Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie

Wolf, Rudolf

Zürich, 1895

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-9174

Die Geometrie.

Die Geometrie.

Schaffen und Streben ist Gottes Gebot. —
Arbeit ist Leben, Nichtsthun der Tod.
(Venedey.)

IX. Geometrische Vorbegriffe.

73 [54]. **Der Ort.** Ein Ding ohne endliche Grösse, an dem einzig der Begriff der Lage haftet, heisst **Punkt.** Verändert Letzterer seine Lage, so heisst man ihn in **Bewegung,** verbindet damit den Begriff der **Richtung**, und fasst eine Folge von Lagen als **Ort** zusammen, denselben als **gerade** oder **krumme Linie** bezeichnend, je nachdem der Punkt seine Richtung fortwährend beibehält oder fortwährend ändert, und es liegt im Begriffe der Richtung, dass von einem Punkte zu einem andern nur Eine Gerade, die kürzeste Verbindung, führt. Den Ort einer sich bewegenden Linie nennt man **Fläche,** — eine durchweg gerade Fläche **Ebene.**

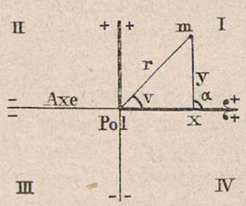
74 [54]. **Die fortschreitende Bewegung.** Wenn sich ein Punkt beständig in gleichem Sinne in einer Geraden bewegt, so nennt man ihn **fortschreitend,** und die Grösse des Fortschrittes **Länge.** Die Längeneinheit ist ihrer Natur nach willkürlich, und darum in jedem Lande und für jeden Zweck gesetzlich festgestellt. [Vgl. Tab. I.].

75 [54]. **Die drehende Bewegung.** Bewegt sich eine Gerade um einen Punkt, so heisst man sie

drehend, und die auf die Ebene der Endlagen, der sog. **Schenkel**, bezügliche Grösse der Drehung **Winkel**, den Drehpunkt **Scheitel**, den Ort der Geraden **Strahlenbüschel.** Die Winkeleinheit ist die **Umdrehung**, welche in 2 **Gerade**, 4 **Rechte** (4 R) und 360 **Grade** à 60 **Minuten** à 60 **Sekunden** eingeteilt wird. Ist $\alpha < 90^0$, so heissen die Winkel α, $90^0 + \alpha$, $90^0 \pm \alpha$ und $270^0 \pm \alpha$ der Reihe nach **spitz, stumpf, konkav** und **konvex**, — Winkel, welche sich zu 90^0, 180^0 oder 360^0 ergänzen, **complementär, supplementär** oder **explementär.** Verlängert man einen Schenkel eines Winkels über seinen Scheitel hinaus, so erhält man den zu ihm supplementären **Nebenwinkel**, — verlängert man beide, den ihm gleichen **Scheitelwinkel.** Bezeichnen ab und de die Schenkel, c den Scheitel eines Winkels, so schreibt man $\angle c = \angle acd = \angle (ab, de)$.

76 [54]. **Die Parallelen und Senkrechten.** Zwei Gerade einer Ebene, welche bei gleicher Grösse der Drehung in zwei Punkten einer dritten Geraden entstanden sind, heissen **parallel** oder **zeilig** (∥), — zwei Gerade dagegen, deren Winkel 90^0 beträgt, **senkrecht** (⊥) zu einander. Nennt man die gleichliegenden Winkel zweier Geraden mit einer dritten **korrespondierende**, die entgegengesetzt liegenden **Wechselwinkel**, so sind diese für Parallele je einander gleich.

77 [54]. **Die Koordinaten.** Um von einer Geraden oder **Axe** und einem ihrer Punkte, dem **Anfangspunkte** oder **Pol**, zu einem äussern Punkte m überzugehen, dreht sich **entweder** zuerst die Gerade um den Pol bis sie durch m geht (v), und dann schreitet der Pol bis zu m

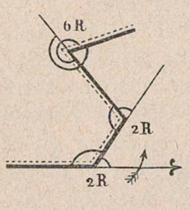


fort (r); **oder** es schreitet der Pol zuerst in der Axe so weit fort (x), dass die Axe nach Drehung um einen gegebenen Winkel (α) durch m geht, und nun schreitet der Punkt wieder fort bis zu m (y). Die Bestimmungsstücke r und v heissen **Radius Vektor** und **Position**, zusammen **Polarkoordinaten**, — die x und y, welche, um sämtliche vier Quadranten des Winkelraumes zu beherrschen, die Zeichenfolgen

$$+ - - + \qquad + + - -$$

annehmen müssen, **Abscisse** und **Ordinate**, zusammen, je nachdem $\alpha = 90^\circ$ ist oder nicht, **rechtwinklige** oder **schiefwinklige Koordinaten.**

78 [54]. **Die gebrochene Linie.** Wird die abwechselnde Bewegung in Fortschritt und Drehung fortgesetzt, so entsteht eine sog. gebrochene Linie, bei der die einzelnen Fortschritte **Seiten**, die mit den Drehwinkeln gleichartigen Winkel der Seiten **Winkel**, die Drehpunkte **konkave** oder **konvexe** Ecken heissen, je nachdem die Drehwinkel konkav oder konvex sind. Die Summe von Winkel und Drehwinkel beträgt an einer konkaven Ecke 2 R, an einer konvexen Ecke 6 R. — Verbindet man zwei Punkte durch verschiedene, aber gegen die gerade Verbindung nur konkave Ecken zeigende gebrochene Linien, so ist jeder umschlossene Zug (73) kürzer als der umschliessende.



79 [54]. **Das n-Eck und n-Seit.** Kehren Punkt und Gerade nach n Doppelbewegungen in die erste Lage zurück, so hat man ein **n-Eck** oder ein **n-Seit**, je nachdem die Seiten nur zwischen den Ecken oder in der unbegrenzten Länge der mit ihnen zusammenfallenden Geraden betrachtet werden. Im n-Ecke finden sich zu jeder Ecke $(n-3)$ mit ihr nicht in einer Seite liegende, sog. **Gegen-Ecken,** und es können daher in demselben $\frac{1}{2}n(n-3)$ sog. **Diagonalen,** gezogen werden. Im n-Seite, wo jeder Durchschnittspunkt Ecke heisst, giebt es dagegen zu jeder der $e = \frac{1}{2}n(n-1)$ Ecken, $g = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ Gegenecken und $d = \frac{1}{2}e \cdot g$ Diagonalen Die Anzahl der durch n Gerade oder n Punkte bestimmten n-Ecke endlich ist $\frac{1}{2} \cdot [n-1]$.

80 [54]. **Die Winkelsumme.** Die Winkelsumme eines n-Ecks wird offenbar gefunden, indem man (78) für jede konkave Ecke 2 R, für jede konvexe Ecke 6 R in Rechnung bringt, und für jede Umdrehung 4 R abzieht. Bezeichnet somit p die Anzahl der konvexen Ecken, und r die der Umdrehungen, so ist die Winkelsumme

$$P_n(p, r) = 2(n + 2p - 2r) R$$

81 [54]. **Anzahl und Einteilung der n-Ecke.** Unterscheiden sich zwei n-Ecke in ihrer Erzeugung nur durch den Sinn, in welchem sich die Gerade dreht, so genügt es, dasjenige zu betrachten, das die geringere Anzahl konvexer Ecken hat. Da ferner ein konkaver Winkel immer zwischen 0 und 2 R, ein konvexer zwischen 2 R und 4 R enthalten sein muss, so ist notwendig $\frac{1}{2}(n + p) > r$, sowie $\frac{1}{2}p < r$, und für $p = 1$ muss mindestens $r = 2$ sein, damit die Figur zum Schlusse kommen kann. Es lässt sich hieraus durch Induktion ableiten, dass, wenn n gerade ist, $\frac{1}{4}(n^2 - 4)$ n-Ecke, und wenn n ungerade ist, $\frac{1}{4}(n^2 - 5)$ n-Ecke möglich sind. Diejenigen n-Ecke, für welche $r - p = 1$ und daher $P_n(p, r) = 2(n-2) R$ ist, heissen **gemein,** die andern sind ohne Ausnahme **über-**

schlagen. Ein Vieleck endlich, in dem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, heisst **regelmässig.**

82 [54]. **Die Kongruenz und Ähnlichkeit.** Zwei n-Ecke heissen **kongruent** ($\cong$) oder **ähnlich** ($\sim$), wenn sie sich in ihrer Erzeugung gar nicht oder nur durch die Einheit des Fortschrittes unterscheiden, d. h. wenn sie gleiche Winkel und entweder gleiche Seiten oder gleiche Seitenverhältnisse haben. Die Erzeugung des n-Ecks wird aber durch ($n - 1$) Seiten und die ($n - 2$) eingeschlossenen Winkel, — oder durch ($n - 1$) Winkel und die ($n - 2$) zwischenliegenden Seiten bestimmt; folglich sind zwei n-Ecke schon bei Übereinstimmung solcher ($2n - 3$) Elemente kongruent und aus jedem Kongruenzsatze geht ein Ähnlichkeitssatz hervor, wenn man die Gleichheit der Seiten durch die ihrer Verhältnisse ersetzt.

X. Das Dreieck.

83 [55]. **Grundeigenschaften des Dreiecks.** Das Dreieck ist (81) nur Einer Form fähig, hat (80) die Winkelsumme $2\,R = 180^0$, — ist (82) durch eine Seite und die anliegenden Winkel, oder durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt, — durch zwei Winkel oder durch einen Winkel und das Verhältnis der einschliessenden Seiten der Form nach gegeben. Jede Dreieckseite ist (73) kleiner als die Summe, aber grösser als die Differenz der beiden andern Seiten, — ein Drehwinkel (Aussenwinkel) gleich der Summe der gegenüberliegenden Dreieckswinkel.

84 [55]. **Das gleichschenklige Dreieck.** Hat ein Dreieck zwei gleiche Seiten, so heisst es gleichschenklig. Die den Winkel der Schenkel halbierende Gerade halbiert die dritte Seite oder **Basis** unter rechtem Winkel. Errichtet man in der Mitte einer Geraden eine Senkrechte, so steht jeder Punkt der Senkrechten von den Endpunkten der Geraden gleich weit ab.

85 [55]. **Das ungleichseitige Dreieck.** Schliessen zwei Seiten eines Dreiecks einen grössern Winkel ein, als zwei ihnen gleiche Seiten eines andern Dreiecks, so hat auch (83) das erstere Dreieck die grössere dritte Seite.

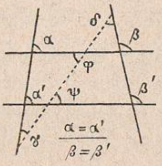
86 [55]. **Weitere Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze.** Zwei Dreiecke, welche alle drei Seiten oder deren Verhältnisse gleich haben, besitzen (84) auch gleiche Winkel, sind somit kongruent oder ähnlich, — ebenso zwei Dreiecke, welche zwei Seiten, oder deren Verhältnis, und den der grössern gegenüberliegenden Winkel gleich haben.

87 [55]. **Die Symmetrie.** Zwei Punkte, deren Verbindungslinie durch eine andere Gerade unter rechtem Winkel gehälftet wird, heissen in Beziehung auf Letztere **symmetrisch**. Verbindet man von zwei Punkten, welche auf derselben Seite einer Geraden liegen, den Einen mit dem symmetrischen des Andern, so erhält man (83) den Punkt der Geraden, von welchem die gegebenen Punkte die kleinste Distanzensumme haben, und in dem sie gleiche Winkel mit der Geraden bestimmen.

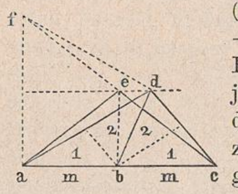
88 [55]. **Abstand und Projektion.** Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade misst als kürzeste Verbindung seinen Abstand. Ihr Fusspunkt heisst **Projektion des Punktes**, — die zwischen die Projektionen der Endpunkte fallende Folge der Projektionen aller Punkte einer Geraden **Projektion der Geraden.**

Die Senkrechte von einer Dreiecksecke auf die Gegenseite heisst **Höhe**, letztere **Basis**.

89 [55]. **Parallelensätze.** Parallele bilden (vgl. Fig.) mit **jeder** Geraden gleiche korrespondierende oder Wechsel-Winkel. — Parallele zwischen Parallelen sind (⋕) gleich. Zwei Gerade werden (83) durch ein System von Parallelen in gleichen Verhältnissen geschnitten, und schneiden von den Parallelen Stücke ab, deren Differenzen in denselben Verhältnissen stehen. Parallele haben (76, 88) überall denselben Abstand, und schneiden sich daher nicht. Dreiecke, deren Seiten paarweise zu einander parallel oder senkrecht stehen, haben gleiche Winkel und sind daher ähnlich.



90 [55]. **Weitere Sätze.** Verbindet man die Mitte einer Dreiecksseite mit der Gegenecke, so wird (vgl. Fig.) das Dreieck halbiert. — Von zwei Dreiecken gleicher Basis und Höhe hat (78) dasjenige, dessen Basiswinkel die des andern der Grösse nach zwischen sich schliessen, den grössern Umfang.



XI. Das rechtwinklige Dreieck und die goniometrischen Funktionen.

91 [55]. **Das rechtwinklige Dreieck.** Ist in einem Dreiecke ein Winkel ein Rechter, so heisst die gegenüberliegende und (85) grösste Seite

Hypotenuse, jede der andern **Kathete**. Die Kongruenz von zwei rechtwinkligen Dreiecken wird (83) durch eine Seite und einen zu ihr gleichliegenden Winkel, oder durch zwei Seiten, — ihre Ähnlichkeit durch einen Winkel, oder das Verhältnis zweier Seiten bestimmt.

92 [55]. **Dimensionen und Fläche.** Teilt man die eine Kathete in gleiche Teile, und verbindet die Teilpunkte mit der Spitze, so erhält man ebensoviele gleiche Dreiecke, und bezeichnen somit AB, ab und Ab die Katheten dreier rechtwinkliger Dreiecke der Flächen F, f und φ, so hat man

$$F : \varphi = B : b \qquad \varphi : f = A : a \qquad \text{also} \qquad F : f = AB : ab$$

Die Flächen hängen also von den Katheten, die darum **Dimensionen** heissen, ab, und nimmt man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen erste Dimension 1, und dessen zweite 2 beträgt, als Flächeneinheit an, so ist die Fläche irgend eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem halben Produkte seiner Katheten.

93 [55]. **Der pythagoräische Lehrsatz.** Wird die Hypotenuse c durch die ihr entsprechende Höhe h in zwei Abschnitte x und y geteilt, so verhält sich

$$x : h = h : y \qquad c : a = a : x \qquad c : b = b : y \qquad \mathbf{1}$$

folglich besteht der sog. pythagoräische Lehrsatz

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \mathbf{2}$$

(vgl. 115) und umgekehrt, wenn in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite gleich der Quadratsumme der beiden andern ist (z. B. 5, 4, 3), so liegt der erstern Seite ein rechter Winkel gegenüber. Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, so besteht der sog. **erweiterte** pythagoräische Lehrsatz

$$a^2 + b^2 \mp 2ax = c^2 \qquad \mathbf{3}$$

wo das obere Zeichen für $\angle\,(a \cdot b) < 90^0$ gilt, und x die Projektion von b auf a bezeichnet.

94 [62]. **Die Seitenverhältnisse.** Da in einem rechtwinkligen Dreiecke die Seitenverhältnisse von einem Winkel abhängen, so kann man sie in Beziehung auf diesen benennen, und zwar setzt man (vgl. Fig. in 77)

$y : r = \text{Sinus } v = \text{Si } v$	$r : x = \text{Secans } v = \text{Se } v$
$x : r = \text{Cosinus } v = \text{Co } v$	$r : y = \text{Cosecans } v = \text{Cs } v$
$y : x = \text{Tangens } v = \text{Tg } v$	$(r - x) : r = \text{Sinus versus } v = \text{Siv } v$
$x : y = \text{Cotangens } v = \text{Ct } v$	$(r - y) : r = \text{Cosinus versus } v = \text{Cov } v$

Ferner wird $r = 1$ als Sinus totus bezeichnet, und, wenn A (Arcus, vgl. 124) ein Bogenmass ist, $v = \text{Asi}\,(y : r) = \text{Aco}\,(x : r) = \text{Atg}\,(y : x) =$ etc. gesetzt.

95 [62, 63]. **Die goniometrischen Funktionen.** Dehnt man die Sinus etc. auf den ganzen Winkelraum aus, indem man in ihren Definitionen Hypotenuse und Winkel durch die Polarkoordinaten, die beiden Katheten durch die rechtwinkligen Koordinaten mit ihren Zeichen (77) ersetzt, so werden aus ihnen die sog. **goniometrischen Funktionen.** Sie lassen sich, indem man je den Nenner als Einheit wählt, leicht nach ihrem Verlaufe durch den ganzen Winkelraum verfolgen, wobei man findet, dass den 4 Quadranten für

die Funktionen	Sinus	Cosinus	Tangens	Cotangens
die Zeichenfolgen	$+ + - -$	$+ - - +$	$+ - + -$	$+ - + -$
und Grenzwerte	0,1	1,0	$0,\infty$	$\infty,0$

entsprechen, wo je die erste Grenze bei 0^0 und 180^0, die zweite bei 90^0 und 270^0 eintrifft. Sie sind periodisch,

disch, und nehmen (abgesehen vom Zeichen) für $180 - \alpha$, $180^0 + \alpha$ und $360^0 - \alpha$ je wieder dieselben Werte an, die sie für α hatten. Speciell ist $\mathrm{Tg}\, 45^0 = 1 = \mathrm{Ct}.\, 45^0$ und $\mathrm{Si}\, 30^0 = {}^1/_2 = \mathrm{Co}\, 60^0$.

96 [62]. **Einige Grundbeziehungen.** Für jeden Winkel a hat man nach dem Vorhergehenden offenbar

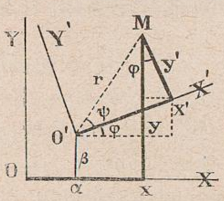
$$\mathrm{Si}^2 a + \mathrm{Co}^2 a = 1 \qquad \mathrm{Si}\, a : \mathrm{Co}\, a = \mathrm{Tg}\, a = 1 : \mathrm{Ct}\, a$$

$$\mathrm{Si}\, a \cdot \mathrm{Cs}\, a = \mathrm{Co}\, a \cdot \mathrm{Se}\, a = \mathrm{Tg}\, a \cdot \mathrm{Ct}\, a = 1$$

$$\mathrm{Si}\, a = \mathrm{Tg}\, a : \sqrt{1 + \mathrm{Tg}^2 a} \qquad \mathrm{Co}\, a = 1 : \sqrt{1 + \mathrm{Tg}^2 a}$$

Ferner darf man nur echte Brüche als Si oder Co, dagegen jede Zahl als Tg oder Ct betrachten, sowie zwei Zahlen $x = a \cdot \mathrm{Si}\, A$ und $y = a \cdot \mathrm{Co}\, A$ setzen, da daraus für A und a immer mögliche Werte folgen.

97 [62, 69]. **Die sog. Transformation der Koordinaten.** Kennt man die Koordinaten eines Punktes M in Beziehung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem XY, so kann man leicht seine Koordinaten in Beziehung auf ein anderes rechtwinkliges Koordinatensystem X' Y' finden, wenn man die Grössen α, β, φ kennt, welche die gegenseitige Lage der beiden Systeme bestimmen. Man hat nämlich offenbar



$$x = \alpha + x' \,\mathrm{Co}\, \varphi - y' \,\mathrm{Si}\, \varphi \qquad y = \beta + x' \,\mathrm{Si}\, \varphi + y' \,\mathrm{Co}\, \varphi \quad \mathbf{1}$$

$$x' = (x - \alpha)\,\mathrm{Co}\, \varphi + (y - \beta)\,\mathrm{Si}\, \varphi \qquad y' = (y - \beta)\,\mathrm{Co}\, \varphi - (x - \alpha)\,\mathrm{Si}\, \varphi \quad \mathbf{2}$$

Überdies ergeben sich hieraus durch Einführung der Polarkoordinaten (94), wenn man $\varphi = a$, $\psi = b$ oder $\varphi = b$, $\psi = a - b$ setzt, die goniometrischen Grundformeln

$$\mathrm{Si}\,(a \pm b) = \mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Co}\,b \pm \mathrm{Co}\,a \cdot \mathrm{Si}\,b \qquad \mathbf{3}$$
$$\mathrm{Co}\,(a \pm b) = \mathrm{Co}\,a \cdot \mathrm{Co}\,b \mp \mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Si}\,b \qquad \mathbf{4}$$

98 [62]. **Weitere goniometrische Formeln.** Mit Hülfe von 96 und 97 findet man leicht, dass

$$\mathrm{Tg}\,(a \pm b) = \frac{\mathrm{Tg}\,a \pm \mathrm{Tg}\,b}{1 \mp \mathrm{Tg}\,a \cdot \mathrm{Tg}\,b} \quad \mathrm{Tg}\,(a \pm 45^0) = \frac{\mathrm{Tg}\,a \pm 1}{1 \mp \mathrm{Tg}\,a} \qquad \mathbf{1}$$

$$\mathrm{Si}\,2a = 2\,\mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Co}\,a \qquad \mathrm{Si}\,3a = 3\,\mathrm{Si}\,a - 4\,\mathrm{Si}^3\,a$$
$$\mathrm{Co}\,2a = \mathrm{Co}^2\,a - \mathrm{Si}^2\,a = 1 - 2\,\mathrm{Si}^2\,a = 2\,\mathrm{Co}^2\,a - 1 \qquad \mathbf{2}$$

$$\mathrm{Si}\,2a \pm \mathrm{Si}\,2b = 2\,\mathrm{Si}\,(a \pm b)\,\mathrm{Co}\,(a \mp b)$$
$$\mathrm{Co}\,2a + \mathrm{Co}\,2b = 2\,\mathrm{Co}\,(a + b)\,\mathrm{Co}\,(a - b) \qquad \mathbf{3}$$
$$\mathrm{Co}\,2a - \mathrm{Co}\,2b = 2\,\mathrm{Si}\,(a + b)\,\mathrm{Si}\,(b - a)$$

$$\mathrm{Tg}\,(a+b) : \mathrm{Tg}\,(a-b) = \mathrm{Tg}\,(45^0 + x) \text{ wo } \mathrm{Tg}\,x = \mathrm{Si}\,2b : \mathrm{Si}\,2a \qquad \mathbf{4}$$

$$\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,a = \sqrt{{}^1\!/_2\,(1 - \mathrm{Co}\,a)} \qquad \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,a = \sqrt{{}^1\!/_2\,(1 + \mathrm{Co}\,a)} \qquad \mathbf{5}$$

$$\mathrm{Tg}\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{Co}\,a}{1 + \mathrm{Co}\,a}} = \frac{1 - \mathrm{Co}\,a}{\mathrm{Si}\,a} = \frac{\mathrm{Si}\,a}{1 + \mathrm{Co}\,a} \qquad \mathbf{6}$$

99 [40]. **Der Moivre'sche Lehrsatz.** Durch Multiplikation findet man (97)

$$(\mathrm{Co}\,\alpha \pm i\,\mathrm{Si}\,\alpha) \cdot (\mathrm{Co}\,\beta \pm i\,\mathrm{Si}\,\beta) \cdot (\mathrm{Co}\,\gamma \pm i\,\mathrm{Si}\,\gamma) \ldots =$$
$$\mathrm{Co}\,(\alpha + \beta + \gamma + \ldots) \pm i\,\mathrm{Si}\,(\alpha + \beta + \gamma + \ldots) \qquad \mathbf{1}$$

oder für $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$ den Moivre'schen Lehrsatz

$$(\mathrm{Co}\,\alpha \pm i\,\mathrm{Si}\,\alpha)^n = \mathrm{Co}\,n\alpha \pm i\,\mathrm{Si}\,n\alpha \qquad \mathbf{2}$$

dessen Gültigkeit für negative und gebrochene Exponenten sich ebenfalls leicht erweisen lässt.

100 [40, 64]. **Einige goniometrische Reihen.** Da 99 : 2 mit 50 : 4 übereinstimmt, so findet man nach 50, 43, indem man $\mathrm{Co}\,x$ durch $\sqrt{1 - \mathrm{Si}^2\,x}$ ersetzt,

$$\mathrm{Si}\,nx = n\left[\mathrm{Si}\,x - \frac{n^2 - 1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\mathrm{Si}^3\,x + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\,\mathrm{Si}^5\,x - \ldots\right]$$
$$\mathrm{Co}\,nx = 1 - \frac{n^2}{1 \cdot 2}\,\mathrm{Si}^2\,x + \frac{n^2\,(n^2 - 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\,\mathrm{Si}^4\,x - \ldots \qquad \mathbf{1}$$

Setzt man hier $n = 3m$ und $x = 30^0$, also (95) $\mathrm{Si}\, x = {}^1/_2$, und ordnet nach m, so erhält man die Reihen

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}\,(m \cdot 90^0) = {} & m \cdot 1{,}5707963 - m^3 \cdot 0{,}6459641 \\ & + m^5 \cdot 0{,}0796926 - m^7 \cdot 0{,}0046818 \\ & + m^9 \cdot 0{,}0001604 - m^{11} \cdot 0{,}0000036 \\ & + m^{13} \cdot 0{,}0000001 - \ldots \\ \mathrm{Co}\,(m \cdot 90^0) = {} & 1{,}0000000 - m^2 \cdot 1{,}2337006 \\ & + m^4 \cdot 0{,}2536695 - m^6 \cdot 0{,}0208635 \\ & + m^8 \cdot 0{,}0009193 - m^{10} \cdot 0{,}0000252 \\ & + m^{12} \cdot 0{,}0000004 - \ldots \end{aligned} \qquad \mathbf{2}$$

aus welchen sich ergiebt, dass

$$\mathrm{Si}\, 1'' = \frac{1{,}5707963}{90 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{1}{206264{,}8} = \overline{4{,}6855749}$$

und wenn a eine kleine Anzahl Sekunden bezeichnet,

$\mathrm{Si}\, a = a \cdot \mathrm{Si}\, 1''$ oder $a = \mathrm{Si}\, a : \mathrm{Si}\, 1''$ und $\mathrm{Co}\, a = 1$ **3**

ist. Setzt man aber $x = \alpha : n$, und lässt n unendlich gross, also $\alpha : n$ unendlich klein werden, so nehmen $\mathrm{Si}\, \alpha : n$, $\mathrm{Co}\, \alpha : n$ und n über h die Grenzwerte $\alpha' : n$, 1 und $n^h : [h]$ an, wo $\alpha' = A\, \alpha$ ist, und man erhält aus 50:7

$$\mathrm{Si}\, \alpha = \alpha' - \frac{\alpha'^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \qquad \mathrm{Co}\, \alpha = 1 - \frac{\alpha'^2}{1 \cdot 2} + \ldots \qquad \mathbf{4}$$

woraus sich die Vergleichung zwischen den in 50 und 94 eingeführten Sinus und Cosinus ergiebt.

101 [29]. **Anwendung auf algebraische Gleichungen.** Wenn in der Cardanischen Formel (19) $b^2 + a^3$ negativ werden soll, so muss a negativ und $a^3 > b^2$ sein. Setzt man in 19:2 die a negativ, so geht sie (98:2) für

$$y = -2\sqrt{a} \cdot \mathrm{Si}\, \varphi \qquad \mathbf{1}$$

in

$$\sqrt{b^2 : a^3} = 3\, \mathrm{Si}\, \varphi - 4\, \mathrm{Si}^3\, \varphi = \mathrm{Si}\, 3\varphi \qquad \mathbf{2}$$

über, so dass φ möglich wird, und die ihr genügenden Werte 3φ, $180^0 - 3\varphi$, $360^0 + 3\varphi$, $540^0 - 3\varphi, \ldots$ für $2\sqrt{a} = c$

$$y_1 = -c \operatorname{Si} \varphi \quad y_2 = -c \operatorname{Si} (60^0 - \varphi) \quad y_3 = c \operatorname{Si} (60^0 + \varphi) \qquad \mathbf{3}$$

oder (vgl. 19) drei reelle Wurzeln ergeben.

102. Anwendung auf transcendente Gleichungen. — Setzt man in der Gleichung

$$a \cdot \operatorname{Si} x \pm b \cdot \operatorname{Co} x = c \qquad a = m \cdot \operatorname{Co} \varphi \qquad b = m \cdot \operatorname{Si} \varphi \qquad \mathbf{1}$$

so erhält man (97, 3) die Lösung

$$\operatorname{Si} (x \pm \varphi) = c \cdot \operatorname{Si} \varphi : b \qquad \text{wo} \qquad \operatorname{Tg} \varphi = b : a \qquad \mathbf{2}$$

ist. — Hat man die Gleichungen

$$x \operatorname{Si} y = a \operatorname{Si} \alpha - b \operatorname{Si} \beta \qquad x \operatorname{Co} y = a \operatorname{Co} \alpha - b \operatorname{Co} \beta \qquad \mathbf{3}$$

so erhält man aus ihrer Kombination

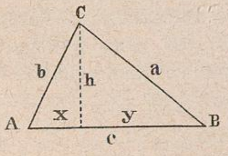
$$\operatorname{Tg} (y - \alpha) = b \cdot \operatorname{Si} (\alpha - \beta) : [a - b \cdot \operatorname{Co} (\alpha - \beta)] \qquad \mathbf{4}$$

oder (52 : 3, 4), wenn man rechts mit Si 1'' dividiert,

$$y = \alpha + \frac{b}{a \operatorname{Si} 1''} \operatorname{Si} (\alpha - \beta) + \frac{b^2}{2a^2 \operatorname{Si} 1''} \operatorname{Si} 2 (\alpha - \beta) + \ldots \qquad \mathbf{5}$$

XII. Die Trigonometrie und einige weitere Eigenschaften des Dreieckes.

103 [65]. **Die trigonometrischen Grundbeziehungen.** Bezeichnet man die Seiten eines Dreiecks mit $a = 2\mathfrak{a}$, $b = 2\mathfrak{b}$, $c = 2\mathfrak{c}$, die Gegenwinkel mit $A = 2\mathfrak{A}$, $B = 2\mathfrak{B}$, $C = 2\mathfrak{C}$, so ist (94)



$$a \cdot \operatorname{Si} B = h = b \operatorname{Si} A$$

$$c = x + y = b \cdot \operatorname{Co} A + a \cdot \operatorname{Co} B$$

und somit

$$a : b : c :: \operatorname{Si} A : \operatorname{Si} B : \operatorname{Si} C \qquad \mathbf{1}$$

$$a = b \operatorname{Co} C + c \operatorname{Co} B, \; b = c \operatorname{Co} A + a \operatorname{Co} C, \; c = a \operatorname{Co} B + b \operatorname{Co} A \qquad \mathbf{2}$$

104 [65, 66[. **Weitere Formeln.** Aus 103 und 98 ergeben sich ferner

$$(a+b):(a-b) = \mathrm{Tg}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}):\mathrm{Tg}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) \qquad \mathbf{1}$$

$$\mathrm{Tg}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) = \mathrm{Tg}\,(45^0-\varphi)\cdot \mathrm{Ct}\,\mathfrak{C} \quad \text{wo} \quad \mathrm{Tg}\,\varphi = b:a \qquad \mathbf{2}$$

$$\mathrm{Tg}\,A = h:(c-y) = a\cdot \mathrm{Si}\,B:(c-a\cdot \mathrm{Co}\,B) \qquad \mathbf{3}$$

und, wenn

$$a+b+c=2s \qquad d=2\sqrt{b\cdot c}\cdot \mathrm{Co}\,\mathfrak{A}\ldots \qquad \mathbf{4}$$

gesetzt werden

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot \mathrm{Co}\,A}=\sqrt{(b+c+d)(b+c-d)} \qquad \mathbf{5}$$

$$\mathrm{Si}\,\mathfrak{A}=\sqrt{(s-b)(s-c):bc} \qquad \mathrm{Co}\,\mathfrak{A}=\sqrt{s(s-a):bc} \qquad \mathbf{6}$$

105 [65]. **Die Berechnung der Dreiecksfläche.** Bezeichnet F die Fläche des Dreiecks A B C (s. 103 Fig.), so ist (92, 104)

$$F = {}^1\!/_2\, x\cdot h + {}^1\!/_2\, y\cdot h = {}^1\!/_2\, c\cdot h = {}^1\!/_2\, b\cdot c\cdot \mathrm{Si}\,A \qquad \mathbf{1}$$

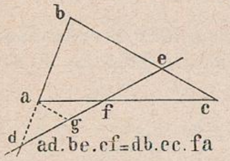
$$= {}^1\!/_2\, c^2\, \mathrm{Si}\,A\cdot \mathrm{Si}\,B\cdot \mathrm{Cs}\,C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \mathbf{2}$$

106 [65]. **Die Trigonometrie.** Sind in einem Dreiecke eine Seite und die Winkel gegeben, so kann man nach 103, — sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben nach 104:5 und 103, oder nach 104:2 und 103, — sind alle drei Seiten gegeben nach 104:6 je die übrigen Elemente, sowie nach 105 die Fläche berechnen.

107. Die Flächensätze. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind (105) gleich gross, und es wird daher (89) die Fläche eines Dreieckes nicht verändert, wenn man eine seiner Ecken parallel zur Gegenseite verschiebt. Ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten.

108 [55]. **Einige isoperimetrische Sätze.** Haben zwei Dreiecke gleicher Basis gleichen Umfang, so entspricht (90) demjenigen, das den kleinsten und grössten Basiswinkel hat, die kleinere Höhe und somit auch die kleinere Fläche, während das gleichschenklige von allen solchen Dreiecken, das gleichseitige aber von allen isoperimetrischen Dreiecken überhaupt, die grösste Fläche besitzt.

109 [55]. **Die Transversalen.** Jeder von drei Punkten einer Geraden bestimmt mit den beiden andern zwei Abschnitte, deren Summe oder Differenz ihre Distanz darstellt, je nachdem er zwischen ihnen (innerer Teilpunkt) oder auf derselben Seite von beiden (äusserer Teilpunkt) liegt. So z. B. bildet eine beliebige Gerade oder sog. **Transversale** auf den Seiten eines Dreiecks entweder zwei innere und einen äussern, oder drei äussere Teilpunkte, und in beiden Fällen werden die Produkte der nicht aneinander liegenden Abschnitte gleich, oder bilden eine sog. **Involution**.



110. Einige weitere Sätze. Jede Gerade, welche durch eine Dreiecksecke geht, teilt (89) die Gegenseite und eine zu ihr Parallele proportional, und zwar (107), wenn sie den Dreieckswinkel oder den Aussenwinkel halbiert, im Verhältnisse der einschliessenden Seiten. (Vgl. 116.) Zieht man von einem Punkte durch die Dreiecksecken Gerade oder Senkrechte zu den Seiten, so teilen sie letztere so, dass die Produkte oder die Quadratsummen der nicht aneinander liegenden Abschnitte gleich werden.

111 [55]. **Das Centrum der Ecken und das Centrum der Seiten.** Die in den Mitten der Dreiecksseiten errichteten Senkrechten schneiden sich (110) in Einem Punkte, der von allen Ecken gleich weit um den **Radius** (ρ) absteht, daher **Centrum der Ecken** heisst, und (83) überdies die Eigenschaft besitzt, dass von ihm aus jede Seite unter doppelt so grossem Winkel erscheint als von der Gegenecke aus. Ferner (91) fällt der Durchschnittspunkt der Bissectrissen zweier Dreieckswinkel auch in die Bissectrix des dritten, und dieser von allen Seiten gleich weit, um das **Apothema** (α), abstehende Punkt, heisst **Centrum der Seiten.** Ist h die der Seite c entsprechende Höhe, so findet man (94, 105) leicht, dass

$$\rho = {}^1/_2\, ab : h \qquad \text{und} \qquad \alpha = {}^1/_2\, ch : s$$

112 [55]. **Der Schwerpunkt und der Höhenpunkt.** — Die von den Dreiecksecken nach den Mitten der Gegenseiten gehenden Geraden schneiden sich (110) in Einem Punkte, dem sog. **Schwerpunkte,** der (89) von jeder Ecke um ${}^2/_3$ der Verbindungslinie absteht. Ebenso treffen sich (110) die drei Höhen eines Dreiecks in Einem Punkte, dem **Höhenpunkte,** von dessen Verbindung mit dem Centrum der Ecken der Schwerpunkt ${}^2/_3$ abschneidet.

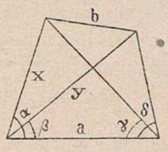
XIII. Das Viereck und Vieleck.

113 [56]. **Das Viereck.** Es ist (81) der drei Formen

$P_4(0,1) = 4\,R \qquad P_4(1,2) = 4\,R \qquad P_4(2,2) = 8\,R$

fähig, deren zwei erste gemein und der Fläche nach gleich dem halben Produkte einer Diagonale in die Summe der Entfernungen der Gegenecken von derselben, oder beider Diagonalen in den Sinus ihres Winkels sind. Besitzt ein Viereck der ersten Form zwei parallele Gegenseiten (Basen) so heisst es **Trapez** und ist gleich dem Produkte aus deren Mittel und Abstand. Werden auch noch die beiden andern Seiten parallel und somit (89) jede zwei Gegenseiten gleich, so hat man ein **Parallelogramm** oder **Zeileck**, dessen Fläche gleich dem Produkte einer Seite (Grundlinie) in ihre Entfernung von der Gegenseite (Höhe) ist. — Ein gleichseitiges Parallelogramm heisst **Rhombus**, ein gleichwinkliges **Rechteck**, ein gleichseitig-gleichwinkliges **Quadrat**.

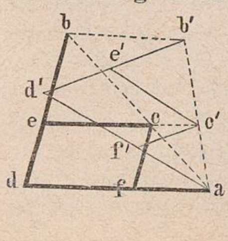
114 [67]. **Die Tetragonometrie.** Statt analog der Trigonometrie eine eigene Tetragonometrie



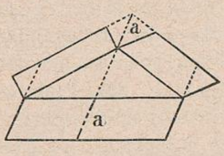
aufzustellen, lassen sich die Aufgaben am Vierecke bequemer mit Hülfe der erstern auflösen. Sind z. B. die Winkel α, β, γ, δ bekannt, so erhält man (103; 104 : 5) um b aus a, oder a aus b zu bestimmen:

$$b = a\sqrt{(f+g+h)(f+g-h)} \quad \text{wo} \quad f = \mathrm{Si}\,\gamma : \mathrm{Si}\,(\alpha+\gamma)$$
$$g = \mathrm{Si}\,\delta : \mathrm{Si}\,(\beta+\delta) \qquad h = 2\sqrt{fg}\,\mathrm{Co}\,{}^1/_2\,(\alpha-\beta)$$

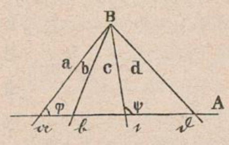
115 [56]. **Einige Eigenschaften des Parallelogrammes.** Verlängert man zwei Neben-



seiten eines Parallelogrammes so, dass die Endpunkte mit der Gegenecke eine Gerade bilden, und hält den einen Endpunkt (a) als Pol fest, so beschreiben (83, 89) die Ecke (c) und der andere Endpunkt (b) ähnliche Wege, indem bb′ ∥ cc′ und bb′ : cc′ = ba : ca. Es beruht hierauf der sog. **Storchschnabel** oder **Pantograph.** — Konstruiert man über zwei Seiten eines Dreiecks Parallelogramme, und verlegt die Verbindungslinie (a) des Durchschnittspunktes der Gegenseiten und der gemeinschaftlichen Ecke an die dritte Seite, so bestimmt sie (113) mit ihr (als Erweiterung des pyth. Lehrsatzes in 93) ein Summenparallelogramm.

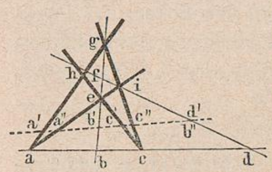


116 [56]. **Das Vierseit und die harmonische Teilung.** Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ vier Punkte einer Geraden A, und a, b, c, d die von einem Punkte B nach ihnen führenden Strahlen, so findet man (103) die Proportion



$$\frac{\mathfrak{ab}}{\mathfrak{bc}} : \frac{\mathfrak{ad}}{\mathfrak{dc}} = \frac{\mathrm{Si}\,(a, b)}{\mathrm{Si}\,(b, c)} : \frac{\mathrm{Si}\,(a, d)}{\mathrm{Si}\,(d, c)}$$

so dass mit den einen der 4 Elemente auch das den andern entsprechende Doppelverhältnis gleich bleibt. Werden die Doppelverhältnisse, wie z. B. für $\mathfrak{ab} = \mathfrak{bc}$ und $\mathfrak{bd} = \infty$, oder für (a, b) = (b, c) und (b, d) = 90° gleich der Einheit, so heissen die Punkte und Strahlen **harmonisch**, und entsprechend heisst eine durch einen innern und äussern Teilpunkt in gleichem Verhältnisse geteilte Distanz **harmonisch geteilt.** So z. B. wird (109) jede der drei Diagonalen eines Vierseits durch die beiden übrigen harmonisch geschnitten.



117 [56]. **Das Vieleck.** Um ein Vieleck seiner Fläche nach durch Drehung einer Geraden von veränderlicher Länge zu erzeugen, wählt man eine Ecke als Pol, eine der durch sie gehenden zwei Seiten als Ausgangslage, die zweite als Endlage der erzeugenden Geraden, und dreht nun die Erzeugende so um den Pol, dass ihr Endpunkt den Umfang des Vielecks durchläuft, — wobei ein Drehen in entgegengesetztem Sinne offenbar negativen Räumen entspricht, so dass jedes Vieleck einer algebraischen Summe von Dreiecken entspricht.

118 [67]. **Die Polygonometrie.** Bezeichnen $a_1\ a_2 \ldots a_n$ die Seiten, $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Drehwinkel eines n-Ecks und r die Anzahl der Umdrehungen, so erhält man (94, 80) als Grundformeln der Polygonometrie

$$0 = a_1 + a_2 \operatorname{Co} \alpha_1 + a_3 \operatorname{Co}(\alpha_1 + \alpha_2) + \ldots + a_n \operatorname{Co}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}) \quad \mathbf{1}$$

$$0 = a_2 \operatorname{Si} \alpha_1 + a_3 \operatorname{Si}(\alpha_1 + \alpha_2) + \ldots + a_n \operatorname{Si}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}) \quad \mathbf{2}$$

$$4rR = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n \quad \mathbf{3}$$

XIV. Das centrische Vieleck und der Kreis.

119 [57]. **Die nach den Ecken centrischen Vielecke.** Findet sich zu einem Vielecke ein Punkt, der von allen Ecken denselben Abstand hat, so heisst es **centrisch nach den Ecken**, der Punkt **Mittelpunkt der Ecken** und der gleiche Abstand **Radius.** Bezeichnen a, b zwei Nebenseiten und B deren Winkel, so findet man den Radius nach

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \operatorname{Co} B} : 2 \operatorname{Si} B$$

120 [57]. **Die nach den Seiten centrischen Vielecke.** Findet sich zu einem Vielecke ein Punkt, der von allen Seiten denselben Abstand hat, so heisst es **centrisch nach den Seiten**, der Punkt **Mittelpunkt der Seiten**, und der gleiche Abstand **Apothema.** Bezeichnen a, 2 A, 2 B eine Seite und die anliegenden Winkel, so findet man das Apothema nach

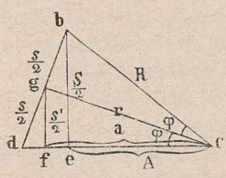
$$\alpha = a \cdot \mathrm{Si}\,A \cdot \mathrm{Si}\,B \cdot \mathrm{Cs}\,(A + B)$$

und dessen Produkt mit dem halben Umfang giebt die Fläche.

121 [57]. **Die centrischen Vielecke.** Findet sich zu einem Vielecke ein Punkt, welcher zugleich Centrum der Ecken und Seiten ist, so heisst es **centrisch,** und die von diesem Mittelpunkte mit den Seiten bestimmten Dreiecke, die **Bestimmungsdreiecke**, sind (119, 120) sämtlich kongruent, so dass das centrische Vieleck **regelmässig** ist — während bei einfacher Umdrehung zwischen Winkel (W = 2w), Seite (S), Radius (R) und Apothema (A) die Beziehungen

$$n \cdot W = (2n - 4) \cdot 90^0 \quad 2R = S.\,\mathrm{Se}\,w \quad 2A = S.\,\mathrm{Tg}\,w \quad \mathbf{1}$$

bestehen. Ist ferner in dem gleichschenkligen Dreiecke b c d, $n \cdot \varphi = 90^0$, so stellen S, R, A Seite, Radius und Apothema eines n-Ecks, — s, R, r und s′, r, a aber dieselben Grössen für zwei 2n-Ecke dar, deren erstes mit dem n-Ecke gleichen Radius, das zweite aber gleichen Umfang besitzt, und man hat (93, 94)



$$S = 2R \cdot \mathrm{Si}\,2\varphi = s\,\sqrt{4R^2 - s^2} : R, \quad a = {}^1/_2\,(A + R), \quad r = \sqrt{aR} \quad \mathbf{2}$$

Im Bestimmungsdreiecke des 10-Ecks der Seite s macht die Bissectrix eines Basiswinkels auf dem Gegenschenkel R einen sog. **goldenen Schnitt,** da R : s = s : (R − s). Es folgt hieraus (18) der leicht konstruierbare Wert

$$2s = R\,(\sqrt{5} - 1) \quad \text{während nach 2} \quad S^2 = R^2 + s^2 \quad \mathbf{3}$$

122 [57]. **Das centrische Unendlicheck.** Im Quadrate der Seite 1 ist $A = \frac{1}{2}$, $R = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707107$. Berechnet man hieraus successive nach 121 : 2 für das 8, 16, 32,...-Eck a und r, so nähern sich beide dem Werte 0,636620, der somit für das Unendlicheck gilt. Bezeichnet man daher in einem solchen das Verhältnis vom halben Umfange zum Radius mit π, so ist

$$\pi = 2 : 0{,}636620 = 3{,}14159 \doteq 3\tfrac{1}{7} = 355 : 113$$

123 [57]. **Die Kreislinie.** Der Ort eines Punktes, der von einem Punkte, **Centrum**, einen gegebenen Abstand, den **Radius** r, hat, heisst **Kreislinie**, und kömmt mit einem centrischen Unendlichecke überein, so dass (122, 120), wenn der Umfang des Kreises, seine **Peripherie** mit p und dessen Fläche mit f bezeichnet wird,

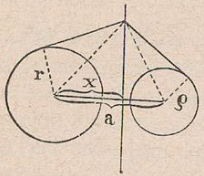
$$p = 2r\pi \qquad f = \tfrac{1}{2}\, p \cdot r = r^2\pi$$

124 [57]. **Die Sekanten und ihre Winkel.** Bezeichnet d den Abstand einer Geraden vom Centrum, so hat sie für $d < r$, wo sie **Sekante** heisst, zwei Punkte mit der Kreislinie gemein, die von einander um die **Sehne** $s = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ abstehen; für $d = r$ hat sie nur Einen Punkt gemein, und heisst **Tangente** in demselben; für $d > r$ liegt sie ganz ausserhalb. — Mittelpunkt, Mitte der Sehne und Mitte des Bogens liegen in einer Senkrechten zur Sehne. Gleichen Sehnen entsprechen gleiche Bogen und Mittelpunktswinkel, die sich gegenseitig messen. — Ein Winkel, dessen Scheitel in der Kreislinie liegt, heisst **Peripheriewinkel**, und ist (111) gleich der Hälfte des mit ihm auf gleichem Bogen stehenden Mittelpunktswinkels; umgekehrt liegen die Scheitel gleicher Winkel, deren Schenkel zwei Punkte gemein haben, auf einer durch diese Punkte gehenden Kreislinie. Zwischen parallelen Sekanten enthaltene Kreisbogen sind gleich lang, und der Winkel zweier Sekanten ist daher gleich einem Peripheriewinkel, der auf der Summe oder Differenz der zwischen den Sekanten liegenden Bogen steht, je nachdem die Sekanten sich innerhalb oder ausserhalb des Kreises schneiden.

125 [57]. **Die Tangenten und ihre Winkel.** Der Durchschnittspunkt zweier Tangenten steht von ihren Berührungspunkten gleich weit ab, — ihr Winkel ist zum Winkel der Berührungsradien supplementär, und beide Winkel werden durch die Verbindungslinie ihrer Scheitel halbiert. — Zieht man von einem Punkte Sekanten zu einem Kreise, so erhält man Sehnensegmente von gleichem Produkte, welches **Potenz** des Punktes heisst und für einen äussern Punkt gleich dem Quadrate der von ihm an die Kreislinie gezogenen Tangente ist.

126 [57]. **Die ein- und umgeschriebenen Vielecke.** Ein Vieleck, dessen Ecken in der Kreislinie liegen, heisst **eingeschrieben**, — dagegen **umgeschrieben**, wenn seine Seiten Tangenten sind. — In jedem eingeschriebenen Vierecke besteht (125; 93:3) der sog. **Ptolemäische Lehrsatz**: Das Produkt der Diagonalen ist gleich der Summe oder Differenz der Produkte der Gegenseiten, je nachdem das Viereck gemein oder überschlagen ist. In jedem eingeschriebenen Sechsecke, dem **Hexagrammum mysticum** Pascals, liegen (109, 125) die Durchschnittspunkte der Gegenseiten in einer Geraden, während sich die drei Hauptdiagonalen in demselben Punkte schneiden.

127. Beziehungen zwischen verschiedenen Kreislinien. Bezeichnet a die Centraldistanz zweier Kreise der Radien R und r, so haben die Kreise für $R + r > a > R - r$ eine von der Centrallinie unter rechtem Winkel halbierte gemeinschaftliche Sehne, — für $a = R + r$ (äussere Berührung) und $a = R - r$ (innere Berührung) eine zu der Centrallinie senkrechte gemeinschaftliche Tangente, — während

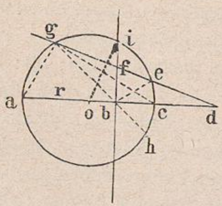


sie für $a = 0$ **concentrisch**, in allen übrigen Fällen **excentrisch** heissen. Für den Ort eines Punktes, von dem aus die Tangenten an zwei Kreise gleich lang werden, findet man (93)

$$x = (a^2 + r^2 - \rho^2) : 2a$$

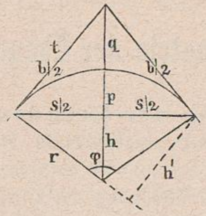
d. h. dieser Ort, die **Radikalaxe** ist eine zur Centrallinie senkrechte Gerade, welche für zwei sich schneidende Kreise mit der gemeinschaftlichen Sekante zusammenfällt.

128 [57]. **Pol und Polare.** Wenn $ob \cdot od = r^2$, so heissen die Punkte b und d **reciprok**, und teilen ac harmonisch. Zieht man durch einen derselben, den **Pol**,



eine Sekante, — durch den andern eine Senkrechte zu ac, die **Polare**, so teilen (116) Pol und Polare (z. B. d und bf) die entsprechende Sehne (eg) harmonisch. — In jedem eingeschriebenen Vierecke bestimmen (116) die Durchschnittspunkte der Diagonalen und der Gegenseiten ein Dreieck, in welchem jede Ecke Pol ihrer Gegenseite ist, so dass man leicht zu einem Punkte seine Polare, und, indem man für zwei Punkte einer Geraden die Polaren aufsucht, deren Pol bestimmen kann.

129 [67]. **Sehne, Pfeil, Sektor und Segment.** Bezeichnet φ einen Mittelpunktswinkel, b den



entsprechenden Bogen, s die Sehne (Chorde, Subtensa), p den Pfeil (Bogenhöhe), F den Kreisausschnitt (Sektor) und f den Kreisabschnitt (Segment), so hat man, wenn

$$A\,\varphi = \varphi\pi : 180 = \varphi'' \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad \mathbf{1}$$

die $r = 1$ entsprechende Bogenlänge ist, nach 123, 105, 93, 94, 98

$$b = (\varphi : 180)\, r\pi = r \cdot A\,\varphi = r \cdot \varphi'' \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad \mathbf{2}$$

$$2F = (\varphi : 180)\, r^2\pi = br = r^2 A\,\varphi,\; 2f = r^2 (A\,\varphi - \mathrm{Si}\,\varphi) = r\,(b - h') \qquad \mathbf{3}$$

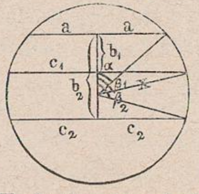
$$s = 2r\,\mathrm{Si}\,{}^1/_2\,\varphi = 2\sqrt{p\,(2r - p)} \qquad r = (s^2 + 4p^2) : 8p \qquad \mathbf{4}$$

$$p = r \cdot \mathrm{Siv}\,{}^1/_2\,\varphi = 2r\,\mathrm{Si}^2\,{}^1/_4\,\varphi = r - {}^1/_2 \sqrt{(2r + s)(2r - s)} \qquad \mathbf{5}$$

Sind die Winkel so klein, dass man schon die dritten Potenzen ihres Bogenmasses vernachlässigen darf, so bestehen (50, 94) die Näherungsformeln

$$\begin{aligned} &\mathrm{Siv}\,2\varphi = 4 \cdot \mathrm{Siv}\,\varphi = 4\,(\mathrm{Se} \cdot \varphi - 1) \\ &8p = r \cdot A^2 \cdot \varphi \qquad s = r \cdot A\,\varphi \quad \text{etc.} \end{aligned} \qquad \mathbf{6}$$

130 [67]. **Noch einige Beziehungen.** Bezeichnet x den Radius eines Kreises und b den Abstand zweier Sehnen 2a und 2c der Winkel 2α und 2β, so folgen successive



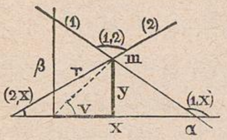
$$\begin{aligned} a = x \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \qquad c = x \cdot \mathrm{Si}\,\beta \\ b = x\,(\mathrm{Co}\,\alpha - \mathrm{Co}\,\beta) \end{aligned} \qquad \mathbf{1}$$

$$\mathrm{Tg}\,{}^1/_2\,(\beta + \alpha) = b : (c - a) \qquad \mathrm{Tg}\,{}^1/_2\,(\beta - \alpha) = b : (c + a) \qquad \mathbf{2}$$

Die 1 lassen aus x, a, c die α. β, b finden, — die 2 aber aus a, b, c die α, β und dann x nach 1.

XV. Die analytische Geometrie der Ebene.

131 [69]. **Die Gleichung der Geraden.** Eine für jeden Punkt einer Linie statthabende Beziehung zwischen Abscisse und Ordinate, oder zwischen Radius Vektor und Winkel, heisst **Gleichung** der Linie. So ist für jeden Punkt m einer Geraden (1)



$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta$$

also

$$x : \alpha + y : \beta = 1 \qquad \mathbf{1}$$

die Gleichung dieser Geraden, und umgekehrt stellt jede Gleichung ersten Grades

$$y = a_1 x + b_1 \quad \text{wo } a_1 = -\beta : a = \mathrm{Tg}\,(1 \cdot x) \qquad b_1 = \beta \qquad \mathbf{2}$$

eine Gerade (1) vor; α und β heissen **Parameter**.

132 [69]. **Verschiedene Aufgaben.** Für Durchschnittspunkt und Winkel zweier Geraden (1) und (2) erhält man aus ihren Gleichungen (83, 98, 131)

$$x = -(b_1 - b_2) : (a_1 - a_2), \quad y = (a_1 b_2 - a_2 b_1) : (a_1 - a_2) \qquad \mathbf{1}$$

$$(1, 2) = (1, x) - (2, x) = \mathrm{Atg}\,[(a_1 - a_2) : (1 + a_1 a_2)] \qquad \mathbf{2}$$

so dass $a_1 = a_2$ die Bedingung des Parallelismus, und $1 + a_1 a_2 = 0$ die des Senkrechtstehens ist. — Zwei Punkte $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ haben die Distanz

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad \mathbf{3}$$

und bestimmen eine Gerade der Gleichung

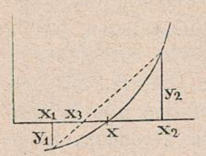
$$y - y_1 = (y_1 - y_2) \cdot (x - x_1) : (x_1 - x_2) \qquad \mathbf{4}$$

Ist y eine beliebige Funktion von x, so folgt für $y = 0$ aus 4

$$x = x_1 - y_1 (x_1 - x_2) : (y_1 - y_2) \qquad \mathbf{5}$$

und sind daher y_1 und y_2 kleine Werte (Fehler), welche

$f(x)$ für zwei Annahmen x_1 und x_2 annimmt, so kann man nach 5 einen Wert x_3 ausrechnen, welcher einer Wurzel von $f(x) = 0$ sehr nahe kömmt, ja x durch Wiederholung dieses Verfahrens, der sog. **Regula falsi** oder **aurea,** mit beliebiger Annäherung finden.



Der Abstand eines Punktes $(\alpha\beta)$ von der Geraden (1) ist

$$d = (\beta_1 - b_1 - \alpha a_1) : \sqrt{1 + a_1{}^2} \qquad \mathbf{6}$$

133 [72]. **Der Punkt der mittlern Entfernungen.** Das Produkt des Abstandes eines Punktes (x y) von einer Geraden in eine ihm zugeteilte Konstante m heisst **Moment des Punktes in Beziehung auf die Gerade.** Für ein System solcher Punkte hat der Punkt

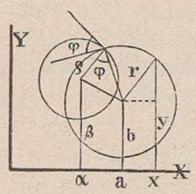
$$x = \Sigma mx : \Sigma m \qquad y = \Sigma my : \Sigma m \qquad \mathbf{1}$$

die Eigenschaft, dass, wenn man ihm Σm als Konstante zuordnet, für jede Gerade sein Moment gleich der Summe der Momente aller Punkte des Systemes ist; er heisst **Punkt der mittlern Entfernungen** oder **Schwerpunkt,** — jede durch ihn gehende Gerade **Schweraxe.** Wählt man den Schwerpunkt als Anfangspunkt der Koordinaten, bezeichnet die Abstände der Punkte des Systemes von demselben mit r_1, r_2, etc., von einem Punkte (a, b) aber mit ρ_1, ρ_2, etc., — den Abstand des letztern vom Schwerpunkte endlich mit r, so werden $\Sigma mx = \Sigma my = 0$, und es ergiebt sich die merkwürdige Beziehung

$$\Sigma m\rho^2 = \Sigma mr^2 + r^2 \Sigma m \qquad \mathbf{2}$$

Werden allen Punkten einer Geraden gleiche Konstanten zugeschrieben, so fällt ihr Schwerpunkt in die Mitte, und hat eine ihrer Länge proportionale Konstante. Ein Dreieck kann man sich aber als eine Folge von Parallelen zu einer Seite denken, und da somit (89) deren Schwerpunkte in der Geraden liegen, welche die Mitte der Seite mit der Gegenecke verbindet, so muss der Schwerpunkt des ganzen Dreiecks mit dem (112) bestimmten Punkte zusammenfallen. Der Schwerpunkt irgend eines Vieleckes wird gefunden, indem man dasselbe durch Diagonalen auf zwei Weisen teilt, und je die Schwerpunkte der Teile verbindet.

134. Die Gleichung der Kreislinie. Ihre Gleichung ist (s. Fig. und 132 : 3)



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad \mathbf{1}$$

für $b = 0$ und $a = r$ oder $a = o$ aber

$$y = \sqrt{2rx - x^2} \text{ oder } x^2 + y^2 = r^2 \qquad \mathbf{2}$$

Für den Winkel φ, unter dem sich zwei Kreise schneiden, folgt (132 : 3; 104 : 6)

$$\text{Co}\,\varphi = [r^2 + \rho^2 - (a - \alpha)^2 - (b - \beta)^2] : 2r\rho \qquad \mathbf{3}$$

135 [73]. **Die Linien zweiten Grades.** Da aus der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \qquad \mathbf{1}$$

eine der Konstanten durch Division weggeschafft werden kann, so muss die Linie zweiten Grades durch 5 Punkte bestimmt sein. Eliminiert man x aus 1 und der Gleichung

$$y = \alpha x + \beta \qquad \mathbf{2}$$

einer Geraden, so findet man

$$y^2 [a\alpha^2 + b\alpha + c] + y [\alpha (\alpha d + e) - \beta (\alpha b + 2c)] + \\ + [c\beta^2 - \alpha\beta e + f\alpha^2] = 0 \qquad \mathbf{3}$$

und es hat daher eine Gerade mit einer Linie zweiten

Grades zwei Punkte (Sekante, Sehne), oder einen Doppelpunkt (Tangente), oder gar keinen Punkt gemein.

136 [73]. **Axen und Mittelpunkt.** Entsprechen u und t der Mitte der Sehne, so hat man (135 : 2; 18)

$$t = \alpha u + \beta \quad \text{und} \quad t = \frac{\beta(\alpha b + 2c) - \alpha(\alpha d + e)}{2(a\alpha^2 + b\alpha + c)} \qquad \mathbf{1}$$

und eliminiert man hieraus β, so ergiebt sich für den Ort der Mitten aller um $\operatorname{Atg}\alpha$ geneigten Sehnen

$$t = -\frac{\alpha b + 2c}{b + 2a\alpha}u - \frac{\alpha d + e}{b + 2a\alpha} \qquad \mathbf{2}$$

d. h. eine Gerade, eine **Axe.** Setzt man in dieser Gleichung statt α den Faktor von u ein, so erhält man für die Axe aller zu der ersten Axe parallelen Sehnen

$$t = \alpha u + M \qquad \mathbf{3}$$

so dass die neue Axe ein Element des ersten Sehnensystemes ist. Zwei solche Axen oder Sehnensysteme heissen **konjugiert**, und ihr Winkel μ ist (132 : 2) durch

$$\operatorname{Tg}\mu = 2\,\frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{b(1 - \alpha^2) + 2(a - c)\alpha} \qquad \mathbf{4}$$

bestimmt. Für $\mu = 90^0$, d. h. für

$$\alpha = (a - c \mp k) : b \quad \text{wo} \quad k = \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \qquad \mathbf{5}$$

nennt man die konjugierten Axen **Hauptaxen.** Für den Durchschnittspunkt zweier Axen erhält man (132 : 1) nach 2 die von α unabhängigen Koordinaten

$$A = (2ae - bd) : g \quad B = (2cd - be) : g \text{ wo } g = b^2 - 4ac \qquad \mathbf{6}$$

so dass alle Axen einen Punkt, **Mittelpunkt,** gemein haben.

137 [73]. **Transformation und Einteilung.** Verlegt man den Anfangspunkt in den Mittelpunkt, und dreht die Abscissenaxe in die Richtung der einen Hauptaxe, d. h. setzt man (97) $\alpha = A$, $\beta = B$ und

$$\operatorname{Tg}\varphi = \frac{a - c - k}{b}, \quad \operatorname{Si}^2\varphi = \frac{k - a + c}{2k}, \quad \operatorname{Si}2\varphi = -\frac{b}{k}$$

$$\operatorname{Tg}2\varphi = \frac{-b}{a - c}, \quad \operatorname{Co}^2\varphi = \frac{k + a - c}{2k}, \quad \operatorname{Co}2\varphi = \frac{a - c}{k} \qquad \mathbf{1}$$

so erhält man statt 135 : 1

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} = 1 \quad \text{wo} \quad h = b \cdot d \cdot e - a \cdot e^2 - c \cdot d^2$$

$$\mathfrak{a}^2 = \frac{2(h - fg)}{g(a + c - k)} \qquad \mathfrak{b}^2 = \frac{2(h - fg)}{g(a + c + k)} \qquad \mathbf{2}$$

Es sind somit die Linien zweiten Grades nach beiden Axen symmetrisch, und die in sie fallenden Sehnen gleich $2\mathfrak{a}$ (grosse Axe) und $2\mathfrak{b}$ (kleine Axe). Diejenigen Punkte der grossen Axe, welche von den Endpunkten oder **Scheiteln** der kleinen Axe um die halbe grosse Axe abstehen, heissen **Brennpunkte**, ihre Entfernungen $\mathfrak{a}\,e$ vom Mittelpunkte **Excentricität**, und die Ordinaten $\mathfrak{p}$ in den Brennpunkten **Parameter**, so dass

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}^2 e^2 + \mathfrak{b}^2 \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{b}^2 : \mathfrak{a} \quad \mathfrak{a} = -\mathfrak{p}(a + c + k)^2 : g \qquad \mathbf{3}$$

Man sieht aus diesen Beziehungen, dass die Werte

$g = -$	$e < 1$	$\mathfrak{a} = +$	$\mathfrak{b} = +$
0	$= 1$	∞	∞
$+$	> 1	$-$	i

miteinander korrespondieren, und hierauf stützt sich die Einteilung der Linien 2. Grades in **Ellipsen** ($g = -$), **Parabeln** ($g = 0$) und **Hyperbeln** ($g = +$). — Verlegt man den Anfangspunkt in einen Scheitel der grossen Axe, so erhält man für Ellipse, Parabel, Hyperbel

$$y^2 = 2\mathfrak{p}x - \mathfrak{p}\,x^2 : \mathfrak{a} \quad y^2 = 2\mathfrak{p}x \quad y^2 = 2\mathfrak{p}x + \mathfrak{p}\,x^2 : \mathfrak{a} \qquad \mathbf{4}$$

Sind r, v die Polarkoordinaten in Beziehung auf die Brennpunkte, so hat man

$$r = \sqrt{(x \pm \alpha e)^2 + y^2} = \alpha \pm e x = p : (1 + e \cdot \mathrm{Co}\, v) \qquad \mathbf{5}$$

so dass für die Ellipse die Summe, — für die Hyperbel die Differenz der Radienvektoren gleich der grossen Axe ist. Bildet letztere mit der Abscissenaxe einen Winkel n, so geht 5 in

$$p = r\,[1 + e \cdot \mathrm{Co}\,(v - n)] \qquad \mathbf{6}$$

über, so dass drei Wertepaare (r, v) genügen um p, e, n zu berechnen.

138 [70]. **Die Tangenten und Normalen.** Bezeichnen x_1 und $x_1 + i$ die Abscissen zweier Punkte einer Kurve $y = f(x)$, so hat die Letztere verbindende Gerade (132 : 4; 60) die Gleichung

$$y - y_1 = \frac{f(x_1 + i) - f(x_1)}{(x_1 + i) - x_1}(x - x_1) = [f'(x_1) + \frac{i}{2} f''(x_1) + \ldots](x - x_1)$$

Für $i = 0$ gehen die beiden Punkte in einen Doppelpunkt, die Sekante in eine Tangente über, und es hat letztere, wenn $d\,y_1 : d\,x_1 = p$ ist, die Gleichung

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1) = p \cdot (x - x_1) \qquad \mathbf{1}$$

die zu ihr senkrechte Normale aber (132)

$$y - y_1 = -(x - x_1) : p \qquad \mathbf{2}$$

139 [70]. **Der Krümmungskreis.** Bezeichnen x, $x + i$ und $x - i$ die Abscissen dreier Punkte der Kurve $y = f(x)$, — A, B, R aber Mittelpunktskoordinaten und Radius des durch sie bestimmten Kreises, so hat man (134) $R^2 = [x - A]^2 + [f(x) - B]^2 = [x \pm i - A]^2 + [f(x \pm i) - B]^2$ und hieraus folgen (60)

$$B = \frac{1 + f(x) f''(x) + f'(x)^2 + i \cdot \varphi(x, i)}{f''(x) + i \cdot \psi(x, i)}$$

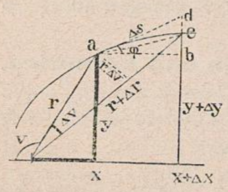
$$A = x + [f(x) - B]\, f'(x) + i \cdot \theta(x, i)$$

Setzt man $i = 0$, so wird aus den drei Punkten ein dreifacher Punkt und der Kreis zum sog. **Krümmungskreise**, für welchen daher, wenn $k = 1 + f'(x)^2$ ist,

$$A = x - \frac{kf'(x)}{f''(x)} \qquad B = f(x) + \frac{k}{f''(x)} \qquad R = \frac{k^{3/2}}{f''(x)}$$

Der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Kurve heisst **Evolute,** — diejenige Kurve, welche eine gegebene Linie zur Evolute hat, **Evolvente** derselben.

140 [71]. **Die Quadratur.** Betrachtet man die von zwei, den Abscissen x und $x + \Delta x$ entsprechenden Ordinaten y und $y + \Delta y$, der Kurve und der Abscissenaxe eingeschlossene Fläche als Flächenelement, so hat man



$$y \cdot \Delta x < \Delta F < (y + \Delta y) \Delta x$$

also $df = y \cdot dx$ und entsprechend $df = \frac{1}{2} r^2 \cdot dv$ für das von r, $r + \Delta r$ und der Kurve eingeschlossene Flächenelement, so dass, wenn a, b die Grenzwerte von x, und α, β diejenigen von v bezeichnen,

$$f = \int_a^b y \cdot dx \qquad \text{und} \qquad f = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 \cdot dv$$

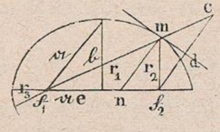
Die zur sog. **Quadratur** geforderte Integration wird mechanisch durch Umfahren mit den sog. **Planimetern** von Gonella-Oppikofer, Amsler, etc. erhalten.

141 [71]. **Die Rektifikation.** Für das Bogenelement Δs hat man (s. Fig. 140) $ae < \Delta s < ad + de$ also, wenn $\operatorname{Tg} \varphi = dy : dx = p$ und $dr : dv = q$ ist

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + p^2} \text{ oder } s = \int_a^b \sqrt{1 + p^2} \cdot dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + q^2} \cdot dv$$

142 [74]. **Die Ellipse.** Sucht man eine Reihe von Punkten m auf, welche von zwei gegebenen Punkten F_1 und F_2 dieselbe Distanzensumme $r_1 + r_2 = 2a$

haben, so erhält man (137) eine Ellipse der Brennpunkte F_1 und F_2. Macht man $mc = r_2$ und $md \perp cF_2$, so ist $r_1 + r_2$ (87) die kürzeste Verbindung von F_1 und F_2 mit md, — also liegt jeder andere Punkt von md ausser der Ellipse, oder es ist md Tangente, — die dazu Senkrechte mn aber, welche $\angle(r_1, r_2)$ halbiert, Normale in m.



143 [74, 75]. **Weitere Beziehungen.** Da aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse (137)

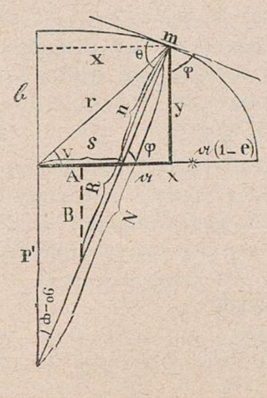
$$f'(x) = -\mathfrak{b}^2 x : \mathfrak{a}^2 y \qquad f''(x) = -\mathfrak{b}^4 : \mathfrak{a}^2 y^3 \qquad \mathbf{1}$$

folgen, so werden für sie (138, 139) Tangente, Normale und Krümmungskreis durch

$$y - y_1 = -\frac{\mathfrak{b}^2 x_1}{\mathfrak{a}^2 y_1}(x - x_1) \qquad y - y_1 = \frac{\mathfrak{a}^2 y_1}{\mathfrak{b}^2 x_1}(x - x_1) \qquad \mathbf{2}$$

$$A = \frac{\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^4} x^3 \quad B = \frac{\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{b}^4} \cdot y^3 \quad R = \frac{(\mathfrak{a}^4 y^2 + \mathfrak{b}^4 x^2)^{3/2}}{\mathfrak{a}^4 \cdot \mathfrak{b}^4} \qquad \mathbf{3}$$

bestimmt. Ferner hat man, wenn α die sog. Abplattung und $\beta = \sqrt{1 - e^2 \mathrm{Si}^2 \varphi}$ ist



$$\alpha = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) : \mathfrak{a} \quad e^2 = 2\alpha - \alpha^2$$

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(1 - \alpha) \quad p = \mathfrak{b}(1 - \alpha)^2 \qquad \mathbf{4}$$

$$\mathrm{Tg}\,\varphi = \mathfrak{a}^2 \cdot \mathrm{Tg}\,v : \mathfrak{b}^2, \quad s = e^2 \cdot x$$

$$x = r \cdot \mathrm{Co}\,v = \mathfrak{a} \cdot \mathrm{Co}\,\varphi : \beta \qquad \mathbf{5}$$

$$y = x \cdot \mathrm{Tg}\,v$$

$$r = \mathfrak{a} \cdot \mathrm{Se}\,v : \sqrt{1 + \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Tg}\,v} \fallingdotseq \mathfrak{a}(1 - \alpha \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi) \qquad \mathbf{6}$$

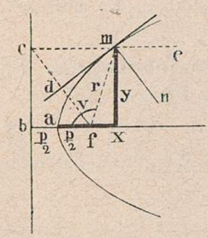
$$N = \mathfrak{a} : \beta \quad n = (1 - e^2) N \fallingdotseq p(1 + \alpha \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi) \qquad \mathbf{7}$$

$$R = \frac{\mathfrak{b}^2 x^3}{\mathfrak{a}^4 \, Co^3 \varphi} = \mathfrak{a}(1 - e^2) : \beta^{3/2} = \mathfrak{b}^2 \cdot N^3 : \mathfrak{a}^4 \qquad \mathbf{8}$$

Endlich erhält man (140, 141) für den Ellipsenquadranten

$$f = {}^1/_4 \, \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cdot \pi \quad s = {}^1/_2 \, \mathfrak{a}\pi (1 - {}^1/_4 \, e^2) \qquad \mathbf{9}$$

144 [76]. **Die Parabel.** Ist $fb \perp bc$, fc beliebig, $fd = dc$, $dm \perp cf$ und $cm \parallel bf$, so ist (137) m ein Punkt der Parabel des Brennpunktes f, Scheitels a und Parameters $p = 2q$. Die Hülfslinie dm hat nur m mit der Parabel gemein oder ist Tangente, — die Normale $mn \perp dm$ hälftet $\angle emf$, — bc heisst **Leitlinie** (Direktrix) — Aus 137:5 folgt die Polargleichung



$$r = 2q : (1 + Co\, v) = q \cdot Se^2 \, {}^1/_2 \, v = q + x$$

145 [76]. **Weitere Beziehungen.** Die Parabel hat (138) die Tangentengleichung

$$y - y_1 = p(x - x_1) : y_1 \qquad \mathbf{1}$$

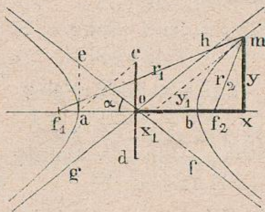
aus der folgt, dass die Tangente in der Distanz x_1 hinter dem Scheitel auf die Abscissenaxe trifft. Für die Quadratur der Parabel folgt (140)

$$F = {}^2/_3 \, x \cdot y = {}^1/_6 \, y^3 : q \qquad \mathbf{2}$$

Teilt man eine durch die Abscissenaxe, ein Kurvenstück und zwei Ordinaten der Distanz x begrenzte Fläche F durch gleichabstehende Ordinaten in 2n Streifen, und betrachtet die von den paaren Ordinaten bestimmten Kurvenabschnitte als Parabelbogen, so erhält man die **Simpson'sche Regel**

$$F = {}^1/_6 \, x \left[y_0 - y_{2n} + 2 \sum_1^n (y_{2h} + 2 \cdot y_{2h-1}) \right] : n \qquad \mathbf{3}$$

146 [77]. **Die Hyperbel.** Sucht man eine Reihe von Punkten m auf, welche von zwei gegebenen Punkten f_1 und f_2 dieselbe Distanzendifferenz $r_1 - r_2 = 2a = ab < f_1 f_2$ besitzen, so erhält man (137) eine Hyperbel, die aus zwei unendlichen Ästen besteht, die beiden Punkte f_1 und f_2 zu Brennpunkten, ab zur grossen und, wenn $ac = of_1$ ist, $cd = 2b = 2a \sqrt{e^2 - 1}$ zur kleinen Axe hat. Ist $a = b$, so heisst die Hyperbel **gleichseitig.**



147 [77]. **Weitere Beziehungen.** Da für die Hyperbel (137)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{also} \qquad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \qquad \mathbf{1}$$

so nähern sich ihr bei zunehmendem x die Geraden

$$y = \pm x \cdot b : a = \pm x \operatorname{Tg} \alpha \qquad \mathbf{2}$$

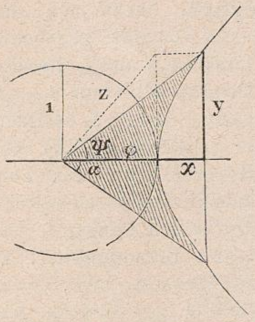
fortwährend und heissen **Asymptoten.** Führt man in 1 die auf letztere als Axen bezogenen schiefwinkligen Koordinaten x_1 und y_1 ein, so erhält man die Asymptotengleichung

$$4 x_1 y_1 = a^2 + b^2 \qquad \mathbf{3}$$

Die Konstante $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ heisst **Potenz** der Hyperbel. — Ist $a = b = 1$ und führt man $y, x, y : x$ als **hyperbolische** Sinus, Cosinus, Tangens (Sih, Coh, Tgh) der Doppelfläche

$$\varphi = x \cdot y - 2 \int_1^x y \cdot dx = \operatorname{Ltg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\psi) : \operatorname{Lg} e \qquad \mathbf{4}$$

ein, so bestehen die, ihre Verwandtschaft mit den frühern goniometrischen Funktionen (50, 95) kenn-



zeichnenden und zu manchen Transformationen bequemen Formeln

$$\mathrm{Sih}\,\varphi = \mathrm{Tg}\,\psi \quad \mathrm{Coh}\,\varphi = \mathrm{Se}\,\psi$$

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{Si}\,\psi \qquad \mathbf{5}$$

$$\mathrm{Tgh}\,\varphi = \mathrm{Sih}\,\varphi : \mathrm{Coh}\,\varphi$$

$$\mathrm{Coh}^2\,\varphi - \mathrm{Sih}^2\,\varphi = 1$$

$$(\mathrm{Coh}\,\varphi \pm \mathrm{Sih}\,\varphi)^n = \mathrm{Coh}\,n\varphi \pm \pm \mathrm{Sih}\,n\varphi = e^{\pm n\varphi} \qquad \mathbf{6}$$

Die Winkel α und ψ heissen **Augulus communis und transcendens.** Vgl. [78] und Tab. IV^b.

148. Die sog. besondern Punkte. Zu den besondern Punkten der Kurven gehören unter Anderm die **Wendepunkte**, wo die Ordinate ein Maximum oder Minimum annimmt, — die **Inflexionspunkte**, wo die Konkavität in Konvexität übergeht, — die **Spitzen**, in denen sich zwei Äste der Kurve vereinigen, und eine gemeinschaftliche Tangente haben, — die **vielfachen Punkte**, in denen sich zwei oder mehr Äste einer Kurve schneiden, ohne eine gemeinschaftliche Tangente zu besitzen, — die **isolierten Punkte** einer Kurve, die sich ergeben, wenn für eine bestimmte Abscisse die Ordinate reell, für jede noch so kleine Veränderung derselben aber imaginär wird, — etc.

149 [79]. **Einige Kurven dritten Grades.** Der Ort der Gleichung

$y^3 = ax^2$ . . . . **1** heisst Neil's Parabel

$x^3 + y^3 = axy$ . . **2** Folium Cartesii

$y^2 = x^3 : (a - x)$. **3** Cissoide des Diokles.

150 [79]. **Einige Kurven vierten Grades.** Der Ort der Gleichung

$x^2 \cdot y^2 = (a + y)^2 (b^2 - y^2)$ **1** heisst Conchoide

$x^2 + y^2 = \sqrt{4a^2x^2 + b^4} - a^2$ **2** Cassinoide

$x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$ . . **3** Lemniscate

151 [79]. **Einige transcendente Kurven.** Der Ort der Gleichung

$x = a^y$ . . . . **1** heisst Logistik

$y = \mathrm{Si}\, x$ . . . . **2** Sinusoide

$y = \frac{1}{2} h (e^{x:h} + e^{-x:h})$ · **3** Kettenlinie.

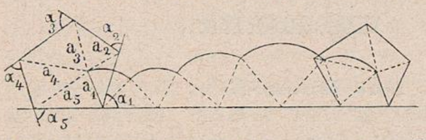
152 [79]. **Einige Spiralen.** Der Ort der Gleichung

$r = \upsilon : 2\pi$ . . **1** heisst Archimedische Spirale

$\upsilon = \mathrm{Ln}\, r$ . . **2** logarithmische Spirale

$r^2 = \upsilon : 2\pi$ . . **3** parabolische Spirale

153 [80]. **Die Rolllinien.** Rollt ein konvexes Vieleck der Fläche f auf einer Geraden, so beschreibt jeder



damit verbundene Punkt eine aus Kreisbogen bestehende sog. **Rolllinie**, welcher nach einer vollen Umwälzung (129) die Fläche

$$F = f + \tfrac{1}{2} \sum a^2 \alpha \qquad \mathbf{1}$$

entspricht. Setzt man die Konstanten m gleich α, und ist φ die vom Schwerpunkte beschriebene Fläche, so wird

$$F = f + \tfrac{1}{2}(\Sigma r^2 \alpha + r^2 \Sigma \alpha) = f + \tfrac{1}{2}\Sigma r^2 \alpha + r^2 \pi \quad \mathbf{2}$$

$$\varphi = f + \tfrac{1}{2}\Sigma r^2 \alpha \quad \text{also} \quad F = \varphi + r^2 \pi \quad \mathbf{3}$$

Diese merkwürdige Beziehung gilt auch noch, wenn das Vieleck in eine Kurve übergeht.

154 [80]. **Die Cykloide.** Rollt ein Kreis des Radius a auf einer Geraden den Winkel $\mathfrak{v}$ ab, so beschreibt ein vom Centrum um b abstehender Punkt eine Rolllinie, für welche

$$x = a\mathfrak{v} - b\,\mathrm{Si}\,\mathfrak{v} \qquad y = a - b \cdot \mathrm{Co}\,\mathfrak{v}$$

$$x = a\,\mathrm{Aco}\,(a - y) : b - \sqrt{b^2 - (a - y)^2}$$

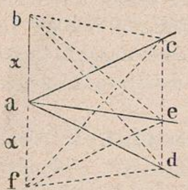
Je nachdem $b =, <, > a$ heisst diese Rolllinie **gemeine, verlängerte** oder **verkürzte Cykloide.** Inhalt und Länge der gemeinen Cykloide werden (153, 141) durch $F = 3a^2\pi$ und $S = 8a$ gegeben. — Rollt der Kreis auf oder in einem Kreise, so heisst die entstehende Kurve **Epicykloide** oder **Hypocykloide.**

XVI. Das Raumdreieck und die Raumtrigonometrie.

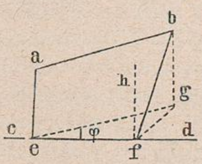
155 [81]. **Das Raum-Eck.** Eine Ebene wird durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte bestimmt, und schneidet jede andere Ebene in einer Geraden, der **Kante** (Spur, Knotenlinie). — Dreht sich abwechselnd eine in einer Ebene befindliche Gerade um einen als Pol gewählten ihrer Punkte und dann die Ebene um die Gerade, so entsteht, wenn nach n Doppelbewegungen Gerade und Ebene wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehren, ein **n-Kant** oder **Raum-n-Eck.** Die Drehwinkel der Geraden heissen

Kantenwinkel, diejenigen der Ebene **Flächenwinkel**. Die Kanten, Kantenwinkel und Flächenwinkel des n-Kants entsprechen den Ecken, Seiten und Winkeln des n-Ecks.

156 [81]. **Die Senkrechten und Projektionen.** Eine Gerade a b steht (83, 86) auf allen



durch ihren Fusspunkt a gehenden Geraden einer Ebene (z. B. auf a e) senkrecht, sobald sie auf zweien derselben (a c und a d) senkrecht steht, und heisst dann **senkrecht** zur Ebene. Die Senkrechte ist offenbar die kürzeste Verbindung des Punktes b mit der Ebene, und alle Punkte der Letztern, welche von b gleich weit abstehen, stehen auch von a, der sog. **Projektion** von b auf die Ebene, gleich weit ab. — Ist a e ⊥ c d ⊥ b f,



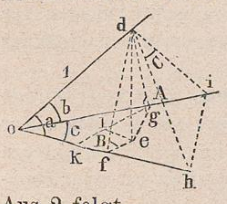
so heisst e f Projektion von a b auf c d, und wenn e g ∥ a b mit c d den Winkel φ bildet, so ist e f = a b · Co φ. — Projiziert man auf eine Gerade alle Seiten eines ebenen oder räumlichen Vielecks, so ist die Projektion irgend einer Seite gleich dem Gegensatze der algebraischen Summe aller andern; haben daher zwei Vielecke eine gemeinschaftliche Seite, so sind für eine und dieselbe Gerade die Summen der Projektionen aller übrigen Seiten derselben einander gleich.

157 [81]. **Die Parallelen.** Sind zwei Gerade zu einer dritten parallel, so sind sie es auch unter sich, und Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln sind (89, 86) gleich. Parallele zu einer Senkrechten stehen senkrecht, und Senkrechte zu derselben Ebene sind parallel. Eine Parallele zu einer Geraden einer Ebene kann Letztere nicht schneiden, und ist daher auch als parallel mit ihr zu betrachten.

158 [81]. **Eigenschaften der Projektionen.** Steht eine Gerade auf einer Geraden einer Ebene senkrecht, so steht (156, 84) auch ihre Projektion zu derselben senkrecht. Jede Gerade bildet mit ihrer Projektion auf eine Ebene einen kleinern Winkel als mit einer andern Geraden derselben, und dieser kleinste Winkel dient als Mass der Neigung der Geraden gegen die Ebene.

159 [81]. **Die Senkrechtenwinkel.** Wenn auf zwei Kanten Senkrechte in den sie bildenden Ebenen gezogen werden, so haben (156) die Flächenwinkel gleiche Grösse, wenn diese **Senkrechtenwinkel** einander gleich sind. — Teilt man einen Senkrechtenwinkel in gleiche Teile, und legt durch die Teillinien und die Kante Ebenen, so zerfällt auch der Flächenwinkel in gleiche Teile, folglich sind die Flächenwinkel den Senkrechtenwinkeln proportional und werden durch sie gemessen. — Jede Ebene, welche durch eine Senkrechte zu einer Ebene gelegt wird, steht auch senkrecht, und zwei zu einer dritten Ebene senkrechte Ebenen haben eine zu ihr senkrechte Kante.

160 [87, 90]. **Grundbeziehungen am Raumdreiecke.** Sind $a = 2\mathfrak{a}$, $b = 2\mathfrak{b}$, $c = 2\mathfrak{c}$ die Seiten eines Raumdreieckes, $A = 2\mathfrak{A}$, $B = 2\mathfrak{B}$, $C = 2\mathfrak{C}$ ihre Gegenwinkel, so hat man (94, 104)



$$\mathrm{Si}\,a : \mathrm{Si}\,b = \mathrm{Si}\,A : \mathrm{Si}\,B \qquad \mathbf{1}$$

$$\mathrm{Co}\,c = \mathrm{Co}\,a \cdot \mathrm{Co}\,b + \mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Si}\,b \quad \mathrm{Co}\,C \qquad \mathbf{2}$$

Aus 2 folgt

$$\mathrm{Co}\,c = \mathrm{Co}\,a \cdot \mathrm{Co}\,(b - x) \cdot \mathrm{Se}\,x \text{ wo } \mathrm{Tg}\,x = \mathrm{Tg}\,a \cdot \mathrm{Co}\,C \qquad \mathbf{3}$$

ferner, wenn auch a die grösste Seite,

$\mathrm{Co}\,c < \mathrm{Co}\,(a - b)$ oder $c > a - b$ oder $a < b + c$

und endlich, wenn s die halbe Summe der Seiten

$$\mathrm{Si}\,\mathfrak{C} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}\,(s-a)\,\mathrm{Si}\,(s-b)}{\mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Si}\,b}}, \quad \mathrm{Co}\,\mathfrak{C} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}\,s \cdot \mathrm{Si}\,(s-c)}{\mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Si}\,b}} \qquad \mathbf{4}$$

161 [90]. **Die Gauss'schen Formeln und die Neper'schen Analogien.** Mit Hülfe von 160:4 findet man die sog. Gauss'schen Formeln

$$\mathrm{Si}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \frac{\mathrm{Co}\,\mathfrak{C}}{\mathrm{Co}\,\mathfrak{c}} \cdot \mathrm{Co}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}), \quad \mathrm{Si}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) = \frac{\mathrm{Co}\,\mathfrak{C}}{\mathrm{Si}\,\mathfrak{c}} \cdot \mathrm{Si}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})$$

$$\mathrm{Co}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \frac{\mathrm{Si}\,\mathfrak{C}}{\mathrm{Co}\,\mathfrak{c}} \cdot \mathrm{Co}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}), \quad \mathrm{Co}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) = \frac{\mathrm{Si}\,\mathfrak{C}}{\mathrm{Si}\,\mathfrak{c}} \cdot \mathrm{Si}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \qquad \mathbf{1}$$

und aus ihnen die Neper'schen Analogien

$$\mathrm{Tg}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \frac{\mathrm{Co}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{\mathrm{Co}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}\,\mathrm{Ct}\,\mathfrak{C}, \quad \mathrm{Tg}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}) = \frac{\mathrm{Si}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})}{\mathrm{Si}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})}\,\mathrm{Ct}\,\mathfrak{C}$$

$$\mathrm{Tg}\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \frac{\mathrm{Co}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})}{\mathrm{Co}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}\,\mathrm{Tg}\,\mathfrak{c}, \quad \mathrm{Tg}\,(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}) = \frac{\mathrm{Si}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})}{\mathrm{Si}\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}\,\mathrm{Tg}\,\mathfrak{c} \qquad \mathbf{2}$$

162 [90]. **Weitere Beziehungen.** Nach 160:2 ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Co}\,a &= \mathrm{Co}\,b \cdot \mathrm{Co}\,c + \mathrm{Si}\,b \cdot \mathrm{Si}\,c \cdot \mathrm{Co}\,A \\ \mathrm{Co}\,b &= \mathrm{Co}\,a \cdot \mathrm{Co}\,c + \mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Si}\,c \cdot \mathrm{Co}\,B \end{aligned} \qquad \mathbf{1}$$

und hieraus folgen successive

$$\mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Co}\,B = \mathrm{Co}\,b \cdot \mathrm{Si}\,c - \mathrm{Si}\,b \cdot \mathrm{Co}\,c \cdot \mathrm{Co}\,A \qquad \mathbf{2}$$

$$\mathrm{Si}\,A \cdot \mathrm{Ct}\,B = \mathrm{Ct}\,b \cdot \mathrm{Si}\,c - \mathrm{Co}\,c \cdot \mathrm{Co}\,A \qquad \mathbf{3}$$

$$\mathrm{Tg}\,B = \mathrm{Si}\,x \cdot \mathrm{Tg}\,A \cdot \mathrm{Cs}\,(c - x) \text{ wo } \mathrm{Tg}\,x = \mathrm{Tg}\,b \cdot \mathrm{Co}\,A \qquad \mathbf{4}$$

163 [92]. **Fehlergleichungen.** Durch Differentiation von 162:1 und 160:2 erhält man

$$da = \mathrm{Co}\,C \cdot db + \mathrm{Co}\,B \cdot dc + \mathrm{Si}\,B \cdot \mathrm{Si}\,c \cdot dA \qquad \mathbf{1}$$

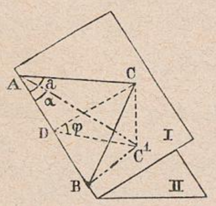
$$db = \mathrm{Co}\,A \cdot dc + \mathrm{Co}\,C \cdot da + \mathrm{Si}\,C \,.\, \mathrm{Si}\,a \cdot dB \qquad \mathbf{2}$$

$$dc = \mathrm{Co}\,B \cdot da + \mathrm{Co}\,A \cdot db + \mathrm{Si}\,A \cdot \mathrm{Si}\,b \cdot dC \qquad \mathbf{3}$$

und dadurch die Mittel den Einfluss kleiner Veränderungen der bestimmenden Elemente zu berechnen.

164 [81]. **Parallele Ebenen.** Zwei Ebenen, welche mit einer dritten Ebene parallele Kanten und gleiche korrespondierende oder Wechselwinkel bilden, heissen **parallel**, — haben (157—59) überall denselben Abstand und schneiden sich somit im Endlichen nicht. Parallele zwischen parallelen Ebenen sind gleich, — und jede zwei Gerade werden durch ein System von parallelen Ebenen proportional geschnitten.

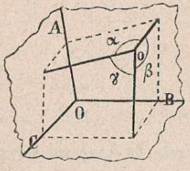
165 [81]. **Die Flächenprojektionen.**



Projiziert man ein Dreieck auf eine durch seine grösste Seite oder Basis gelegte Ebene, so sind die Basiswinkel der Projektion kleiner als die Basiswinkel des Dreiecks (z. B. $\alpha < a$, entsprechend $DC' < DC$), — folglich ist der Winkel an der Spitze in der Projektion grösser als im Dreiecke. Hat Letzteres die Fläche F und ist φ der Projektionswinkel, so ist $F \cdot \mathrm{Co}\,\varphi$ die Fläche der Projektion, — eine Beziehung, welche sich leicht auf jede Fläche und ihre Projektion ausdehnen lässt.

166 [82]. **Weitere Eigenschaft des Dreikants.** Projiziert man die Seiten eines Dreikants auf eine dasselbe schneidende Ebene, so ist die Summe der Projektionen gleich 360^0; also ist (165) die Summe der Seiten eines Dreikants notwendig kleiner als eine Umdrehung.

167 [82]. **Das Polardreieck und der Excess.** Fällt man von einem innerhalb eines Dreikants liegenden Punkte o Senkrechte auf die Seiten



desselben, so bestimmen die drei Senkrechten ein neues Dreikant, welches **Polardreikant** des ersten heisst, und umgekehrt jenes erste zum Polardreikant hat. Jede Seite eines Dreikants ist (159, 113) zu dem Gegenwinkel des Polardreikants supplementär und umgekehrt, so dass die Summe der Winkel eines Raumdreiecks die Seitensumme seines Polardreiecks zu 6 R ergänzt; folglich (166) einen **Excess** 2e über die Winkelsumme des ebenen Dreiecks hat, der zwischen 0 und 4 R liegt, während

$$\text{Si}\, e = -\text{Co}\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \text{Si}\,\mathfrak{a} \cdot \text{Si}\,\mathfrak{b} \cdot \text{Se}\,\mathfrak{c} \cdot \text{Si}\, C$$

168 [88]. **Umsetzungen mit Hülfe des Polardreiecks.** — Schreibt man eine für ein Raumdreieck geltende Beziehung für ein Polardreieck auf, und ersetzt dann die vorkommenden Elemente durch ihre Supplemente aus dem ursprünglichen Dreiecke, so findet man z. B.

$$\text{Co}\, C = -\text{Co}\, A \cdot \text{Co}\, B + \text{Si}\, A \cdot \text{Si}\, B \cdot \text{Co}\, c \qquad \mathbf{1}$$

$$= -\text{Co}\, A \cdot \text{Co}\,(B + x) \cdot \text{Se}\, x \quad \text{wo} \quad \text{Tg}\, x = \text{Tg}\, A \cdot \text{Co}\, c \qquad \mathbf{2}$$

$$\text{Tg}\, \mathfrak{c} = \sqrt{\text{Si}\, e \cdot \text{Si}\,(C - e) \cdot \text{Cs}\,(A - e) \cdot \text{Cs}\,(B - e)} \qquad \mathbf{3}$$

$$\text{Si}\, A \cdot \text{Co}\, b = \text{Co}\, B \cdot \text{Si}\, C + \text{Si}\, B \cdot \text{Co}\, C \cdot \text{Co}\, a \qquad \mathbf{4}$$

$$\text{Si}\, a \cdot \text{Ct}\, b = \text{Ct}\, B \cdot \text{Si}\, C + \text{Co}\, C \cdot \text{Co}\, a \qquad \mathbf{5}$$

$$dA = -\text{Co}\, c \cdot dB - \text{Co}\, b \cdot dC + \text{Si}\, b \cdot \text{Si}\, C \cdot da \qquad \mathbf{6}$$

169 [87]. **Die Raumtrigonometrie.** Sind in einem Raumdreiecke alle drei Seiten gegeben, so kann man nach (160:4), — sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, nach (160:3, 1, oder 161:3 und 160:1), — sind eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben, nach (168:2 und 160:1, oder 161:2 und 160:1), — sind alle drei Winkel gegeben, nach (168 : 3) je die übrigen Elemente berechnen. — Speciell wird für $C = 90^0$

$\mathrm{Si\,a} = \mathrm{Si\,c} \cdot \mathrm{Si\,A}$	$\mathrm{Tg\,a} = \mathrm{Tg\,A} \cdot \mathrm{Si\,b}$	**1**
$\mathrm{Co\,c} = \mathrm{Co\,a} \cdot \mathrm{Co\,b}$	$\mathrm{Ct\,c} = \mathrm{Ct\,b} \cdot \mathrm{Co\,A}$	**2**
$\mathrm{Co\,A} = \mathrm{Co\,a} \cdot \mathrm{Si\,B}$	$\mathrm{Ct\,A} = \mathrm{Co\,c} \cdot \mathrm{Tg\,B}$	**3**

170 [82]. **Symmetrie und Kongruenz.** Fällt man auf eine Seite des Raumdreiecks von einem Punkte der Gegenkante eine Senkrechte und verlängert diese über ihren Fusspunkt hinaus um ihre eigene Länge, so bestimmt die Verbindungslinie des so erhaltenen Punktes mit dem Scheitel ein neues Raumdreieck, welches zu dem gegebenen in Beziehung auf die gemeinschaftliche Seite **symmetrisch** ist, und mit ihm (ohne kongruent zu sein) alle Seiten und Winkel gleich hat. — Haben zwei Raumdreiecke drei bestimmende Elemente gleich, so sind sie kongruent oder nur symmetrisch gleich, je nachdem das eine in die Lage des andern oder nur in die Gegenlage gebracht werden kann.

XVII. Das Vierflach und Vielflach.

171 [83]. **Das Polyeder.** Kann man durch eine Auswahl aus den $\frac{1}{2} \cdot n\,(n-1)$ Kanten, in welchen sich n Ebenen schneiden, sämtliche Ebenen so begrenzen, dass jede der gewählten Kanten beide Ebenen, denen sie angehört, begrenzen hilft, so erhält man eine Reihe von Vielecken, die einen Raum vollständig einschliessen, oder einen Körper, ein **n-Flach**, bilden. Für $n = 4, 5, 6, 8, 12, 20$, etc. heisst das n-Flach auch Tetraeder, Pentaeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder, etc., im allgemeinen Polyeder.

172 [83]. **Das Vierflach.** Der einfachste Körper ist das von 4 Dreiecken begrenzte Vierflach. Bezeichnen a, b, c, d seine Seiten, so erhält man (165) successive

$$a = b \cdot \mathrm{Co}\,(a, b) + c \cdot \mathrm{Co}\,(a, c) + d \cdot \mathrm{Co}\,(a, d) \qquad \mathbf{1}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2bc\,\mathrm{Co}\,(b, c) - 2bd\,\mathrm{Co}\,(b, d) - 2cd\,\mathrm{Co}\,(c, d) \qquad \mathbf{2}$$

Verbindet man eine Ecke eines Vierflachs mit einem Punkte der Gegenseite, und verlängert diese Verbindungslinie um ihre eigene Länge, so bestimmt der erhaltene Punkt mit der Seite das (für eine Senkrechte symmetrische) **Gegenvierflach**, welches mit dem Vierflach gleichen Rauminhalt haben muss, da (90) jeder durch die Gerade der Spitzen gelegten Ebene in beiden Vierflachen ein gleich grosser Schnitt entspricht. Zwei Vierflache, welche kongruente Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind beide mit demselben Gegenvierflache, und daher auch selbst gleich gross. Legt man durch die Mitte einer Tetraederkante und ihre beiden Gegenecken eine Ebene, so wird das Tetraeder halbiert.

173 [83]. **Das rechtwinklige Vierflach.** Stehen drei Seiten eines Vierflachs, z. B. b, c, d, paarweise zu einander senkrecht, d. h. ist es **rechtwinklig**, so wird

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 \qquad \mathbf{1}$$

Zwei rechtwinklige Vierflache, welche zwei von der rechten Ecke ausgehende Kanten gleich haben, verhalten sich (172) wie die dritte. — Sind daher A B C, a B C, a b C, a b c entsprechende Kanten von 4 rechtwinkligen Vierflachen der Inhalte oder Volumina $V V_1 v_1 v$, so hat man

$$V : V_1 = A : a \qquad V_1 : v_1 = B : b \qquad v_1 : v = C : c$$

folglich

$$V : v = A \cdot B \cdot C : a \cdot b \cdot c$$

oder wenn man (analog 92) den Inhalt gleich 1 setzt, falls die drei Kanten (Dimensionen) 1, 2, 3 sind,

$$V = \frac{A \cdot B \cdot C}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB}{2} \cdot C \qquad \mathbf{2}$$

174 [83]. **Der Rauminhalt des Vierflachs.** Da man die Grundfläche jedes Tetraeders in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen, und die Spitze (172) senkrecht über den Teilpunkt der Basis der Grundfläche bringen kann, so ist (173) der Inhalt jedes Tetraeders gleich ein Drittel des Produktes aus Grundfläche und Höhe, — oder (160), wenn a, b, c drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten α, β, γ aber deren Winkel bezeichnen,

$$V = {}^1/_3\, abc \sqrt{Si\, s \cdot Si\,(s - \alpha) \cdot Si\,(s - \beta) \cdot Si\,(s - \gamma)}$$

wo $2s = \alpha + \beta + \gamma$. — Jeder zu einer Seitenfläche eines Tetraeders parallele Schnitt ist ihr ähnlich.

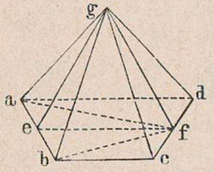
175 [83]. **Die Pyramide.** Bewegt sich eine Gerade um einen Punkt, und folgt dabei irgend einer Figur (Grundfläche) als Leitlinie, so entsteht die nach der Anzahl ihrer dreieckigen Seitenflächen benannte **Pyramide**, deren Inhalt (174) gleich dem Drittel des Produktes aus Grundfläche und Höhe ist, und die **gerade** heisst, wenn ihre Spitze senkrecht über dem Schwerpunkte der erstern steht. Ist die Leitlinie eine krumme Linie, so heisst die Pyramide **Kegel (Conus).** — Bezeichnen g, h, s Grundfläche, Höhe und Seitenfläche einer geraden Pyramide der Seitenkante k, deren Grundfläche ein regelmässiges n-Eck der Seite 2a ist, so hat man (93; 121 : 1), wenn $\varphi = 180^0 : n$ ist,

$$g = n \cdot a^2 \cdot Ct\,\varphi, \quad h = \sqrt{k^2 - a^2 \cdot Cs^2\,\varphi}, \quad s = a\sqrt{k^2 - a^2} \qquad \mathbf{1}$$

$$O = ns + g \qquad V = {}^1/_3\, gh \qquad \mathbf{2}$$

wo O die aus Mantel und Grundfläche bestehende sog.

Oberfläche, V das Volumen vorstellt. — Hat eine Pyramide ein Trapez zur Grundfläche, so nennt man das durch die Spitze und die Mitten der nicht parallelen Seiten der Grundfläche bestimmte Dreieck **Hauptschnitt** derselben. Die vier Ecken der Grundfläche haben von dem Hauptschnitte gleichen Abstand, und jede derselben bestimmt mit ihm ein Tetraeder, dessen Inhalt $^1/_4$ der Pyramide beträgt; die ganze Pyramide ist daher gleich $^4/_3$ des Produktes aus Hauptschnitt und Eckenabstand.



176 [83]. **Der Kegel.** Bei einem geraden Kegel der Höhe h und des Radius r sind alle Seitenkanten $k = \sqrt{r^2 + h^2}$, sein Mantel aber ist gleich einem Kreisausschnitte des Radius k und des Bogens $2r\pi$, so dass (175) die Formeln

$$V = {}^1/_3\, r^2 \pi h \qquad O = (k + r)\, r\pi$$

Volumen und Oberfläche zu berechnen lehren. (Vergl. 180.) — Wird ein Kegel des Winkels α in der Distanz d von der Spitze und unter dem Winkel φ zur Kante durch eine Ebene geschnitten, so erhält man für die Schnittlinie

$$y^2 = 2px + qx^2 \text{ wo } p = d\,\mathrm{Si}\varphi\,\mathrm{Tg}\alpha,\ q = \mathrm{Si}\varphi\,\mathrm{Si}(2\alpha - \varphi)\,\mathrm{Se}^2\alpha$$

Die Linien zweiten Grades sind somit **Kegelschnitte.**

177 [83]. **Das Prisma.** Bewegt sich eine Gerade parallel mit sich selbst, und folgt dabei irgend einer Figur als Leitlinie, so umschreibt sie einen **prismatischen Raum**; parallele Schnitte desselben sind (164, 89) kongruent, und bestimmen als Grundflächen ein **Prisma,** das nach der Anzahl der die Seitenflächen bildenden Parallelogramme benannt wird. Ist auch die Leitlinie ein Parallelogramm, so heisst das Prisma

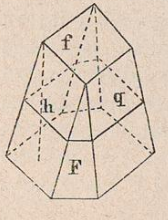
Zeilflach (Parallelepipedon), dagegen **Zylinder** (Walze), wenn sie eine krumme Linie ist. — Ein dreiseitiges Prisma lässt sich durch zwei Diagonalebenen (172) in drei gleiche Tetraeder zerlegen, und ist daher (174) gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe, — eine auf jedes Prisma ausdehnbare Regel.

178 [83]. **Der Zylinder.** Wird die Höhe h eines Zylinders durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte seiner Grundflächen des Radius r dargestellt, so ist sein Mantel gleich einem Rechtecke der Basis $2r\pi$ und Höhe h, und es bestehen daher (177) die Formeln

$$V = r^2\pi h \qquad O = 2(r + h) r\pi$$

179 [83]. **Das Prismoid.** Wird ein prismatischer Raum durch irgend zwei ebene Schnitte begrenzt, so heisst der entstehende Körper **Prismoid.** Ein dreiseitiges Prismoid lässt sich durch zu den Kanten senkrechte Querschnitte in ein Prisma und zwei Pyramiden zerlegen, ist daher gleich Querschnitt mal Mittel der parallelen Kanten.

180 [83]. **Der Obelisk.** Nennt man ein Vielflach mit zwei parallelen Grundflächen, dessen Seitenflächen Trapeze oder Dreiecke sind, **Obelisk**, so lässt sich derselbe, indem man alle Ecken mit einem Punkte des in halber Höhe geführten Querschnittes verbindet, in zwei auf den Grundflächen stehende Pyramiden und eine Reihe von Trapez-Pyramiden, deren Hauptschnitte den Querschnitt bilden, zerfällen, so dass der Obelisk ein Sechstel eines Prisma's von gleicher Höhe ist, dessen Grundfläche aus den beiden Grundflächen (F, f) und dem vierfachen Querschnitte (q) besteht.



Ist (wie bei dem abgekürzten Tetraeder) $F \infty q \infty f$, so wird (107)

$$q = \frac{1}{4}\left[f + 2\sqrt{Ff} + F\right] \text{ und } V = \frac{1}{3}h\left(f + \sqrt{Ff} + F\right) \quad \mathbf{1}$$

oder wenn F und f Kreise der Radien R und r sind,

$$q = \frac{1}{4}\pi(r^2 + 2Rr + R^2) \text{ und } V = \frac{1}{3}h\pi(r^2 + Rr + R^2) \quad \mathbf{2}$$

XVIII. Das centrische Vielflach und die Kugel.

181 [84]. **Der Euler'sche Satz.** Bezeichnet k die Anzahl der Kanten eines Polyeders, $f = f_3 + f_4 + \ldots$ die Anzahl seiner Flächen und $e = e_3 + e_4 + \ldots$ seiner Ecken, so ist offenbar

$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots = 2k = 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \ldots \quad \mathbf{1}$$

und wenn jede seiner Flächen der Form (0, 1) angehört, d. h. dasselbe **konvex** ist, so besteht die nach Euler benannte Beziehung

$$e + f = k + 2 \quad \mathbf{2}$$

Es lässt sich daraus ableiten, dass es nur fünf Arten von Polyedern giebt, bei welchen alle Flächen dieselbe Seitenzahl und alle Ecken dieselbe Kantenzahl besitzen, nämlich: Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder aus Dreiecken, Hexaeder aus Vierecken und Dodekaeder aus Fünfecken.

182 [84]. **Die regelmässigen Polyeder.** Ist ein Vielflach centrisch nach den Ecken oder Kanten, so ist (156, 158) auch jede seiner Flächen centrisch nach den Ecken oder Seiten; ist es centrisch nach den Seiten, so halbiert (158, 91) jede durch den Mittelpunkt und eine Kante gelegte Ebene den zugehörigen Vielflachwinkel. Wenn endlich, was aber (181) nur bei fünf Vielflachen zutreffen kann, derselbe Punkt in allen drei

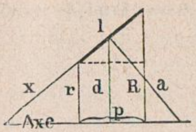
Beziehungen Centrum, oder das Vielflach **centrisch** ist, so hat es gleiche Kanten, Seiten und Winkel, oder ist **regelmässig**.

183 [84]. **Die Kugel.** Der räumliche Ort eines Punktes, der von einem Punkte (Centrum) einen unveränderlichen Abstand (Radius) hat, heisst **Kugelfläche**, — der von der Kugelfläche begrenzte, ein regelmässiges Unendlichflach darstellende Körper **Kugel**. — Steht eine Ebene von dem Kugelcentrum um den Radius ab, so hat sie (156) nur Einen Punkt mit der Kugel gemein oder tangiert sie in diesem Punkte; ist der Abstand kleiner, so schneidet sie die Kugelfläche (156) in einer Kreislinie, deren Centrum mit der Projektion des Kugelcentrums auf die Schnittebene zusammenfällt, und deren Radius um so grösser ist, je mehr sich der Schnitt dem Kugelcentrum nähert. Schnitten durch das Centrum entsprechen grösste Kreise, sog. **Hauptkreise**.

184 [84]. **Pol und Polarkreis.** Die Endpunkte des zu einem Kugelkreise senkrechten Kugeldurchmessers stehen (156) von allen Punkten desselben gleich weit, bei einem Hauptkreise um 90^0 ab; sie heissen **Pole** des Kreises, — die Kreise von gemeinschaftlichen Polen **Parallelkreise**, — der zu ihnen gehörende Hauptkreis **Polarkreis** (Equator). — Steht ein Punkt der Kugelfläche von zwei andern Punkten derselben um 90^0 ab, so ist er (156) Pol des sie verbindenden Hauptkreisbogens, und umgekehrt misst dieser (159) den Winkel am Pole.

185 [85]. **Die Guldin'sche Regel.** Dreht sich eine Ebene um eine ihrer Geraden als Axe, so beschreibt jede andere (176) eine Fläche

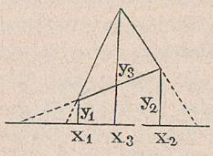
$$F = 2d\pi \cdot l = 2a\pi \cdot p \qquad \mathbf{1}$$



Bilden die Geraden $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ eine ebene gebrochene Linie, und bezeichnen $g_1\, g_2\, g_3 \ldots$ die Abstände ihrer Schwerpunkte von einer Drehaxe, g aber den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Linie, so ist (133) die entstehende Rotationsfläche

$$F = 2\pi \sum lg = 2\pi g \sum l \qquad \mathbf{2}$$

d. h. es besteht, wenn die gebrochene Linie in eine Kurve übergeht, die sog. Guldin'sche Regel. — Bezeichnen $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$ und $(x_3\, y_3)$ die Koordinaten der



auf eine Drehaxe ihrer Ebene bezogenen Ecken eines Dreieckes der Fläche F, G den Abstand des Schwerpunktes von der Drehaxe, und V das von dem Dreiecke bei einer Rotation beschriebene Volumen, so hat man (132, 133, 180) die Formeln

$$F = {}^1/_2\, [y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1)\, \qquad \mathbf{3}$$

$$G = {}^1/_3\, (y_1 + y_2 + y_3) \qquad V = 2G\pi \cdot F \qquad \mathbf{4}$$

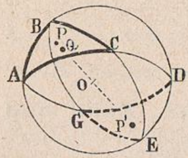
welche sich auf jede rotierende Figur ausdehnen lassen.

186 [85]. **Kugeloberfläche, Zone und Möndchen.** Nennt man einen zwischen zwei Parallelkreisen enthaltenen Teil der Kugelfläche **Kugelzone**, so ist (185) ihre Fläche gleich dem Produkte aus der Peripherie eines Hauptkreises in die Höhe der Zone. Setzt man Letztere gleich 2r, so ergiebt sich für die ganze Kugeloberfläche $4r^2\pi$. — Die Fläche eines von zwei Hauptkreisen begrenzten Teiles der Kugeloberfläche, eines sog. **Möndchens** (Kugelzweiecks), verhält sich (184) zur Kugeloberfläche wie sein Winkel zur Umdrehung.

187 [85]. **Kugelinhalt, Abschnitt und Ausschnitt.** Der Inhalt einer Kugel des Radius r ist (182, 186) gleich $\frac{4}{3}\,r^3\pi$. Haben somit ein Cylinder, ein Kegel und eine Kugel 2r zu Höhe und Durchmesser, so besteht der Archimedes'sche Satz, dass ersterer gleich der Summe der beiden letztern ist. — Bezeichnet h die Höhe eines Kugelabschnittes, J seinen Inhalt, und V den Inhalt des entsprechenden Kugelausschnittes, so ist (186, 182, 176)

$$V = \tfrac{2}{3}\,r^2\pi\,h \qquad J = \tfrac{1}{3}\,h^2\,(3r - h)\cdot\pi$$

188 [86]. **Das Kugeldreieck.** Verbindet man drei Punkte der Kugelfläche teils mit dem Mittelpunkte, teils paarweise durch Hauptkreise, so entstehen ein Dreikant und ein **sphärisches Dreieck**, deren Seiten und Winkel gleiches Mass haben. Es gehen somit die Elemente des Letztern alle für das Dreikant ausgesprochenen Beziehungen ein; sind jedoch seine Seiten in Länge gegeben, so hat man sie vor Einführung in die Formeln auf Winkel zu reduzieren. — Die den drei Winkeln A, B, C entsprechenden Möndchen übertreffen, da Kugelgegendreiecke (wie A B C und D E G) notwendig die gleiche Fläche F haben, die halbe Kugel um 2 F, so dass (186), wenn e den halben Excess bezeichnet,



$$F = \tfrac{1}{90}\,e^0 \cdot r^2\pi = 2\cdot e'' \cdot r^2 \cdot \mathrm{Si}\,1''$$

189 [91]. **Der Legendre'sche Satz.** Sind die Seiten eines Kugeldreieckes in Länge ausgedrückt (188), und im Verhältnisse zum Radius r so klein, dass man die 5ten Potenzen vernachlässigen darf, so ist (160, 50)

$$\mathrm{Co}\,A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{24bcr^2} \quad \mathbf{1}$$

Bezeichnet man daher die Winkel eines ebenen Dreiecks derselben Seiten mit A', B', C' und setzt seine Fläche f derjenigen des sphärischen Dreiecks gleich, so hat man (104 : 6; 105 : 2; 188)

$$\mathrm{Co}\,A = \mathrm{Co}\,A' - \frac{4b^2c^2\,\mathrm{Si}^2 A'}{24bcr^2} = \mathrm{Co}\,A' - \frac{2}{3}\,e\,\mathrm{Si}\,A'\cdot\mathrm{Si}\,1'' \qquad \mathbf{2}$$

Setzt man aber $A = A' + x$, so wird für ein kleines x

$$\mathrm{Co}\,A = \mathrm{Co}\,A' - x\,\mathrm{Si}\,A'\cdot\mathrm{Si}\,1'' \quad \text{oder} \quad x = {}^2/_3\,e$$

so dass

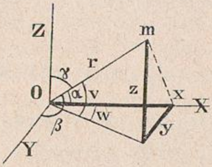
$$A' = A - {}^2/_3\,e \qquad \mathbf{3}$$

ist, oder ein kleines sphärisches Dreieck, nachdem man von jedem Winkel $^1/_3$ des Excesses abgezogen hat, wie ein ebenes Dreieck behandelt werden kann.

190 [86]. **Weitere Sätze.** Im sphärischen Dreiecke liegt einer gleichen oder grössern Seite auch ein gleicher oder grösserer Winkel gegenüber. Die Hauptkreise, welche die Seiten eines sphärischen Dreiecks normal halbieren, oder welche durch die Ecken normal zu den Gegenseiten gezogen werden, oder welche seine Winkel halbieren, schneiden sich je in Einem Punkte, dem Centrum der Ecken, dem Höhenpunkte und dem Centrum der Seiten. Jede sphärische Transversale schneidet die Seiten eines sphärischen Dreieckes oder ihre Verlängerungen so, dass die Produkte der Sinus der nicht aneinander liegenden Abschnitte gleich werden.

XIX. Die analytische Geometrie im Raume.

191 [93]. **Die Raumkoordinaten.** Die Lage eines Punktes m im Raume wird entweder durch rechtwinklige Koordinaten, die Abscisse (x), die Ordinate (y) und die **Applikate** (z) gegeben — oder durch Polarkoordinaten, den Radius Vektor (r) und die von ihm gebildeten Winkel (α, β, γ) oder (v, w), welche durch



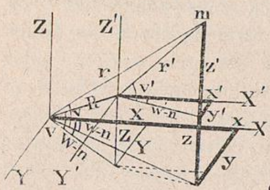
$$x = r \cdot Co\,\alpha = r \cdot Co\,v \cdot Co\,w$$
$$y = r \cdot Co\,\beta = r \cdot Co\,v \cdot Si\,w \qquad \mathbf{1}$$
$$z = r \cdot Co\,\gamma = r \cdot Si\,v$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \mathbf{2}$$
$$Co^2\,\alpha + Co^2\,\beta + Co^2\,\gamma = 1 \qquad \mathbf{3}$$

zusammenhängen, während

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad \mathbf{4}$$

die Distanz der Punkte ($x_1\, y_1\, z_1$) und ($x_2\, y_2\, z_2$) giebt.

192 [93]. **Die Transformation der Koordinaten.** Hat man von einem Koordinatensysteme X Y Z auf ein paralleles Koordinatensystem X′ Y′ Z′ überzugehen, dessen Anfangspunkt die Koordinaten X Y Z hat, so ist offenbar

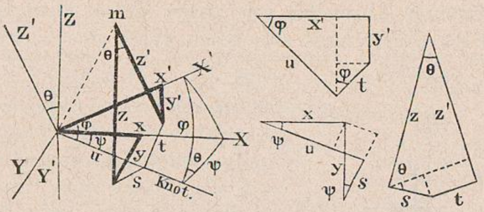


$$x' = x - X$$
$$y' = y - Y \qquad \mathbf{1}$$
$$z' = z - Z$$

oder, wenn man (191) die rechtwinkligen in Polarkoordinaten umsetzt, und n eine willkürliche Grösse bezeichnet

$$r' Co\,v' Co\,(w' - n) = r\,Co\,v\,Co\,(w - n) - R\,Co\,V\,Co\,(W - n)$$
$$r' Co\,v' Si\,(w' - n) = r\,Co\,v\,Si\,(w - n) - R\,Co\,V\,Si\,(W - n)$$
$$r' Si\,v' = r\,Si\,v - R\,Si\,V \qquad \mathbf{2}$$

Haben dagegen die beiden Koordinatensysteme gleichen Anfangspunkt, aber verschiedene Richtung der Axen, so hat man, wenn φ, ψ und θ die Winkel der X′ und X mit der Knotenlinie der Ebene X′ Y′ in X Y und



den an ihr liegenden Flächenwinkel bezeichnen, — $a_1\,b_1\,c_1$, $a_2\,b_2\,c_2$, $a_3\,b_3\,c_3$ aber der Reihe nach die Co. der Winkel sind, welche jede der Axen X' Y' Z' mit den Axen X Y Z bildet,

$$\begin{array}{ll} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' & x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' & y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' & z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{array} \qquad \mathbf{3}$$

wo die neun Grössen a, b, c durch

$$\begin{array}{lll} a_1 = \mathrm{Co}\,\varphi\,\mathrm{Co}\,\psi + \mathrm{Si}\,\varphi\,\mathrm{Si}\,\psi\,\mathrm{Co}\,\theta & b_1 = \mathrm{Si}\,\psi\,\mathrm{Co}\,\varphi - \mathrm{Co}\,\psi\,\mathrm{Si}\,\varphi\,\mathrm{Co}\,\theta & \\ a_2 = \mathrm{Co}\,\psi\,\mathrm{Si}\,\varphi - \mathrm{Si}\,\psi\,\mathrm{Co}\,\varphi\,\mathrm{Co}\,\theta & b_2 = \mathrm{Si}\,\varphi\,\mathrm{Si}\,\psi + \mathrm{Co}\,\varphi\,\mathrm{Co}\,\psi\,\mathrm{Co}\,\theta & \\ a_3 = -\,\mathrm{Si}\,\psi\,\mathrm{Si}\,\theta & b_3 = \mathrm{Co}\,\psi\,\mathrm{Si}\,\theta & \\ c_1 = \mathrm{Si}\,\varphi\,\mathrm{Si}\,\theta & c_2 = -\,\mathrm{Co}\,\varphi\,\mathrm{Si}\,\theta & c_3 = \mathrm{Co}\,\theta \end{array} \qquad \mathbf{4}$$

gegeben werden, und die Relationen

$$\begin{aligned} 1 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \\ &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{aligned} \qquad \mathbf{5}$$

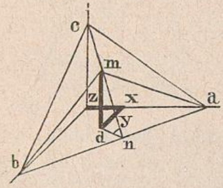
$$\begin{aligned} 0 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 \end{aligned} \qquad \mathbf{6}$$

$$\begin{array}{lll} a_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2 & a_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3 & a_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ b_1 = c_2 a_3 - c_3 a_2 & b_2 = c_3 a_1 - c_1 a_3 & b_3 = c_1 a_2 - c_2 a_1 \\ c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 & c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 & c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \qquad \mathbf{7}$$

eingehen.

193 [93]. **Die Gleichung der Ebene.** Jede Fläche wird durch eine, in einem bestimmten Punkte der Koordinatenebene errichtete Senkrechte in bestimmten Abständen von dieser Ebene geschnitten, und ihr Gesetz muss sich daher durch eine Gleichung

$$z = f(x, y) \qquad \text{oder} \qquad F(x, y, z) = 0 \qquad \mathbf{1}$$



ausdrücken lassen; dabei heisst, je nachdem diese Gleichung vom Grade n oder transcendent wird, auch die Fläche vom Grade n oder transcendent. So z. B. besteht (173, 174) für jeden Punkt m einer Ebene die Gleichung

$$\frac{abc}{2 \cdot 3} = \frac{abz}{2 \cdot 3} + \frac{acy}{2 \cdot 3} + \frac{bcx}{2 \cdot 3} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad \mathbf{2}$$

so dass eine Ebene durch eine Gleichung ersten Grades

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \mathbf{3}$$

dargestellt wird, für $D = 0$ durch den Pol geht, und mit XY einen Winkel n bildet, so dass (132)

$$\begin{aligned} \operatorname{Tg} n &= z : d = c \cdot \sqrt{a^2 + b^2} : ab = \sqrt{A^2 + B^2} : C \\ \operatorname{Co} n &= ab : \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} = C : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \end{aligned} \qquad \mathbf{4}$$

194 [93]. **Die Gleichung der Geraden.** Eine Linie im Raume lässt sich immer als Durchschnitt zweier Flächen denken, und durch deren Gleichungen geben, so z. B. eine Gerade durch die Gleichungen

$$x = \alpha z + \gamma \qquad y = \beta z + \delta \qquad \mathbf{1}$$

ihrer Projektionen auf die Ebenen XZ nnd YZ. Soll die Gerade durch zwei Punkte $(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)$ und $(\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2)$ gehen, so hat sie die Gleichungen

$$x = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\gamma_1 - \gamma_2} z - \frac{\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad y = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\gamma_1 - \gamma_2} z - \frac{\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \qquad \mathbf{2}$$

Eliminiert man aus den Gleichungen zweier Geraden

$$x = a_1 z + b_1, \quad y = a_2 z + b_2, \quad x = \alpha_1 z + \beta_1, \quad y = \alpha_2 z + \beta_2 \qquad \mathbf{3}$$

die Koordinaten x, y, z, so erhält man die Proportion

$$(a_1 - \alpha_1) : (a_2 - \alpha_2) = (b_1 - \beta_1) : (b_2 - \beta_2) \qquad \mathbf{4}$$

als Bedingung für das gleichzeitige Bestehen jener vier Gleichungen, d. h. für das Schneiden der Geraden. Die Koordinaten des Durchschnittspunktes sind

$$x = \frac{a_1 \beta_1 - b_1 \alpha_1}{a_1 - \alpha_1} \qquad y = \frac{a_2 \beta_2 - b_2 \alpha_2}{a_2 - \alpha_2} \qquad z = \frac{\beta_1 - b_1}{a_1 - \alpha_1} \qquad \mathbf{5}$$

so dass die beiden Geraden für $a_1 = \alpha_1$ und $a_2 = \alpha_2$ parallel werden, während sonst

$$Co(1,2) = \frac{1 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2}{\sqrt{1 + a_1^2 + a_2^2}\,\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2}} \qquad \mathbf{6}$$

$$= Co(1,x)\cdot Co(2,x) + Co(1,y) Co(2,y) + Co(1,z) Co(2,z) \qquad \mathbf{7}$$

und $1 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 = 0$ das Senkrechtstehen bedingt.

195. Verschiedene Aufgaben. Die Gerade 194:1 steht auf der Ebene 193:3 senkrecht, wenn ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen zu der respektiven Knotenlinie der Ebene senkrecht stehen, d. h. (194, 132) wenn $\alpha = A : C$ und $\beta = B : C$ ist, während der Abstand des Punktes (α, β, γ) von derselben

$$d = [A\alpha + B\beta + C\gamma + D] : \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

ist. Um den Winkel v einer Geraden und einer Ebene, oder den Winkel w zweier Ebenen zu bestimmen, zieht man zu jeder Ebene eine Senkrechte, und berechnet (194:6) den Winkel $(90 - v)$ der Geraden und der einen, oder den Winkel w beider Senkrechten.

196 [96]. **Der Schwerpunkt.** Die für die Schwerpunkte ebener Gebilde gefundenen Gesetze, und so namentlich auch die in 133:1, 2 enthaltenen, tragen sich leicht auf den Raum über. So z. B. wird eine Schweraxe des Vierflachs (der Pyramide) erhalten, wenn man den Schwerpunkt einer der Seiten (der Basis) mit der Gegenecke (der Spitze) verbindet; der Schwerpunkt selbst steht (89, 83) um $^3/_4$ der Schweraxe von der Gegenecke (Spitze) ab, und hat eine dem Volumen proportionale Konstante.

197 [97]. **Die Flächen zweiten Grades.** Eine Fläche zweiten Grades wird durch die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + \\ + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0 \qquad \mathbf{1}$$

gegeben und daher durch 9 Punkte bestimmt. Setzt man $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z' + \gamma$, und bestimmt α, β, γ so, dass

$$a\alpha + d\beta + e\gamma + g = b\beta + d\alpha + f\gamma + h = \\ = c\gamma + e\alpha + f\beta + k = 0 \qquad \mathbf{2}$$

so geht 1 in die Gleichung

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2dx'y' + 2ex'z' + 2fy'z' + m = 0 \qquad \mathbf{3}$$

über, in welcher nur gerade Dimensionen der Koordinaten vorkommen, so dass ihr auch der Punkt $(-x', -y', -z')$ genügt, oder die Fläche einen **Mittelpunkt** hat. Setzt man in 3

$$x = Az + B \qquad y = Cz + D \qquad \mathbf{4}$$

so erhält man für die Durchschnittspunkte dieser Geraden und der Fläche zweiten Grades eine Gleichung zweiten Grades, deren halbe Summe der Wurzeln für die Mitte der entsprechenden Sehne

$$z = -\frac{aAB + bCD + d(AD + BC) + eB + fD}{aA^2 + bC^2 + c + 2dAC + 2eA + 2fC} \qquad \mathbf{5}$$

giebt. Eliminiert man B und D aus 4 und 5, so wird

$$x(aA + dC + e) + y(dA + bC + f) + z(eA + fC + c) = 0 \qquad \mathbf{6}$$

d. h. der Ort der Mitten aller parallelen Sehnen ist eine durch den Mittelpunkt gehende oder **diametrale** Ebene, in Beziehung auf welche diejenige der parallelen Sehnen, welche durch den Mittelpunkt geht, **konjugierte**

Axe heisst. — Eine Axe, welche zu ihrer konjugierten Ebene senkrecht steht, heisst **Hauptaxe**, und man hat für sie (195)

$$A = \frac{aA + dC + e}{eA + fC + c} \qquad C = \frac{dA + bC + f}{eA + fC + c} \qquad \mathbf{7}$$

198 [97]. **Transformation und Einteilung.** Transformiert man nach 192 die Koordinaten in 197 : 3, und setzt zur Bestimmung von φ, ψ, θ die Koefficienten von xy, xz und yz gleich Null, so erhält man

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{c}^2} = 1 \qquad \mathbf{1}$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ **Halbaxen** heissen. Vergleicht man 1 und 197 : 3, so findet man in Beziehung auf 1 zu der Axe $x = Az$, $y = Cz$ nach 197 : 6 die konjugierte Ebene

$$A \cdot x : \mathfrak{a}^2 + C \cdot y : \mathfrak{b}^2 + z : \mathfrak{c}^2 = 0 \qquad \mathbf{2}$$

Es ergiebt sich hieraus, dass die Koordinatenaxen mit Hauptaxen zusammenfallen. Lässt man x in $x - \mathfrak{a}$ übergehen, so erhält man nach 1 als Scheitelgleichung der Flächen zweiten Grades

$$x = \frac{x^2}{2\mathfrak{a}} + \frac{y^2}{2p_1} + \frac{z^2}{2p_2} \quad \text{wo} \quad p_1 = \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}} \quad p_2 = \frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}} \qquad \mathbf{3}$$

Die Flächen zweiten Grades zerfallen, je nachdem die Grössen α, β, γ in 197 endlich oder unendlich werden, in zwei Hauptklassen: Die erste Klasse wird durch 1 dargestellt, und umfasst das sog.

Ellipsoid . . . . $\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} + \frac{z^2}{\mathfrak{c}^2} = 1$ **4**

Hyperboloid mit einem Mantel $\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^3} - \frac{z^2}{\mathfrak{c}^2} = 1$ **5**

Hyperboloid mit zwei Mänteln $\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} - \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} - \frac{z^2}{\mathfrak{c}^2} = 1$ **6**

Die zweite Klasse wird dagegen durch 3 für $\mathfrak{a} = \infty$ dargestellt und umfasst das sog.

Elliptische Paraboloid . $x = \frac{1}{2} y^2 : p_1 + \frac{1}{2} z^2 : p_2$ **7**

Hyperbolische Paraboloid $x = \frac{1}{2} y^2 : p_1 - \frac{1}{2} z^2 : p_2$ **8**

199 [98, 99]. **Das Ellipsoid und Sphäroid.** Setzt man in 197 : 1 eine der Koordinaten gleich Null, so erhält man für den Schnitt der zu ihr senkrechten Koordinatenebene, eine Gleichung zweiten Grades, also z. B. für jeden ebenen Schnitt eines Ellipsoides eine Ellipse. — In dem speciellen Falle, wo zwei Axen, z. B. $2\mathfrak{a}$ und $2\mathfrak{b}$, einander gleich werden, somit alle zu ihrer Ebene parallelen Schnitte Kreise des Radius $\mathfrak{a}$, alle durch die dritte Axe geführten Schnitte (Meridiane) Ellipsen der Axen $2\mathfrak{a}$ und $2\mathfrak{c}$ sind, kann das Ellipsoid, das nun **Sphäroid** heisst, als durch Rotation dieser Ellipse um $2\mathfrak{c}$ entstanden gedacht werden. Die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte eines Sphäroides nennt man **geodätische Linie**, und diese schneidet jeden Meridian unter einem Winkel (Azimut), dessen Sinus zu dem Abstande des Durchschnittspunktes von der Rotationsaxe umgekehrt proportional ist. — Vgl. 200 und 205.

200 [94]. **Die tangierende Ebene.** Legt man durch einen Punkt $(x_1\ y_1\ z_1)$ einer Fläche $z = f(x, y)$ und zwei benachbarte Punkte $(x_1 + \alpha_1, y_1, z_1 + \gamma_1)$ und $(x_1, y_1 + \beta_1, z_1 + \gamma_2)$ ebenderselben, eine Ebene, so erhält man (193 : 3, 4) als Gleichung derselben

$$z - z_1 = (x - x_1)\,\gamma_1 : \alpha_1 + (y - y_1)\,\gamma_2 : \beta_1 \qquad \mathbf{1}$$

Sind nun α_1 und β_1, folglich auch die γ, verschwindend klein, so wird die Ebene **tangierend**, und 1 geht in

$$z - z_1 = p(x - x_1) + q(y - y_1) \quad \text{wo } p = dz : dx \quad q = dz : dy \qquad \mathbf{2}$$

über, so dass für ihre Neigung gegen XY

$$\mathrm{Co}\, n = 1 : \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \text{oder} \quad \mathrm{Tg}\, n = \sqrt{p^2 + q^2} \qquad \mathbf{3}$$

folgt. Nach 2 ergiebt sich für das Ellipsoid

$$\frac{x \cdot x_1}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y \cdot y_1}{\mathfrak{b}^2} + \frac{z \cdot z_1}{\mathfrak{c}^2} = 1 \qquad \mathbf{4}$$

201 [94]. **Die Krümmung der Flächen.** Legt man durch einen Punkt einer Fläche eine Senkrechte zu der tangierenden Ebene (200), so erhält man die zugehörende **Normale.** Legt man durch diese Normale eine Ebene M, so schneidet sie die Fläche in einer Kurve, zu der man (139) den Krümmungskreis suchen kann. Dreht man M, so verändert sich im allgemeinen der Krümmungshalbmesser, nimmt aber für eine gewisse Stellung ein Maximum, für die dazu senkrechte Stellung dagegen ein Minimum an.

202 [100]. **Die Kurven von doppelter Krümmung.** Stellt man eine Linie im Raume durch zwei Gleichungen $y = \varphi(x)$ und $z = \psi(x)$ dar, so sind

$$y' - y = (x' - x)\, dy : dx \qquad z' - z = (x' - x)\, dz : dx \qquad \mathbf{1}$$

die Gleichungen der Tangente im Punkte $(x\, y\, z)$, während

$$(x' - x)\, dx + (y' - y)\, dy + (z' - z)\, dz = 0 \qquad \mathbf{2}$$

eine durch den Punkt senkrecht zu der Tangente gelegte Ebene, die sog. **Normalebene,** darstellt, und

$$(z' - z)\frac{d^2y}{dx^2} = (x' - x)\left(\frac{dz}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2}\right) + (y' - y)\frac{d^2z}{dx^2} \qquad \mathbf{3}$$

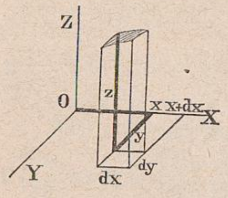
die Gleichung der sich der Kurve bestanschliessenden oder **Oskulationsebene** ist, welche auch die Tangente in sich fasst. Je nachdem sich letztere Ebene ändert oder nicht ändert, wenn man zu folgenden Punkten übergeht, ist die Kurve doppelt gekrümmt oder eben.

203 [100]. **Die einhüllenden und developpabeln Flächen.** — Lässt man in der eine

Fläche vorstellenden Gleichung $F(x, y, z, w) = 0$ die Grösse w successive verschiedene Werte annehmen, so erhält man eine Folge von Flächen, von denen je zwei benachbarte sich in einer Kurve, der sog. **Charakteristik** schneiden, welche ein Element der jene Flächen **einhüllenden** Fläche bildet. Ist speciell die gegebene Fläche eine Ebene, welche beständig einer Geraden parallel ist oder durch einen gegebenen Punkt geht, so ist die Charakteristik eine Gerade, während die einhüllende Fläche **cylindrisch** oder **konisch** heisst und sich (sowie überhaupt alle Flächen, welche sich als Ort einer Geraden denken lassen) auf einer Ebene ausbreiten lässt, oder developpabel ist — während dagegen Flächen, welche dieser letztern Bedingung nicht genügen, **windschief** (gauche) heissen.

204 [95]. **Die Komplanation.** Bezeichnet dO ein Flächenelement, so ist (165; 200 : 3)

$$dO = dx \cdot dy \sqrt{1 + p^2 + q^2} \qquad \mathbf{1}$$



ein Ausdruck, den man, um die Oberfläche zu erhalten, zweimal, z. B. zuerst nach x und dann nach y, zu integrieren hat. Setzt man

$$\begin{aligned} dx &= P \cdot d\varphi + Q \cdot d\psi \\ dy &= P' \cdot d\varphi + Q' d\psi \end{aligned} \qquad \mathbf{2}$$

so ist y für die erste Integration konstant, also $P'd\varphi + Q'd\psi = 0$ oder $dx = d\varphi\,(PQ' - QP') : Q'$ für die zweite dagegen φ oder $dy = Q'd\psi$, und für diese Werte wird 1 zu

$$O = \iint (PQ' - QP') \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot d\varphi \cdot d\psi \qquad \mathbf{3}$$

So genügen der Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ die Werte

$$x = r \,\mathrm{Si}\, \varphi \,\mathrm{Co}\, \psi \qquad y = r \,\mathrm{Si}\, \varphi \,\mathrm{Si}\, \psi \qquad z = r \,\mathrm{Co}\, \varphi$$

und für diese ergiebt sich nach 3

$$O = r^2 \int_{\varphi = 0}^{\varphi = \pi} \int_{\psi = 0}^{\psi = 2\pi} \mathrm{Si}\, \varphi \cdot d\varphi \cdot d\psi = 4r^2\pi \qquad \mathbf{4}$$

205 [95]. **Die Kubatur.** Bezeichnet dV das durch dO und seine Projektion auf XY bestimmte prismatische Körper-Element, so ist offenbar (204)

$$dV = dx \cdot dy \cdot z \text{ und } V = \iint (P \cdot Q' - Q \cdot P')\, z \cdot d\varphi \cdot d\psi \quad \mathbf{1}$$

So z. B. genügen der Gleichung des Ellipsoides die Werte

$$x = \mathfrak{a} \,\mathrm{Si}\, \varphi \,\mathrm{Co}\, \psi \qquad y = \mathfrak{b} \,\mathrm{Si}\, \varphi \,\mathrm{Si}\, \psi \qquad z = \mathfrak{c} \,\mathrm{Co}\, \varphi$$

also ist das Volumen des Ellipsoides

$$V = \int_{\varphi = 0}^{\varphi = \pi} \int_{\psi = 0}^{\psi = 2\pi} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \,\mathrm{Si}\, \varphi \,\mathrm{Co}^2\, \varphi \, d\varphi \, d\psi = \frac{4}{3} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\, \pi \quad \mathbf{2}$$

206 [102]. **Die darstellende Geometrie.** Zieht man von einem Punkte (Pole) Gerade durch alle bemerkenswerten Punkte eines Gebildes, schneidet diese Geraden durch eine Ebene, und verbindet die Durchschnittspunkte genau so, wie die Punkte am Gebilde verbunden sind, so erhält man eine **Polarprojektion** des Gebildes. Ist der Punkt das Auge, so heisst die Projektion **perspektivisch**, dagegen wenn der Punkt unendlich weit von der Bildebene entfernt ist, **Parallelprojektion**, und zwar **orthogonale**, wenn die Projektionsrichtung zu der Projektionsebene senkrecht steht, speciell **Grundriss** oder **Aufriss**, wenn die Bildebene horizontal oder vertikal ist, — **axonometrisch**, wenn die Projizierenden mit drei zu einander senkrechten Hauptrichtungen des Gebildes bestimmte Winkel bilden, und zwar **isometrisch**, wenn alle drei, — **monodimetrisch**, wenn zwei dieser Winkel gleich sind.

— Die Lehre, die räumlichen Gebilde durch Projektionen darzustellen, und mit Hülfe derselben die Aufgaben durch Zeichnung zu lösen, heisst **darstellende Geometrie** (géométrie descriptive).

XX. Die Methode der kleinsten Quadrate.

207 [52]. **Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrate.** Wird eine Grösse B unter Vermeidung konstanter Fehlerquellen wiederholt, z. B. n-mal, bestimmt, so hat man offenbar, sobald n gross genug ist um das Erscheinen jedes zufälligen Fehlers in + und — gleich wahrscheinlich zu machen, das arithmetische Mittel sämtlicher Bestimmungen als besten Beobachtungswert zu betrachten. Denkt man sich aber alle Werte wie Punkte im Raume verbreitet, so entspricht (196) dieser mittlere Wert ihrem Schwerpunkte, während die Entfernungen der Punkte von dem Schwerpunkte die Abweichungen der Beobachtungswerte von dem Mittel ersetzen, und die Konstanten bei gleicher Güte der Beobachtungen sämtlich gleich, also z. B. gleich einer Einheit, sind. Es muss also (133, 196) für den wahrscheinlichsten Wert die **Summe der Fehlerquadrate ein Minimum** sein, und dieses ist der Fundamentalsatz der von Gauss und Legendre eingeführten Methode der kleinsten Quadrate.

208 [52]. **Theorie der Fehler bei direkten Bestimmungen.** Hat man für eine Grösse B eine Anzahl n gleich zuverlässiger Bestimmungen $b_1\ b_2 \ldots b_n$ der Fehler $\pm f_1\ f_2 \ldots f_n$ erhalten, so dass immer $B = b \pm f$, so findet man durch Addition im Mittel

$$B = {}^1/_n \Sigma b + {}^1/_n \Sigma (\pm f) = M + \Delta B \qquad \mathbf{1}$$

wo M das Mittel der sämtlichen Bestimmungen und $\triangle B$ der **Fehler des Mittels** ist. Setzt man

$$v = M - b \qquad m^2 = \Sigma v^2 : n \qquad f^2 = \Sigma f^2 : n \qquad \mathbf{2}$$

d. h. bezeichnet durch v die Abweichung einer Bestimmung vom Mittel, durch m die **mittlere Abweichung** einer solchen vom Mittel, und durch f den **mittlern Fehler** einer Bestimmung, so hat man nach 207 und 1

$$\Sigma f^2 = \Sigma v^2 + n \cdot \triangle B^2 \qquad \text{oder} \qquad f^2 = m^2 + \triangle B^2 \qquad \mathbf{3}$$

$\triangle B = {}^1/_n \Sigma (\pm f)$ also am wahrscheinlichsten $\triangle B = f : \sqrt{n}$ **4**

und somit nach 3 und 2

$$f^2 = m^2 + \frac{f^2}{n} \qquad \text{oder} \qquad f = m \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} \qquad \mathbf{5}$$

Für Beobachtungen von verschiedenen mittlern Fehlern f_1 und f_2 mittelt man aus, welche Anzahl $1/p_1$ der einen ein ebenso gutes Resultat als eine Anzahl $1/p_2$ der andern erzeuge, d. h. man setzt nach 4

$$f_1 : \sqrt{1 : p_1} = f_2 : \sqrt{1 : p_2} \qquad \text{woraus} \qquad p_1 : p_2 = f_2^2 : f_1^2 \qquad \mathbf{6}$$

folgt, und diese relativen Zahlen p, die sog. **Gewichte** der Beobachtungen, treten nun an die Stelle der bisdahin gleich der Einheit gesetzten Konstanten, so dass

$$B = \frac{\Sigma pb}{\Sigma p} \pm \frac{f}{\sqrt{\Sigma p}} \quad \text{während} \quad m = \sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n}},\ f = \sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n-1}} \qquad \mathbf{7}$$

mittlere Abweichung und mittlern Fehler in Beziehung auf die angenommene Gewichtseinheit bezeichnen. Endlich ist

$$\varphi(v) = e^{-v^2} : \sqrt{\pi} \qquad f' = 0{,}674486 \cdot m \qquad \mathbf{8}$$

wo $\varphi(v)$ die sog. **Fehlerfunktion** oder die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines Fehlers v, und f′ den sog. **wahrscheinlichen** Fehler bezeichnet. Vgl. Tab. II^d.

209 [52]. **Theorie der Fehler bei indirekten Bestimmungen.** Ist eine Grösse t nach

$$t = a + a_1 t_1 + a_2 t_2 + \ldots + a_n t_n \qquad \mathbf{1}$$

aus beobachteten Grössen $t_1, t_2 \ldots$ der Fehler $f_1, f_2 \ldots$ und Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ zu berechnen, so hat man offenbar $\quad \pm f = \pm a_1 f_1 \pm a_2 f_2 \pm \ldots$

also im Mittel

$$f^2 = \Sigma (a^2 f^2) \qquad \text{oder} \qquad 1 : p = \Sigma (a^2 : p) \qquad \mathbf{2}$$

und den allgemeinern Fall, wo

$$t = f(t_1, t_2, \ldots t_n) \qquad \mathbf{3}$$

also

$$dt = \left(\frac{dt}{dt_1}\right) dt_1 + \left(\frac{dt}{dt_2}\right) dt_2 + \ldots + \left(\frac{dt}{dt_n}\right) dt_n \qquad \mathbf{4}$$

ist, kann man darauf zurückführen, indem man in die partiellen Differentialquotienten die beobachteten und berechneten Werte und für die dt die f einsetzt.

210 [52]. **Die überschüssigen Gleichungen.** Ist $m < n$, und hat man n Gleichungen der Form

$$ax + by + cz + \ldots + h = 0 \qquad \mathbf{1}$$

zwischen m Unbekannten x, y, z, ... und gewissen durch Beobachtung erhaltenen a, b, ..., so werden keine Werte von x, y, ... allen diesen Gleichungen vollkommen genügen, sondern durch Substitution irgend solcher Werte nur auf

$$ax + by + cz + \ldots + h = f \qquad \mathbf{2}$$

reduzieren, wo die f kleine, von den Beobachtungsfehlern abhängige Grössen sind. Quadriert und addiert man letztere Gleichungen, so erhält man

$$x^2 \Sigma a^2 + y^2 \Sigma b^2 + z^2 \Sigma c^2 + \ldots + 2xy \Sigma ab +$$
$$+ 2xz \Sigma ac + \ldots + 2x \Sigma ah + 2y \Sigma bh + \ldots = \Sigma f^2 \qquad \mathbf{3}$$

und für die besten Werte der x y z ... werden nach dem Grundsatze der Methode der kleinsten Quadrate diejenigen gelten müssen, welche Σf^2 zum Minimum machen, d. h. für welche (63) die Differentialquotienten von Σf^2 nach x · y ... verschwinden, so dass Letztere aus den nach 3 gebildeten m Gleichungen

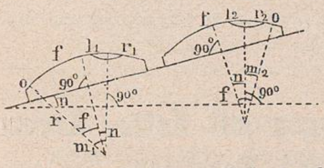
$$\begin{array}{c} x\,\Sigma a^2 + y\,\Sigma ab + z\,\Sigma ac + \ldots + \Sigma ah = 0 \\ x\,\Sigma ab + y\,\Sigma b^2 + z\,\Sigma bc + \ldots + \Sigma bh = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array} \qquad 4$$

berechnet werden können, — Gleichungen, welche offenbar direkt aus den Gleichungen 1 hervorgehen, wenn man jede derselben mit dem Faktor multipliziert, welchen x_1 oder y_1 ... in derselben hat, und alle so erhaltenen Gleichungen, welche in Beziehung auf dieselbe Unbekannte gebildet worden sind, addiert.

XXI. Die Messungen mit Kette, Kreuzscheibe und Messtisch.

211. Die praktische Geometrie. Unter praktischer Geometrie (Topographie, Feldmessen), versteht man zunächst die Kunst, mit Hülfe einzelner Längen- und Winkel-Messungen und daran gelehnter Konstruktionen oder Rechnungen, eine Reihe von Punkten auf dem Felde ihrer gegenseitigen Lage nach festzulegen, und so Anhaltspunkte, sei es für die Verzeichnung oder Berechnung einzelner Grundstücke, sei es für Entwerfung eigentlicher Karten (vgl. XL und XLI) zu erhalten.

212 [321—23]. **Die Setzwage und die Libelle.** Da man sich sämtliche zu bestimmende Punkte auf eine horizontale Ebene projiziert denkt, so bedarf man vor Allem ein Mittel, eine solche zu erkennen oder herzustellen, so z. B. eine **Setzwage**, d. h. ein gleichschenkliges Dreieck, in dessen Scheitel ein **Loth** hängt, welches nur dann über der Mitte der Basis steht, wenn diese horizontal ist. Verändert man die Lage einer Ebene bis die Setzwage bei zwei zu einander senkrechten Stellungen einspielt, so ist sie horizontal. — Genauer ist die **Libelle**, welche aus einer cylindrischen, im Innern nach oben kreisförmig ausgeschliffenen, mit einer leicht beweglichen Flüssigkeit (Äther) bis auf eine Luftblase gefüllten Röhre besteht, und gewöhnlich in messingener Fassung über einem Lineale aufgehängt ist: Die Mitte der Luftblase nimmt beständig den höchsten Punkt ein, und wenn man die Libelle in zwei Lagen auf eine um n geneigte Gerade aufsetzt, je an der vom einen Ende auslaufenden Teilung den Stand der beiden Blasenenden ablesend, so hat man



$n = m_1 - f$ und $n = f - m_2$, also wenn v den Winkelwert eines Teilstriches bezeichnet,

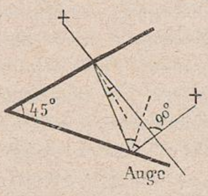
$$n = \tfrac{1}{4}\,[l_1 + r_1 - l_2 - r_2]\cdot v \qquad f = \tfrac{1}{4}\,[l_1 + r_1 + l_2 + r_2]\cdot v$$

Um v zu bestimmen, befestigt man die Libelle an ein um eine Axe drehbares Fernrohr, bringt nach und nach durch Drehen dasselbe Blasenende mit zwei Teilstrichen zum Einspielen, und liest entweder an einem an der Axe befindlichen Teilkreise, oder an einer in bekannter Distanz aufgestellten Messlatte je die Stellung des Fernrohrs ab.

213 [325—27]. **Die Längenmessung.** Zum Messen der Distanzen benutzt man gewöhnlich eine

Messkette von 50' oder 10^m Länge, substituiert ihr aber, wenn die Genauigkeit über $^1/_{1000}$ betragen soll, Systeme von auf Stativen liegenden, mit Libelle und Thermometer versehenen Maßstäben, deren Zwischenräume mit Keil oder Fühlhebel bestimmt werden. Der Wert b einer, in der Höhe h über dem Meere gemessenen Basis B im Niveau des Meeres ist, wenn r den Erdradius bezeichnet, $b = B \cdot r : (r + h)$. Die zur Aufzeichnung anzuwendende Verjüngung des Maßstabes hängt von dem Zwecke ab. Nimmt man $^1/_{10}{}^{mm}$ als letzte sichtbare Grösse an, so ist z. B. die Verjüngung $^1/_{10000}$ zu wählen, wenn noch 1^m sichtbar sein soll. — Mit blosser Längenmessung kann man mit Hülfe einiger Stäbe auf dem Felde nach 93 eine Senkrechte errichten, nach 89 oder 116 eine Parallele konstruieren, nach 89 eine Höhe messen, nach 105 oder 117 die Flächen von Figuren bestimmen, nach 109 die Distanz eines unzugänglichen Punktes ermitteln, etc.

214 [330]. **Kreuzscheibe und Winkelspiegel.** Ist man mit zwei zu einander senkrechten Diopterlinealen, einer **Kreuzscheibe**, oder zwei unter 45° gegen einander geneigten Spiegeln (284), einem **Winkelspiegel**, versehen, so lassen sich Senkrechte so leicht errichten, und (durch Probieren) fällen, dass die meisten der in 213 gelösten Aufgaben noch einfachere und genauere Lösungen zulassen, so z. B. nach 93 oder 89 die Bestimmung der Distanz eines unzugänglichen Punktes.



Ferner kann man nach 124 leicht Punkte einer Kreislinie von gegebenem Durchmesser auffinden, — einzelne Punkte oder eine krumme Linie nach 77 durch Koordinaten aufnehmen, etc.

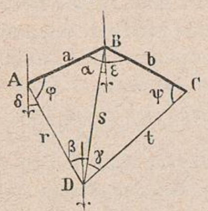
215 [332]. **Der Messtisch.** Eine Tafel, welche mit Hülfe einer Libelle in horizontale Lage gebracht werden kann, und so aufgestellt ist, dass jeder Punkt und jede Gerade auf derselben mittelst der sog. **Einlothzange** und einem ein Fernrohr tragenden sog. **Diopterlineal** (Kippregel) vertikal über einen Punkt und parallel zu einer Geraden auf dem Felde zu bringen sind, kann als **Messtisch** (Mensel) dazu dienen, einen Punkt in richtiger Lage gegen zwei ihrer Distanz nach gegebene Punkte zu verzeichnen: Zuerst wird der Tisch über dem einen Endpunkte der auf ihm verzeichneten gemessenen Distanz, der **Standlinie** (Basis), aufgestellt — dann, wo nötig, das Diopterlineal so korrigiert, dass das Fadenkreuz seines Fernrohrs beim Drehen einem Lothfaden folgt, und zugleich auch die Kante des Lineals wenigstens annähernd nach dem eingestellten Objekte hinweist, — nunmehr das Diopterlineal an die verzeichnete Basis angelegt und die Tischplatte gedreht,. bis der andere Endpunkt im Fadenkreuze erscheint, — und schliesslich eine Visierlinie nach dem zu bestimmenden Punkte gezogen; nachher wird entweder bei dem sog. **Polygonisieren** die Visierlinie gemessen und aufgetragen, — oder bei dem **Vorwärtsabschneiden** der Messtisch über dem zweiten Endpunkte der Basis aufgestellt, und wieder eine Visierlinie gezogen, — oder endlich bei dem **Rückwärtsabschneiden** der Messtisch über dem gesuchten Punkte mit Hülfe der ersten Visur annähernd eingestellt, und dann eine Visierlinie durch den zweiten Endpunkt der Basis gezogen.

216 [332]. **Das Princip der Multiplikation.** Der Messtisch kann auch zum Messen eines Winkels a dienen. Stellt man ihn nämlich über dem Scheitel von a auf, — visiert nach dem einen Winkel-punkte und dann nach dem andern, — stellt nun durch Drehen des Tisches den Diopterlineal wieder auf den ersten Punkt zurück, visiert nochmals auf den zweiten, etc., bis nach n Operationen die letzte Visur einen Winkel von etwas mehr als b Umdrehungen mit der ersten bildet, so hat man, wenn c die Distanz der dem Radius r entsprechenden Punkte dieser Visierlinien ist,

$$n \cdot a = b \cdot 360^0 + 2 \mathrm{Asi}\,(c:2r)$$

also a um so genauer, je grösser n ist.

217 [67]. **Die Pothenot'sche Aufgabe.** Die Aufgabe, die Lage eines Standpunktes D gegen drei bekannte Punkte A, B, C zu bestimmen, kann mit dem Messtische auf folgende Weise gelöst werden: Man stellt denselben so über D auf, dass die auf ihm verzeichneten Geraden A B nnd B C den entsprechenden Geraden auf dem Felde möglichst parallel sind,



und zieht nun durch die Punkte auf dem Tische und Felde Visierlinien, welche ein sog. **Fehlerdreieck** $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ bestimmen, dann dreht man den Tisch ein wenig und konstruiert ein zweites Fehlerdreieck $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$; die Verbindungslinien $\alpha_1\ \alpha_2$, $\beta_1\ \beta_2$, $\gamma_1\ \gamma_2$ schneiden sich sodann sehr nahe in dem gesuchten Punkte. — Kennt man a, b und hat β und γ gemessen, so kann man (98:4; 103), da $\varphi + \psi = 360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$ bekannt ist, nach

$$\mathrm{Tg}\,\frac{\varphi - \psi}{2} = \mathrm{Tg}\,(x - 45^0)\,\mathrm{Tg}\,\frac{\varphi + \psi}{2} \text{ wo } \mathrm{Tg}\,x = \frac{\mathrm{Si}\,\varphi}{\mathrm{Si}\,\psi} = \frac{b\,\mathrm{Si}\,\beta}{a\,\mathrm{Si}\,\gamma}$$

ist, φ und ψ, und dann r, s, t berechnen. — Für annähernde Bestimmungen (z. B. um den Standpunkt beim Lothen gegen bekannte Punkte am Ufer festzulegen) kann man nach Horners Vorschlage β und γ

auf Strohpapier auftragen, und D durch Versuch ermitteln, — oder auch, wenn man A B und ihre Orientierung ($\delta + \varphi$) kennt, die auf D an der Boussole für A D und B D gemachten Ablesungen δ und ε bei A und B antragen.

218 [328]. **Der Distanzmesser.** Hat das Fernrohr des Diopterlineales zu dem horizontalen Mittelfaden noch einen Parallelfaden im Winkelabstande α, und spielt eine an seiner Axe befestigte Spitze über einem geteilten Kreise, dessen Nullpunkt seiner horizontalen Lage entspricht, so kann es als **Distanzmesser aus Einem Stande** dienen; denn stellt man in der Horizontaldistanz x einen geteilten Stab vertikal auf, und fällt eine Länge a desselben zwischen die Faden, während die Spitze bei β steht, so hat man

$$x \operatorname{Tg}(\alpha + \beta) - x \operatorname{Tg}\beta = a \quad \text{oder} \quad x = a \operatorname{Ct}\alpha \operatorname{Co}^2\beta$$

Ct α wird am besten bestimmt, indem man den Stab in bekannter Distanz aufstellt. — Bei der **Stadia** der Militärs wird x bestimmt, indem man beobachtet, in welcher Distanz vom Scheitel ein gewisses a (z. B. ein Mann) zwischen die Schenkel eines in bestimmter Entfernung vom Auge gehaltenen Winkels passt.

XXII. Die Messungen mit Theodolit und Nivellierinstrument.

219 [334—7]. **Die geteilten Kreise.** Die Teilung eines Kreises kann man sich bis ins Unendliche fortgesetzt und ganz genau ausgeführt denken; aber praktisch erreicht man nur zu bald eine durch den Radius, die Teilungsmittel und das zu teilende

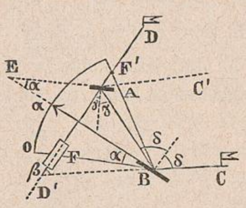
Material (früher Holz, Eisen, Messing, — jetzt gewöhnlich Silber) bedingte Grenze. Setzen wir z. B. die Bogenlänge einer Minute $2r\pi : 360 \cdot 60$ gleich einer Einheit, so wird $r = 3437,7468$, und wenn daher jene Einheit auch nur $^1/_{10}{}^{mm}$ werden soll, so muss der Kreis mehr als zweifüssig sein, ja man darf mit der direkten Teilung bei 6—8zölligen Kreisen höchstens bis 10′, bei 20—36zölligen bis 2′ gehen.

220 [338, 9]. **Der Vernier.** Bei jedem zu Winkelinstrumenten verwendeten geteilten Kreise ist die Stellung eines Index an demselben abzulesen, wobei von Index und Teilkreis je der Eine fest, der Andere mit der Visiervorrichtung beweglich ist. Um diese Ablesung genauer zu erhalten, wendete man früher den verjüngten Maßstäben konforme **Transversalteilungen** an, während jetzt der Index durch den Nullpunkt einer Hülfsteilung, des **Vernier**, ersetzt wird: Giebt z. B. ein Kreis 10′, und wünscht man dennoch auf 10″ ablesen zu können, so teilt man einen Bogen von $59 \cdot 10'$ in 60 (allgemein $n - 1$ in n) gleiche Teile, so dass jeder der neuen Teile um $1 : n = 10'(1 - 59 : 60) = 10''$ kleiner als ein Teil der Hauptteilung ist, und wenn also z. B. der Nullpunkt des Vernier so zwischen $54^0\,30'$ und $54^0\,40'$ steht, dass der 7te Teilstrich desselben mit einem Teilstriche der Hauptteilung zusammenfällt, so ist die Ablesung $54^0\,30' + 7 \cdot 10'' = 54^0\,31'\,10''$. — Für das Ablesemikroskop vgl. 327, — für Untersuchung der Teilung und Elimination der Excentricität 328.

221 [349, 50]. **Der Theodolit.** Das wichtigste Winkelinstrument ist der nach und nach aus dem **Astrolabium** der Alten (einem geteilten Kreise mit Diroptern) hervorgegangene **Theodolit**, welcher aus einem mit Hülfe von drei Fußschrauben horizontal zu stellenden geteilten Kreise, dem **Limbus**, besteht, der entweder fest ist (gemeiner Theodolit) oder um eine vertikale Axe gedreht werden kann (Repetitions-Theodolit). Auf einer über dem Limbus drehbaren Scheibe, der **Alidade**, welche mindestens ein Paar sich diametral gegenüberstehender Verniers trägt, stehen zwei gleich hohe Lager für die Axe eines geraden (terrestrischer Theodolit) oder mittelst Prisma gebrochenen Fernrohrs (astronomischer Theodolit oder Universalinstrument), an welche wieder ein geteilter Kreis, der **Höhenkreis**, angesteckt ist, dessen Vernier-Paar an einem der Lager sitzt. Jede Veränderung in der Lage des Fernrohrs wird somit von selbst in eine horizontale und eine vertikale zerlegt, und man kann daher mit demselben gleichzeitig Horizontalwinkel und Höhendifferenzen messen, sobald dasselbe gehörig aufgestellt und korrigiert ist. Zu letzterm Zwecke wird die Libelle auf die Axe des Fernrohrs gesetzt, dieses über eine der Fußschrauben gebracht, und nun die Libelle eingestellt: dann wird die Libelle verkehrt auf die Axe gesetzt, und vom allfälligen Ausschlag die Hälfte an der Fußschraube, der Rest an der Libelle selbst korrigiert; nachher dreht man die Alidade um 180°, und verbessert einen neuen Ausschlag der Libelle zur Hälfte an der Fußschraube, zur Hälfte am einen Lager; hierauf stellt man die Axe parallel zu den beiden andern Fußschrauben, und bringt mit ihnen nochmals die Libelle zum Einspielen. Sodann stellt man das Fadenkreuz des Fernrohrs genau auf einen Gegenstand ein, legt hierauf das Fernrohr in seinen Lagern um, oder führt es nach Drehen der Alidade um 180° durch Durchschlagen auf den Gegenstand zurück, und verbessert endlich die Hälfte der Abweichung an den

Stellschrauben des Fadenkreuzes oder Prisma's. Für die Messung von Höhenwinkeln vgl. 225, — für die Axenlibelle 329.

222 [352]. **Der Spiegelsextant.** Neben dem Theodoliten ist der kein Stativ erfordernde, also zur See brauchbare und auf Reisen bequeme Spiegelsextant das wichtigste Winkelinstrument. Er besteht aus einem Kreissektor, auf dessen Ebene ein (oben unbelegter) Spiegel A parallel zur Nulllinie der Teilung des Sektors fest aufsitzt. Ein zweiter Spiegel B ist auf einem drehbaren Radius befestigt, und trägt zugleich den Index

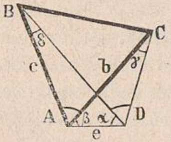


für die Ablesung. Dem Spiegel A endlich steht ein Fernrohr F so gegenüber, dass seine optische Axe und die Verbindungslinie der beiden Spiegel an A mit der Normale gleiche Winkel bilden. Visiert man nach einem Gegenstande D, und dreht dann B so, dass man nach derselben Richtung durch doppelte Reflexion einen Gegenstand C zu sehen glaubt, so erhält man aus der Ablesung α den Winkel β, welchen D und C am Auge bestimmen nach

$$\beta = 2\delta - 2\gamma = 2[90 + \delta - (90 + \gamma)] = 2\alpha$$

oder auch direkt, indem man jedem Teilstriche das Doppelte seines Wertes beischreibt, und zur Prüfung des Parallelismus von A mit der Nulllinie oder zur Auffindung des sog. **Kollimationsfehlers** hat man einfach nachzusehen, welchen Wert β für einen sehr fernen Gegenstand annimmt. — Für die Messung von Höhenwinkeln vgl. 225.

223 [348]. **Die Reduktion auf Centrum und Horizont.** Kann man sich im Scheitel eines Winkels A nicht aufstellen, so misst man von einem benachbarten Punkte aus den Winkel D, und hat sodann, wenn der **Direktionswinkel** α und die **Excentricität** e ermittelt sind, nach 83 und 103

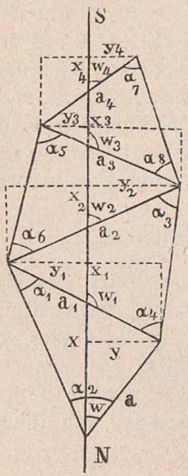


$$A = D + e\,\mathrm{Si}\,(\alpha + D) : b \cdot \mathrm{Si}\,1'' - e\,\mathrm{Si}\,\alpha : c \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad \mathbf{1}$$

Bezeichnet a den wahren, A den Horizontalwinkel zweier Objekte der Zenitdistanzen b und c, so hat man (160 : 4)

$$\mathrm{Co}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}\,s \cdot \mathrm{Si}\,(s - a)}{\mathrm{Si}\,b \cdot \mathrm{Si}\,c}} \quad \text{wo} \quad s = \frac{a + b + c}{2} \qquad \mathbf{2}$$

224. Die sog. Triangulationen. Verbindet man eine Reihe von Punkten untereinander und mit einer bekannten Basis durch eine Kette von Dreiecken oder ein **Dreiecksnetz**, und misst dessen Winkel, so kann man die Distanz irgend zweier dieser Punkte und die Koordinaten sämtlicher Punkte berechnen, und damit die sicherste Grundlage für eine Detailaufnahme erhalten. Meistens werden die Koordinaten auf einen der Punkte und seinen Meridian bezogen, und dafür (330, 344) das Azimut w einer ersten Seite bestimmt; dann hat man einerseits



$$\begin{aligned} x &= a\,\mathrm{Co}\,w, & x_1 &= x - a_1\,\mathrm{Co}\,w_1 \text{ etc.} \\ y &= a\,\mathrm{Si}\,w, & y_1 &= y - a_1\,\mathrm{Si}\,w_1 \text{ etc} \quad \mathbf{1} \\ w_1 &= w - (\alpha_1 + \alpha_2) + 180^0; \text{ etc.} \end{aligned}$$

während anderseits

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\mathrm{Si}\,\alpha_1}{\mathrm{Si}\,\alpha_2} \qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{\mathrm{Si}\,\alpha_3}{\mathrm{Si}\,\alpha_4} \text{ etc.} \tag{2}$$

also durch Multiplikation

$$a_n = a\,\frac{\mathrm{Si}\,\alpha_2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha_4 \ldots \mathrm{Si}\,\alpha_{2n}}{\mathrm{Si}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha_3 \ldots \mathrm{Si}\,\alpha_{2n-1}} \tag{3}$$

Aus 2 folgt durch Differentiation

$$da_1 = da \cdot \frac{\mathrm{Si}\,\alpha_2}{\mathrm{Si}\,\alpha_1} - a_1\,(\mathrm{Ct}\,\alpha_1 \cdot d\alpha_1 - \mathrm{Ct}\,\alpha_2\,d\alpha_2)\,\mathrm{Si}\,1'' \tag{4}$$

und man hat daher bei einer Triangulation auf möglichst gleichseitige Dreiecke zu sehen. Aus 3 aber folgt, wenn $\triangle\alpha$ den mittlern Fehler der Winkel und $\triangle a$, $\triangle a_n$ die Fehler der ersten und letzten Seite bezeichnen,

$$\triangle a_n = \pm \triangle a \cdot a_n : a \mp a_n\,(\mathrm{Ct}\,\alpha_1 - \mathrm{Ct}\,\alpha_2 + \ldots)\,\triangle\alpha \cdot \mathrm{Si}\,1''$$

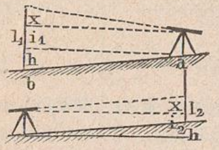
oder durch Quadrieren und Weglassen der Glieder mit $\pm$

$$\triangle a_n^2 = a_n^2\,[\triangle a^2 : a^2 + \triangle\alpha^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,1'' \cdot \Sigma\,\mathrm{Ct}^2\,\alpha] \tag{5}$$

225 [354]. **Die Messung der Höhenwinkel.** Um mit einem Theodoliten Höhenwinkel oder Zenitdistanzen messen zu können, ist entweder am Fernrohr nach seiner Längenrichtung eine Libelle angehängt, um es horizontal stellen und direkt den Winkel einer Gesichtslinie mit der Horizontalen messen zu können, — oder es lässt sich das Fernrohr umschlagen, und so in zwei um 180° verschiedenen Stellungen des Horizontalkreises auf denselben Gegenstand einstellen, wo nun die halbe Summe der Ablesungen am Höhenkreise den Zenitpunkt, die halbe Differenz die Zenitdistanz giebt. — Bei dem Spiegelsextanten misst man den Abstand vom scheinbaren

Horizonte oder den, bei merklicher Entfernung sehr nahe der doppelten Höhe gleichen Winkel mit dem Spiegelbilde in einem künstlichen Horizonte. — Aus dem Höhenwinkel α kann man bei kleiner Horizontaldistanz b die Höhe nach $h = b \cdot Tg\, \alpha$ berechnen, — während bei grösserer sowohl der Depression des Horizontes (378), als der terrestrischen Refraktion (390) Rechnung zu tragen ist, wenn eine **trigonometrische Höhenmessung** wesentlich besser als die barometrische (275), oder gar mit einem Nivellement (226) vergleichbar sein soll.

226 [322]. **Das Nivellirinstrument.** Zum Bestimmen kleiner Höhendifferenzen wendet man ausser der Kanalwage (268) ein auf einem Pyramidalstativ ruhendes Fernrohr mit Längslibelle an. Spielt die Libelle ein, so soll die Visur horizontal sein; gesetzt aber, sie habe noch eine Elevation, so wird sie, wenn



das Instrument in a und eine Messlatte (Mire) in einem um h tiefern Punkte b aufgestellt wird, letztere in $l_1 = x + i_1 + h$ treffen, wo i_1 die Höhe des Okulars über a und x den durch jene Elevation verursachten Fehler bezeichnet. Wechselt man Instrument und Mire, so erhält man $l_2 = x + i_2 - h$, so dass

$$2h = l_1 - l_2 - (i_1 - i_2) \qquad 2x = l_1 + l_2 - (i_1 + i_2)$$

Ist x gehoben, so kann man die Höhendifferenz zweier Punkte auch finden, indem man sich zwischen ihnen aufstellt, für beide Punkte die Latthöhe abliest, und die Differenz nimmt.