. Satz.

Wenn in einem Triangel, ABC, das Quadrat einer sei-
ner Seiten, BC, den Quadraten der übrigen Seiten, BA,
AC, gleich ist: so ist der von diesen übrigen Seiten einge-
schlossene Winkel, BAC, ein rechter.

Ziehe (11. S.) auf AC aus A die
AD senkrecht. Mache $AD = AB$
und ziehe DC, so ist auch $\square AD =$
 $\square AB$, folglich, wenn $\square AC$ hin-
zukommt, (2. Nr.) $\square AD + \square AC$
 $= \square AB + \square AC$. Nun ist, weil
DAC ein rechter Winkel, (47. S.)
 $\square AD + \square AC = \square DC$, und
nach dem Angenommenen $\square AB$
 $+ \square AC = \square BC$. Folglich ist
 $\square DC = \square BC$, und daher $DC = BC$.



Da $AD = AB$, und AC gemein, auch $DC = BC$, so ist (8. S.)
 $\triangle DAC = \triangle BAC$. Nun ist $\triangle DAC$, folglich auch $\triangle BAC$ ein rechter Winkel.