Euklids Elemente

Euclides

Halle, 1781

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-9137

Drittes Buch.

Euklids Elemente

Drittes Buch.

Definitionen.

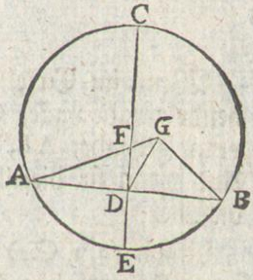
1. Cirkel sind einander gleich, wenn ihre Durchmesser, oder die vom Mittelpunkt ausgehenden Linien (Halbmesser) einander gleich sind.
2. Eine **gerade Linie berührt den Cirkel**, wenn sie den Cirkel trift, ohne verlängert ihn zu schneiden. (Sie heisse die **Tangente** des Cirkels.)
3. **Cirkel berühren einander**, wenn sie einander treffen, ohne einander zu schneiden.
4. Im **Cirkel** sind **gerade Linien gleich weit vom Mittelpunkte**, wenn die auf dieselben aus dem Mittelpunkte gefällten Perpendikel einander gleich sind,
5. diejenige aber ist **weiter**, auf welche ein grösserer Perpendikel fällt.
6. Ein **Cirkelabschnitt** (Segment) ist die Figur, welche von einer geraden Linie und dem Cirkelbogen eingeschlossen ist.
7. Der **Winkel des Cirkelabschnitts** ist der, so von gedachter geraden Linie und dem Cirkelbogen eingeschlossen ist.
8. Der **Winkel im Cirkelabschnitt** aber heißt der, welchen zwey gerade Linien einschliessen, die von einem willkührlichen Punkte des Cirkelbogens zu den Endpunkten derjenigen geraden Linie gehen, welche die Basis des Abschnitts ist.
9. Dieser **Winkel steht auf dem Cirkelbogen**, der von seinen Schenkeln abgeschnitten ist.

10. Ein Cirkelausschnitt (Sector) ist die Figur, welche von den Schenkeln des Centriwinkels und dem von ihnen abgeschnittnen Cirkelbogen eingeschlossen ist.

11. Cirkelabschnitte sind einander ähnlich, wenn sie gleiche Winkel fassen; oder, wenn die Winkel in den Abschnitten einander gleich sind.

Der 1. Satz.

Den Mittelpunkt eines gegebnen Cirkels, ABC, zu finden.



Im Cirkel ziehe willkührlich eine gerade Linie, AB, halbire sie in D und errichte auf ihr in D die DC senkrecht. Verlängre CD bis E und halbire CE in F, so ist F der gesuchte Mittelpunkt.

Wäre F nicht der Mittelpunkt, so sey es irgend ein andrer, etwa G. Ziehe GA, GD, DB, so ist, da AD=DB, und GD gemein, auch (1, 15. Def.) AG=GB, (1, 8. S.) ADG=GDB, folglich (1, 10. Def.) beyde rechte Winkel. Nun ist auch CDB ein rechter Winkel. Folglich (1, 10. Ax.) CDB=GDB, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

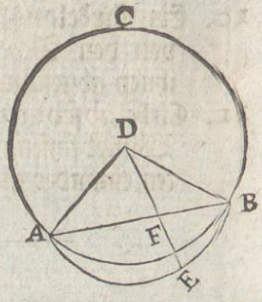
Zusatz.

Hieraus erhellet, wenn im Cirkel eine gerade Linie von einer andern gleich und senkrecht geschnitten wird, daß in der schneidenden Linie der Mittelpunkt des Cirkels sey.

Der 2. Satz.

Eine gerade Linie, welche zwey beliebige Punkte, A, B, in der Peripherie eines Cirkels, ABC, verbindet, fällt innerhalb dieses Cirkels.

Fällt diese gerade Linie nicht innerhalb des Cirkels, so falle sie ausserhalb, wie AEB. Nimm (3, 1. S.) des Cirkels Mittelpunkt D und ziehe DA, DB. Zwischen A, B, nimm in der Peripherie willkührlich einen Punkt F, ziehe DF, und verlängre sie bis E.

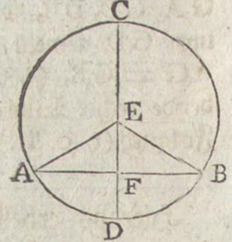


Da (1, 15. Def.) DA = DB, so ist (1, 5. S.) DAE = DBE. Nun ist (1, 16. S.) DEB > DAE. Folglich ist DEB > DBE, folglich (1, 19. S.) DB > DE. Nun ist (1, 15. Def.) DB = DF. Folglich DF > DE, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der 3. Satz.

Wenn im Cirkel, ABC, eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, CD, eine andre, nicht durch den Mittelpunkt gehende, AB, halbirt: so schneidet sie dieselbe senkrecht. Und wenn sie dieselbe senkrecht schneidet, so halbirt sie auch dieselbe.

Nimm (3, 1. S.) des Cirkels Mittelpunkt E, und ziehe EA, EB.



Erster Theil.

Wenn CD die AB in F halbirt, so ist AF = FB. Nun ist EF gemein und (1, 15. Def.) AE = EB. Folglich (1, 8. S.) AFE = EFB, folglich (1, 10. Def.) CD senkrecht auf AB.

Zweyter Theil.

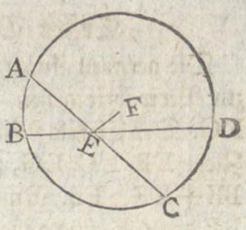
Wenn CD auf AB senkrecht, so ist (1, 10. Def.) AFE = EFB. Nun ist, weil (1, 15. Def.) AE = EB, (1, 5. S.) EAF = EBF, auch ist EF gemein. Folglich ist (1, 26. S.) AF = FB.

Der 4. Satz.

Wenn im Cirkel, ABCD, zwey gerade Linien, AC, BD, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander schneiden: so halbiren sie einander nicht.

Gesetzt,

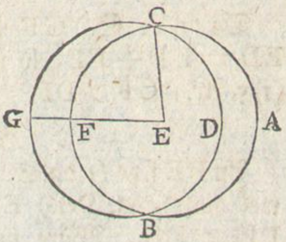
Gesetzt, sie halbirten einander, so daß AE = EC und BE = ED, so ist, wenn man des Cirkels Mittelpunkt F nimmt und FE ziehet, (3, 3. S.) FEA sowohl als FEB ein rechter Winkel, folglich FEA = FEB, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.



Der 5. Satz.

Zwey Cirkel, ABC, CDG, die einander schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

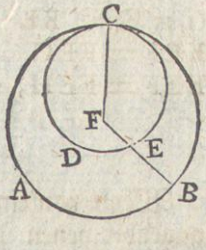
Gesetzt, sie hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt E, so ziehe EC, und willkührlich EFG, folglich ist (1, 15. Def.) beym Cirkel ABC, EC = EF, und beym Cirkel CDG, EC = EG, folglich (1, 1. Ax.) EG = EF, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.



Der 6. Satz.

Zwey Cirkel, ABC, CDE, deren einer den andern inwendig berührt, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Gesetzt, sie hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt, F, so ziehe FC und willkührlich FEB, folglich ist (1, 15. Def.) beym Cirkel ABC, FC = FB, und beym Cirkel CDE, FC = FE, folglich (1, 1. Ax.) FB = FE, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

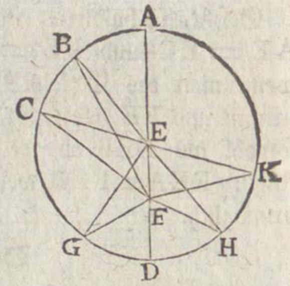


Der 7. Satz.

Wenn im Cirkel, ABCD, von einem Punkte des Durchmessers, AD, der nicht der Mittelpunkt ist, F, gerade Linien zur Peripherie gehen: so ist die mit dem Mittelpunkte, FA, die gröste, und ihr Rest, FD, die kleinste, und von den andern immer die, so der mit dem Mittelpunkte näher, grösser als die entferntere. Auch sind von diesen Linien nur je zwey an beyden Seiten der kleinsten, einander gleich.

 Erster

Erster Theil.



Die geraden Linien, welche von F zur Peripherie gehen, seyen FB, FC, FG. Des Cirkels Mittelpunkt sey E. Ziehe EB, EC, EG, so ist (1, 20. S.) BE + EF > FB. Nun ist (1, 15. Def.) BE = AE, und daher BE + EF = AE + EF. Folglich AF > FB.

Da (1, 15. Def.) BE = CE, und EF gemein, aber BEF > CEF, so ist (1, 24. S.) FB > FC und eben so FC > FG.

Da (1, 20. S.) GF + FE > EG und (1, 15. Def.) EG = ED = DF + FE, so ist GF + FE > DF + FE, folglich (1, 5. Ax.) GF > DF.

Zweyter Theil.

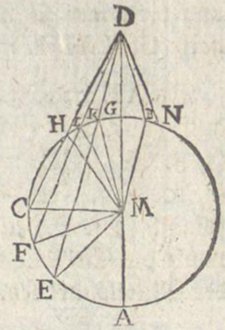
An FE setze (1, 23. S.) FEH = FEG und ziehe FH, so ist, weil auch (1, 15. Def.) EH = EG, und EF gemein, (1, 4. S.) FH = FG. Wäre nun ausser FH noch irgend eine andre, etwa FK, der FG gleich, so wäre auch FK = FH, welches unmöglich, da nach obigen die der AF nähere, FK, grösser ist als die entferntere, FH.

Oder: wäre FK = FG, so ziehe EK. Nun ist auch (1, 15. Def.) KE = EG und EF gemein; folglich (1, 8. S.) KEF = FEG. Nun war FEG = FEH. Folglich wäre KEF = FEH, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der 8. Satz.

Wenn von einem ausserhalb eines Cirkels, ABC, beliebig angenommenen Punkte, D, gerade Linien zum Cirkel und zwar eine, DA, durch den Mittelpunkt, M, die andern willkührlich, gehen: so ist unter denjenigen, welche die concave Peripherie treffen, DA, DE, DF, DC, die, so durch den Mittelpunkt gehet, DA, die gröste, und immer die, so ihr näher, grösser als die entferntere; unter denjenigen aber, welche die convexe Peripherie treffen, DG, DK, DL, DH, die, so zwischen dem angenommenen Punkte und dem Durchmesser, DG, die kleinste, und immer jede, so ihr näher, grösser als die entfern=

entferntere. Auch sind von diesen Linien nur je zwey an beyden Seiten der kleinsten einander gleich.



Erster Theil.

Ziehe ME, MF, MC, so ist (1, 20. S.) DM + ME > DE. Nun ist (1, 15. Def.) ME = MA. Folglich ist DM + MA, das ist, DA > DE.

Da (1, 15. Def.) ME = MF, und MD, gemein, aber DME > DMF, so ist (1, 24. S.) DE > DF. Und eben so DF > DC.

Zweyter Theil.

Ziehe MK, ML, MH, so ist (1, 20. S.) MK + KD > MD, das ist, > MG + GD. Nun ist (1, 15. Def.) MK = MG. Folglich ist MG + KD > MG + GD, folglich (1, 3. Ax.) KD > GD, das ist, DG < DK.

Da in den Triangeln MLD, MKD, (1, 21. S.) MK + KD < ML + LD, aber (1, 15. Def.) MK = ML, so ist (1, 3. Ax.) DK < DL. Und eben so DL < DH.

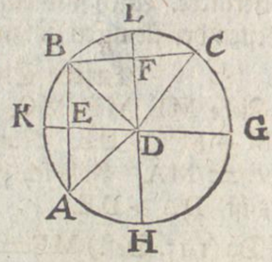
Dritter Theil.

An DM setze (1, 23. S.) DMB = DMK, und ziehe DB, so ist, weil (1, 15. Def.) MB = MK, auch MD gemein, (1, 4. S.) DB = DK. Wäre nun ausser DB noch irgend eine andre, etwa DN, der DK gleich, so wäre auch (1, 1. Ax.) DN = DB, welches unmöglich, da nach obigen die der DG nähere, DB, kleiner als die entferntere, DN.

Oder: wäre DN = DK, so ziehe MN. Nun ist auch MN = MK und MD gemein, folglich (1, 8. S.) DMK = DMN. Nun war DMK = DMB. Folglich wäre DMN = DMB, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

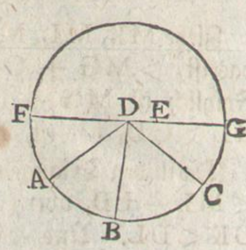
Der 9. Satz.

Wenn von einem innerhalb eines Cirkels, ABC, angenommnen Punkte, D, mehr als zwey gleiche gerade Linien, DA, DB, DC, zur Peripherie gehen; so ist solcher Punkt der Mittelpunkt des Cirkels.



Ziehe AB, BC, und halbire sie (1, 10. S.) in E, F. Ziehe ED, DF, und verlängre sie an beyden Seiten nach G, K, H, L.

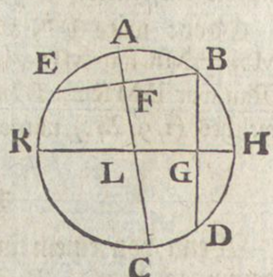
Da AE = EB, und ED gemein, auch (1, 15. Def.) AD = DB, so ist (1, 8. S.) AED = BED, folglich (1, 10. Def.) bey E rechte Winkel, folglich (3, 1. S.) in KG der Mittelpunkt des Cirkels. Nun wird eben so bewiesen, daß auch in HL der Mittelpunkt sey. Folglich muß D solcher Mittelpunkt seyn.



Ein andrer Beweis. Wäre D nicht der Mittelpunkt, so sey es irgend ein andrer, etwa E. Ziehe DE, und verlängre sie an beyden Seiten nach F, G, so ist FG des Cirkels Durchmesser, folglich (3, 8. S.) wäre DC > DB, DB > DA, welches gegen das Angenommene DC = DB = DA.

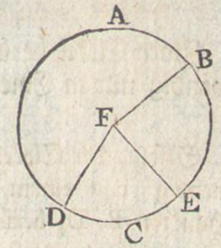
Der 10. Satz.

Ein Cirkel schneidet einen andern, ABC, nicht in mehr als zweyen Punkten.



Gesetzt er schnitte ihn in dreyen Punkten, D, B, E, so ziehe EB, BD, und halbire sie in F, G. Auf EB, BD, errichte in F, G, die FC, GK, senkrecht und verlängre sie bis A, H, so ist (3, 1. S.) L des andern Cirkels ABC Mittelpunkt. Nun wird eben so bewiesen, daß L auch des ersten Cirkels Mittelpunkt sey, welches (3, 5. S.) unmöglich.

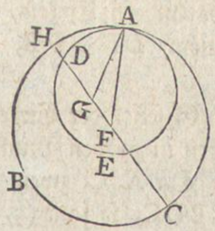
Ein andrer Beweis. Schnitte der erste Cirkel den andern ABC, in dreyen Punkten, B, E, D, so nimm (3, 1. S.) des Cirkels ABC Mittelpunkt F, und ziehe FD, FE, FB, welche (1, 15. Def.) einander gleich sind; folglich wäre (3, 9. S.) F auch des ersten Cirkels Mittelpunkt, welches (3, 5. S.) unmöglich.



Der 11. Satz.

Wenn ein Cirkel ADE, einen andern, ABC, inwendig berührt: so trift die gerade Linie, welche die beyderseitigen Mittelpunkte verbindet, genugsam verlängert, den Berührungspunkt der Cirkel, A.

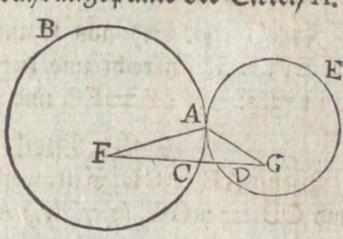
Nimm (3, 1. S.) des Cirkels ABC Mittelpunkt, F, und ziehe AF. Wäre nun in AF, welche man nach Belieben verlängern kann, nicht auch des Cirkels ADE Mittelpunkt, so sey er irgendwo ausser AF, etwa in G. Ziehe GF und verlängre sie an beyden Seiten nach C, H. Ziehe AG, so ist (1, 20. S.) $AG + GF > AF$. Nun ist (1, 15. Def.) $AF = FH = HG + GF$. Folglich ist $AG + GF > HG + GF$, folglich (1, 5. Ax.) $AG > HG$. Nun war des Cirkels ADE Mittelpunkt G und daher (1, 15. Def.) $AG = DG$. Folglich wäre $DG > HG$, welches (1, 9. Ax.) unmöglich ist.



Der 12. Satz.

Wenn zwey Cirkel, ABC, ADE, einander auswendig berühren: so geht die gerade Linie, welche die beyderseitigen Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt der Cirkel, A.

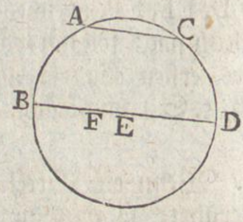
Gienge sie anderwärts durch, etwa wie FCDG, so daß F, G, die beyderseitigen Mittelpunkte wären, so ziehe AF, AG. Folglich ist (1, 15. Def.) $AF = FC$ und $AG = GD$, folglich $AF + AG = FC + GD$, folglich $AF + AG < FG$, da doch (1, 20. S.) $AF + AG > FG$.



Der 13. Satz.

Zwey Cirkel berühren einander sowohl inwendig als auswendig nur in Einem Punkte.

Erster Theil.



Gesetzt, der Cirkel ABDC, würde inwendig von einem andern in zweyen Punkten B, D, berührt, so sey E der Mittelpunkt des ersten und F der Mittelpunkt des andern Cirkels. Ziehe EF, so trift (3, 11. S.) dieselbe verlängert die Berührungspunkte B, D.

Da E der Mittelpunkt des ersten Cirkels, so ist (1, 15. Def.) DE = EB, folglich DF > FB. Nun ist F der Mittelpunkt des andern Cirkels, folglich (1, 15. Def.) DF = FB; welches jenem, DF > FB, offenbar wiederspricht.

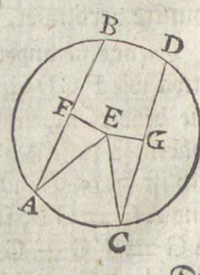
Zweyter Theil.

Gesetzt, der Cirkel ABDC, würde auswendig von einem andern in zweyen Punkten, A, C, berührt, so ziehe AC.

Da A, C, zwey Punkte in der Peripherie des ersten Cirkels ABDC, so fällt (3, 2. S.) AC innerhalb dieses Cirkels, folglich (3, 3. Def.) ausserhalb des andern Cirkels. Nun sind A, C, zwey Punkte in der Peripherie des andern Cirkels, folglich fällt (3, 2. S.) AC innerhalb des andern Cirkels; welches dem Obigen offenbar wiederspricht.

Der 14. Satz.

Wenn im Cirkel, ABDC, gerade Linien, AB, CD, einander gleich sind: so liegen sie gleich weit vom Mittelpunkte, E. Und wenn sie gleich weit vom Mittelpunkte, E, liegen, so sind sie einander gleich.



Fälle (1, 12. S.) aus E auf AB, CD, die EF, EG, senkrecht und ziehe AE, EC, so ist (3, 3. S.) AF = FB, und CG = GD.

Erster Theil.

Wenn AB = CD, so ist, weil AB = 2 AF und CD = 2 CG, (1, 7. Ax.) AF = CG.

Da

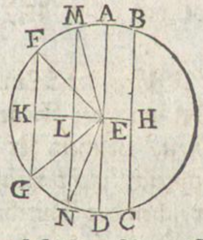
Da E des Cirkels Mittelpunkt, so ist (1, 15. Def.) AE = EC und daher □AE = □EC. Nun ist, weil bey F, G, rechte Winkel, (1, 47. S.) □AE = □AF + □EF und □EC = □CG + □EG. Folglich ist □AF + □EF = □CG + □EG, folglich, weil AF = CG, (1, 3. Ax.) □EF = □EG und daher EF = EG, folglich (3, 4. Def.) liegen AB, CD, gleich weit vom Mittelpunkte, E.

Zweyter Theil.

Wenn AB, CD, gleich weit vom Mittelpunkte E, liegen, das ist, (3, 4. Def.) wenn EF = EG, so ist, weil wie vorher □AF + □EF = □CG + □EG, (1, 3. Ax.) □AF = □CG, und daher AF = CG. Nun ist wie vorher AB = 2 AF und CD = 2 CG. Folglich ist (1, 6. Ax.) AB = CD.

Der 15. Satz.

Im Cirkel, ABCD, ist der Durchmesser, AD, die gröste Linie, und unter den übrigen jede dem Mittelpunkt, E, nähere, BC, grösser als die entferntere, FG.



Ziehe (1, 12. S.) aus E auf BC, FG, die EH, EK, senkrecht, so ist (3, 5. Def.) EK > EH. Mache daher (1, 3. S.) EL = EH. Errichte (1, 11. S.) auf EK in L die LM senkrecht und verlängre sie bis N. Ziehe EM, EN, EF, EG.

Da EH = EL, so ist (3, 14. S.) BC = MN. Nun ist (1, 20. S.) ME + EN > MN. Folglich ist ME + EN > BC. Nun ist (1, 15. Def.) ME + EN = AD. Folglich ist AD > BC.

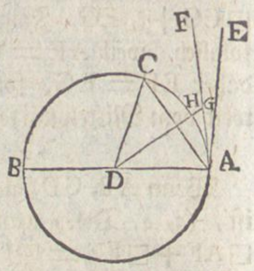
Da (1, 15. Def.) ME = FE und EN = EG, aber MEN > FEG, so ist (1, 24. S.) MN > FG. Nun war MN = BC. Folglich ist BC > FG.

Der 16. Satz.

Ein auf eines Cirkels, ABC, Durchmesser, BA, in dessen Endpunkte, A, aufgerichteter Perpendikel, AE, fällt ausserhalb des Cirkels. Ferner, zwischen den Cirkelbogen CHA und den Perpendikel, EA, fällt keine andre gerade Linie. Desgleichen

gleichen der Winkel des Halbcirkels, CHAB, ist grösser, sein Rest, CHAE, aber kleiner, als jeder geradlinicher spitzer Winkel.

Erster Theil.



Fiel der Perpendikel nicht ausserhalb des Cirkels, so falle er, wenns möglich, innerhalb, wie AC, so daß also DAC ein rechter Winkel wäre. Ziehe DC, so ist, weil (1, 15. Def.) DC = DA, (1, 5. S.) DCA = DAC, folglich beyde Winkel rechte, welches (1, 17. S.) unmöglich.

Zweyter Theil.

Fiele zwischen den Bogen CHA und dem Perpendikel, AE, eine gerade Linie, wie FA, so ziehe (1, 12. S.) auf FA aus D den Perpendikel DG, so ist, weil DGA ein rechter Winkel, (1, 17. S.) DGA > DAG, folglich (1, 19. S.) DA > DG. Nun ist (1, 15. Def.) DA = DH, folglich wäre DH > DG, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Dritter Theil.

Wäre der Winkel des Halbcirkels, welchen der Durchmesser BA und der Bogen CHA einschließt, nicht grösser, und sein Rest, welchen der Bogen CHA und der Perpendikel AE einschließt, nicht kleiner als irgend ein geradlinicher spitzer Winkel, welchen der Durchmesser BA und eine gerade Linie einschlösse, so müste diese gerade Linie, zwischen den Bogen CHA und den Perpendikel, AE, fallen, wie FA, welches nach Obigen unmöglich.

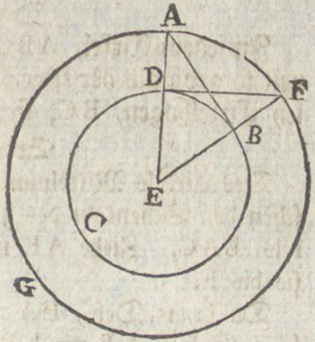
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß ein auf dem Durchmesser in dessen Endpunkte errichteter Perpendikel, den Cirkel berührt, und daß eine gerade Linie den Cirkel nur in Einem Punkte berührt; indem die gerade Linie, welche zwey Punkte in der Peripherie verbindet, (3, 2. S.) innerhalb des Cirkels fällt.

Der 17. Satz.

Aus einem gegebnen Punkte, A, eine gerade Linie die einen gegebnen Cirkel, BCD, berührt, zu ziehen.

Nimm

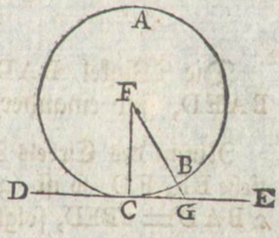


Nimm (3, 1. S.) des Cirkels Mittelpunkt, E, ziehe EA und beschreibe aus E, mit EA den Cirkel AFG. Errichte (1, 11. S.) auf EA in D die DF senkrecht. Ziehe EBF und AB, so ist AB die verlangte Linie.

In den Triangeln, ABE, FDE, ist (1, 15. Def.) $EA = EF$, und $EB = ED$, auch der Winkel AEF gemein, folglich (1, 4. S.) $EBA = EDF$. Nun ist EDF, folglich auch EBA ein rechter Winkel, das ist, AB senkrecht auf EB. Folglich (3, 16. Zus.) AB eine Tangente des Cirkels, BCD.

Der 18. Satz.

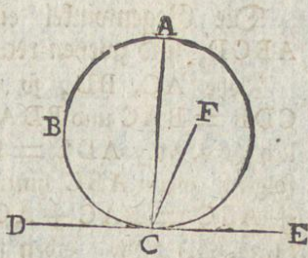
Auf der Tangente, DE, eines Cirkels, ABC, stehet die gerade Linie vom Mittelpunkte, F, zum Berührungspunkte, C, senkrecht.



Wäre FC nicht senkrecht auf DE, so sey es eine andre, etwa FG, und daher FGC ein rechter Winkel, folglich (1, 17. S.) $FCG < FGC$, folglich (1, 19. S.) $FC > FG$. Nun ist (1, 15. Def.) $FC = FB$. Folglich wäre $FB > FG$, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der 19. Satz.

Ist auf der Tangente, DE, eines Cirkels, ABC, im Berührungspunkte, C, eine gerade Linie, AC, senkrecht: so ist in ihr des Cirkels Mittelpunkt.



Wäre der Mittelpunkt nicht in AC, so sey er ausser ihr irgendwo, etwa in F. Ziehe FC, welche (3, 18. S.) auf DE senkrecht; daher FCE ein rechter Winkel. Nun war auch ACE ein rechter Winkel. Folglich wäre $ACE = FCE$, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der

Der 20. Satz.

In jedem Cirkel, ABC, ist der Centriwinkel, BEC, doppelt so groß als der Peripheriewinkel, wenn beyde auf einerley Cirkelbogen, BC, stehen.

Erster Fall.

Des Cirkels Mittelpunkt E, sey zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels, BAC. Ziehe AE und verlängre sie bis F.

Da (1, 15. Def.) EA = EB, so ist (1, 5. S.) EAB = EBA, folglich (1, 32. S.) BEF = 2 EAB. Eben so ist FEC = 2 EAC, folglich BEC = 2 BAC.

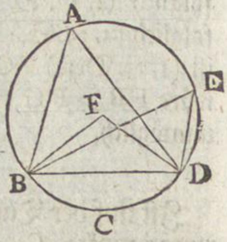
Zweyter Fall.

Der Mittelpunkt, E, sey ausserhalb der Schenkel des Peripheriewinkels, BDC. Ziehe DE und verlängre sie bis G, so wird auf eben die Art bewiesen, daß GEC = 2 GDC und GEB = 2 GDB, folglich (1, 3. Ax.) BEC = 2 BDC.

Der 21. Satz.

Die Winkel, BAD, BED, in einerley Cirkelabschnitte, BAED, sind einander gleich.

Nimm des Cirkels Mittelpunkt F und ziehe BF, FD, so ist (3, 20. S.) BFD = 2 BAD = 2 BED, folglich BAD = BED.



Der 22. Satz.

Die Gegenwinkel einer vierseitigen Figur im Cirkel, ABCD, sind zweyen rechten gleich.

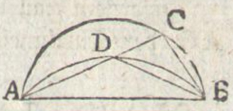
Ziehe AC, BD, so ist (3, 21. S.) CDB = BAC und BDA = ACB, folglich (1, 2. Ax.) ADC = BAC + ACB, folglich, wenn ABC hinzukommt, ADC + ABC = BAC + ACB + ABC = (1, 32. S.) 2 R. Eben so wird dies von BAD, DCB, bewiesen.

Der

Der 23. Satz.

Auf Einer geraden Linie, AB, können nicht zwey Cirkelabschnitte, die änlich und ungleich sind, an einerley Seite beschrieben werden.

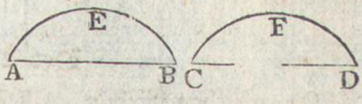
Wäre dies möglich, so seyen die Cirkelabschnitte, ACB, ADB, ungleich und änlich. Ziehe willkührlich AD, und verlängre sie bis C. Ziehe CB, DB, so ist, weil die Abschnitte änlich, (3, 11. Def.) ADB = ACB, welches (1, 16. S.) unmöglich.



Der 24. Satz.

Aenliche Cirkelabschnitte, AEB, CFD, über gleichen geraden Linien, AB, CD, sind einander gleich.

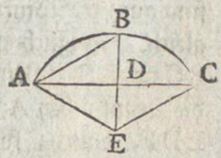
Bringe AEB über CFD und lege A auf C und AB auf CD, so fällt, (weil AB = CD) B auf D. Nun sind die Abschnitte AEB, CFD, über CD, änlich, folglich (3, 23. S.) können sie nicht ungleich seyn.



Der 25. Satz.

Einen Cirkel, dessen Abschnitt, ABC, gegeben ist, zu beschreiben.

Halbire (1, 10. S.) AC in D, und ziehe (1, 11. S.) auf AC in D die DB senkrecht. Ziehe AB, so ist ABD entweder grösser, oder eben so groß, oder kleiner als BAD.



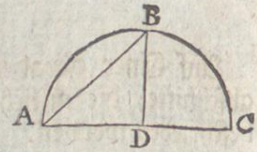
Erster Fall.

Ist ABD > BAD, so setze an BA (1, 23. S.) BAE = ABD, und verlängre BD bis E. Folglich ist (1, 6. S.) BE = EA. Nun ist, weil AD = DC, und DE gemein, auch bey D rechte Winkel, (1, 4. S.) AE = EC. Folglich ist (3, 9. S.) E der Mittelpunkt des Cirkels ABC.

In diesem Fall ist also das Segment ABC, kleiner als ein Halbcirkel, weil das Centrum E ausserhalb des Segments liegt.

Zweyter

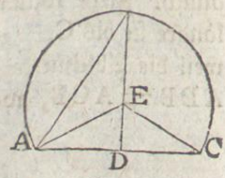
Zweyter Fall.



Ist ABD = BAD, so ist (1, 6. S.) AD = DB. Nun ist auch AD = DC. Folglich (3, 9. S.) D der Mittelpunkt des Cirkels ABC.

In diesem Fall ist das Segment ABC ein Halbcirkel, weil AC, der Durchmesser.

Dritter Fall.

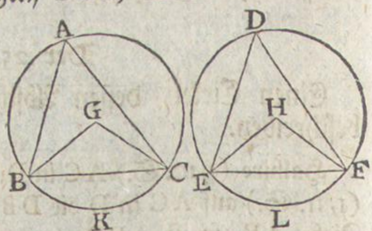


Ist ABD < BAD, so setze an BA (1, 23. S.) BAE = ABD und ziehe EC, so wird auf gleiche Art bewiesen, daß AE = EB = EC, und daher E der Mittelpunkt des Cirkels, ABC, sey.

In diesem Fall ist das Segment, ABC, grösser als ein Halbcirkel, weil das Centrum innerhalb des Segments liegt.

Der 26. Satz.

In gleichen Cirkeln, ABC, DEF, stehen gleiche Winkel, es seyen Centri= oder Peripheriewinkel, BGC, EHF; BAC, EDF, auch auf gleichen Bogen, BKC, ELF.

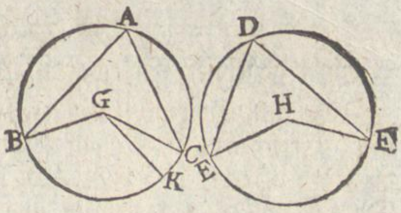


Ziehe BC, EF, so sind, weil die Cirkel gleich, (3, 1. Def.) auch ihre Halbmesser, BG, GC, EH, HF, gleich. Nun sind auch die Winkel bey G, H, gleich. Folglich ist (1, 4. S.) BC = EF. Nun sind, weil die Winkel bey A, D, gleich, (3, 11. Def.) die Segmente BAC, EDF, änlich; folglich (3, 24. S.) auch gleich. Nun sind die ganzen Cirkel gleich; folglich auch die übrigen Segmente BKC, ELF, folglich auch die Bogen BKC, ELF.

Der 27. Satz.

In gleichen Cirkeln, ABC, DEF, sind Winkel, die auf gleichen Bogen, BC, EF, stehen, es seyen Centri= oder Peripheriewinkel, BGC, EHF; BAC, EDF, einander gleich.

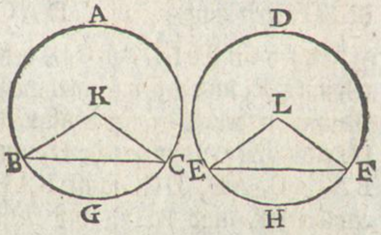
Sind



Sind BGC, EHF, gleich, so sind (3, 20. S.) auch BAC, EDF, gleich. Wären aber BGC, EHF, ungleich, so wäre einer davon, etwa BGC, grösser. Es sey daher BGK = EHF, folglich ist (3, 26. S.) BK = EF. Nun ist angenommen BC = EF. Folglich wäre BC = BK, welches (1, 9. Ax.) unmöglich.

Der 28. Satz.

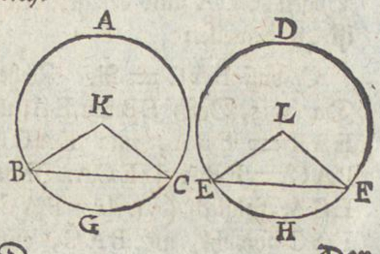
In gleichen Cirkeln, ABC, DEF, sind die von gleichen geraden Linien, BC, EF, abgeschnittnen Bogen einander gleich; der grössre, BAC, nämlich dem grössern, EDF, und der kleinere, BGC, dem kleinern, EHF.



Nimm der Cirkel Mittelpunkte, K, L, und ziehe die Halbmesser BK, KC, EL, LF, welche, da die Cirkel gleich, (3, 1. Def.) auch gleich sind. Nun ist auch BC = EF, folglich (1, 8. S.) die Winkel bey K, L, gleich, folglich (3, 26. S.) auch die Bogen BGC, EHF, folglich, weil die Cirkel gleich, auch die Bogen BAC, EDF.

Der 29. Satz.

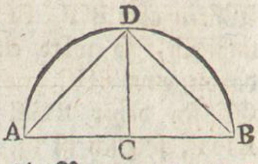
In gleichen Cirkeln, ABC, DEF, sind die geraden Linien, BC, EF, von denen gleiche Bogen, BGC, EHF, abgeschnitten werden, einander gleich.



Nimm die Mittelpunkte K, L, und ziehe die Halbmesser BK, KC, EL, LF, welche (3, 1. Def.) gleich sind. Nun sind, weil BGC = EHF, (3, 27. S.) auch die Winkel bey K, L, gleich. Folglich ist (1, 4. S.) BC = EF.

Der 30. Satz.

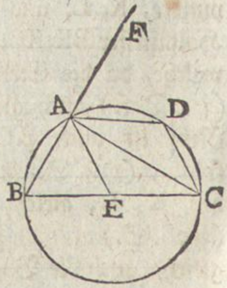
Einen gegebnen Cirkelbogen, ADB, zu halbiren.



Ziehe AB, und halbire sie (1, 10. S.) in C. Errichte (1, 11. S.) auf AB in C die CD senkrecht, und ziehe AD, DB. Da AC = CB, CD gemein, und bey C rechte Winkel, so ist (1, 4. S.) AD = DB, folglich (3, 28. S.) auch die Bogen AD, DB, einander gleich.

Der 31. Satz.

Der Winkel im Halbcirkel, BAC, ist ein rechter; aber der im grössern Abschnitt, ABC, kleiner als ein rechter, und der im kleinern Abschnitt, ADC, grösser als ein rechter. Auch ist der Winkel des grössern Abschnitts, CBAC, grösser, des kleinern Abschnitts, CDAC, aber kleiner, als ein rechter.



Es sey ein Cirkel, ABCD, dessen Mittelpunkt, E, und dessen Durchmesser, BC. Nimm in der Peripherie über BC willkührlich zwey Punkte A, D, und ziehe BA, AC, AD, DC, so ist BADC, ein Halbcirkel, und BAC, der Winkel im Halbcirkel; der Abschnitt CABC, grösser als ein Halbcirkel, und der Winkel im grössern Abschnitt, ABC; der Abschnitt CADC, kleiner als ein Halbcirkel, und der Winkel im kleinern Abschnitte, ADC. Der Winkel des grössern Abschnitts wird von dem Bogen CBA und der geraden Linie AC eingeschlossen; und der Winkel des kleinern Abschnitts, wird von dem Bogen CDA und der geraden Linie AC eingeschlossen. Nun ist zu beweisen

1.) daß BAC = R. Ziehe EA, und verlängre BA nach F. Da (1, 15. Def.) EB = EA, und EA = EC, so ist (1, 5. S.) EAB = EBA, und EAC = ECA, folglich (1, 2. Ar.) BAC = EBA + ECA. Nun ist (1, 32. S.) FAC = EBA + ECA, folglich (1, 1. Ar.) BAC = FAC, folglich (1, 10. Def.) FAC sowohl, als BAC, ein rechter Winkel. Oder: Da (1, 32. S.)

(1, 32. S.) AEC = 2 BAE, und AEB = 2 EAC, so ist AEC + AEB = 2 BAC. Nun ist (1, 13. S.) AEC + AEB = 2 R, folglich 2 BAC = 2 R, folglich BAC = R.

2.) daß ABC < R. Da im △ ABC (1, 32. S.) ABC + BAC < 2 R, aber BAC = R, so ist ABC < R.

3.) daß ADC > R. Da in der vierseitigen Figur ABCD, (3, 22. S.) ABC + ADC = 2 R, aber ABC < R, so ist ADC > R.

4.) daß der Winkel CBAC > R. Denn er ist offenbar grösser, als der rechte Winkel BAC.

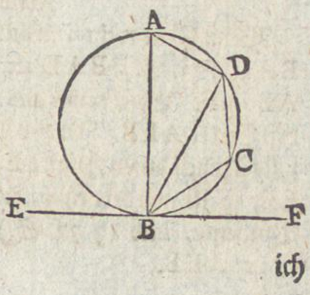
5.) daß der Winkel CDAC < R. Denn er ist offenbar kleiner, als der rechte Winkel FAC.

Zusatz.

Hieraus erhellet, wenn in einem Triangel ein Winkel den beyden übrigen zusammen gleich, daß er alsdenn ein rechter sey, weil sein Nebenwinkel diesen beyden übrigen, und daher ihm selbst gleich, folglich (1, 10. Def.) jeder der beyden Nebenwinkel ein rechter ist.

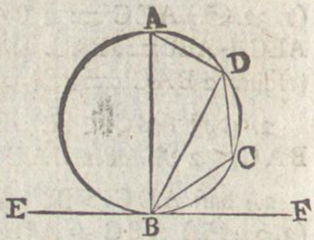
Der 32. Satz.

Wenn ein Cirkel, ABCD, von einer geraden Linie, EF, berührt wird, und vom Berührungspunkte B zur Peripherie eine gerade Linie, BD, geht, die den Cirkel schneidet: so sind die Winkel, welche sie mit der berührenden Linie macht, FBD, EBD, den Winkeln in den verwechselten Cirkelabschnitten gleich. (Der disseitige Winkel, FBD, nämlich dem im jenseitigen Abschnitte, und der jenseitige Winkel, EBD, dem im disseitigen Abschnitte.)



Errichte (1, 11. S.) auf EF in B die BA senkrecht. Im Bogen BD nimm willkührlich einen Punkt C, und ziehe AD, DC, CB.

Da (3, 19. S.) in BA, welche auf der Tangente EF in B senkrecht, der Mittelpunkt des Cirkels ist, folglich BA der Durchmesser, so ist (3, 31. S.) ADB ein rechter Winkel, folglich ADB = ABF, und (1, 32. S.) ADB = DAB + ABD, folglich DAB + ABD = ABF, folglich, wenn man ABD wegnimmt, (1, 3. Ax.) DAB = FBD.



Da (1, 13. S.) FBD + EBD = 2 R, und in der vierseitigen Figur, ABCD, (3, 22. S.) DAB + DCB = 2 R, so ist DAB + DCB = FBD + EBD. Nun war DAB = FBD, folglich ist (1, 3. Ax.) DCB = EBD.

Der 33. Satz.

Auf einer gegebnen geraden Linie, AB, ein Cirkelsegment zu beschreiben, welches einen gegebnen geradlinichen Winkel, C, faßt.

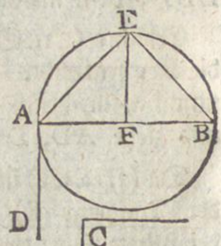
Erster Fall.

Wenn C ein spitzer Winkel ist. Setze an BA, (1, 23. S.) BAD = C. Errichte auf DA (1, 11. S.) die AE senkrecht und halbire (1, 10. S.) AB in F. Errichte auf AB in F (1, 11. S.) die FG senkrecht, und ziehe GB, so ist, weil AF = FB, FG gemein, und bey F rechte Winkel, (1, 4. S.) AG = GB. Beschreibe aus G, mit GA, GB, den Cirkel ABE, und ziehe BE.

Da DA auf dem Durchmesser AE senkrecht, so berührt sie (3, 16. S.) den Cirkel in A, folglich ist (3, 32. S.) BAD = AEB. Nun ist BAD = C. Folglich ist AEB = C.

Zweyter Fall.

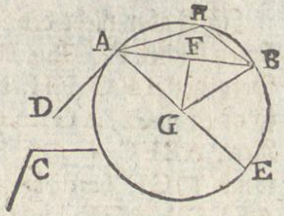
Wenn C ein rechter Winkel ist. Setze an BA (1, 23. S.) BAD = C, und halbire AB in F. Beschreibe aus F mit FA, FB, den Cirkel AEB. In der Peripherie nimm willkührlich einen Punkt E, und ziehe AE, EB, so ist wiederum (3, 16. S.) DA eine Tangente, und (3, 32. S.) BAD, das ist, C, = AEB.



Dritter

Dritter Fall.

Wenn C ein ſtumpfer Winkel iſt. An BA ſetze (1, 23. S.) BAD = C. Auf DA errichte (1, 11. S.) die AE ſenkrecht. Halbire AB in F, und errichte auf ihr die FG ſenkrecht. Ziehe GB, ſo iſt, weil AF = FB, FG gemein, und bey F rechte Winkel, (1, 4. S.) AG = GB. Aus G beſchreibe mit GA, GB, den Cirkel AEB. Nimm in dem Bogen AB willkührlich den Punkt H, und ziehe AH, HB.

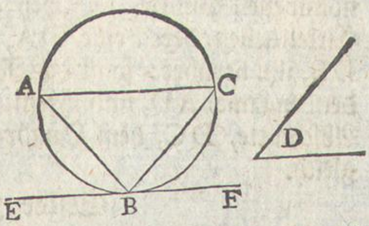


Da DA auf dem Durchmeſſer AE ſenkrecht, ſo iſt ſie (3, 16. S.) eine Tangente, folglich iſt (3, 32. S.) BAD, das iſt, C, = AHB.

Der 34. Satz.

Von einem gegebnen Cirkel, ABC, ein Segment abzuſchneiden, welches einen gegebnen geradlinichen Winkel, D, faßt.

Ziehe (3, 17. S.) die Tangente EBF. An FB ſetze in B (1, 23. S.) FBC = D. In der Peripherie nimm jenſeits willkührlich den Punkt A, und ziehe AB, AC.



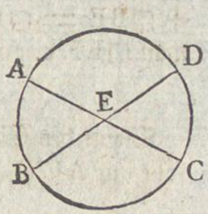
Da EF eine Tangente, ſo iſt (3, 32. S.) FBC, das iſt, D = BAC.

Der 35. Satz.

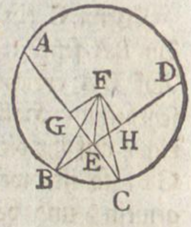
Wenn im Cirkel, ABCD, zwey gerade Linien, AC, BD, einander ſchneiden: ſo iſt das Rectangel aus den Abſchnitten der einen, AE, EC, dem Rectangel aus den Abſchnitten der andern, BE, ED, gleich.

Erſter Fall.

Iſt E, wo ſich die beyden Linien ſchneiden, der Mittelpunkt des Cirkels, ſo ſind die Abſchnitte (1, 15. Def.) einander gleich, und daher offenbar Rect. AEEC = Rect. BEED.



Zweyter Fall.

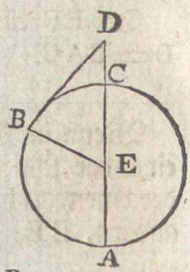


Ist E aber nicht der Mittelpunkt des Cirkels, so sey solcher F. Aus F fälle auf AC, BD, die Perpendikel FG, FH, und ziehe FB, FC, FE, so ist (3, 3. S.) AG = GC, folglich (2, 5. S.) Rect. AEEC + □GE = □GC, folglich, wenn □GF hinzukömmt, (1, 2. Ax.) Rect. AEEC + □GE + □GF = □GC + □GF. Nun ist, weil bey G rechte Winkel, (1, 47. S.) □GE + □GF = □FE, und □GC + □GF = □FC. Folglich ist Rect. AEEC + □FE = □FC. Nun wird eben so bewiesen, daß Rect. DEEB + □FE = □FC. Folglich ist Rect. AEEC + □FE = Rect. DEEB + □FE, folglich, wenn man □FE wegnimmt, Rect. AEEC = Rect. DEEB.

Der 36. Satz.

Wenn von einem ausserhalb eines Cirkels, ABC, angenommenen Punkte, D, zwey gerade Linien, DA, DB, zum Cirkel gehen, deren eine, DA, den Cirkel schneidet, die andre, DB, ihn berührt: so ist das Rectangel aus der ganzen schneidenden Linie, AD, und ihrem ausserhalb des Cirkels liegenden Abschnitte, DC, dem Quadrat der berührenden Linie, DB, gleich.

Erster Fall.

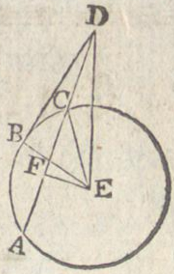


Wenn des Cirkels Mittelpunkt, E, in DA ist. Ziehe EB, so ist (1, 15. Def.) BE = EA = EC, und (3, 18. S.) EBD ein rechter Winkel, auch daher (1, 47. S.) □ED = □DB + □BE. Nun ist (2, 6. S.) Rect. ADDC + □CE = □ED, oder (weil CE = BE) Rect. ADDC + □BE = □ED. Folglich ist Rect. ADDC + □BE = □DB + □BE, folglich, wenn man □BE wegnimmt, Rect. ADDC = □DB.

Zweyter Fall.

Wenn des Cirkels Mittelpunkt E, nicht in DA ist. Aus E fälle auf AC (1, 12. S.) den Perpendikel, EF, so ist (3, 3. S.) AC

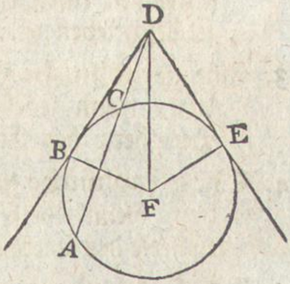
in



in F halbirt. Ziehe EB, EC, ED, so ist (2, 6. S.) Rect. ADDC + □FC = □FD, folglich (1, 2. Ar.) Rect. ADDC + □FC + □FE = □FD + □FE. Nun ist, weil bey F rechte Winkel, (1, 47. S.) □FC + □FE = □EC = (1, 15. Def.) □EB, und □FD + □FE = □DE = (1, 47. S.) □DB + □EB. Folglich ist Rect. ADDC + □EB = □DB + □EB, folglich, wenn man □EB wegnimmt, Rect. ADDC = □DB.

Der 37. Satz.

Wenn von einem ausserhalb eines Cirkels, ABC, angenommnen Punkte, D, zwey gerade Linien, DA, DB, zum Cirkel gehen, deren eine, DA, den Cirkel schneidet, die andre, DB, ihn trift; und es ist das Rectangel aus der ganzen schneidenden Linie, AD, und ihrem ausserhalb des Cirkels liegenden Abschnitte, DC, dem Quadrat der treffenden Linie, DB, gleich: so berührt die treffende Linie den Cirkel.



Ziehe (3, 17. S.) die Tangente DE. Nimm (3, 1. S.) den Mittelpunkt, F, und ziehe FE, FB, FD.

Da DE den Cirkel berührt und DA ihn schneidet, so ist (3, 36. S.) Rect. ADDC = □DE. Nun ist angenommen, Rect. ADDC = □DB, folglich ist □DB = □DE und daher DB = DE. Nun ist auch (1, 15. Def.) FB = FE, auch FD gemein. Folglich (1, 8. S.) FBD = FED. Nun ist FED ein rechter Winkel, folglich auch FBD, folglich BD auf FB senkrecht, folglich (3, 16. S.) BD eine Tangente.

Eben so wird auch der Beweis geführt, wenn des Cirkels Mittelpunkt, F, in DA, ist.