Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum ex dato eorum centro gravitatis, una cum inventione proportionis et centri gravitatis in portionibus sphaerae plurimorumque periphericorum ... Demonstrata ...

La Loubère, Antoine de

Tolosae, 1651

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-9180

Elementorum tetragonismicorum Liber V. Absolutam circuli, hyperbolae & reliquorum inde pendentium quadratura assequens.

ELEMENTORVM TETRAGONISMICORVM LIBER V.

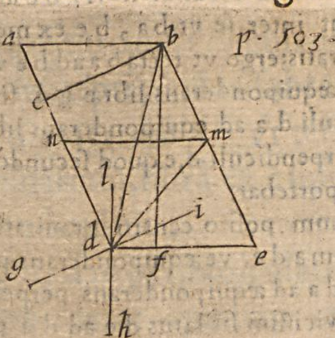
Abſolutam circuli, hyperbolæ & reliquorum inde pendentium quadraturã aſſequens.

PRÆFATIO.

QVÆ in antecedentibus quatuor Libris à nobis inuenta ſunt, ea dum de editione iſtâ ageretur, ſola & per ſe ſufficere putarunt docti ſimul & amici viri, ad hoc vt nonnullo operæ noſtræ pretio & Mathefeos incremento, etiam feorfum vulgarentur, quidquid alijs inuentis noftris, quorum causâ femper merucbamus, eueniret. Hac publicæ vtilitatis perfuafione adducti Typographo lucubrationes iftas tradidimus; fed dum diagrammata cupro inciduntur, prælo cuduntur, cæteráque abfoluuntur, biennium eft, tam fegnes operarum moras nobis nequicquam culpantibus. Interea verò cùm edenda diligentiùs recognofceremus, eorum ordinem & difpofitionem in quibufdam immutanda cenfuimus, vt iam auctior, fi non rerum, certè librorum numerus prodeat, quã in prolegomenis deftinaueramus. Atque vt filentio iftud non diffimulemus, nihil ferme abfuit quin librum præfentem tanquam ab ortiuum perpetuæ obliuionis tumulo conderemus, nisi cum emortuum efferremus, nouus ei vitæ halitus subitò inditus apparuisset: quò fit vt tantò carior nobis sit, quantò castæ matri suauior accidit restaurata exanimati summisque propterea doloribus parti fœtûs vita. Hîc quoque, Lector, numeros adhibitos inuenies, planéque agnosces sine illis nihil in præsenti negotio nisi vago quodam & ingrato demonstrandi genere posse definiri.

Propositio I.

Si ex cuiusuis parallelogrammi a b e d angulo quolibet b in latera opposita a d, d e demittantur perpendiculares b c, b f; dico vt b c recta ad b f, ita esse b a rectā ad b e. Et si in diemetro b d etiā productâ ponatur centrum grauitatis alicuius magnitudinis, suspendaturque per duas suspensiones quarum perpendicula per centrum libræ incedentia sint d a, d e. Dico vt est a b recta ad b e, ita esse posita, æqualitate brachij, æquiponderans perpendiculi d a ad aliud æquiponderans. Et si posito centro grauitatis intra angulum a d e, vt æquiponderans perpendiculi d a ad æquiponderans alterius, ita vicissim fiat d e quælibet eius portio ad rectam d a completoque parallelogrãmo a d e b iũgatur diameter d b; dico in ipsâ d b esse centrũ grauitatis.



Quoniam anguli oppositi ad a & e sunt æquales, & anguli b c a, b f e sunt æquales vt pote recti, erunt triangula b c a, b f e similia; ergo vt a b, b c, ita b e, b f; & alternando vt a b, b e, ita b c, b f, quod erat primò ostendendum.

34 primi Euc.

Rursus excitentur ex puncto d rectæ d g, d h, æquales inuicem, perpendiculares ad rectas d a, d e. Quoniam b c, g i sunt parallelæ, alterni anguli c b d, b d i erunt æquales; ergo posito sinu toto d b, recta c b erit sinus anguli c b d; atqui angulus c d b est in triangulo rectangulo b c d complementum anguli c b d, qui est æqualis ipsi b d i; ergo posito sinu toto d b, sinus complementi anguli b d i est recta b c. Similiter ostendetur posito sinu toto d b, sinum complementi anguli b d l esse rectam b f. Quoniam ergo æquiponderantia duarum suspensionum per libras g d, d h factarum sunt vt complementi sinus b c, b f ex vndecimâ secundi libri; b c autem & b f sunt inter se vt b a, b e ex modo demonstratis; ergo vt recta b a ad b e vel a d, ita est æquiponderans libræ g d siue perpendiculi d a ad æquiponderans libre d h siue perpendiculi d, e quod secundò ostendere oportebat.

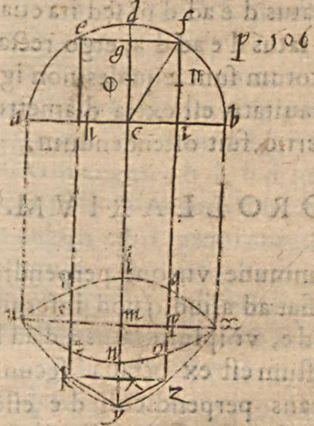
Demum posito centro grauitatis intra angulum a d e, vt æquiponderans perpendiculi d a ad æquiponderans perpendiculi d e, ita viciſſim sit latus d e ad d a parallelogrammi a d e b; centrum verò grauitatis non sit (si fieri potest) in rectâ d m ; ergo completo parallelogrammo d e m n, vt æquiponderans perpendiculi d a ad perpendiculi d e, ita vicissim ex iam demonstratis erit latus d e ad d n; sed ita etiam ponitur esse latus d e ad d a; ergo rectæ d a, d n pars & totum sunt æquales; non igitur centrum grauitatis est extra diametrum d b, quod tertiò fuit ostendendum.

COROLLARIVM.

Si commune vtrique perpendiculo brachium fiat ad aliud, quod inseruiat perpẽdiculo d e, vt ipsum latus a d ad latus d e; manifestum est ex octauâ secundi æquiponderans perpendiculi d e esse æquale æquiponderanti perpendiculi d a, positâ istâ brachiorum inæqualitate.

PROPOSITIO II.

Segmento e d f circuli ex centro c descripti, cuius subtensa e f sit ad diametrum a b vt ternarius ad quinarium, librâ ex c suspensâ, perpendiculo c b, ex m termino diametri d m perpẽdicularis ad e f æquiponderat spatium æquale rectangulo cuius basis sit e f, altitudo verò æquet semidiametri d c tres vigesimas quintas.



Super a b constructum sit quadratum a u x b; erit punctum m in rectâ u x; ex d m productâ abscissa sit m y ipsi c d æqualis, & intelligatur per u, y, x descriptũ u y x segmentum parabolæ, cuius basis u x, diameter m y, vertex y. Intelligatur præterea linea u l x n ita se habens ad parabolam u y x, vt quâcunque q z æquidistante diametro m y secentur in q, o, z & linea u x in p, sit q o dimidium rectæ p z, & bifariam secetur in p.

Quoniam d c, m y sunt æquales; quæcunque f z æquidistans rectæ d c ducatur occurrens basi in p, parabolæ in z, circulo in f, diametro a b in i, curuæ u l x n in q & o, erunt tres rectæ d c, f i, q z proportionales, ex demonstratis in tertio libro; ergo vt p i ipsi d c æqualis ad i f, ita i f ad q z: ergo vt i p ad i π semissem rectæ i f, ita tota i f ad q o dimidium rectæ q z aptatum rectæ u x secundum positionem rectæ a u: ergo si π p ponatur libra grammica ex i suspensa, grauia f i, q o vt iacent manentia sibi inuicem quiponderabunt; ergo cùm idipsum eueniat in alijs omnibus æquidistantibus rectæ d c, tota figura v l x n toti a d b c, & pars parti, si sumantur prout intra easdem ordinatim ad diametrum a b applicatas sibi respondent, æquiponderabit. 3. tertij huius in coroll. 3. 6. aut 7 pri. æquip. 28. quarti huius.

Venio iam ad calculũ casûs propositi. Quoniam iunctæ c f quadratum æquat quadrata duarum g f, g c, & g f potest nouem cuiusmodi c f viginti quinque, poterit g c reliquas sexdecim partes quadrati c f; ergo tres rectæ c f, c g, g f sunt longitudine vt quinarius, quaternarius, & ternarius. Per e & f ducantur condictæ e k, f z, occurrentes in h, r, s, t, *k*, i, q, p, o, z, lineis a b, v l, v n, u y; iunctâ *k* z occurrat rectæ l y in λ. Quoniam latus rectum parabolæ u y z æquale est diametro m y (sunt enim y m, m u æquales) erunt y λ, *k*λ, y m proportionales: ergo vt y m ad λ *k* vel m f, hoc est vt quinarius ad ternarium, vel viginti quinque ad quindecim, ita *k* λ ad λ y: est ergo λ y nouem, cuiusmodi *k* λ quindecim, 11. primi Conic.

& y m vigintiquinque.

Rursus quoniam segmentum k l z y æquale est quatuor trientibus rectanguli z λ y, quod triangulo k z y æquale est; si k λ diuidatur in quindecim partes, rectæ λ z quatuor trientes erunt viginti; si ergo λ y nouem partium ducatur in viginti, conficientur centum octoginta: ergo duo trientes rectanguli z λ y sunt centum octoginta quadrata decimæ quintæ partis rectę λ z; rectangulum autem s p z k, cuius latera s p triginta, & p z vel m λ sexdecim, est quadringenta octoginta eiusmodi quadrata, ergo tota figura s K y z p æquat eiusmodi quadrata sexcenta sexaginta; ergo cùm ex sextâ primi figura r t n o q l sit dimidium figuræ s k y z p, figura r t n o q l constabit eiusmodi quadratis trecentis triginta: ergo totidem quadrata librâ ex c suspensâ, perpendiculo c b, pendentia ex m æquiponderant figurę h e d f i c: sed parallelogrammo e h i f, cuius latus e h est viginti, cuiusmodi h i triginta, & ideo continenti quadrata eiusdem modi sexcenta, æquiponderant, (ijsdem positis) quadrata ducenta quadraginta (nam vt m c vel d c ad c p dimidium rectę c g, hoc est vt quinque ad duo, ita e h i f ad suum æquiponderans) ergo segmento e d f g æquiponderant quadrata nonaginta: sed rectangulum sub e f triginta, & sub tribus complectitur nonaginta quadrata: ergo æquiponderans seg-

17. quadrat. parab.

mento e d f est ijsdem positis, rectangulum sub e f & sub partibus tribus cuiusmodi e f complectitur triginta, & c d viginti quinque, quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM

Si segmentum e d f iam computatum ponatur basis portionis cylindri iuxta præscriptum vigesimæ quintæ prioris libri, & rectangulum isti basi æquiponderans fiat basis parallelepipedi eadem cum portione cylindri altitudine præditi; istud erit, ex ibidem demonstratis, æquale spatio æquiponderantis portioni cylindri iuxta cautiones ibidem adhibitas.

SCHOLIVM.

Expedita magis visa nobis fuit hæc computandi via, desumpta ex demonstratis per libram planam, ideóque eâ hîc vsi sumus; ne verò dubium vllum de libræ istius cum grammicâ consonantia residuum fiat, placet calculum inire æquiponderantis segmento e d f, posito arcu e d f triente circuli, prout eum posuimus in decimanonâ tertij libri aliam epilogismi methodum sectantes.

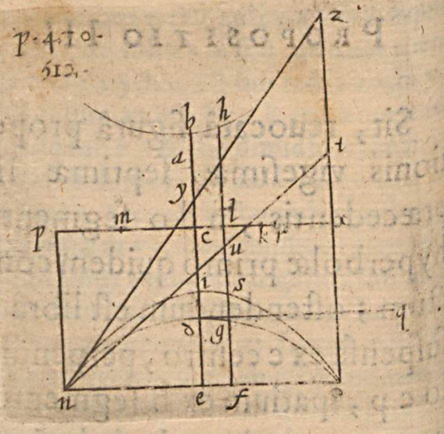
Quoniam c d vel m y est ad h c vel k y potestate vt quatuor ad tria, tres autem rectæ m y, κ λ, λ y sunt proportionales, vt quatuor ad tria, ita erit m y ad λ y. Cùm 20. sexti Euc. in coroll.

igitur segmentum k y z λ sit æquale quatuor trientibus rectanguli z λ y; erit æquale rectangulo sub z λ & sub quatuor trientibus rectæ λ y, hoc est sub rectis z λ, m y; rectangulum autem s p z k erit æquale rectangulo sub z λ & sub dimidio rectæ m y, hoc est sub duplâ rectæ m λ : ergo tota figura s p z y κ æquat rectangulum sub m p & sub rectæ m y tribus semissibus : ergo dimidium illius æquat rectangulum sub m p & sub tribus quadrantibus rectæ m y vel c d : ergo æquiponderans figuræ e h d fi æquale est rectangulo sub g f & sub tribus quadrantibus semidiametri c d: sed parallelogrammo e h i f ęquiponderat quadrans ipsius e h i f, hoc est rectangulum sub g f & sub g φ quadrante rectæ c d; ergo segmento e d f g æquiponderat rectangulum sub e g & sub rectæ c d duobus quadrantibus, hoc est rectangulum e g d, quod prorsus conuenit cum epilogismo propositionis decimænonę tertij libri.

Quod in decimâ octauâ eiusdem libri tertij ostenditur, statim ex hoc diagrammate apparet; nam segmentum u y x est quatuor trientes rectanguli u m y, quod est quadratum, cùm latera u m, m y sint æqualia : ergo duo trientes quadrati u m vel a c æquiponderant ex m semicirculo a d b, librâ ex c suspensâ, perpendiculo c b.

Propositio III.

Sit, reuocatâ figurâ propositionis vigesimæ septimæ libri præcedentis, n d o segmentum hyperbolæ primò quidem condictum; ostendendum est librâ b d suspensâ ex c centro, perpendiculo c p, spatium ex b segmento vt iacet manenti æquiponderãs esse æquale trientibus octo quadrati b i. Et si ijsdem manentibus recta d e æqualis sit diametri d b septimæ parti; ostendendum est secundò, spatium ex b segmento n d o æquiponderans (quod alterum segmentum hyperbolæ notum vocetur) esse æquale rectangulo comprehenso sub basi n o & sub diametri sexdecim centesimis quadragesimis septimis. Recta verò e o erit dupla rectæ d e.



Sit igitur primò n d o ſegmentum hyperbolæ conditum, & intelligatur c e diuiſa in nouem partes; erit ergo n o duodecim earundem partium; latus autem b d tranſuerſum, erit ad d q directum vt binarius ad vnitatem, vt oſtendimus in priore
pag. 484. libro. Quoniam ergo vt b d recta ad d q, id eſt vt binarius ad vnitatem, ita ponitur ex vigeſimâ ſeptimâ citatâ o t recta ad n o, erit o t viginti quatuor, cuiuſmodi n o duodecim; & quoniam vt c e ad n o hoc eſt nouem ad duodecim, ita ponitur
2. ſexti Euc. o t ad o z, erit o z triginta duarum partium cuiuſmodi c e nouem; ergo e y eſt ſexdecim; ergo ei eſt octo partium: ac proinde c e, c d, c i ſunt in ratione numerorum 9. 3. 1.

Rurſus

Rursus quoniam segmentum parabolæ n i o æquale est quatuor trientibus rectanguli n e i, vel trianguli n i o; ergo diceratoides figura contenta arcu n i o, rectis n p, o x, & rectâ per i æquidistante basi n o; æqualis est duobus trientibus rectanguli n e i (nam parallelogrammum dictis lineis comprehensum duplum est parallelogrammi n e i) ergo cum e i contineat viginti quatuor partes cuiusmodi e c viginti septem; rectangulum sub n e & sub sexdecim partibus eiusmodi æquabit duos trientes figuræ diceratoidis; & addito duplo rectæ c i, rectangulum sub n e & sub viginti duabus partibus eiusdem modi æquabit totam figuram extrà cauam p c x o i n: rectangulum autem sub n e & sub vndecim eiusmodi æquabit dimidium totius p c x o i n, quod est c i s o x. 17.quadrat. parab.

Rursus quoniam si ponatur axis p x, brachiumque æquet rectam c e, vt c e recta ad dimidium rectæ c d, ita est tota c d ad dimidium rectæ c i, idemque euenit in quacumque aliâ æquidistante rectæ c i, dimidium figuræ extrà cauæ parabolicę aptatum brachio eiusmodi æquiponderabit figuræ exhtrà etiam cauæ hyberbolicæ p x o d n vt iacet manenti ex secundâ parte vigesimæ octauæ prioris libri; ergo rectangulum sub n e & sub vndecim vigesimis septimis rectæ c e æquiponderat figuræ hyperbolicæ p x o d n: sed ijsdem politis toti rectangulo p x o n æquiponderat dimidium ipsius, hoc est rectangulum sub n e & sub e c totâ; ergo rectangulum sub e n & sub sexdecim vigesimis septimis rectæ e c æquiponderat segmento parabolico n d o e. Ergo si brachium longitudinis e c vel viginti septem partium mutetur in brachium longitudinis c d nouem partium, cùm vt nouem ad viginti septem, ita sint sexdecim ad quadraginta octo, æquiponderans segmento hyperbolico n d o, librâ ex c suspensâ, brachio æquante semidiametrum c d, erit æquale rectangulo sub n e & sub quadraginta octo vigesimis septimis rectæ c e: vel sub n e & sub quadraginta octo decimis octauis axis b d; cùm ergo tres rectæ n e, e d, b d sint æquales inuicem; rectangulum sub n e & sub quadraginta octo decimis octauis ipsius n e, erit æquale octo trientibus quadrati n e, quod erat demonstrandum primo loco.

Secundò recta d e sit æqualis septimæ parti rectæ d b; erit ergo octaua pars totius b e; & quia latus directum d q est hîc dimidium transuersi d b, rectangulum b e d
21. primi Conic. erit duplum quadrati e o; ergo rectangulũ sub d e & sub semisse rectæ e b, hoc est sub quadruplâ rectæ d e, æquale est quadrato rectæ e o; ergo tres rectæ e d, e o & quadrupla rectæ e d sunt proportionales; ergo e o recta est dupla rectæ d e.

Rurſus ſicuti in præcedenti caſu oſtendimus tres rectas c e, c d, c i eſſe in ratione numerorum 9. 3. 1. ita in iſto oſtendemus eſſe in ratione numerorum 81, 63. 49. Quoniam ergo ſi c e ponatur octoginta & vnius partium, c i eſt quadraginta nouem, erit i e triginta duarum: & ſi c e ponatur mille ſeptingentarum & vnius erit c i mille viginti nouem, & c d mille trecentarum viginti trium, & i e ſexcentarum ſeptuaginta duarum: duo ergo trientes rectæ e i erunt quadringentæ quadraginta octo, quæ ſi addantur ad duplam rectæ c i, hoc eſt ad bis mille quinquaginta & octo, ſumma ex vtroque numero conflata erit bis mille quingentæ ſex; cuius dimidium eſt mille ducentæ quinquaginta tres; ergo rectangulum ſub n e rectâ & ſub mille ducentis quinquaginta tribus, cuiuſmodi c d continet mille trecentas viginti tres, eſt æquale ſpatio quod librâ ex c ſuſpensâ, perpendiculo c x, brachio æquante rectam c e, ęquiponderat figurę n p x o d; ſed toti p n o x ęquiponderat rectangulum p n e c: ergo differentia eorum videlicet rectangulum ſub n e & ſub quadringentis quadraginta octo, cuiuſmodi c d continet mille trecentas viginti tres, ęquiponderat ſegmento n d c ijſdem poſitis. Si ergo brachium æquans rectam c e mutetur in aliud ęquans rectam c d, hoc eſt ſi vt ſeptem ad nouem ita fiant partes quadringentę quadraginta & octo ad quingentas septuaginta sex; rectangulum sub n e & sub quingentis septuaginta sex partibus, cuiusmodi in c d sunt mille trecentę viginti tres, vel sub n o & sub ducentis octoginta octo, quales in semidiametro c d sunt mille trecentæ viginti tres, vel in diametro bis mille sexcentæ quadraginta sex, vel sub sexdecim cuiusmodi in diametro centum quadraginta septem, æquiponderat segmento n d o, librâ ex c suspensâ, perpendiculo c x, & brachio æquante semidiametrum c b.

COROLLARIVM.

Si segmenta, quorum æquiponderantia computauimus, vel eorum differentia ponantur bases cylindraceorum iuxta præscriptum vigesimæ quintæ prioris libri; & rectangula computatis æquiponderantibus ęqualia fiant bases parallelepipedorũ eadem cum cylindraceis altitudine prædictorum; isthæc parallelepipeda erunt, vt ex ibidem demonstratis patet, æqualia spatio æquiponderantium cylindraceis; iuxta cautiones ibidem adhibitas.

SCHOLIVM PRIMVM.

Occasione tot epilogismorum hîc Lectorem monêre insisto, lapsum in ijs pertractandis esse perfacilem, & vehementer timendum calculatori etiam exercitatissimo. Hoc verò diligenter attendi velim, si quis fortasse error in nostris numeris (quamuis contrarium sperem euentum) detegeretur, vtrùm vitium in eorum tractatione sistat, an etiam ad ipsam grammicam demonstrationem pertingat; si enim ista rectè procedat, stat veritas quadraturæ, & inde emendari poterunt numeri, quorum vitium tantum excusationis habere censuerunt legum conditores, vt nunquam in rem iudicatam transire voluerint, si quid perperam computatum probari possit.

SCHOLIVM ALTERVM.

Ad inueniendum spatium segmenti hyperbolæ propositis æquipõderãs vsi sum⁹ librâ planâ, non quidẽ necessitatis, sed facilitatis maioris causâ; poteramus enim, si placuisset, calculũ perficere ex solis tertij libri principijs in decimâ septimâ eiusdem libri collectis. Porro ex hoc schemate calculum eorum quæ de hyperbolico xystroide innuimus in præcedenti libro, explorabimus in hunc modum. Quoniam in primo casu ostendimus figuram c i s o x esse vndecim vigesimas septimas rectanguli c o x; semisegmentum e i s o f erit sexdecim reliquæ vigesimæ septimæ; ergo figura c i s o x est ad figuram e i s o f vt vndecim ad sexdecim. Ponatur c x ita secta in l vt c l sit si-

Prop. 13. Coroll. 3. & prop. 27. in Schol.

l x sicut ternarius ad quinarium: ergo ex primâ quarti si per l agatur l s æquidistans rectæ i e, erit in rectâ l s centrum grauitatis semisegmenti e i s o. Recta transiens per centrũ grauitatis figuræ c x o s i secet rectam e x in r: & recta c x bisectio (ita vocare cum Commandino ausus sum quam Mathematici Græci dicunt διχοτομίαν) sit k. Erit ergo c l octaua
6. primi æquip. pars siue vndecim octogesimæ octauæ totius c x; & c l ad l k erit vt portio c x o s i ad portionem e o s i, hoc est vt vndecim ad sexdecim: ergo k r est sexdecim octogesimæ octauæ totius c x; ergo addito semisse c k, erit c r sexaginta octogesimæ octauæ rectæ c x: ergo vt 88. ad 60. vel vt viginti duo ad quindecim, ita est recta c x ad c r: ergo hyperbolicum alterum conoides, de quo egimus in vigesimâ septimâ citatâ, habet centrum grauitatis in axis c x puncto r, ita diuidente ipsum c x, vt c r ad r x sit sicut quindecim ad septem.

Præterea quoniam figura c i s o x æquat rectangulum sub e o & sub vndecim vigesimis septimis rectæ c e, hoc est, æquat parallelogrammi rectanguli c e o x vndecim vigesimas septimas; parallelogrammum autem c e o x est ad
19. decim. Euc. quadratum o x, vt recta c x ad o x siue vt binarius ad ternarium; vndecim vigesimæ septi-
Lem. 3. mæ rectanguli c e o x erunt viginti duæ septuagesimæ primæ quadrati x o.

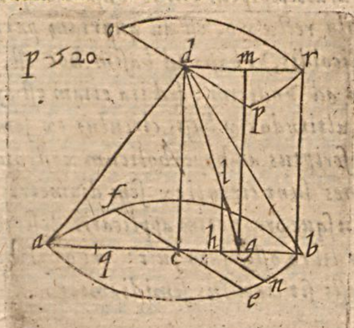
Rursus quoniam vt recta c x ad x o, siue vt binarius ad ternarium, ita sunt viginti duæ septuagesimæ primæ ad vndecim vigesimas septimas, parallelepipedum cuius altitudo sit c x & basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati x o, erit æquale parallelepipedo cuius altitudo sit x o, basis vigesimæ duæ septuagesimæ primæ quadrati x o. 34. vndec. Euc.

Quoniam ergo prismatoides cuius basis sit c i s o x & altitudo x o æquale est, vt iam ostendimus, parallelepipedo cuius altitudo sit c x, & basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati x o; ipsum autem prismatoides est, æquale quartæ parti hyperbolicoidis cuius sectiones sint quadrata rectarum b i, h s aliarumque ordinatim applicatarum ad directam diametrum c x, vt de simili casu ostendimus in quarto libro; erit quarta pars eiusmodi hyperbolicoidis æqualis parallelepipedo cuius altitudo sit c x, basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati o x. propos. 12. & sequēt.
Rursus quoniam parallelepipedum cuius altitudo sit recta c x, basis quadratum ex duplâ rectæ x o, habet eandem altitudinem cum parallelepipedo cuius altitudo est c x, & basis vndecim vigesimæ septimæ quadrati x o; ergo quarta pars parallelepipedi cuius basis est quadratum ex duplâ rectæ x o, est ad quartam partem hyperbolicoidis, vt basis ad basim, hoc est, vigintiseptem ad vndecim; sed ita etiam est cylindrus cuius altitudo c x, basis circulus ex semidiametro descriptus, ad hyperbolicum xystroides cuius sectiones sunt circuli ex semidiametris x o, l g, c d aliisque ordinatim applicatis descripti, sicut eodem libro ostensum fuit: ergo cylindrus cuius basis sit circulus semidiametro x o descri-

ptus, altitudo c x, est ad xystroides hyperbolicum v, viginti septem ad vndecim.

PROPOSITIO IV.

Si conus plano per axem secetur in duos semiconos, atque per grauitatis centrum vnius ex semiconis ducatur planum parallelum plano per axem; semidiameter, quæ in basi erit perpendicularis ad sectionem plani per axem, ita secabitur ab eiusmodi plano parallelo, vt portio iacens inter centrum basis & centrum grauitatis semibasis sit quadrupla portionis interceptæ inter idem semi-basis centrum & inter parallelum planum iam memoratum.



Sit conus d a b cuius basis sit circulus a f b e; axis d c; planum per axem d c f faciat in circulo sectionem f c e, ad quam ex c excitata sit in plano semicirculi e b f perpendicularis c b; ipsius autem semicirculi centrum grauitatis sit g in semidiametro c b existens ex decimâ tertiâ secundi libri; semiconi autem d f c b centrum grauitatis sit l, atque per l actum sit planũ l h n plano d c f parallelum, secans rectam c b in h. Dico h ita cadere inter c & g, vt recta c g sit rectæ h g quadrupla; siue c h tripla rectæ h g.

Per g & d agatur recta d g. Quoniam figura solida d f e b describitur motu rectæ d f ex puncto d manente, per ambitum semicirculi f b e, erit homœoconica; ac proinde si plano secetur parallelo basi f b e sectio erit similis ipsi f b e (id enim eodem pacto ostendetur, quo ab Appollonio idipsum ostenditur de toto cono) similiterque posita; cumque similes, similiterque sint positæ, recta d g transibit per centrum grauitatis ipsius ex quinto postulato primi libri Archimedei de Æquiponderantibus; ergo per vndecimam libri præcedentis centrum grauitatis figuræ homœoconicæ d f e b erit in rectâ d g; est ergo punctum l in rectâ d g; ergo per corollarium secundum duodecimæ libri eiusdem punctum l ita diuidit rectam d g, vt ipsius g l recta l d sit tripla.

5. primi Conic.

Rursus quoniam planum trianguli d c g secant duo plana inuicem æquidistantia
16. vndec. Euc. per c & l ducta, eorum sectiones d c, h l in plano d c g factæ, erunt parallelæ; ergo
2. sexti Euc. cùm in triangulo d c g lateri d c parallela sit l h; vt d l ad l g, hoc est vt tria ad vnum, ita erit c h ad h g: est ergo c h tripla rectæ h g, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Præsens demonstratio perinde locum suum obtinet, quamuis triangulum d f e per verticem d actum non esset per axem d c, sed f e esset quęuis ordinatim applicata ad diametrum a b: perinde, inquam verum est si per l agatur l h parallela perpendiculo d c per d verticem coni & per c centrum ellipseos ducto, rectam c h esse triplam rectæ h g. Hactenus etiam demonstrata pariter vera sunt: licet d a b foret homœoconicum habens pro basi sectionem conicam.

COROLLARIVM. II.

Hinc apertum est si recta c d manens semper parallela rectæ h l circumferatur per ambitum figuræ e c f n b centrum grauitatis portionis cylindri conclusi superficie ita descriptâ esse in rectâ g m per g ductâ & æquidistante rectæ c d; id enim eodem planè modo demonstratur, quo ostensum fuit portionis coni centrum grauitatis esse in rectâ g d, vt patebit penitus inspicienti.

COROLLARIVM. III.

Hinc quoque apertum est quadrantem spatii quod portioni cylindri aut cylindracei iam descripti, cuius basis o p r opposita basi f e b transeat per d verticem, æquiponderat librâ ex c suspensâ, esse æquale spatio quod æquiponderat coni, vel homœoconici portioni habēti verticem d, & eandem basim cum portione cylindri, vel cylindracei.

Semidiameter a c ita diuidatur in q, vt a c ad c q sit vt quaternarius ad ternarium. Quoniam conicum vel homœoconicum cuius centrum grauitatis est l, est tertia pars cylindri vel cylindracei eadem basi f c e & eadem altitudine præditi; si intelligantur tria eiusmodi conica vel homœoconica habere idem centrum l, æquiponderans tribus ex q erit ad ipsa tria vt recta c h ad c q, siue vt recta c g ad c a; (nam vt c g, c h ita ponuntur c a, c q; ergo alternando vt c g, c a, ita c h, c q) sed sicut c g recta ad c a, ita est cylindri vel cylindracei pars memorata ad æquiponderās ex a; ergo vt æquiponderans ex q ad magnitudinem compositam ex tribus, ita æ- 5.quarti huius coroll. 5

quiponderans ex a ad cylindri vel cylindracei partem iam dictam; & alternando æquiponderans ex q est ad æquiponderans ex a vt ipsæ suspensæ magnitudines; quæ cùm sint æquales, ipsa æquiponderantia erunt etiam æqualia.

Rursus quoniam æquiponderans ex q compositæ magnitudini æquat æquiponderans ex a cylindri vel cylindracei parti memoratæ, triens istius æquiponderantis ex a æquale erit spatio quod ex q æquiponderat conico vel homœoconico cuius centrum l: ergo si brachium c q mutetur in brachium c a, æquiponderans ex a conico vel homœoconico erit ad æquiponderãs ex q eidem conico vel homœoconico vt est q c ad a c, hoc est ternarius ad quaternarium: ergo cùm æquiponderans ex q conico vel homœoconico sit triens vel quatuor vnciæ æquiponderantis ex a cylindri vel cylindracei memoratæ parti, æquiponderãs ex a conico vel homœoconico erit tres vnciæ vel quadrans spatij quod ex a æquiponderat cylindri vel cylindracei memoratæ parti.

*. sec. huius.

Propositio V.

Sit a c bifariam in b secta diameter cuiusuis ellipseos vel hyperbolæ l c m: recta a k tangat in ellipsim, illique proinde æquidistans sit l b m. Plano l c m insistat ad rectos angulos planum d b c secans ipsum planum l c m secundum diametrum a c; in eo inuentum sit punctum d vertex coni cuius cum plano l c m sectio communis sit ellipsis vel hyperbola l c m; id enim inueniri potest ex conicis, cùm latus figuræ rectũ quod ibi inter data ponitur habeatur, si vt a c diameter prima ad secundam quam inter data ponimus, ita fiat ipsa secunda ad tertiam quandam quæ ipsum latus rectum æquat, vt ex definitione secundæ diametri constat. Solidum istâ superficie conicâ inclusum & plano per verticem d acto secante planum l c m secundum ordinatim applicatam diametro a c, voco *condictum ho-*

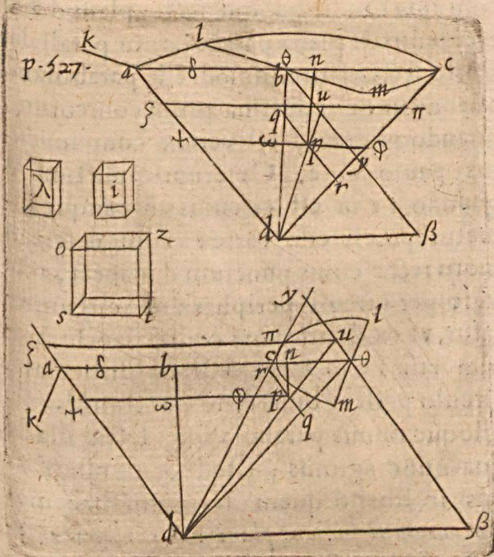
54. & 55. primi conic. 4 defin. secund. prim conic.

mœoconicum: hyperbolicum quidem si basis eius sit hyperbolæ segmentum; ellipticum, si ellipseos; parabolicum si fuerit plani plano d a k paralleli sectio cum superficie homœoconicâ. His ita definitis, propositum sit.

Inuenire parallelepipedum æquale condicto homœoconico parabolico & eius grauitatis centrum; ac proinde spatium quod ex centro b æquiponderat ipsi, posito libræ perpendiculo quod transeat per verticem homœoconici & per cētrum ellipsi hyperbolæque commune.

Sit planum l θ y parallelum plano d a k secans diametrum a c in quocunque puncto θ citra vel vltra c diametri ipsius terminum posito, propositum verò sit inuenire parallelepipedum æquale solido homœoconico comprehenso planis d θ l, y θ l & superficie homœoconicâ.

Quoniam recta θ y est parallela lateri



d a triãguli d a c per axem, ſectio homœoconici elliptici y θ l m erit parabola cuius diameter θ y ; ordinatim applicata l θ m; omniaque plana plano y θ l parallela facient ſectiones parabolicas quarum diameter erit ſectio in triangulo d a c parallela rectæ θ y, & in parte quidem y θ c conſtitutarum baſes erunt ordinatim vtrinque applicatę ad θ c partem diametri ſectionis l c m, eruntque parallelæ ad l m rectam; in parte verò y θ d conſtitutarum baſes erunt ordinatim applicatæ ad rectam θ d, quæ trianguli d l m baſim l m bifariam ſecat in θ, eruntque parallelæ ad ipſam baſim l m cùm ipsa l m sit quoque sectio plani d θ m incidentis in plana parabolarum parallela. Porro sectionem eiusmodi esse parabolam, ostenditur in vndecimâ primi conicorum, quandoquidem d est vertex coni inuentus paulò antè. Cæterùm punctum d quando l c m est circulus vbicunque sumatur potest esse vertex coni descripti motu rectæ cuius punctum d maneat, ipsa verò per circuli peripheriam circumferatur, vt ex definitione coni palàm fit. Verùm etsi l c m foret ellipsis distincta à circulo posset vbiuis sumi punctum d, nihiloque minùs parabola foret sectio illa de qua nunc agimus; istud demonstramus nos in libello quem scriptum habemus *De communi sectione plani & turbinatæ superficiei ex puncto quiescente à lineâ rectâ per ellipsim, parabolam, & sectiones oppositas circumductâ descriptæ*; eum tamen quamuis paratum nec instituto nostro inutilem in lucem modo non damus, quod theoremate ita extenso carere possit præsens tractatus.

1. defi- nit. lib. prim conic.

Recta θ y ita secetur in u vt sicut ternarius ad binarium ita sit portio y u ad u b; ad hoc ex secundi equiponderantium propositione 8. vt punctũ u sit centrum parabolæ cuius diameter b y, & basis l m. Iuncta recta d u ita secetur in p, vt d p sit tripla rectæ p u, atque per p agatur p n æquidistans rectæ d b, & occurrens diametro

Con- structio proble- matis.

tro a c in n. Fiat parallelepipedum s z cuius basis s x sit æqualis segmento parabolæ cuius basis l m, diameter θ y, altitudo autem x z æquans trientem altitudinis homœoconici parabolici: atque vt semidiameter a b ad b n, ita fiat s z parallelepipedum, ad λ parallelepipedum. Dico punctum p esse centrum grauitatis homœoconici parabolici; ipsum esse æquale parallelepipedo s z; & solido λ æquale esse graue quod ex a pendens, librâ ex b suspensa, posito perpendiculo b d, æquiponderat homœoconico parabolico vt iacet manenti.

Per p agatur q r parallela rectæ b y occurrens lateribus trianguli θ d y in q & r; sicut ergo θ y recta & diameter segmenti diuisa est in u, ita q r diameter similis segmenti diuisa erit in p; cùm ergo parallelæ ad θ y rectam intra triangulum θ y d sint (vt ostensum est) diametri segmentorum parabolæ similium, ex sectione homœoconici generatorum, & similiter secentur, recta d u transibit per centra grauitatis omnium sectionum; ergo centrum grauitatis homœoconici est in rectâ d u per vndecimam libri antecedentis; & per corollarium secundum duodecimæ erit p centrum grauitatis homœoconici prædicti; quod erat vnum ex propositis. 4. sexti Euc. in Schol.

Rursus quoniam parallelepipedum s z habet basim s z æqualem basi homœoconici, & trientem altitudinis illius; eiusmodi parallelepipedum erit triens cylindracei præditi eadem altitudine & eadem basi, vt ex vndecimâ citati libri apertum est; sed vt constat ex corollario quinto decimæ octauæ libri eiusdem, homœoconicum est etiam triens eiusdem cylindracei; ergo homœoconicum & parallelepipedum s z sunt æqualia, quod erat alterum ex propositis.

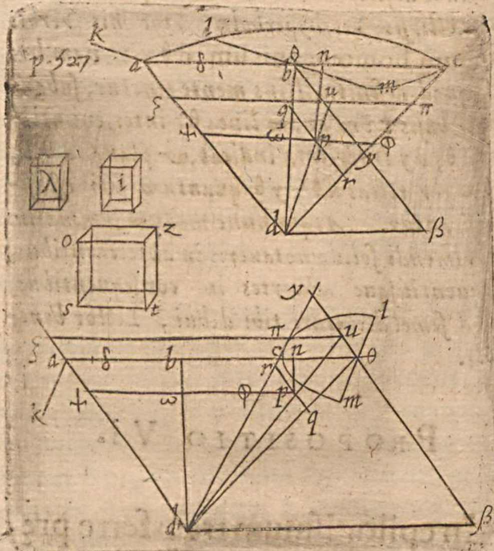
Denique quoniam perpendiculo b d parallela est recta p n, transiens per p centrum grauitatis, ipsum homœoconicum eiusmodi rectâ p n sustentatum manebit vt iacet; ergo vt brachium a b ad longitudinem b n, ita erit homœoconicum pen- (6. quadrat. parab.) dens ex n ad graue ex a æquiponderans, sed ita est s z ipsi homœoconico æquale ad λ; ergo parallelepipedum λ æquale est solido, quod ex a pendens æquiponderat homœoconico, posito libræ perpendiculo b d; quod erat tertium ex propositis.

SCHOLIVM.

In designandis solidis semel definitis superfluum & obscuriùs existimaui omnes recensere literas quibus illa consignantur; satis enim putaui esse eas adscribere quæ in plano d a c occurrunt. Exemplo rem declaro. Vt solidum homœoconicum denotem comprehensum planis d θ l, l θ y & superficie conicâ ex vertice d *manente descriptâ motu lineæ d a per ambitum l c m ellipsis vel hyperbolæ, vtor his verbis* solidum homœoconicum d θ y; *nam hoc ipso quod definitio illius mente tenetur, subauditur basis l c m quam linea θ c inter enuntiatas d θ, d y interceptâ indicat, & plana d θ l, y θ λ per rectas d θ, y θ quantum satis est significantur. Atque hunc modum summatim exprimendi solida notaueris in antecedentibus, frequentiúsque aduertes in consequentibus, quod semel declarare tibi debui, Lector beneuole.*

PROPOSITIO VI.

In epilogismum transferre præcedentis propositionis diagramma, positâ l θ m primùm diametro circuli deinde tribus eius quintis.



Sit igitur primò l c m semicirculus, ordinatimque applicata l m subtendens arcum l c m secet diametrum a c in θ puncto congruente in hoc casu cum centro b: propositum verò sit ratiocinio inuenire parabolicum b d y homœoconicum, & illi æquiponderans librâ ex b centro circuli suspensâ. Per u agatur u π occurrens lateri d c in π, & lateri a d in ξ: per p agatur similiter p ω æquidistans basi a c, & occurrẽs lateribus d a, d c in ✝, & φ, perpẽdiculo autẽ d b in ω. quoniã c d recta est ad c y vt denarius ad quinarium, hoc est sicuti a c ad θ c, (est enim θ y lateri d a parallela in triãgulo a d c)& quoniã in triágulo θ y c basi θ c paralella est u π, sicut θ y ad u y, ita erit θ c ad u π; ergo cùm θ y sit ad u y vt quinque ad tria, θ c erit ad u π vt quinque ad tria; eandem ob causam c y erit ad y π vt quinque ad tria; erit ergo ex æquo vt denarius ad ternarium ita d c ad y π; & ita etiam erit a c ad u π; ergo tota d π ad d c est vt denarius ad octonarium, siue vt quinarius ad quaternarium.

Quoniam verò recta d u ita secta est in p vt d u sit ad d p sicut quaternarius ad ternarium, erit u π ad p φ sicut quaternarius ad ternarium; cùm ergo tota a c sit ad u π sicut denarius ad ternarium, siue sicut quadraginta ad duodecim; u π autem ad p φ sit sicut duodecim ad nouem; ex æquo tota a c ad p φ erit sicut quadraginta ad nouem.

Præterea quoniam vt recta d c ad π d, ita est a c basis trianguli a d c, ad parallelam ξ π, cùm recta d c ad d π sit vt quinque ad quatuor, erit a c ad ξ π vt quinque ad quatuor: ergo cũ vt octo ad decẽ ita sit ξ π ad a c, & vt decem ad tria ita sit a c ad u π; erit ex ęquo ξ π ad u π, vt octonarius ad ternarium, & semissis rectæ ξ π ad u π erit vt ad ternarium quaternarius. Quoniam ergo vt ξ π ad u π ita est ψ φ ad φ π ex scholio quartæ sexti Euc. apud Clauũ; erit ωφ semissis rectæ ψ φ ad φ p sicut est quaternarius ad ternarium, & per conuerſionem rationis ſicut quaternarius ad vnitatem, ità erit $\omega \varphi$ ad ω p; ergo ω p eſt quadrans rectæ ω φ; ergo φ p eſt ad p ω vt tria ad vnum; ſiue vt nouem ad tria: ſed p φ continet, vt oſtenſum eſt, nouem partes cuiuſmodi a c continet quadraginta, & ſemidiameter uiginti; ergo cuiuſmodi ſemidiameter continet viginti partes, eiuſmodi tres continet recta ω p vel b n. Quoniam verò vt ſemidiameter a b ad b n ita eſt ſolidum cuius centrum grauitatis eſt p, ad æquiponderans ipſi ex a ſuſpenſum; ipſum homœoconicum parabolicum cuius centrum grauitatis eſt p, erit ad æquiponderans ex a, vt viginti ad tria.

Rurſus completo parallelogrãmo a d b θ, perpendiculares ex d in latera a θ, θ β demiſſæ erunt in ratione laterum d a, a θ ex primâ huius. Præterea quoniam ſolidum cuius cẽtrum grauitatis eſt p, eſt homœoconicum, & baſim habet parabolam θ y l m quæ continet duas tertias rectanguli ſub θ y & l m rectis contenti, vt conſtat ex primâ libri antecedentis; altitudo verò eſt perpendicularis ex d in rectam θ y (erit enim hoc ipſo & perpendicularis in planũ parabolæ, cùm planum y θ l ſit rectum ad planum a d c, vt pote incedens per rectam l θ perpendicularem ad planum a d c) ſolidum, cuius centrum p, erit tertia pars parallelepipedi cuius altitudo ſit perpendicularis ex d in rectam θ y demissa, basis quadratum æquale duabus tertiis rectanguli contenti sub rectis y θ, l m.

Vt diameter a c ad θ c portionem sui interceptam ordinatim applicatã l m, & puncto c, ita fiat reliqua a θ portio diametri ad θ δ. Dico parallelepipedum cuius basis sit æqualis duabus nouenis rectanguli contenti sub rectâ θ δ & sub l m, altitudo verò sit æqualis perpendiculari ex d in planum circuli demissæ, esse æquale homœoconico parabolico cuius grauitatis centrum est p. Quoniam enim vt a c ad θ c, ita est a d ad θ y, eo quod in triangulo a c d basi a d parallela sit θ y; & vt a c ad θ c, ita ex constructione est a θ ad θ δ; ergo vt a d ad θ y, ita erit a θ ad θ δ, & alternando vt a d ad a θ; ita θ y ad θ δ, ergo vt a d ad a θ, ita erit, positâ eadem altitudine l m, rectangulum sub θ y, l m contentum, ad rectangulum sub θ δ, l m comprehensum. 1. sexti Euc.

Rursus quoniam vt a d recta ad a θ ita est altitudo ex d in basim l c m ad altitudinem ex d in basim y θ l, vti priùs ostendimus; ergo vt altitudo parallelepipedi iam dicti cuius basis est duo trientes rectanguli contenti sub rectis y θ, l m; ad altitudinem ex d in planum l c m, quæ competat alteri parallelepipedo habenti basim duorum trientum rectanguli sub θ δ, l m contenti; ita reciprocè erit huius basis ad basim illius; ergo sunt æqualia inuicem; ergo triens istius est æqualis 32. vndec. Euc.

homœoconico iam memorato;atqui trienti istius æquale est parallelepipedum cuius eadem sit altitudo, basis autem triens sit baseos constantis duobus trientibus rectanguli contenti sub θ ẟ, l m: ergo cùm triens duorum trientum sint duæ nouenæ, parallelepipedum cuius basis æquet duas nouenas rectanguli sub θ ẟ, l m comprehensi, & altitudo sit perpendicularis ex d in planũ l c m, est æquale homœoconico iam memorato, sicut probandum susceperamus; quæ demonstratio habet locum in vtroque casu, & in quouis alio persimili etiam cum l m foret in hyperbolâ.

In primo igitur casu, quem nunc tractamus, quoniam punctum θ congruit centro b, erit l m diameter, ipsi a c æqualis, ac proinde sicut θ c est semissis rectæ a c, ita θ ẟ erit semissis rectæ a θ; est ergo θ ẟ quadrans diametri; ergo rectangulum sub θ ẟ & sub l m est quadrans quadrati quod potest diameter a c; ergo ex corollario vigesimæ sexti Euclidis, est æquale quadrato semidiametri b c; ergo parallelepipedum cuius basis sint duæ nouenæ quadrati b c, & altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam, æquale est homœoconico parabolico cuius cẽtrũ p.

Prærerea quoniam vt semidiameter a b ad longitudinem b n, hoc est vt viginti ad tria, ita librâ a n suspẽsâ ex b, est homœoconicum parabolicum cuius centrum grauitatis p, ad æquiponderans ex a, posito perpendiculo b d; vt autem viginti ad tria siue centum octoginta ad viginti septem, ita sunt duæ nouenæ, siue quadraginta centesimæ octogesimæ ad sex centesimas octogesimas, hoc est ad vnam trigesimam: ergo solidũ λ quod homœoconico dicto æquiponderat ex a, æquat parallelepipedũ cuius altitudo sit perpendicularis ex d in planũ l c m demissa, basis verò sit vna trigesima quadrati quod potest semidiameter b c; quod primò faciendum erat.

Secundo arcus l c m subtendatur rectâ l m quæ sit tres quintæ diametri a c, prout positum fuit in secundæ huius epilogismo; propositum verò sit numeris definire parabolicum θ d y homœocouicum, & illi æquiponderans ex a, librâ de b centro circuli suspensâ.

Eadem constructio quæ in priori casu cum proportione adhibeatur, eademque calculi methodus, iuxta quam y π continebit tres partes, cuiusmod[illegible] quinque, & cuiusmodi d c quæ decupla est rectæ y c, complectitur quinquaginta: ergo sicut quinquaginta ad tria, ita est d c ad π y, & ita etiam est a c ad π u: ergo d c ad d π est vt quinquaginta ad quadraginta octo, vel vt viginti quinque ad vigintiquatuor. Quoniam ergo recta d u ita secta est in p, vt d u sit ad d p sicut quaternarius ad ternarium, erit u π ad p φ sicut quaternarius ad ternarium. Cùm ergo tota a c sit ad u π sicut quinquaginta ad tria, vel ducenta ad duodecim; u π autem sit ad p φ sicut quatuor ad tria, vel duodecim ad nouem; erit ex æquo vt ducenta ad nouem, ita a c recta ad p φ.

Præterea quoniam vt d c ad π d, ita est a c basis trianguli a d c ad parallelam ξ π, cùm recta d c ad π d sit vt viginti quinque ad viginti quatuor, erit a c ad ξ π vt vigintiquinque ad vigintiquatuor, vel vt quinquaginta ad quadraginta octo: ergo cùm vt quadraginta octo ad quinquaginta, ita sit ξ π ad a c, & vt quinquaginta ad tria ita sit a c ad u π, erit ex æquo vt quadraginta octo ad tria, ita recta ξ π ad u π. Rursus quoniam vt ξ π ad u π, ita est ψ φ ad p φ ex scholio Clauij, erit (occursu rectarum d b, ψ φ posito in ω) ω φ semissis rectæ ψ φ ad p φ
4. sexti Euc.
vt viginti quatuor ad tria, vel vt octo ad vnum: ergo diuidendo vt septem ad vnum, vel sexaginta tria ad nouem, ita ω p ad p φ: sed p φ continet, vt ostensum est, nouem partes centesimas diametri a c ducentas, & semidiameter centenas; ergo ex æquo cuiusmodi semidiameter centenas continet, eiusmodi ω p vel b n complectitur sexaginta tres.

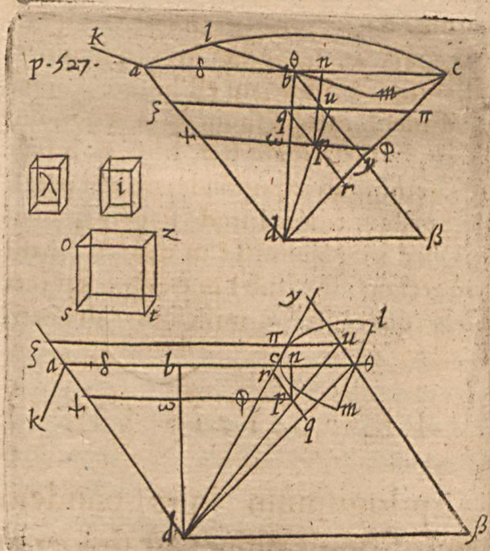
Rursus quoniam recta θ c est decima pars rectæ a c, & vt a c ad θ c ita est a θ ad θ δ, erit θ δ nouem centenæ partes diametri a c; ergo parallelepipedum cuius basis sint duæ nouenæ rectanguli contenti sub l m tribus quintis diametri a c, & sub nouem centesimis diametri eiusdem, altitudo verò æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam æquale est in secundo casu homœoconico cuius centrum p. Cùm ergo duæ nouenæ centesimarum nouem sint vna quinquagesima; basis eiusmodi parallelepipedi erit rectangulum sub l m & sub vnâ quinquagesimâ diametri, vel vnâ vigesimâ quintâ semidiametri.

Rursus quoniam vt a b ad b n, hoc est vt centum ad sexaginta tria, ita est vna quinquagesima ad sexaginta tres quinquies-millesimas, & ita etiam est homœoconicũ iam dimensum ad λ suum ex a æquiponderans, perpendiculo b d, librâ ex b suspensâ; eiusmodi æquiponderans erit parallelepipedum cuius altitudo sit perpendicularis ex d in planum l c m demissa, basis verò rectangulum sub l m & sub sexaginta tribus quinquies - millesimis diametri a c.

PROPOSITIO VII.

Epilogismum inire eiusdem propositionis quintæ posito arcu l c m hyperbolæ primùm segmento noto, deinde segmento in quo c θ recta æquet semidiametri b c duas ſeptimas partes prout posuimus in tertiâ.

Sit igitur l c m ſegmentum hyperbolæ notum, id eſt c θ, θ l, a c ſint inuicem æquales, ſitque condicta l θ perpendicularis ad c θ; propoſitum verò ſit computare parabolicum θ d y homœoconicum, & illi ex a æquiponderans librâ ex b centro hyperbolę ſuſpenſâ, perpendiculo b d.



Eadem constructio, quæ in proximè superioris propositionis duplici casu, cum proportione ponatur. Quoniam c d recta est ad c y, vt a c recta ad θ c, erunt c d, c y æquales, cũ a c, θ c ponantur etiã æquales in isto casu. Præterea sicut in prioris propositionis duplici casu ostensum est, y π continebit tres partes, cuiusmodi y c quinque complectitur; ergo cùm y c, d c sint æquales, sicut quinqne ad tria ita est d c ad π y, & ita etiã est a c ad π u: ergo d c ad d π est vt quinque ad septem: quoniam verò recta d u ita secta est in p vt d u sit ad d p sicut quaternarius ad ternarium, erit u π ad p φ sicut quaternarius ad ternarium, vel duodecim ad nouem. Cùm ergo tota a c sit ad u π sicut quinarius ad ternarium, hoc est sicut viginti ad duodecim; u π autem sit ad π φ sicut quaternarius ad ternarium, hoc est sicut duodecim ad nouem; ex æquo tota a c ad p φ erit sicut viginti ad nouem; vel quadraginta ad octodecim.

Rursus quoniam vt d c ad π d, ita est a c basis trianguli a d c ad parallelam ξ π; cũ recta d c ad π d sit vt quinque ad septem, erit a c ad π ξ vt quinque ad septem: ergo cùm vt septem ad quinque ita sit π ξ ad a c, & vt quinque ad tria ita sit a c ad u π, erit ex æquo π ξ ad u π, vt septem ad tria. Quoniam ergo vt ξ π ad u π, ita est ψ φ ad p φ ex Scholio Clauij; erit (occursu rectarum d b, ψ φ posito in ω) ω φ semissis rectæ 4. sexti Euc.

$\frac{1}{4}\varphi$ ad φ p sicut est septenarius ad senarium: & cōponendo vt tredecim ad sex, vel vt triginta nouē ad octodecim ita ω p ad φ p: sed φ p continet, vt ostensum est, octodecim cuiusmodi a c complectitur quadraginta, & semidiameter a b viginti: ergo ex æquo vt triginta nouem ad viginti, ita est ω p vel b n ad a b semidiametrū. Quoniam verò librâ ex b suspensâ perpendiculo b d, vt semidiameter a b ad b n, ita est solidum cuius centrum grauitatis est p, ad æquiponderans ipsi ex a suspensum; ipsum homœoconicum parabolicum cuius grauitatis centrum est p, erit ad æquiponderans ex a vt viginti ad triginta nouem.

Rursus quoniam rectæ θ c, a c sunt æquales, & vt a c ad θ c, ita est a θ ad $\theta\delta$, erit $\theta\ \delta$ ipsi θ a æqualis: ergo parallelepipedū cuius basis sint duæ nouenæ rectanguli contenti sub l m duplâ diametri a c, & sub a θ duplâ quoque eiusdem diametri a c, hoc est, sint duæ nouenę quadrati quod potest dupla rectæ a c, altitudo verò æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam, æquale est homœoconico parabolico cuius centrum p: ergo cùm quadratum a θ sit quadruplum quadrati a c, parallelepipedum cuius basis sint octo nouenæ quadrati a c, altitudo verò sit perpendicularis ex d in planū l c m demissa æquale est homœoconico parabolico cuius centrum p : ergo cum quadratum a θ sit quadruplum quadrati a c, parallelepipedum cuius basis sint octo nouenæ quadrati a c, altitudo verò sit perpendicularis ex d in planum l c m demissa, æquale est homœoconico parabolico cuius centrum p. 20. sexti Euc. in coroll.

Præterea quoniam vt semidiameter a b ad longitudinem b n, hoc est vt viginti ad triginta nouem, ita librâ suspensâ ex b, perpendiculo b d, est homœoconicum parabolicum centro p affectum, ad æquiponderans ex a: vt autem viginti ad triginta nouem ita sunt octo nouenæ ad viginti sex decimas quintas : ergo homœoconico iam dicto solidum λ æquiponderans ex a æquat parallelepipedum cuius altitudo sit perpendicularis ex d in planum l c m demissa, basis verò sit viginti sex decimæ quintę quadrati a c.

Secundò recta c θ sit semidiametri b c duæ septimæ. Cùm iste casus non differat à priore nisi ὑλικῶς & vt vulgò dicitur *materialiter*, satis esse duxi summam epilogismi referre. Inuenietur ergo recta d c ad π y, item a c ad π u esse vt triginta quinque ad tria, & d c ad d π vt triginta quinque ad triginta septem: sed vt d c ad d π, ita a c ad π ξ : ergo π ξ ad a c est vt triginta septem ad triginta quinque : sed vt triginta quinque ad tria, ita est a c ad π u: ergo ex æquo vt triginta septē ad tria, ita est ξ π ad π u, &

$\psi\phi$ ad ϕ p: ergo vt triginta septem ad sex, ita $\omega\phi$ ad ϕ p, & componendo vt quadragintatria ad sex, ita ω p, ad ϕ p.

Rursus quoniam a c ad π u est vt triginta quinque ad tria, vel centum quadraginta ad duodecim: π u autem ad ϕ p est vt duodecim ad nouem, erit ex æquo a c ad p ϕ vt centum quadraginta ad nouem, & a b ad p ϕ vt septuaginta ad nouem. Præterea quoniam a b ad p ϕ est vt septuaginta ad nouē vel vt quadringēta viginti ad quinquaginta quatuor: p ϕ autem ad ω p est vt sex ad quadraginta tria, vel vt quinquaginta quatuor ad trecenta octoginta septem, ergo ex ęquo a b ad ω p vel b n erit vt quadringenta viginti ad trecenta octoginta septem.

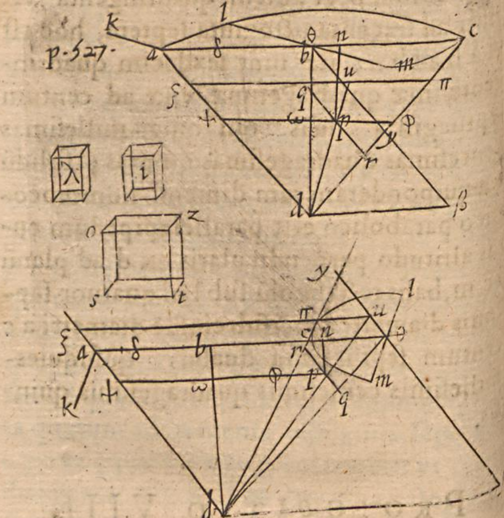
Rursus quoniam a c ad c θ est vt septem ad vnum, & vt a c ad c θ, ita est θ a ad $\theta\delta$, erit $\theta\delta$ octo, cuiusmodi a c quadraginta nouem: & duę nouenę rectę $\theta\delta$ erunt sexdecim, cuiusmodi a c quadringenta quadraginta & vnum: ergo parallelepipedum cuius basis sit rectangulum sub l m & sub sexdecim quadringentesimis quadragesimis vnis diametri a c, altitudo verò perpendicularis ex d in planum l c m est æquale homœoconico parabolico cuius centrum p. Quoniam ergo vt a b brachiū ad longitudinem b n, ita est homœoconicum cuius centrum p ad suum ex a æquiponderans, librâ ex b suspensâ, posito perpenpendiculo d b; vt autem quadringenta viginti ad trecenta octoginta septem, hoc est vt a b ad b n, ita sunt sexdecim quadringentesimæ quadragesimæ vnæ ad centum septuaginta duas quinquies-millesimas centesimas quadragesimas quintas; solidū λ æquiponderans iam dimenso homœoconico parabolico erit parallelepipedum cuius altitudo perpendicularis ex d ad planū l c m, basis rectangulū sub l m quatuor septimis diametri a c, & sub eiusdē diametri a c centum septuaginta duabus quinquies-millesimis centesimis quadragesimis quintis.

Propositio VIII.

Iisdem manentibus inuenire homœoconico elliptico & hyperbolico æquiponderans, posito libræ perpendiculo quod transeat per verticem homœoconici & per centrum ellipsi hyperbolæque commune.

Inueniatur ex præscripto vigesimæ quintæ libri quarti parallelepipedum s z æquale solido quod ex a pendens æquiponderat

p. 527.



cylindraceo cuius basis eadem sit quæ homœoconici elliptici, vel hyperbolici; linea autem describens superficiem cylindraceā sit parallela libræ perpendiculo d b. Dico quadrātem eiuscemodi parallelepipedi esse æquale solido quod homœoconico elliptico, vel hyperbolico æquiponderat ex a pendens iisdem positis. *Istud apertum est ex corollario tertio quartæ propositionis.*

COROLLARIVM I.

Quoniam per quintam inuentum est solidum λ quod iisdem positis æquiponderat homœoconico parabolico; & ex præſenti inuenta eſt quarta pars ſolidi s z, quæ æquiponderat homœoconico elliptico aut hyperbolico; ſi ſumatur æquiponderantium differentia i, apertum eſt ſpatium i æquiponderare differentiæ qua homœoconicum parabolicum d l m θ y contentum planis d θ m, y θ m & ſuperficie homœoconicâ ſuperatur ab elliptico d θ l c m contento ſuperficie homœoconicâ, & planis d θ l, l c m: vel qua hyperbolicum ſuperatur à parabolico. Tradita igitur eſt methodus inueniendi, poſito eodem perpendiculo, ſpatium i quod ex a pendens æquiponderet differentiæ modo memoratæ, quam *condictam* voco, & quæ continetur ſuperficie homœoconicâ & planis y θ l, l c m.

COROLLARIVM. II.

Cùm ex vigeſimâ quintâ prioris libri, in primo caſu propoſitionis ſextæ æquiponderans ſemicylindro ſit parallelepipedum cuius altitudo eſt perpendicularis ex vertice d in planum l c m demiſſa, & baſis duo trientes quadrati quod poteſt ſemidiameter; ęquiponderans ſemicono cuius vertex d, erit parallelepipedum eadem altitudine conſtructum, cuius baſis ſit quadrans duorum trientum, id eſt ſit ſextans quadrati ex ſemidiametro. Quoniam ergo ſextan æquat quinque trigeſimas, planè conſtat deductâ vnâ trigeſimâ quæ ex huius ſextâ æquiponderat homœoconico parabolico, relinqui quatuor trigeſimas vel duas decimas quintas eiuſdem quadrati pro baſi parallelepipedi eadem altitudine constructi & æquiponderantis differentiæ condictæ in primo caſu allegato, quãdo nimirum l c m eſt ſemicirculus.

At in ſecnndo quando ordinatim applicata l m eſt tres quintę diametri a c, cùm æquiponderans portioni cylindri eadem baſi præditæ ſit ex corollario ſecundæ parallelepipedum cuius altitudo eſt perpendicularis ex d in planum l c m, baſis verò rectangulum comprehenſum ſub l m & ſub tribus vigeſimis quintis ſemidiametri, aut ſub tribus quinquageſimis diametri; quadrans trium quinquagenarum erit tres ducenteſimę. Quoniam ergo tres ducenteſimæ æquant ſeptuaginta quinque quinquies-milleſimas, liquet deductis ſexaginta tribus eiuſdem modi ſub quibus & ſub eadem l m baſis parallelepipedi λ altitudine iam memoratâ præditi, comprehenditur ex huius ſextâ, relinqui duodecim quinquies-milleſimas, hoc eſt tres milleſimas ducenteſimas quinquageſimas diametri a c, ſub quibus & ſub eadem l m comprehendatur baſis parallelepipedi eadem altitudine præditi, & æquiponderantis differentiæ condictæ in secundo casu sextæ propositionis iam laudatæ.

Similiter cùm in primo casu septimæ æquiponderans portioni cylindracei eadem basi præditæ sit ex corollario tertiæ huius libri , vel ex corollario quarto vigesimæ quintæ antecedentis libri, parallelepipedũ cuius altitudo est perpendicularis ex d in planum l c m, basis verò octo trientes quadrati quod potest diameter a c ; quadrans octo trientum erũt duo trientes. Quoniam ergo duo trientes æquant decem decimas quintas, manifestum est si eæ deducantur de parallelepipedo λ, hoc est ex septimâ iam laudatâ de viginti sex decimis quintis eiusdem quadrati a c , relinqui sexdecim decimas quintas eiusdem quadrati a c, quæ æquiponderent differentiæ condictæ.

Demum cùm in secundo casu eiusdem septimæ æquiponderans portioni cylindracei eadem basi l c m , qua homœoconicum hyperbolicum d c l m præditæ, sit ex corollario tertiæ parallelepipedum cuius altitudo est perpendicularis ex d in planum l c m demissa; basis verò rectangulum comprehẽsum sub m l & sub diametri a c sexdecim centesimis quadragesimis septimis; quadrans erit quatuor eiusmodi partes, ac proinde parallelepipedum dictâ iam altitudine constructum, & habens basim æqualem rectãgulo sub m l & sub quatuor centesimis quadragesimis septimis diametri a c contento. Quoniam ergo quatuor centesimæ quadragesimæ septimæ æquant centum quadraginta quinquies-millesimas centesimas quadragesimas quintas, apertū est si eæ deducātur de parallelepipedi λ basi, hoc est, ex septimâ iam laudatâ, de centum septuaginta duabus eiusdem mensuræ partibus, relinqui triginta duas quinquies millesimas centesimas quadragesimas quintas diametri a c, sub quibus & sub m l comprehensum rectangulum sit basis parallelepipedi dictâ altitudine erecti, & quod differentiæ condictæ æquiponderet.

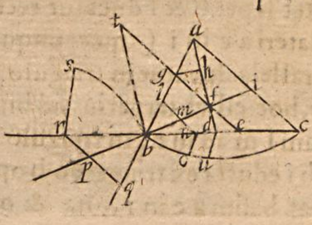
SCHOLIVM.

In corollario primo iussimus sumi differentiam solidi λ & quartæ partis s z ut haberetur æquiponderans differentiæ condictæ; istud verò intelligi debet quando brachium libræ sustinentis homœoconicum parabolicum est ad easdem partes obuersum ad quas brachium libræ sustinentis homœoconicum ellipticum aut hyperbolicum: si enim ad oppositas partes brachia forent conuersa, summa ex quartâ parte solidi s z & ex solido λ exhiberet æquiponderans quæsitum. Prætermisimus tamen istum casum, quia nobis necessarius non est ad præsentem tetragonismum, ut ex demonstrandis patebit, aliunde verò tot casuum multitudine legentis attentio & animi vigor opprimi solet.

PROPOSITIO IX.

Sit triangulum quodcunque b a c cuius basim b c bifariam secet a d ex angulo a opposito educta; sit item vt octonarius ad quinarium ita b c ad b e, perque e acta sit e g æquidistans lateri e c, occurrens rectæ a d in f, & lateri b a in g. Ostendendum est vt se habet quaternarius ad vnitatem, ita esse rectam a d ad d f, & vt se habet ternarius ad binarium ita esse g f ad f e.

p-551



Quoniam in triangulo a d c lateri a c parallela est f e, ergo vt c d ad d e, id est vt quaternarius ad vnitatem, ita est a d, ad d f. Per g agatur g h parallela rectæ b c occurrens in h rectę a d. Quoniam in triangulo a b c lateri a c parallela est g e, vt b e ad e c, idest vt quinarius ad ternariũ, ita b g, ad g a: similiter quia in triangulo a b d lateri b d parallela est g h, vt b g, ad g a, idest vt quinarius ad ternarium, ita d h ad h a: ergo cùm diuisâ d a in octo partes, recta d f contineat duas, recta h a tres, residua h f continebit etiam tres; ergo vt ternarius ad binarium, ita h f ad f d: sed vt h f ad f d, ita g f ad f e (eò quòd triangula g f h, e f d sint similia) ergo vt ternarius ad binarium, ita g f ad f e: ergo d f est quadrans rectæ a d, & g f ad f e est vt ternarius ad binarium, quod erat ostendendum.

2. sexti Euc.

COROLLARIVM. I.

Hinc patet si per b & f ducatur recta b f occurrens lateri a c in i (quæcunque l n rectæ g l parallela ducatur in triãgulo a b c) vt g f ad f e, hoc est vt ternarius ad binariũ, ita esse rectam l m ad m n; in triãgulo enim a b c, recta b i educta ex triangulo b opposito sicut secat basim a c in i, ita & omnes ipsi basi parallelas, quarum vna est g e; sed g f ad f e est vt ternarius ad binarium: ergo &c.

COROLLARIVM. II.

Si a b c ſit triangulum per axem homœoconicæ figuræ, cuius baſis ſit ellipſis b o c, vel hyperbola b s circa diametrum b c deſcripta, cuius coniugata ſit d u: & ſi eiuſmodi ſolidum homœoconicum ſecetur plano quocunque l n o, vel q r s cuius cum triangulo a b c vel r b q ſectio ſit recta l n vel q r æquidiſtans lateri a c, & cum baſi ſit recta n o vel r ſ æquidiſtans rectæ d u; manifeſtum eſt ſectionem plani l n o vel q r s cum homœoconico elliptico vel hyperbolico habere centrum grauitatis in rectâ i b productâ. Oſtenſum eſt enim in quintâ ſectiones iſtas eſſe parabolas, quarũ diametri ſint l n, q r: ergo cum l n, q r ita ſectæ ſint in m, p vt portiones l m, q p ſint ad portiones m n, p r ſicuti ternarius ad binarium, ſegmenta eiuſmodi parabolarum habebunt centrum grauitatis in punctis m & p, ex octauâ ſecundi Æquiponderantium Archimedis.

COROLLARIVM III.

Inde vlteriùs efficitur centrum grauitatis differentiæ condictæ de qua agit corollarium primum præcedentis eſſe in rectâ i b p; cum enim omnes eius ſectiones cum plano parallelo ipſi l n o habeant centrum grauitatis in rectâ i b p, tota differentia habebit centrum grauitatis in eadem i b p ex vndecimâ libri quarti.

COROLLARIVM. IV.

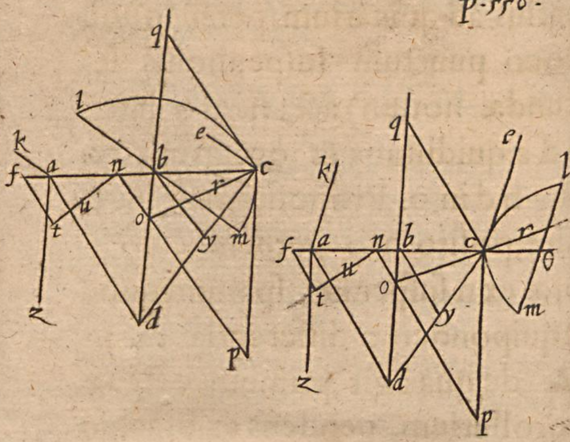
Si per b ducatur recta b t æquidistans rectæ d a, & occurrens rectæ e f in t, ostendi ex dictis potest rectam f t esse lateri a c æqualem, rectam verò b t esse ad d a, vt est quinarius ad quaternarium. Quoniam enim in triangulo t b e basi t b parallela est d f; sicut b d est quintupla rectæ d e, ita b t
4. sexti Euc. in coroll. erit quintupla rectæ d f; sed d f est quadrans rectæ d a; ergo recta b t est ad rectam d a vt quinarius ad quaternarium. Rursus quoniã in triangulo a d c lateri a c parallela est f e; sicut a d ad f d, ita erit a c ad f e; sed a d ad f d est vt quaternarius ad vnitatem; ergo a c ad f e est vt quaternarius ad vnitatem,
2. sexti Euc. siue vt recta b d ad d e: sed vt recta b d ad d e, ita est t f ad f e (eò quòd in triangulo
9. quinti Euc. t b e lateri t b parallela sit f d) ergo recta t f æqualis est lateri a c; ac proinde recta t f ad t b est vt recta a c ad quinque quadrantes rectæ a d.

PROPOSITIO X.

Reuocatâ figurâ propositionis quintæ, ita secta sit c a diameter in n, vt ipſa c a ſit ad c n ſicuti octonarius ad quinarium; per n (quod voco punctum ſuſpenſionis ſecundæ notum) acta ſit n o lateri a d æquidiſtans & occurrens rectæ b d in o. Propoſitum ſit inuenire, poſito n o perpendiculo libræ ex n ſuſpenſæ, ſpatium quod æquiponderet differentiæ *condictæ* de qua agit primum octauæ corollarium, pendens ex brachio ęquante perpendicularem cadentem ex a in rectam b y & ex centro b eductam parallelôs lateri a d.

Vt quatuor ad quinque ita fiat ſolidum i inuentum in primo iam allegato corollario octauæ propoſitionis ad ſolidum s: ad n o ex n excitetur perpendicularis n t æqualis perpendiculari cadenti ex a in rectâ y b. Dico ſpatium quod, librâ t n ſuſpenſâ ex n, pendens ex t æquiponderat differentiæ condictæ vt iacet manenti & ſuſtentatæ à librâ t n eſſe æquale ſolido s.

p·556·



i·x·s·
λ·g·

Perpendiculari ex a in rectam d b demissæ abscindatur ex rectâ n t æqualis n u: item vt latus a d ad quinque quadrantes rectæ b d ita fiat solidum i ad solidum x: præterea per c agatur c p æquidistans rectæ b d, cui n o producta occurrat in p, & compleatur p o q c parallelogrammum, iungaturque eius diameter o c. Quoniam ex nonæ corollario tertio differentia condicta habet centrum grauitatis in recta o c r, quæ est diameter parallelogrammi p o q c producta; & quoniam posito perpendiculo o d, brachio libræ æquante rectam n u, æquiponderans differentiæ condictæ est solidum i: vt latus c q vel o p ad latus c p, ita erit ex primâ huius ęquiponderans i respondens perpendiculo o d, ad ęquiponderans ex u, quod perpendiculo n o respondet: sed o p latus ad c p est vt latus a d ad quinque quadrantes rectę b d ex quarto corollario præcedentis: ergo vt latus a d ad quinque quadrantes rectæ b d, ita est solidum i ad æquiponderans ex u: sed ita etiam est solidum i ad solidum x: ergo æquiponderans ex u æquale est solido x. 9. quinti Euc.

Rursus quoniam a d, b y sunt parallelæ, perpendicularis ex a in rectam b y cadens æqualis erit perpendiculari ex b in rectam a d cadenti: & quoniam perpendicularis ex b ad rectam a d demissa se habet ad perpendicularem quæ ex a ad rectam b d demissa fuerit, sicuti se habet d b recta ad rectam a d (sunt enim b d, a d sinus toti, & perpendiculares sinus recti eiusdem anguli a d b; ergo vt sinus toti sine radii, ita sinus ipsi recti) brachium libræ interceptum perpendiculis a d, b y ex recta a b portionem semidiametro a b æqualem auferentibus, se habebit ad aliud brachium interceptun perpendiculis b d, a z ex rectâ a b portionem semidiametro a b æqualem auferentibus, vt se habet recta b d ad a d: ergo vt recta b d ad d a, ita est brachium n t ad n u; ergo per octauam secundi libri vt recta b d ad d a ita est x spatium ex u pendens æquiponderansque differentiæ conditæ, ad spatium ex t pendens eidemque æquiponderans differentiæ; illud sit λ.

Præterea quoniam vt solidum i ad solidũ x, ita ponitur recta a d ad quinque quadrantes rectæ d b; & vt solidum x ad solidum λ, ita ostẽsum est esse rectam b d ad d a: est ergo perturbata ratio istarum magnitudinum, atque solidum i ad solidum λ erit vt recta d b ad quinque quadrantes ipsius d b; est ergo solidum λ æquale quinque quadrantibus solidi i; sed solidum s ponitur etiam æquale quinque quadrantibus solidi i; ergo solida λ & s sunt æqualia inuicem: ergo solidum s pendens ex t æquiponderat differentiæ conditę, posito libræ perpendiculo n o: ergo inuentum est solidum s prout iussum fuerat.

COROLLARIVM. I.

Si per t agatur t f recta ęquidistans lateri a d, occurrens diametro b a productæ in f, patet rectam n f esse æqualem rectæ a b: cùm enim ponamus rectam n t esse æqualem interuallo rectarum a d, b y; & cùm rectæ f t, n o ęquidistent eodem interuallo,
10. sexti Euc. ergo rectæ b a, n f erunt æquales; ac proinde ablatâ eadem a n, residuæ b n, a f erunt inuicem ęquales; erit ergo f a quadrans semidiametri a b.

COROLLARIVM II.

Quoniam in corollario ſecundo octauæ ſtatuimus quando baſis l c m eſt ſemicirculus, ſolidum i eſſe ęquale parellelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem cadentem ex d in planum l c m, baſis verò conſtet quatuor trigeſimis quadrati b c; ex præſenti apertè ſequitur librâ ex n ſuſpenſâ per n o perpendiculum, ſolidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ condictæ, eſſe æquale parallelepipedo eiuſdem altitudinis, habenti baſim conflatam ex quinque trigeſimis quadrati b c; ſed quinque trigeſimæ æquant ſextantem; ergo parallelepipedi æqualis ſolido s baſis eſt ſextans quadrati b c, & altitudo æquat perpendicularem quæ ex d in planum ellipſeos vel hyperbolæ cadit.

Similiter quoniam in eodem corollario concluſimus quando l m eſt tres quintæ diametri a c in circulo ex centro b deſcripto, ſolidum i eſſe æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m, baſis verò rectangulum ſub l m & ſub tribus milleſimis ducenteſimis quinquageſimis diametri a c: ex præſenti ſequitur librâ ex n ſuſpenſâ, perpendiculo n o, ſolidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ condictæ, eſſe æquale parallelepipedo eiuſdem altitudinis habenti basim rectangulum sub rectâ l m & sub tribus millesimis diametri a c comprehensum.

Item quia in eodem corollario statuimus quando l c m est segmentum hyperbolæ notum iuxta primum septimæ casum, solidum i esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem cadentem ex d in planum l c m, basis verò sexdecim decimas quintas quadrati a c: ex præsenti colligitur librâ ex n suspensâ, perpendiculo n o, solidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ conditæ, esse æquale parallelepipedo eiusdem altitudinis habenti basim quatuor trientes quadrati a c.

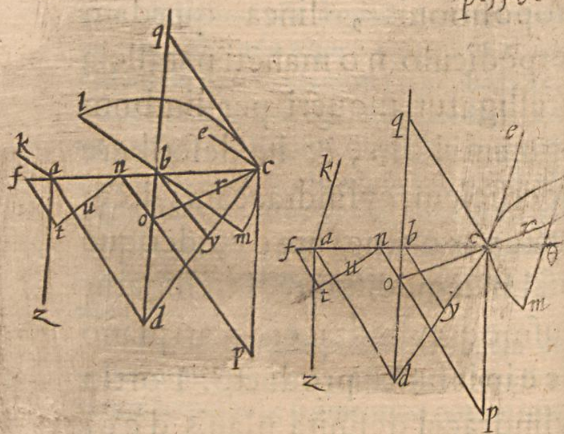
Postremò quandoquidem in eodem corollario probauimus, quando l c m est alterum hyperbolæ segmentum notum iuxta secundum septimæ casum, solidum i esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam, basis verò sit rectangulum sub l m & sub triginta duabus quinquiesmillesimis centesimis quadragesimis quintis diametri a c; ex præsenti sequitur librâ ex n suspensâ, perpendiculo n o, solidum s, quod ex t æquiponderat differentiæ conditæ, esse æquale parallelepipedo eiusdem altitudinis habenti basim rectangulum sub rectâ l m & sub octo millesimis vigesimis nonis diametri a c comprehensum.

PROPOSITIO XI.

Resumptâ figurâ præcedentis propositionis, linea quædam perpẽdiculo n o manẽti parallela intelligatur moueri per limbnm segmenti l c m, & ita describere superficiem cylindraceam; item ductâ per c tangente c e, ideóque ipsi l m æquidistante, intelligatur eiusmodi cylindraceũ secari plano d c e in infinitũ producto. Portio cylindracei definita planis d c e, l c m & superficie cylindraceâ vocetur *alter cuneꝰ notus*, vt distingutur à *primo cuneo noto* propositionis vigesimæ sextæ libri quarti.

His ita constitutis, propositum sit inuenire spatium quod ex puncto f pendens, librâ ex n suspensâ, perpendiculo n o, æquiponderet cunei alterius noti portioni inter quæuis condicta plana parallela septæ.

p. 556.



i·x·s·
λ·g·

Vt binarius ad ternarium ita fiat solidū s inuentum in præcedenti ad solidum g. Dico spatium g esse illud quod quæritur. Qnoniam enim cuneus alter ad differentiam condictam ipso inclusam ita se habet, vt si quocunque ad planum k a d ęquidistante plauo secentur, sectio cunei sit, vt mox ostendetur, ad sectionem differentiæ condictę vt ternarius ad binarium, ipsum quoque cuneo ęquiponderans erit ad ęquiponderans condictę differentię vt ternarius ad binarium, prout ex vndecimâ anterioris libri constat: ergo spatium g æquiponderat cunei alterius noti designatæ portioni.

Sectionem autem eiusdem cunei esse ad sectionem differentiæ condictæ, vt est ternarius ad binarium ostenditur hoc pacto.

Primùm quidem cunei sectionem esse parallelogrammum cuius duo latera parallela sint perpendiculo n o, eadem plane ratione probatur, qua in prioris libri vigesimâ primâ in causâ non multùm discrepãte; sectionem differentiæ condictæ esse parabolam cuius diameter sit parallela lateri a d constat ex quintâ huius; ex primâ verò antecedentis libri modo citati clarum est parabolæ segmentum esse duos trientes parallelogrammi cuius latus vnum sit ipsa segmenti basis, aliud oppositum sit tangens parabolam; & duo alia sint diametro segmenti parabolici parallela; ergo cunei sectio est ad sectionem condictæ differentiæ vt ternarius ad binarium: ergo inuentum est spatium ex prȩscripto problematis.

COROLLARIVM I.

Ex præcedentis secundo corollario & ex istâ demonstratione consequens fit primò quando arcus l c m est semicirculus, solidum g esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam, basis verò quadrantem quadrati b c: nam vt binarius ad ternarium, ita est sextans siue vnciæ binæ, ad quadrantem siue ad vncias ternas.

Secundò quando l m est tres quintæ diametri a c, ex eodem corollario secundo & ex præsenti sequitur solidum g esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planũ l c m demissã, basis verò rectãgulũ sub l m & sub nouẽ bis-millesimis diametri a c cõprehensum, quod est æquale viginti septem decies millesimis quadrati a c: nam vt binarius ad ternarium ita tres millesimæ ad nouem bis-millesimas; & vt quinarius ad ternarium, hoc est, diameter a c ad l m ita nouem bis-millesimæ ad viginti septem decies-millesimas; ac proinde rectangnlum sub mediis æquale est rectangulo sub extremis.

Tertio quando l c m est primum segmentum hyperbolæ notum indidem conficitur solidum g esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m cadentem, basis verò sex trientes, hoc est duplum quadrati a c: nam vt binarius ad ternarium, ita quatuor trientes quadrati a c ad sex eiusdem trientes, hoc est ad duplum eiusdem.

Quartò quando l c m est alterum hyperbolæ segmentum notum, ex iisdem consequitur solidum g esse æquale parallelepipedo cuius altitudo æquet perpendicularem ex d in planum l c m demissam, basis autem rectangulum sub l m & sub duodecim millesimis vigesimis nonis, hoc est sub quatuor trecentesimis quadragesimis tertijs diametri a c; illi autem rectangulo æquales sunt quadrati a c sexdecim bis-millesimæ quadringentesimæ primæ quadrati a c; nam vt septenarius ad quaternarium, hoc est vt a c diameter ad l m, ita quatuor trecentesimæ quadragesimæ tertiæ ad sexdecim bis-millesimas quadringentesimas primas, vt ex logisticâ constat; ergo est æqualitas intememorata rectangula, cùm eorum latera reciproca sint.

COROLLARIVM II.

Quoniam ex nonâ punctum o ita diuidit axem coni cuius ttiangulũ per ipsum axem est a d c, vt d o sit tripla rectæ o b ex duodecimâ quarti; & quia coni d a c cylindrique præscripto modo descrtpti sectiones effectæ occursu plani cuiuslibet condicti sunt ut binarius ad ternarium; in eodem condicto plano per n o perpendiculum ducto manebit centrum grauitatis cunei secundi noti a c d; ac proinde si libro ex a perpendiculo a d suspẽdatur, brachia æquante distantiam punctotum a, c, vt diameter a c ad a n, hoc est vt octonarius ad ternarium, ita erit cuneus secundus notus a c d ad æquiponderans suum: istud ergo

æquiponderans erit tres octauæ cunei. Quoniam verò iste cuneus est dimidium cylindri, cuius basis opposita basi l c m transeat per d (istud enim simili quadam ratione, qua apud Euclidem de solido pa-
28, vndec. Euc. rallelepipedo, ostenditur quando cunei basis est ellipsis integra, vel eius portio composita ex æqualibus & similibus ad opposita centri b partibus positis inter æquales ordinatim applicatas) æquiponderans ipsi cuneo erit æquale tribus decimis sextis eiusdem cylindri.

SCHOLIVM.

Recta a d vi demonstratorum hactenus potest ad rectam a c esse vtcunque inclinata; nos tamen in sequentibus maioris lucis causâ ponemus esse perpendicularem, vt ipsa non discrepet à perpendiculari ex d in planum l c m demissâ; atque adeo linea rectæ n o vel a d parallela describens motu suo superficiem cylindraceam sit quoque ad planum l c m perpendicularis,

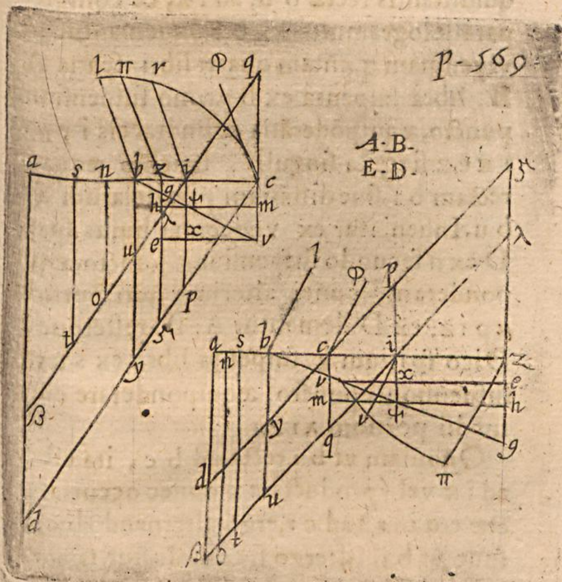
Cæterum quando l c m est triens circuli, solidum g præsenti methodo inuenimus esse parallelepipedum cuius altitudo sit perpendicularis ex d in planum l c m demissa, basis verò rectangulum sub l m latere trianguli æquilateri inscripti, & sub tribus sexagesimis quartis semidiametri b c; vel sub semilatere dicto & sub tribus sexagesimis quartis diametri a c.

Propositio XII.

Sit ellipſis vel hyperbola c r ex centro b deſcripta, cuius diameter a c punctis a & c terminetur, eíque coniugata ſit b l: ad planum ellipſeos vel hyperbolæ c r per a c inſiſtat rectum planũ a d c, & in eo ſit n o recta perpendicularis ad a c diametrum, ſemidiametrumque a b ita in b ſecet vt n b ſit quadrans ipſius a b: ellipſis vel hyperbola c r ſit vt in præcedenti propoſitione baſis cylindracei deſcripti motu lineæ æquidiſtantis rectæ n o: vltra centrum b ad partes c ſumptum ſit quoduis punctum i, & per illud ducta i t faciens cum a c angulum acutũ a i t ad partes centri, qui vocetur *internus*, & angulum ad verticem i iſti oppoſitum, qui vocetur *exter-*

nus: per i ducta sit condicta r i, id est parallela semidiametro b l, & intelligatur planum t i r, eique parallelum d c φ secare cylindraceam figuram; erit a c d cuneus alter notus, cuneus autem a i t vel ei ad verticem i oppositus vocetur medius: vt b i ad semidiametrum b c, ita fiat b n recta ad b s, & agantur per b & s rectæ b u, s t æquidistantes rectæ n o. Voco b pũctum primæ suspensionis; n, secundæ; s, tertiæ; & b u, n o, s t, perpendiculum primæ, secundæ, tertiæ suspensionis.

His ita constitutis propositum sit inuenire spatium quod æquiponderat portioni cunei medij habẽtis ellipsim vel hyperbolam pro basi, & plano y b l ad partes a finiti, interceptæ quibuscunque planis condictis, brachio æquante distantiam perpendiculorum b y, a d, & poſitâ libræ ſuſpenſione tertiâ ex s.



Condicta plana ſumi poſſunt uel ad partes anguli interni vel ad partes externi, ex illis enim duobus caſibus ſoluitur tertius, quando nimirum plana condicta ſunt ad partes angulorum oppoſitorum.

Primus caſus.

Pro primo caſu deſignata ſint condicta plana λ z π, p i r in ellipſi quidem ad partes interni n i o, puncto i cadente inter b & c; in hyperbolâ verò ad partes externi λ i z puncto c cadente inter b & i, prout in altero appoſitorum ſchematum deſignatur.

Vt b i recta ad b c, ita fiat i ✠ quadrans rectæ i p inter rectas a c, c d clausæ & æquidistantis rectæ b u, ad i x, & completo parallelogrammo i x e z inueniantur per vigesimam quintam quarti libri spatia A, B, librâ suspensâ ex b primo suspensionis puncto, æquipōderātia cylindraceis i p μ λ, i x e z singula singulis, brachio æquante rectam b a, siue distātiam parallelarum a d, b u. Inueniatur ex vndecimâ huius spatiū D ex n secundo suspensionis puncto æquiponderans cunei alterius noti portioni μ p i z; ex D demantur A, B, restetque E. Dico spatium E suspensâ librâ ex s tertio suspensionis puncto, æquiponderare cunei medii portioni λ i z.

Quoniam vt b i recta ad b c, ita est i ✠ ad i x vel (productâ e x donec occurrat rectæ c q in ν) ad c ν; ergo alternendo b c, c ν sunt vt b i, i ✠: ergo si compleātur triangula b c ν, b i ✠ erunt similia, ac proinde angulus c b ν æqualis angulo i b ✠, rectæ ergo b ✠, b ν sibi inuicem congruunt. Recta b ✠ producta occurrat rectæ z μ in g, & per ✠ agatur ✠ h æquidistans rectæ x e.

Rursus quoniam in triangulo ν e g lateri ν e æquidistat ✠ h, & lateri g e æquidistat ✠ x, vt n x ad x e, ita erit ν ✠ ad ✠ g, & vt ν ✠ ad ✠ g ita erit e h ad h g; ergo vt ν x ad x e, 2. sexti Euc. siue vt c i ad i z, ita e h ad h g. Eadem de causâ cùm in triangulo c μ z recta i λ æquidistet lateri c μ, vt c i ad i z, ita erit λ μ ad z λ ergo vt e h ad h g, ita λ μ ad z λ. Cuneus ergo ψ h g eſt ad cuneum i z λ vt recta h g ad z λ, vel vt recta h e, hoc eſt x ψ, ad λ μ vel ad p i; & in eadem ratione eſt cylindraceum x e h ψ ad p i λ μ, vt ex vndecimâ prioris libri, vel ex ſextâ primi ſolidis accommodatâ conſtat: quocunque enim plano condicto ſecentur, ſectiones ſunt vt recta h g ad z λ, quod facilè admittit, qui demonſtrationis in vigeſimâ primâ libri quarti adductæ meminit.

Rurſus quoniam vt b i ad b c, ita ponimus eſſe b n ad b s, ergo diuidendo, vel per diuiſionem rationis, vt b i recta ad c i, ita erit b n recta ad ſ n: ſed vt b i recta ad c i, ita eſt i ψ recta ad x ψ (eo quod in triangulo b i ψ rectæ c ν, ν ψ æquidiſtent lateribus i ψ, i c) ergo vt b n ad s n, ita eſt i ψ ad x ψ. Cùm igitur vt a b ad b n ſui quadrantem, ita ſit i p ad i x, & vt b n ad ſ n, ita ſit i ψ ad x ψ, erit ex æquo vt a b ad ſ n, ita i p ad x ψ: ſed vt i p ad x ψ, ita oſtendimus eſſe i λ z ad ψ h g; ergo vt a b ad s n, ita i λ z ad ψ h g.

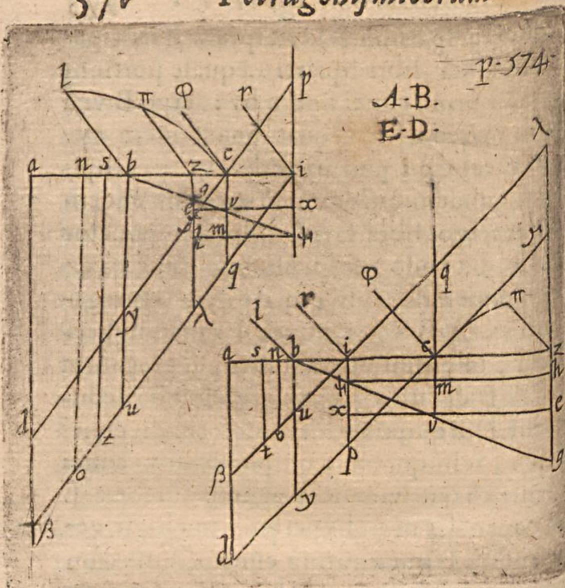
Quoniam ergo ex n ſecundo puncto ſuſpenſionis æquiponderans cylindracei portioni p i λ μ eſt per decimam ſecundi ſpatium primæ ſuſpenſionis A vnà cū ipſius quadrante i ψ h z: ergo conflatum ex A, B (eſt enim B æquale portioni i ψ g z cunei primi ncti b c ν ex vigeſimâ ſextâ libri quarti) æquale eſt æquipōderanti ex s librâ ſuſpēſâ cylindraceo p i λ μ, & inſuper portioni ⊥ h g in hyperbolæ schemate; in ellipsis verò diagrãmate cõflatũ ex A B vnà cũ portione ⊥ h g æquat dictum æquiponderans: ergo si de spatio D, quod indidem cuneo i p μ z æquiponderat, deducantur A B relinquetur spatium E quod in hyperbolâ auctũ spatio h ⊥ g, vel eo minutum in ellipsi æquiponderabit cuneo i λ z: cùm igitur vt recta a b ad n s, ita sit i λ z ad ⊥ h g, si suspensio ex n secundo puncto, transferatur iu tertium s, æquiponderans cuneo medio i λ z erit E, per decimam secundi libri citatam, quod pro primo casu debuimus demonstrare.

Secundus casus. Secundò condicta plana cadant ad partes anguli interni c i q in hyperbolâ, & externi in ellipsi, puncto i manente vt in figuris primi casus, quæ isti etiam deseruiunt: ea verò sint p i r, q c φ. Rectæ p i sit i ⊥ quadrãs vt in priori casu, productaque h ⊥ occurrat rectæ c ν in m. Inuenta sint A & B librâ suspensâ ex b primo suspensionis puncto æquiponderantia cylindraceis q c p i, c ν x i singula singulis vt in præcedente casu; inuentum quoque sit spatium D ex n secundo suspensionis puncto æquiponderans noto cuneo altero c p i, atque ex A B deductum D relinquat spatium E. Dico ipsum E librâ suspensâ ex tertio n suspensionis puncto, æquiponderare cuneo medio c i q.

Quoniam cylindraceo c ν x i ex b equiponderat spatium B, erit ipsum B ex vigesimâ sextâ libri quarti æquale portioni c ν ⅌ i primi cunei noti c b ν: ergo B vnà cum cuneo ν ⅌ m æquat quadrantem cylindracei c q i p in hyperbolâ; in ellipsi verò eundem quadrantem excedit eodem ⅌ ν m: ergo libra si ritè suspendi ponatur ex n secundo suspensionis puncto, æquiponderans ipsi c q i p est aggregatum ex A B & ex cuneo ⅌ ν m in hyperbolâ, in ellipsi verò est idem aggregatum ex A B deducto ⅌ ν m: ergo si inde deducatur D æquipōderans noti secundi cunei c p i, relinquetur æquiponderans cunei medij c i q, videlicet aggregatum ex E & cuneo ⅌ ν m in hyperbolâ, in ellipsi verò ipsum E imminutum cuneo ⅌ ν m: cùm ergo cuneus c i q sit ad cuneum ⅌ ν m vt recta a b ad n s (istud enim eodem pacto ostenditur quo in priore casu ostensum est cuneum λ i z esse ad cuneum h ⅌ g, vt est recta a b ad n s) æquiponderans librâ suspensâ ex s cuneo medio c i q erit E, quod pro casu secundo demonstrandum erat.

Tertio in hyperbolâ punctum i cadat inter b & c condictaque plana sint ad partes anguli externi (nam ad interni partes non pertinet hyperbola c π) q c ς, λ z π: in ellipsi vero punctum c iaceat inter i & b, condictáque plana sint ad partes interni, cùm ad externi partes non pertingat ellipsis.

Tertius casus.



Sumatur recta i ✝ quarta pars rectæ i p vel q c, & inueniatur A æquiponderans cylindraceo q c λ μ librâ ex b suspensâ; item B cylindraceo c ν e z ex eodem b; & D noto cuneo secundo μ c z ex secundo puncto n. Dico conflatum ex tribus A B D librâ suspensâ de tertio suspensionis puncto s ęquiponderare portioni λ q c z cunei medij q i c.

Quoniam vt a b, b n, ita i p, i ✝, & vt b n, s n, ita i ✝, ✝ x (vt enim b i, c i, ita b n, s n ex demonstratis superiùs; vt autem b i, c i vel x ν, ita i ✝, x ✝ eò quod triãgula b i ✝, ν x ✝ sint similia) ergo ex æquo vt a b, s n, ita, i p, x ✝, vel istis æquales q c, m ν. Rursus quoniam triangula λ i z, h ψ g habent latera b z, ψ g similirer secta in c, ν, & per c, ν ductæ sunt c μ, ν e æquidistantes lateribus i λ, ψ h; vt c i ad c z, ita erit μ λ ad z μ, & e h vel ψ x ad g e: ergo alternando vt μ λ vel q c recta ad e h vel m ν, ita z u ad g e: ergo vt q c recta ad m ν, ita est cylindraceum q e λ μ ad μ ν h e, & cuneus c μ z ad cuneum ν e g: & composita ex antecedentibus magnitudo λ q c z ad compositam ex consequentibus m ν g h: sed vt q c recta ad m ν, ita modo ostendimus esse a b ad s n; ergo vt a b ad s n, ita λ q c z portio cylindracei ad m ν g h.

Cùm ergo sicut in priori casu diximus æquiponderans ex b cylindraceo c ν e z sit c ν g z, erit B ipsi c ν g z æquale: ergo conflatum ex A, B, D, continet æquiponderans partium q c λ μ, c z μ librâ ex n suspensâ, & insuper in hyperbolâ portionem m ν g h; in ellipsi verò conflatum idem ex A, B, D continet æquiponderans partium q c λ m, c z μ imminutũ eadẽ portione m ν g h: ergo cõflatũ ex tribus A, B, D æquat æquipõderans librâ appẽsâ ex s portioni λ q c z cunei medij, per decimã secundi libri, quod demonstrandum erat ad tertium casum.

COROLLARIVM.

Quoniam b n est quadrans semidiametri b c, rectangulum c b n erit æquale quartæ parti quadrati b c, hoc est quadrato quod potest semissis rectæ b c, siue quadrans diametri a c; & quoniam rectangulo c b n æquale est rectangulum i b s (habent enim ex constructione latera proportionalia) erit ipsum i b s æquale quadrato quod potest quadrans diametri a c, hoc est, tres rectæ i b, quadrans diametri a c, & b s sunt proportionales.

SCHOLIVM.

In istis omnibus casibus quamuis vnum ex condictis planis assumptis non sit p i r, semper tamen in rectâ i p sumi debet i ✢ quarta ipsius pars, atque vt b i ad b c, ita fieri i ✢ ad i x, debentque iungi rectæ b ✢, b v: demonstratio enim hoc posito recurrit eadem.

Porrò æquiponderans cylindraceorum q c λ m, c v e z esse idem cum æquiponderante cylindraceorum iisdem condictis planis interceptorum, & habentium pro basibus portiones ellipsis vel hyperbolæ iisdem planis interceptas, eandemque altitudinem, apertum est ex vndecimâ prioris libri: Ita enim sunt constituta vt quocunque condicto plano secentur, eorum sectiones sint inuicem æquales, quod satis est ad hoc, vt ex vndecimâ citatâ, vel ex sextâ primi solidis accommodatâ eiusmodi plana sint æqualia, & habeant in eodem condicto plano centrum grauitatis.

Quòd si roges cur nullus casus ponat plana con-

condicta ultra b ad partes a, responsio constabit ex sequentis corollario primo, inde enim patebit id non fuisse necessarium cùm ex iam demonstratis faciliùs pro illo casu obtineatur æquiponderans.

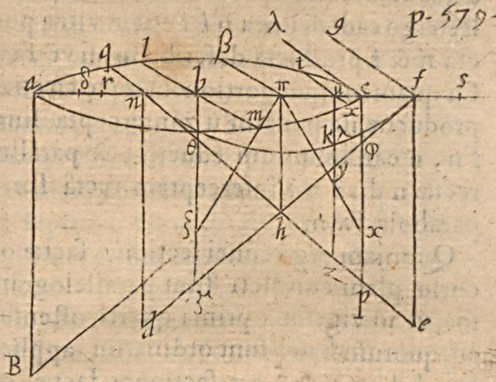
Calculum huius propositionis abundè sufficient tibi quæ isti proximam subsequuntur.

Propositio XIII.

Sit plana figura a l c m habens grauitatis centrum in rectâ a c, cuius occursu l m & omnes ipsi æquidistantes bipartitò secentur. Sit ad planum a c perpendicularis n d, & per ambitum figuræ a l c m linea parallela rectæ d n incedens descripserit superficiem cylindraceam: per n & f quæcunque duo puncta rectæ a c etiam productę, ductæ sint n q, f g condictæ, idest æquidistantes ipsi l m, & ductis per eadem n & f, n d, f e perpendicularibus ad a c æqualibus, intelligatur cylindraceum secari planis trãsuersis e n q, d f g; & abscindi cuneos n f d, f n c, qui vocentur *coniugati*, etiam cum perpendiculares n d, f e, fuerint inæquales. His ita positis.

Ostendendum est si planum a l m intelligatur horizonti æquidistans, & recta a c libra sustentãs cuneum n f d ponatur suspendi ex n brachio quocunque n r; æquiponderans ex r cunei n f d portioni quibuscunque duobus planis condictis, id est parallelis plano d q n, interceptæ esse æquale spatio quod librâ suspensa ex f, brachio f s æquante ipsum n r, æquiponderat ex s portioni cunei f n e inter eadem condicta plana positæ.

Intelligatur linea n k f ita descripta in plano d n f, vt quæcunque u z æquidistãs rectæ n d ducatur, occurrens diametro a c (ita enim vocetur) in u siue inter n & f, siue extra posito; rectis d f, n e in y, z; & lineæ n K f in k; sicut autem r n ad n u, ita



ſit u y ad u k;linea n k f ex duodecimâ tertij erit parabola. Præterea quoniam triangula n u z,f u y ſunt ſimilia; vt n u ad u f, ita erit u z ad u y: ergo rectangulum ſub extremis n u,u y eſt æquale rectangulo ſub mediis u f,u z. Quoniam ergo vt r n ad n u,ita ponitur u y ad u k,rectangulum ſub mediis n u, u y erit æquale rectangulo ſub extremis n r,u k. Vt f s ad f u ita ponatur u z ad u λ; erit ergo rectangulum ſub medijs f u, u z æquale recrangulo ſub extremis f s,u λ: ſed rectangula in vtroque caſu ſub mediis ſunt inuicem , vt oſtendimus, æqnalia;ergo rectangula ſub extremis ſunt 16.ſexti Euc.

quoque æqualia; ergo cùm latera n r, f s sint æqualia, bases u k, u λ erunt inuicem æquales; ergo eadem linea n k f etiam vltra puncta n & f producta describetur, si vt f s ad f u quamcunque portionem rectę f n etiam productæ, ita ponatur u z intercepta lineis f n, n e in infinitum eductis, & parallelâ rectæ n d, ad u λ interceptam rectâ f n & parabolâ f λ n.

Quoniam ergo cunei sectiones factæ occursu plani condicti sunt parallelogramma, vt in vigesimâ primâ quarti ostensum est, quorum bases sunt ordinatim applicatæ ad diametrum a c; sectiones factæ occursu condicti z u t erunt parallelogramma; similiterque si per parabolæ n k s perimetrum intelligatur moueri linea recta æquidistans cõdictæ l m, solidi comprehensi basi l c m, & cylindraceâ superficie binâ motu æquidistantium rectis b o, l m descriptâ (eiusmodi solidum vocetur *dicylindraceum*, & si l c m fuerit ellipsis vel hyperbola *dicylindraceum notum*) sectio condicti plani cum dicylindraceo erit parallelogrammum, cuius basis sit eadem condicta, & altitudo sit linea secundum quam condictum planum secat segmentum n K f, parabolæ. Quoniam ergo istæ omnes sectiones sunt parallelogramma rectangula snper eadem basi constructa, erunt inter se vt altitudines : quoniam verò vt brachiũ r n ad n u, ita est recta n y ad u k, & vt n y

2. sexti Euc.

ad u k, ita eſt rectangulum ſub u y, t x ad rectangulum ſub u k, t x: ergo vt r n ad n u ita ſectio cunei n f d ad ſectionem dicylindracei; quod cùm in omnibus ſectionibus occurſu condictorum planorum genitis eueniat, totum dicylindraceum æquiponderabit cuneo n f d, & pars parti, prout intra eadem condicta plana ſibi reſpondent, ex ſeptimâ ſecundi ad ſolida translatâ, ſicut in vigeſimâ quartâ prioris libri expoſuimus. Eodem planè modo oſtendetur idem dicylindraceum æquiponderare cuneo f n e, librâ ex f ſuſpensâ, aliiſque iuxta propoſitionis præſcriptum poſitis; ergo id demonſtratum eſt, quod fuit propoſitum.

COROLLARIVM I.

Ex modò demonſtratis liquidum fit quod in ſcholio præcedentis in hunc locũ diſtulimus; ſi enim l c m ſit ellipſis vel hyperbola ex centro b deſcripta, & n b ſit quadrans ſemidiametri, & c λ ſit acies ſecundi cunei noti, quęratúrque ęquiponderans ex r, librâ ex n ſuſpensâ, portioni cunei ſecundi noti concluſę condictis ſecantibus ſemidiametrum a b; punctum ſuſpenſionis debet (paritate brachij ſeruatâ) poni in c, & n q intelligi acies cunei c n p, & ita ex pręcedenti inuenietur portio dicylindracei æquiponderans portioni cunei c n p condictis memoratis interceptæ : istud namque æquiponderans æquale est ex præsenti demonstratione æquiponderanti quæsito. Isthæc methodus in aliis similibus casibus obseruanda pariter erit.

COROLLARIVM. II.

Si vt c n ad c p, ita fiat c a ad a B rectam per a ductam parallelam rectæ n d, librâ ex c suspensâ, brachio æquante semidiametrum, perpendiculo c p, æquiponderans cunei c n p portioni interceptæ planis cõdictis μ b l, p c λ, est æquale parallelepipedo cuius altitudo a B & basis æquet quadrantem quadrati ex semidiametro b c geniti. Istud apertum est ex præsenti; si enim connectatur recta c B, & intelligatur plano condicto B c λ secari cylindri superficies, abscindetur cuneus secundus notus n c B, eruntque ex præsenti cunei n c B, c n p coniugati; ergo spatium quod æquiponderat cuneo n c B, librâ ex n suspensâ, brachio æquante semidiametrum a b, æquiponderat quoque cuneo c n p librâ ex c suspensâ, positâ paritate brachij, vt in præsenti demonstratum est: atqui ex primo epilogismo corollarii propositionis vndecimæ spatium æquiponderans cuneo noto secundo est illud quod iam assignauimus cuneo c n p; ergo rectè fuit assignatum.

Quòd si, iisdem positis l c m sit segmentum hyperbolæ notum, ac proinde condicta l m sit vltra punctum c ad partes f; librâ ex c suspensâ, brachio æquante semidiametrum, perpendiculo c p æquiponderans cunei c n p portioni interceptæ planis condictis p c λ & μ ξ l m, ostendetur eodē omnino pacto esse æquale parallelepipedo cuius altitudo a B, basis sit dupla quadrati quod potest diameter a c: hoc enim ita computatum fuit in epilogismo tertio corollarij memorati.

COROLLARIVM III.

Ex iisdem occurrit *quadratura* dicylindraceotum notorum numero infinitorum; per præcedentem enim obtinetur æquiponderans innumeris cuneis quorum bases sint portiones ellipseos vel hyperbolæ; ex istâ autem constat eiuscemodi æquiponderans esse æquale dicylindraceo quod inter eadem condicta plana respondet portioni cunei libratæ. Cæterùm istorum dicylindraceorum tetragonismus est quasi aurora aduentantis quadraturæ circuli: nam cuneo secundo noto, cuius acies sit c λ & basis a c m integer semicirculus aut ellipsis, æquiponderāt librâ ex a suspensâ, brachio æquante diametrum a c, tres decimæ sextæ cylindri eadem qua ipse cuneus altitudine præditi: ergo dicylindraceum isti cuneo ita respondens, est tres decimæ sextæ cylindri: ergo quadratura istius dicylindracei docet quadraturam circuli: habet ergo dicylindraceorum quadratura cum tetragonismo circuli & etiam hyperbolæ connexionem tantam, vt quamuis hîc finem inueniendi faceremus, multùm tamen Deo deberemus, quòd ex tam densis tenebris in admirabile istud lumen nos vocarit.

COROLLARIVM. IV.

Ex præsenti schemate colligitur etiam cuneos coniugatos e n f, d f n inter condicta plana ξ b l, d c λ inclusos si ex quocunque puncto n diametri a c seorsum (positâ brachij paritate) suspendantur perpendiculo n d, differentiā æquiponderantium coniugatis esse eandem cum differentiâ æquipōderantium portionibus p h φ, μ h θ, quas voco cuneos primos *laterales*, & ad eorum mutuum respectum significandum, *primos collaterales*. Quoniam enim solidum b θ h φ c habent commune, differentia æquiponderantium ipsis non proueniet ex æquiponderante solidi b θ h φ c (est enim idem ex eodem, iisdemque positis) ergo differentia, si quæ sit, erit æquipōderantium residuis collateralibus p h φ, μ h θ.

Quòd si ex rectis b μ, c p abscindantur b ξ, c ↓ æquales rectis $\theta\mu$, ϕ p, & ducto per h condicto h $\pi\beta$ secante diametrum a c in π, iungantur rectæ $\xi\pi$, ↓ π, & intelligantur plana transuersa ξ π β, ↓ p β auferentia cuneos ↓ b π, ↓ π β; cunei isti ablati ita se habebunt ad collaterales, singuli ad singulos, vel totos, vel secundum partes intra eadem condicta plana clausas sumptos, vt ipsis sint æquales, & habeant æqualia æquiponderantia iisdem positis. Istud etiam manifestum est ex præcedente: esse enim æquales eodem planè modò ostenditur, quo id demonstrauimus in primo casu, ex eo quòd condicta plana faciant in eis sectiones æquales: habere autem idem æquiponderans non aliter probatur, quam probatum fuit in scholio. Cuneos p h ϕ, μ h θ vocabo *laterales & collaterales secundos*, quorum hæc est insignis proprietas vt aciẽ habeant in eadem condictâ π β, & vnus ↓ π c sit ad angulum externum, alter ξ π b sit ad internũ, positâ a c diametro ellipseos vel hyperbolæ sicut in præcedentis diagrammate; vnde vlteriùs ex iam citatâ propositione efficitur istud notandum, si vt b π ad quadrantem diametri a c, ita fiat ipse quadrans ad b δ, librâ ex δ suspensâ tertio videlicet suspensionis puncto, inueniri spatium quod singulis collateralibus æquiponderat, istorúmque æquiponderantium differentiam esse æqualem differentiæ spatiorum quæ portionibus memoratis coniugatorum cuneorum seorsum, æquiponderant, librâ ex δ suspensâ, cæterisque iisdem sumptis.

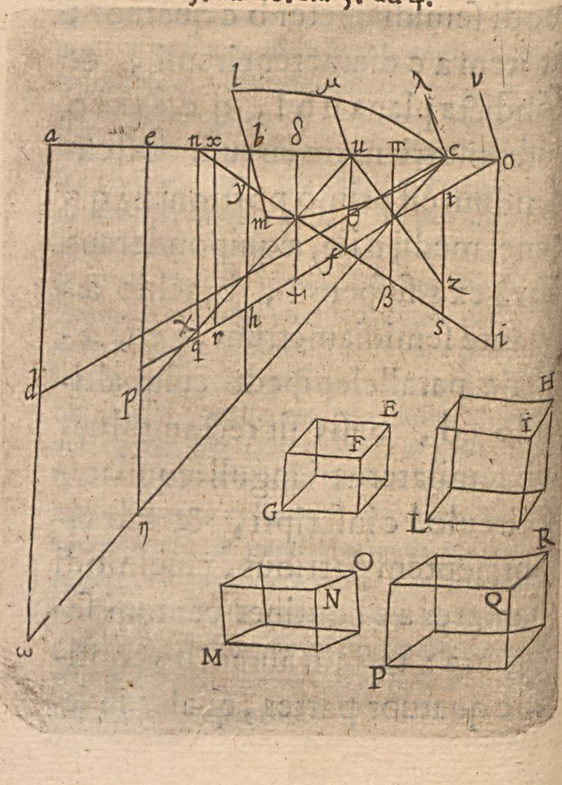
COROLLARIVM V.

Hoc quoque adnotare interest ad sequentia, si sit quicunque cuneus f n e, & libra b c suspendatur ex n in quo cunei acies q n secat diametrum, brachiumque libræ n δ quodcunque ponatur & æquet rectam n π, & per π agatur π h perpendiculo n d æquidistans, occurrens rectæ n e in h, atque per h intelligatur duci planum æquidistãs basi q c m; cylindracei inter istas duas bases contenti parti spatium ex δ æquiponderans esse æquale cunei f n e portioni iisdem condictis planis cum cylindracei parte comprehensę; idque apertum esse ex vigesimâ sextâ libri quarti. Insuper cùm, iisdem positis, ęquiponderans ex δ parti cylindracei sit ex vigesimâ quintâ prioris libri ęquale parallelepipedo cuius altitudo π h eadem quę cylindracei, & basis ęquet spatium quod iisdem positis ęquiponderat basi partis cylindri; esse æqualitatem inter cunei, & parallelepipedi partes memoratas: ac proinde si cunei pars memorata conuertatur in parallelepipedum altitudinis π h, basim eiusmodi parallelepipedi esse æqualem spatio quod basi æquiponderat dictâ iam ratione.

Propositio XIV.

Posito ante oculos diagrammate propositionis duodecimæ, quod inseruit tertio ellipseos casui; sit b i partium quinque cuiusmodi semidiameter b c quatuor; sit item a c diameter circuli, & condicta plana u b l, q c φ ex eo auferant trientem circuli. Ostendendum est primò portioni z λ q c cunei medij n i o, æquiponderans librâ ex s suspensâ, brachio æquante semidiametrum, esse æquale parallelepipedo cuius altitudo a d, basis sit rectangulum sub semilatere trianguli æquilateri circulo l c inscripti, & sub viginti septem partibus, cuiusmodi diameter a c continet centum sexaginta: rectam autem b s continere quatuor partes, quales in semidiametro b c sunt viginti; vel vnam quales in semidiametro quinque.

Quoniam enim vt b i ad b c, ita est b n ad b s; b i autem ponitur quinque cuiusmodi b c quatuor; vel b i viginti quinque, quales b c viginti, & b n ipsius b c quadrans quinque; erit b s quatuor eiusmodi: nam vt 25. ad 20. ita 5. ad 4.



Rursus quoniam punctum z in isto casu diuidit bifaram semidiametrum b c; spatiū A æquiponderans cylindraceo q c λ μ librâ ex b suspensâ, brachio b a, erit parallelepipedum cuius altitudo c q, & basis rectangulum sub quartâ parte diametri a c & sub semilatere trianguli æquicruris inscripti circulo c r, ex corollario tertio vigesimæ quintæ libri quarti.

Rursus quoniam vt b i recta ad b c, ita est i ✠ quadrans rectæ c q ad i x; b i autem ad b c est vt quinarius adquaternarium, erit i x quatuor, cuiusmodi i ✠ quinque, & cuiusmodi c q ipsius i ✠ quadrupla viginti; ergo reductione ad minimos numeros facta erit i x vel c ν ad c q vt unitas ad quinarium: ergo B spatium cylindraceo c ν e z æquiponderās librâ suspensâ ex b, brachio b a, est ex vigesimâ quintâ laudatâ parallelepipedum cuius basis eadem quæ parallelepipedi ęquantis spatium A iam putari, & altitudo c ν quinta pars ipsius c q: ergo parallelepipedum cuius basis sit iam memorata, altitudo sex quintæ partes altitudinis c q, æquale est duobus simul A & B. 35. septi Euc.

Præterea quoniam in triangulo a i β lateri i β æquidistat c d; vt a c ad c i, ita erit a d ad d β siue ad c q: sed a c ad c i est vt octo ad vnum: ergo a d recta ad c q est vt octo ad vnum; vel vt quadraginta ad quinque, & ad conflatum ex c q, c ν vt quadraginta ad ſex: ergo parallelepipedum cuius baſis antè memorata, & altitudo ſex quadrageſimæ partes rectæ a d æquale eſt duobus ſimul ſpatiis A & B. Rurſus quia vt 40. ad 6. ita eſt quadrans ſiue quadraginta centeſimæ-ſexageſimæ ad ſex centeſimas-ſexageſimas: parallelepipedum, cuius altitudo ſit recta d a, & baſis diametri a c ſex centeſimæ-ſexageſimæ, æquale eſt parallelepipedo cuius baſis ſit rectangulum ſub quadrante diametri a c & ſemilatere trianguli æquilateri circulo c l inſcripti altitudo verò ſit ſex quadrageſimæ partes altitudinis a d; cùm baſes & altitudines reciprocentur.

Quoniam igitur duo ſimul ſpatia A & B æquant parallelepipedum cuius altitudo ſit d a, & baſis rectangulum ſub ſemilatere trianguli inſcripti ſuperius memorati & ſub ſex centeſimis-ſexageſimis diametri a c comprehenſum; ſpatio autem D æquale eſt ex ſcholio vndecimæ parallelepipedum eiuſdem altitudinis d a, & baſeos æquantis rectangulum ſub ſemilatere memorato & ſub tribus ſexageſimis quartis diametri a c; magnitudo ex tribus A, B, D conflata erit parallelepipedum altitudinis a d, & baſeos æquantis rectangulum ſub ſemilatere memorato & ſub viginti ſeptem partibus, cuiuſmodi in diametro ſunt centum ſexaginta inuicem æquales. Cùm igitur ex citatâ duodecimâ in iſto caſu magnitudo ex tribus A, B, D compoſita æquet ſpatiũ quod cunei medii n i o portioni z λ q c æquiponderat; iſtud eſſe demonſtrauimus, quod propoſitum fuerat primo loco.

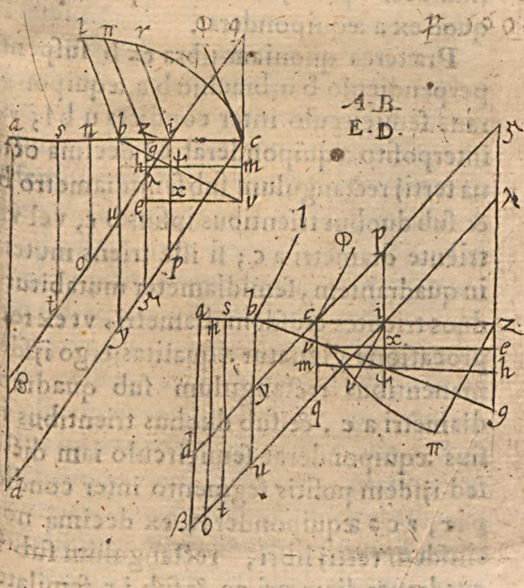
Secundò iiſdem manentibus punctum z congruat centro b. Oſtendendum eſt portioni z λ q c (quæ in hoc caſu eadem eſt quæ b u q c) cunei medij n i o æquiponderans librâ ex s ſuſpensâ, brachio æquãte ſemidiametrum, perpendiculo s t, eſſe æquale parallelepipedo cuius altitudo d a & baſis ſit quadrati b c ſeptem vigeſimæ partes.

Spatium A æquiponderans cylindraceo q c λ μ librâ ex b ſuſpenſâ, brachio b a eſt ex vigeſimâ quintâ libri quarti parallelepipedum altitudinis c q, & baſeos ęquantis duos trientes quadrati b c. Similirer B ſpatium cylindraceo c ν e z æquiponderans eſt parallelepidedum eiuſdem baſeos & altitudo c ν quinta pars ipſius c q: ergo parallelepipedum cuius baſis ſit iam memorati duo trientes, & altitudo ſex quintę partes altitudinis c q ęquale eſt duobus ſimul A & B : ergo vt in pręcedenti cafu parallelepipedum cuius bafis fit duo iam dicti trientes & altitudo fex quadragefimę partes rectæ a d, æquale eft duobus fimul A & B. Præterea quia vt 40. ad 6. ita eft bes fiue 40. fexagefimæ ad 6. fexagefimas, parallelepipedum, cuius altitudo fit d a, & bafis quadrati b c fex fexagefimæ fiue vna decima, æquale eft parallelepipedo cuius bafis fit duo trientes quadrati bc, & altitudo fex quadragefimæ partes rectæ a d, cùm bafes & altitudines reciprocentur.

Quoniam igitur duo fimul fpatia A & B æquant parallelepipedum cuius altitudo a d, bafis fex fexagefimæ quadrati b c: fpatium autem D ex calculo primo primi corollarii vndecimæ eft quadrans quadrati b c, hoc eft quindecim fexagefimæ: fpatiũ ex tribus A, B, D compofitum erit illud quod quærimus, videlicet parallelepipedũ cuius altitudo a d, & bafis viginti & vna fexagefimæ, fiue feptem vigefimæ quadrati b c; quod fecundo erat oftendendum.

PROPOSITIO XV.

Duodecimæ propofitionis fchema, quod inferuit primo & fecundo ellipfeos cafui, reuocetur; in eóque b i, i c ſint æquales; ſit item a c diameter circuli. Propoſitum ſit primò, quando punctum z primi casûs congruit puncto b, definire epilogiſmo lineam b s, & æquiponderans portioni b u i cunei medij n i o, librâ ex s ſuſpensâ, brachio æquante ſemidiametrum.



Quoniam vt b i ad b c, ita est b n ad b s; cùm b i sit semissis rectæ b c, erit b n semissis rectæ b s: sed b n est quadrans semidiametri b c; ergo b s est duo quadrantes, vel dimidium rectæ b c: ergo b s, b i, i c sunt æquales.

Rursus quoniam punctum z in isto casu congruit centro b, & condictum $\kappa z \pi$, condicto u b l, spatium A æquiponderans cylindraceo i p $\mu\lambda$, libra ex b suspensa, perpendiculo b u & brachio b a, erit ex vigesima quinta libri anterioris parallelepipedum cuius altitudo i p eadem quæ cylindracei i p $\mu\lambda$, & basis æquet spatium quod ex a æquiponderat.

Præterea quoniam libra ex b suspensa, perpendiculo b u, brachio b a, æquiponderans semicirculo inter condicta u b l, $\nu c \varphi$ interposito æquiponderat ex decima octaua tertij rectangulum sub semidiametro b c & sub duobus trientibus ipsius b c, vel vno triente diametri a c; si iste triens mutetur in quadrantem, semidiameter mutabitur in duos trientes eiusdem diametri, vt ex reciprocatione gignatur æqualitas; ergo ijsdem manentibus rectangulum sub quadrante diametri a c, & sub duobus trientibus ipsius æquiponderat semicirculo iam dicto: sed ijsdem positis segmento inter condicta p i r, $\nu c \varphi$ æquiponderat, ex decimâ nonâ eiusdem tertij libri, rectangulum sub i c quadrante diametri ac & sub i r semilatere trianguli æquicruris inscripti: ergo rectangulum sub eodem quadrante, & sub excessu quo duo trientes diametri a c superant semissem dicti lateris æquiponderat portioni circuli interceptæ condictis u b l, p i r (eiusmodi excessus vocetur *apotome nota*: est enim apotome quam definit Euclides) ergo ex corollario tertiæ spatium A cylindraceo i p μ λ æquiponderans librâ ex b suspensâ, perpendiculo b u, brachióque ba, est parallelepipedum cuius altitudo p i vel c q, basis sit rectangulum contentum sub semisse dicti lateris & sub apotome notâ. 74 decimi Euc.

Rursus quoniam vt b i recta ad b c, ita est i ✢ quadrans rectæ c q ad i x: bi autem est semissis rectæ b c, erit i ✢ semissis rectæ i x; & i p quadrupla rectæ i ✢ erit dupla rectæ i x: est ergo B parallelepipedum cuius basis sit rectangulum sub semilatere dicto & sub notâ apotome contentum, altitudo sit semissis rectæ i p. Præterea quoniam in triangulo a c d lateri c d æquidistat i β; vt a c ad c i, ita erit a d ad d β siue ad i p: sed a c ad c i, est vt quaternarius ad vnitatem; ergo a d ad i p est vt quaternarius ad vnitatem; ergo a d ad i x dimidium rectæ i p est vt octonarius ad vnitatem: ergo recta a d est ad compositam ex i x, i p, vt octonarius ad ternarium; ergo duo spatia A & B cum habeant eandem basim, ideóque æquent parallelepipedum eiusdem baseos, & altitudinis compositæ ex altitunibus i p, i x, æqualia sunt parallelepipedo cuius basis sit rectangulum sub semilatere dicto & sub notâ apotome comprehensum, altitudo sit tres octauæ partes rectæ a d; cui parallelepipedo propter basium & laterum reciprocationem æquale est aliud cuius altitudo sit a d, & basis rectangulum sub notâ apotome & sub tribus decimis sextis lateris trianguli æquilateri circulo inscripti; vel sub semilatere eodem & sub apotemes notæ tribus octauis.

Rursus quoniam cunei noti secundi a c d portioni interceptę condictis q c φ, μ z π quod in isto casu congruit condicto u b l, æquiponderans librâ ex n suspensâ, brachio æquante semidiametrum est ex vndecimæ corollarii primi epilogismo primo parallelepipedum cuius altitudo d a, basis sit quadrans quadrati b c, hoc est rectangulum sub diametri a c, tribus sexagesimis quartis & sub quatuor trientibus eiusdem diametri; ista enim æqualitas ex
15. sexti Euc. laterum reciprocatione sequitur: ex scholio verò eiusdem æquiponderans portioni iacenti inter condictâ p i r, q c φ est æquale parallelepipedo cuius altitudo a d & basis rectangulum sub semilatere dicto & sub tribus sexagesimis quartis diametri a c comprehensum; differentia istorum æquiponderantium eadem altitudine d a præditorũ, videlicet parallelepipedum altitudinis d a & baseos æquantis rectangulum sub diametri tribus sexagesimis quartis & sub

excessu quo quatuor diametri a c trientes superant semilatus trianguli æquilateri inscripti erit spatium D æquiponderans portioni μ p i z cunei secundi a c d noti. Dictus porrò excessûs compositus est ex duobus trientibus diametri a c,& ex apotome notâ, vt apertum est.

Quoniam ergo ex præscripto duodecimæ pro primo casu vt habeatur æquiponderans cunei medii, de spatio D deduci debent duo simul A & B; cùm D sit vt ostendimus parallelepipedum cuius altitudo a d,& basis rectangulum sub tribus sexagesimis quartis diametri a c, subque compositâ ex duobus diametri trientibus & ex apotome notâ comprehensum: ergo excessus quo istud rectangulum superat rectangulum sub apotome notâ & sub tribus decimis sextis lateris trianguli memorati, est basis parallelepipedi eadem altitudine a d præditi, quod æquiponderet cuneo medio b i u, librâ ex s suspensâ, brachio æquante semidiametrum a b,& perpendiculo s t: ergo definiuimus id quod definiendum fuit primo loco.

Propositum secundò sit quando, vt in secundo casu laudatæ propositionis duodecimæ, suspenditur portio q i c cunei medij t i s intercepta condictis p i r, q c φ determinare calculo æquiponderans dictæ portioni q i c, librâ ex s suspensâ, reliquisque manentibus, quæ in præcedenti casu posita sunt.

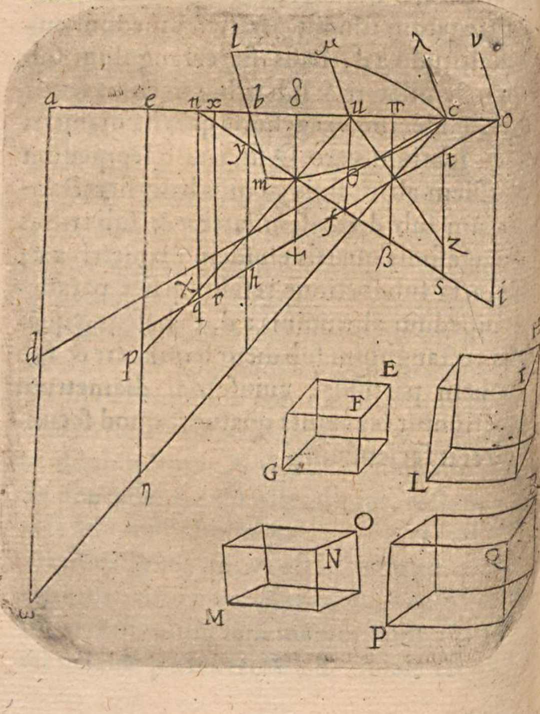
Spatium A æquiponderans cylindraceo q c p i, librâ ex b suspensæ, perpendiculo b u, brachio b a, est parallelepipedum cuius altitudo i p, basis sit rectangulum contentum sub semisse lateris trianguli æquilateri circulo c l inscripti, & sub diametri a c quadrante, ex vigesimâ æquint libri quarti corollario tertio.

Rursus quoniam vt in superiore casu ostensum est i x est dimidium rectæ i p: ergo B spatium cylindraceo c ν x i æquiponderans, librâ ex b suspensâ, brachio b a, est ex vigesimâ quintâ laudatæ, parallelepipedum cuius basis sit rectangulum iam memoratum, & altitudo dimidium altitudinis i p: ergo parallelepipedum cuius basis sit rectangulum iam memoratum, & altitudo tres semisses altitudinis i p, æquale est duobus simul A & B. Quoniam verò in præcedenti casu ostendimus, rectam a d esse ad compositam ex i p, i x vel ad tres semisses ipsius i p, vt est octonarius ad ternarium: ergo parallelepipedum cuius basis tsit rectangulum iam memoratum, altitudo res octauæ partes rectæ a d, æquale est duobus ſpatijs A, B: iſti verò parallelepipedo propter reciprocationem baſium & altitudinum æquale eſt aliud cuius altitudo a d, baſis ſit rectangulum ſub quadrante diametri & ſub tribus decimis ſextis lateris inſcripti iam ſæpe memorati: vel ſub tribus triceſimis ſecundis diametri a c & ſub ſemilatere dicto.

Quoniam igitur ex præſcripto duodecimæ pro ſecundo caſu, vt obtineatur æquiponderans cunei medij, de aggregato ex ſpatiis A, B ſubduci debet ſpatium D, cùm aggregatum illud ſit parallelepipedum cuius altitudo a d, baſis ſit rectangulum ſub dicto ſemilatere & ſub tribus decimis ſextis vel duodecim ſexageſimis quartis diametri a c; ſpatium verò D ſit parallelepipedum eiuſdem altitudinis, cuius baſis ſit rectangulum ſub dicto ſemilatere & ſub tribus ſexageſimis quartis eiuſdem diametri a c; peractâ ſubductione reſiduum fiet parallelepipedum altitudinis a d, & baſeos æquãtis rectangulum ſub dicto ſemilatere & ſub nouem partibus, cuiuſmodi diametrum metiuntur ſexaginta quatuor; quod ſecundò erat faciendum.

Propositio XVI.

Inuenire & calculo colligere æqualitem inter duo quædam ſpatia ſolida multùm inſeruientem ad quadrandum circulum.



Sit vt in decimâ tertiâ semicirculus l c m basis cylindracei descripti motu parallelæ ad rectam n q: ipsa autem n q sit ad diametrum a c perpendicularis; sit item b centrũ circuli, & b u, b e sint singillatim dimidium semidiametri; b n verò & c o quadrans; x b autem quinta eiusdem semidiametri pars. Per a, e, x, b, u, c, o, ductæ sint ad n q parallelæ a d, e p, x r, b h, u f, c s, o i. In rectâ u f sumptum sit quoduis punctum f, & per illud ductæ ex punctis n & o rectę n f, o f occurrẽtes rectis b h, c s, o i, n q, a d in y, h, t, s, i, q, d. Rectis y h, t s abscissæ sint æquales b κ, c z, & iunctę sint u k, u z rectæ.

Erunt igitur ex definitionibus in decimâ tertiâ traditis cunei n o q, o n i, coniugati; collaterales primi erunt y f h, t f s: collaterales secũdi b u κ, c u z: solidi b y f t c pars b y f u vocetur interior, & c u f t exterior, ipsũq; b y f t c dicatur fastigiatũ. Similiter cõiugatorũ cuneorũ interior dicatur o n i, exterior n o q: & collaterialiũ interior y f h, exterior t f s. Apertũ est cunei cõiugati interni c n s portionem b y s c interceptam condictis h b l, s c λ esse æqualem fastigiati solidi portioni internæ b y f u, externę c t f u, & collateralium externo t f s: similiter cunei coniugati externi n o q portionẽ c t h b esse æqualem fastigiati solidi portioni internæ b y f u, externæ c t f u, & collateralium interno y f h.

Rursus quoniam vt b u ad b c, ita est b n ad b e: si libra intelligatur suspendi ex e

perpendiculo e p, brachio æquante ſemidiametrum, obtinebitur æquiponderans primis collateralibus y f h, t f s, vel ſecundis b u k, c u f ex corollario tertio decimæ tertię; calculus verò vtriuſque habetur in
S. proximè antecedenti propoſitione; vocetur S.

Rurſus quoniam b x eſt quinta pars ſemidiametri b c, ſi libra ex x ſuſpendatur habebitur per duodecimam æquiponde-
A. rans cunei medij x o r portioni b c t h (hoc eſt tribus b u f y, c u f t, y f h) & eius calculus eſt in decimę quartæ parte alterâ; vocetur A. Prȩterea cùm b x ſit quatuor & b e decem, cuiuſmodi b c viginti, erit b c ad x e vt viginti ad ſex, vel decem ad tria: ergo ſi perpendiculum x r mutetur in e p, & libræ ſuſpenſio transferatur ex puncto x in e, reliquis nihil mutatis, æquiponderans portioni b c t h (hoc eſt tribus b u f y, c u f t, y f h) erit illud ipſum quod in primâ ſuſpenſione auctum tribus decimis partibus portionis b c t h, ex decimâ ſecundi libri.

Rurſus quoniam ſi per c intelligatur duci recta c ξ parallela rectæ o f, ideóque conſtituens angulum ξ c n æqualem angulo c n s, cunei c n s, n c ξ ſunt coniugati; ergo per decimam quartam quod æquiponderat cuneo b c ξ librâ ex n ſuſpensâ, æquiponderabit quoque cuneo b y f c librâ ex c ſuſpensâ: ergo cùm illud æquiponderans supputatum sit initio corollarii primi vndecimæ, constat quoque calculus istius vocetur B. Præterea cùm c e sit triginta cuiusmodi b c viginti, si perpendiculum c s mutetur in e p, & suspensio prima ex c in secundam ex e, brachiúmque ad partes a conuertatur, ex nonâ libri secundi apertum fit æquiponderans secundæ suspensionis esse tres semisses porrionis b y f c (hoc est trium b u f y, c u f t, t f s) imminutas æquiponderante B iam computato pro primâ suspensione. B

Rursus quoniam librâ ex e suspensâ spatium æquiponderans duobus simul cuneis coniugatis b y f c, c t h b iam est computatum, videlicet A ęquiponderans, cuius calculus est in decimæ quartæ propositionis parte alterâ, auctum quidem sex vigesimis portionis b c t h; siue trium b u f y, c u f t, y f h; & triginta vigesimis portionis b y f c, vel trium b u f y, c u f t, t f s; imminutum verò B æquiponderante, cuius calculus extat initio corollarii primi vndecimæ: si ex isto æquiponderante deducatur spatium S æquiponderans cuneis lateralibus y f h, t f s cuius epilogismus est in decimâ quintâ, relinquetur æquiponderans fastigiatæ figuræ b y f c bis sumptæ, illudq; erit parallelepipedum, A cuius calculus est in decimæ quartæ huius parte alterâ, auctum quidem sex vigesimis triũ b u f y, c u f t, y f h, & triginta vigesimis trium b u f y, c u f t, t f s; imminutum verò parallelepipedo B, cuius calcul⁹ extat initio corollarii primi vndecimæ, & parallelepipedis duobus S quorum calculus est in decimâ quintâ. Istud ęquiponderans ita collectum vocetur *primum fastigiati æquiponderans.*

Ad spatium æquiponderans secundum inuestigandum transeo. Quoniam b x est quinta pars semidiametri, si libra suspendatur ex puncto x, perpendiculo x r, brachio æquante semidiametrum, cognitum erit ęquiponderans C (ita enim appelletur) portioni c t f u exteriori fastigiati solidi b y f t c, cùm eius epilogismus extet in primâ parte decimæ quartæ propositionis: ergo, vt paulò superiùs dictum fuit, si perpendiculum x r mutetur in e p, & libræ suspensio ex x transferatur in e, æquiponderans pro istâ secundâ suspensione erit illud ipsum quod in primâ, auctum tamen sex vigesimis portionis externæ c t f u.

Rursus quoniam, sicut antea ostendimus, quod æquiponderat portioni u θ ξ b secundi b c ξ cunei noti librâ ex n suspensâ, æquipōderat quoq; librâ ex c suspensâ, cunei illi coniugati c n s portioni b y f u, quæ etiã est portio interna solidi fastigiati b y f t c; cùm illud putatum sit sub finem primæ partis in propositione decimâ quintâ, notũ quoque & putatum erit æquiponderans portioni b y f u internæ fastigiati b y f t c, librâ ex c suspensâ ; ergo si suspensio ex c transferatur in e, portioni internæ b y f u fastigiati b y f t c æquiponderabunt triginta vigesimæ, vel tres semisses portionis internę b y f u imminutæ parallelepipedo D, ita enim vocetur id cuius epilogismus extat sub finem primæ partis demonstratæ in decimâ quintâ.

Quoniam ergo fastigiatum solidum b y f t c constat duabus b y f u, c t f u partibus ; æquiponderans toti fastigiato bis vt iacet sumpto æquiponderabit quoque portioni internæ y b u f bis vt iacet positæ, & portioni externæ c t f u bis item vt iacet sumptæ : sed iam putauimus æquiponderans vtrique portioni internæ & externæ : ergo librâ ex e suspensâ; perpendiculo e p, brachio æquante semidiametrum, fastigiato b y f t c bis sumpto æquiponderat duplum parallelepipedi C putati in primâ parte decimæ quartæ, auctum duodecim vigesimis portionis externæ c t f u, & sexaginta vigesimis portionis internæ b y f u, imminutum verò duplo parallelepipedi D, cuius epilogismus habetur sub finem primæ partis demonstratæ in propositione decimâ quintâ. *Istud voco secundum fastigiati æquiponderans.*

Quoniam igitur ęqualia sunt primum & secundum fastigiati æquiponderans, si ad vtrumque addantur B, D, S, & ab vtroque subducantur internæ portionis b u f y triginta sex vigesimę, & externæ c u s t portionis duodecim vigesimæ, conficietur vltima æqualitas quęsita inter duas magnitudines quarum

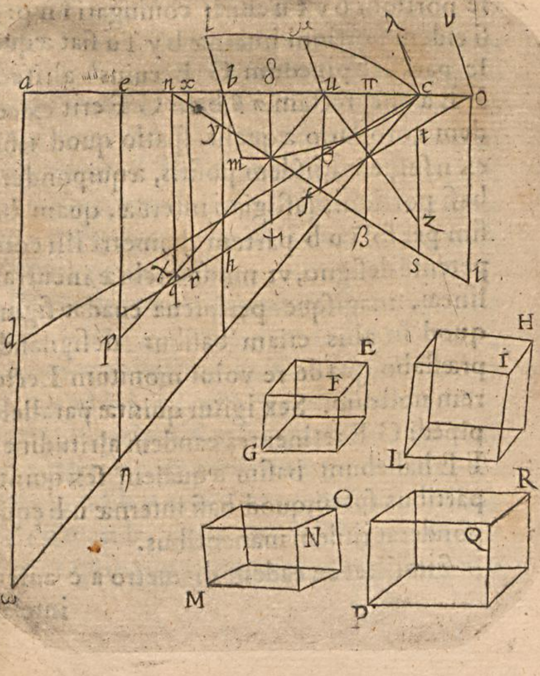
Prima componitur ex parallelepipedis A, S; ex duplo parallelepipedi D; ex sex quintis (id est viginti quatuor vigesimis) externæ c u s t, ex tribus semissibus (id est triginta vigesimis) externi collateralis, t s & ex sex vigesimis siue tribus decimis interni collateralis y s h.

Secunda componitur ex duplo parallelepipedi C, ex parallelepipedo B, & ex sex quintis internæ portionis b u s y: ergo inuenta est æqualitas proposita.

Quæ quantum conducat ad tetragonismum circuli non multò post patebit. Quod verò dixi ex nonâ libri secundi apertum esse ostendi potest in hunc modum, ne alicuius erroris hæc latebra putetur. Si librâ suspensâ ex c, perpendiculo c s, brachium semidiametro æquale mutetur in brachium æquale rectæ c e; æquiponderans isti brachio respondens erit ad aliud æquiponderans vt est recta b c ad e c, hoc est vt ternarius ad binarium, ex octauâ secundi: si ergo brachio æquante rectam c e, suspensio ex c transferatur in e, & brachium obuertatur ad partes a, æquiponderans, ex nonâ secundi, erit ipsa portio c b y s imminuta æquiponderante quod brachium longius sibi vindicauit librâ ex c suspensâ: ergo si brachium mutetur in semidiametrum æquiponderans isti brachio respondens *erit ex octauâ secundi ad aliud, vt est c e ad b c vel vt ternarius ad binarium; ergo æquiponderans respondens suspensioni ex e, brachio æquante semidiametrum, est tres semisses suspensæ c b y s deducto æquiponderante quod librâ suspensâ ex c competit brachio æquanti semidiametrum.*

PROPOSITIO XVI.

Inuenire & calculo colligere æqualitatem inter duo quædam spatia plana proximè conducentem ad circuli quadraturam.



Retento eodem diagrammate, ex diametro a c abſcindatur n π æqualis ſemidiametro b c, & per π agatur π β æquidiſtans rectæ n q, & occurrens rectæ n i in β. Intelligatur per β duci planum ęquidiſtans plano l c m, cuius cum cylindraceâ ſuperficie communis ſectio ſit baſis cylindracei oppoſita baſi l c m. Si ergo libræ brachium ponatur æquale rectæ n π, & eius ſuſpenſio fiat ex n, perpendiculo n o, ęquiponderans cylindraceo altitudinis π β & baſeos inter condicta h b l, f u μ interceptæ, hoc eſt baſeos quæ portioni internæ b u f y competit, erit per corollarium quintum decimæ tertiæ æquale portioni b y f u cunei coniugati i n o: & ſi eidem portioni internæ b y f u fiat æquale parallelrpipedum G E cuius altitudo F E æquet rectam π β, baſis G F erit ex eodem corollario æqualis ſpatio quod librâ ex n ſuſpensâ, iiſdem poſitis, æquiponderat baſi portionis faſtigiati internæ, quam baſim per ſolã u b partem diametri illi competentẽ deſigno, vt minùs crebræ incurrant lineæ, magiſque perſpicua euadat figura; quod in aliis etiam baſibus deſignandis præſtabo, qua de re volui monitum Lectorem noſtrum. Sex igitur quintæ parallelepipedi G E retinentes eandem alritudinem F E habebunt baſim æqualem ſex quintis partibus ſpatii, quod baſi internæ u b ęquiponderat iiſdem manentibus.

Similiter ex eadem diametro a c auferri intelli-

intellige o δ semidiametro æqualem, & per δ agi $\delta\psi$ æquidistantem rectæ n q, & conuenientem cum recta o f in ψ. Quoniam trianguli n f o basis n o bifariam secatur à perpendiculari f u ex angulo f ad ipsam demissâ, erũt triãgula n u f, u o f æquilatera, & æquiangula; ergo anguli ad n & o sunt æquales; ergo rectæ $\pi\beta$, $\delta\psi$ sunt æquales; ergo planum per β parallelum basi l c m transit per ψ. Sicut igitur in cuneo interno, ita in externo n o d ostenditur, librâ ex o suspensâ, perpendiculo o i, brachio æquante semidiametrum, æquiponderans basi u c portionis fastigiati externę c t f u esse ęquale parallelepipedi L H basi L I: ipsum autẽ L H pono esse æquale portioni externæ c u f t, & eius altitudinem I H esse æqualem altitudini $\delta\psi$ vel $\pi\beta$. Sex igitur quintæ parallelepipedi L H conseruantes eandem altitudinem I H habebunt basim æqualem sexquintis partibus spatij quod basi externæ u c æquiponderat librâ ex o suspensâ, & reliquis manentibus.

Præterea recta u κ producta ocurrat rectis n q, e p in χ, p; quoniam trianguli u n χ basi n χ æquidistat b k, sicut u n ad b u, ita est n χ ad b *k*: est ergo n χ ad b κ vt ternarius ad binarium. Rursus quoniam trianguli c n s lateri c s æquidistant b y, u f, tres rectæ c s, u f, b y erunt proportionales tribus n c, n u, n b; ergo tres rectæ c s, u f, b y sunt vt quinarius, ternarius vnitas: ergo b y est quinta pars rectæ c s vel b h ; ergo cum b h siue c s sit ad u f vt decem ad sex, y h siue b k erit ad u f vt octo ad sex : quia verò b κ est ad n χ vt binarius ad ternarium, siue vt octo ad duodecim, erit n χ ad u f vt duodecim ad sex ; est ergo n χ dupla rectæ u f: ergo cum triangula n u f, n π β sint inuicem similia ; sintque item inuicem similia u n χ, u e p, & latera u e, n π sint æqualia, erit e p dupla rectæ π β: eadem verò de causâ si per c agatur c ω æquidistans rectæ u p, & occurrẽs rectæ a d in ω, cui in d occurrat c ξ; recta a ω erit dupla rectæ a d.

Quoniam ergo recta u n æquat semidiametrum, si per p ducatur planum basi l c m parallelũ, cylindraceo cui⁹ basis sit b u altitudo p e, æquipõderat, librâ suspensâ ex u, perpẽdiculo u f, brachio ęquãte semidiametrũ, spatiũ æquale parti b u k cunei n u χ; & si illud spatium sit parallelepipedum M O cuius altitudo N O æquet rectam p e, basis G F, ęrit vt patet ex iam demonstratis, spatium quod librâ ex c suspensâ, reliquis iisdem positis æquiponderat basi b u, collateralis & interni cunei b u k : sex igitur vigesimæ cunei interni collateralis siue parallelepipedi M O retinentes eandem altitudinem N O habebunt basim æqualem sex vigesimis partibus spatii, quod basi u b interni collateralis æquiponderat iisdem manentibus, librâ scilicet suspẽsâ ex u, &c. Quòd si parallelepipedum cuius altitudo

NO vel p e, basis sit sex memoratæ uigesimæ mutetur in aliud æquale cuius altitudo sit π β quæ est, vt ostendimus, dimidium altitudinis p e; basis mutabitur reciproca tionis lege in duodecim vigesimas spatii quod basi u b, iisdem manentibus, æquiponderat. 34. vndec. Euc.

Eodem prorsus pacto ostendetur si collaterali externo secundo c u z fiat æquale parallelepipedum P R cuius altitudo Q R æquet altitudinem e p; basi u c externæ, librâ ex u suspensâ, positisque reliquis quæ proxime superiùs, æquiponderare spatium æquale basi P Q: & triginta vigesimas cunei externi collateralis siue parallelepipedi P R retinentes eandem altitudinem Q R habere basim æqualem triginta vigesimis partibus spatii quod basi u c externi collateralis æquiponderat: & denique si parallelepipedum cuius altitudo Q R vel p e, basis sit triginta vigesimæ memoratæ mutetur in aliud æquale cuius altitudo sit π β, basis mutabitur in sexaginta vigesimas spatii quod basi u c iisdem manentibus æquiponderat.

l Rursus quoniam u p, producta occurrit rectæ c ω in *n*; cùm lateri c *n* trianguli e *n* c æquidistet u p, vt e u ad e c, ita erit e p ad e *n*, hoc est vt binarius ad ternarium: eademque de causâ cùm in triangulo c a ω lateri a ω æquidistet e *n*, vt e c ad a c, hoc est, vt ternarius ad quaternarium ita erit e *n* ad a ω:

ergo ex æquo vt e u ad a c, hoc eſt vt vnitas ad binartum, ita e p ad a ω; ſed ita etiam oſtendimus eſſe rectam a d ad a ω: ergo rectæ a d, e p ſunt æquales.

Præterea quoniam parallelepipeda A, B, C, D, altitudinem æqualem rectæ a d habent, ipſa verò a d, vt pote æqualis rectæ e p, eſt dupla altitudinis π β: ſi parallelepipeda A, B, C, D, mutentur in æquiualentia quorum altitudo ſit π β, baſis erit dupla baſeos ipſorum A, B, C, D.

Item quoniam parallelepipeda S habent altitudinem æqualem rectæ a ω, ipſa verò a ω eſt quadrupla rectæ π β, ſi parallelepipeda S mutentur in æquiualentia, quorum altitudo ſit π β, baſis erit quadrupla baſeos ipſorum S.

Quoniam igitur parallelepipeda quæ inter ſe ſunt æqualia, ſi eadem altitudine ſint prædita, habent baſes inter ſe æquales, ex trigeſimâ vndecimi libri Euclidis conuerſâ apud Clauium; compoſitæ autem magnitudines ſolidæ, quas æquales eſſe oſtendimus in præcedenti, redactæ ſunt in propoſitione præſenti ad eandem altitudinem π β; ergo earum baſes ſunt inuicem æquales: ergo inuentæ ſunt duæ planæ magnitudines inuicem æquales, quarum,

Prima componitur primò ex duplo baſis parallelepipedi A; ſecundò ex quadruplo baſis parallelepipedi D; tertiò ex ſex quintis, vel viginti quatuor vigeſimis ſpatii quod externæ basi u c æquiponderat, librâ ex o suspensâ, perpendiculo o i, brachio æquante semidiametrum; quartò ex sex semissibus, vel sexaginta vigesimis spatii quod externæ eidem basi u c æquiponderat librâ suspensâ ex u, perpendiculo u f, brachióque eodem; quintò ex tribus quintis, vel duodecim vigesimis spatii quod internę basi b u æquiponderat librâ suspensâ ex u, reliquisque, vt iam diximus, positis. *Hæc magnitudo vocetur primus terminus æqualitatis notæ.*

Secunda componitur primò ex quadruplo basis parallelepipedi C; secundò ex duplo basis parallelepipedi B; tertiò ex quadruplo basium parallelepipedorum S; quartò ex sex quintis, vel viginti quatuor vigesimis, spatii quod internæ basi b u æquiponderat librâ suspensâ ex n, perpendiculo n q, brachióque semidiametrum ęquante. *Hæc magnitudo appelletur secundus terminus æqualitatis notæ.*

SCHOLIVM.

Præsentem æquationem diu existimaui non solum veram esse (istud enim adhuc persuasum habeo) sed etiam reduci ad terminos duos quorum vnus foret spatium rectilineum notum, alter segmentum circuli datum; re tamen per numeros diligentiùs examenatâ comperi vtrumque terminum post sufficientem prostha-

phæreticam (vt solet in Algebrâ) castigationem reuocari ad purum spatium rectilineum; ac proinde necdum ita inuentam esse à nobis quadraturam circuli, vt nihil amplius desideretur, & inquirendum restet. Nobis tam auio tamque molesto itinere fatigatis nunc satis esto nihil in fronte operis promitti, quod cumulatè adiuuante Deo non præstiterimus. Huius libri quinti initio speraui fore vt assequerer fugientem Tetragonismum; si tamen eum comprehendere & retinere non valui adhuc, nihil dubito quin aliquam nec prorsus contemnendam ex eius apprehensâ veste laciniam in manibus meis remansisse iudicetur ab æquo & beneuolo Lectore.