

www.e-rara.ch

Analytische Geometrie der Kegelschnitte

Salmon, George

Leipzig, 1860

ETH-Bibliothek Zürich

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-101320>

Drittes Kapitel. Aufgaben über die gerade Linie.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Aufg. 1. Die Gleichung $\varrho = 2a \sec \left(\vartheta + \frac{\pi}{6} \right)$ in eine solche zwischen rechtwinkligen Coordinaten umzuwandeln.

Aufg. 2 Die Polar-Coordinaten des Durchschnittspunktes der folgenden geraden Linien und den von ihnen eingeschlossenen Winkel zu bestimmen: $\varrho \cos \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) = 2a$, $\varrho \cos \left(\vartheta - \frac{\pi}{6} \right) = a$.

Aufl. $\varrho = 2a$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; der Winkel $= \frac{\pi}{3}$.

Aufg. 3. Welches ist die Polargleichung der geraden Linie, die die Punkte ϱ', ϑ' ; ϱ'', ϑ'' verbindet?

Aufl.

$$\varrho' \varrho'' \sin (\vartheta' - \vartheta'') + \varrho'' \varrho \sin (\vartheta'' - \vartheta) + \varrho \varrho' \sin (\vartheta - \vartheta') = 0.$$

Drittes Kapitel.

Aufgaben über die gerade Linie.

45. Nachdem wir in den vorigen Kapiteln die Principien dargelegt haben, auf welche gestützt wir die Lage eines Punktes oder einer geraden Linie algebraisch auszudrücken im Stande sind, wollen wir einige weitere Beispiele von der Anwendung dieser Methode zur Auflösung geometrischer Aufgaben hinzufügen. Der Anfänger muss sich in der Anwendung der Methode zur Lösung solcher Aufgaben fleissig üben, bis er Leichtigkeit und Schnelligkeit in ihrem Gebrauche erlangt hat. Die in diesem Kapitel gegebenen Beispiele sind nicht sowohl ihrer selbst wegen als deshalb gewählt, um daran zu zeigen, wie dergleichen Aufgaben algebraisch gelöst werden können und mögen daher wohl selbst einfachere geometrische Auflösungen annehmen. Solche einzelne Fälle dürfen nicht zu der Voraussetzung verleiten, dass die geometrische Methode, die bei ihnen den Vorzug verdient, auch in andern Fällen vorzuziehen sei. Jede Methode hat ihre eigenthümlichen Vorzüge. Wenn für einige Aufgaben die geometrischen Auflösungen klarer und einfacher sind, so verfährt da-

gegen die algebraische Methode mit grösserer Gleichförmigkeit und führt mit grösserer Sicherheit zum Ziel. Es muss das Bestreben des Studirenden sein, sich beider Untersuchungs-Methoden in der Art zu bemächtigen, dass er fähig sei, jede von ihnen nach der Natur der vorliegenden Aufgabe anzuwenden.

Wir wollen von denjenigen Arten der Aufgaben, welche am häufigsten vorkommen, je einige Beispiele geben; derjenige Leser, welcher dieser sich bemeistert hat, wird in der Anwendung derselben Methode auf irgend andre Aufgaben, die sich ihm darbieten mögen, keine Schwierigkeit finden.

46. Aufgaben, bei denen zu beweisen ist, dass drei gerade Linien sich in einem Punkte schneiden.

Es erscheint unnöthig, zu den im letzten Kapitel bereits gegebenen noch andre Beispiele über diesen Gegenstand hinzuzufügen. Das Verfahren, welches wir verfolgen, ist dieses: Wir bilden die Gleichungen der drei geraden Linien; alsdann können wir entweder sogleich bemerken, dass die drei Gleichungen Null zur Summe geben, wenn sie mit passenden Constanten multiplicirt werden: ist diess der Fall, so wissen wir nach Artikel 37, dass die durch die Gleichungen repräsentirten geraden Linien sich in einem Punkte schneiden; oder wir berechnen die Coordinaten des Durchschnittspunctes von zweien der geraden Linien und untersuchen, ob sie der Gleichung der dritten genügen; oder endlich, wir wenden das Kennzeichen des Artikel 34 auf die Gleichungen an.

Bei den Auflösungen dieser wie jeder andern Klasse geometrischer Aufgaben können im Allgemeinen die Gleichungen durch eine geschickte Wahl der Coordinatenachsen vereinfacht werden; indem man zwei der wichtigsten Linien der Figur zu Coordinatenachsen wählt, werden die analytischen Ausdrücke wesentlich verkürzt. Andererseits geschieht es freilich oft, dass durch die Annahme von Coordinatenachsen, welche mit der Figur nicht in einer solchen besondern Verbindung stehen, die Gleichungen an Symmetrie das gewinnen, was ihnen an Einfachheit abgeht. Der Leser kann dies aus den zwei in Aufgabe 1 und 2 des Artikel 37 gegebenen Auflösungen derselben Aufgabe erkennen, wo die erste Auflösung, obgleich die längere, den Vorzug hat, dass man aus der entwickelten Gleichung der einen Winkelhalbirungslinie sogleich die der andern ohne Rechnung ableiten kann.

Weil Ausdrücke, welche Winkel enthalten, durch die Anwendung schiefwinkliger Coordinaten complicirter werden, ist es im Allgemeinen rathsam, für solche Aufgaben rechtwinklige Achsen vorauszusetzen.

Aufgaben, in denen zu beweisen ist, dass drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Es kann vorkommen, dass die Coordinaten des dritten Punktes als aus denen der zwei ersten $x'y'$, $x''y''$ nach den Formeln

$$\frac{mx'' + nx'}{m+n}, \frac{my'' + ny'}{m+n}$$

hervorgehend sofort erkannt werden; in diesem Falle folgt aus Artikel 7, dass die drei Punkte in einer geraden Linie liegen. In anderen Fällen bilden wir die Gleichung der geraden Linie, welche zwei von ihnen verbindet und untersuchen, ob die Coordinaten des dritten ihr genügen.

47. Geometrische Oerter. Die analytische Geometrie eignet sich mit vorzüglicher Leichtigkeit zur Untersuchung der Oerter. Wir haben nur die Relation aufzusuchen, welche die Bedingungen der Aufgabe zwischen den Coordinaten des Punktes fordern, dessen Ort gesucht wird; der algebraische Ausdruck dieser Relation liefert uns sofort die Gleichung des verlangten Ortes.

Aufg. 1. Welches ist der Ort der Spitze eines Dreiecks, von welchem die Basis und die Differenz der Quadrate der Seiten gegeben sind?

Aufl. Wir nehmen die Basis AB zur Achse der x und eine in ihrem Endpunkte A auf ihr errichtete Senkrechte zur Achse der y , nennen die Länge der Basis c und die Coordinaten der Spitze x, y . Dann ist

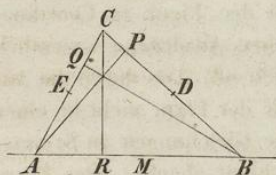
$$BC^2 = CR^2 + RB^2 = y^2 + (c - x)^2$$

$$AC^2 = x^2 + y^2,$$

daher $BC^2 - AC^2 = c^2 - 2cx$, und indem wir diess einer Constanten gleich setzen $c^2 - 2cx = m^2$.

die Gleichung des Ortes der Spitze. Dies ist nach Art. 15 die Gleichung einer zur Basis senkrechten geraden Linie in der Entfernung $\frac{c^2 - m^2}{2c}$ vom Anfangspunkt. Indem wir diess von c subtrahiren, erhalten wir das andere Segment $= \frac{c^2 + m^2}{2c}$ und bewähren leicht, dass

Fig. 20.



der gefundene Ort die Basis so theilt, dass die Differenz der Quadrate der Segmente der Differenz der Quadrate der Seiten gleich ist. (Eukl. I. 47. Zus. 4.)

Aufg. 2. Von einem Dreieck ist die Basis und die Summe der Seiten gegeben; welches ist der Ort des Punktes in dem von seiner Spitze auf die Basis gefällten Perpendikel, welcher jenseits der Spitze um die Länge der einen Seite von der Basis entfernt ist?

Aufl. Wir nehmen dieselben Achsen, um zu untersuchen, welche Relation zwischen den Coordinaten des Punktes besteht, dessen Ort wir zu bestimmen haben. Die Abscisse desselben ist AR und seine Ordinate nach der Voraussetzung $= AC$; wenn m die gegebene Summe der Seiten ist, so ist $BC = m - y$.

$$\text{Auch gilt} \quad BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AR,$$

d. h. indem man AB wieder durch c bezeichnet

$$(m - y)^2 = c^2 + y^2 - 2cx,$$

woraus wir durch Reduction erhalten

$$2my - 2cx = m^2 - c^2,$$

die Gleichung einer geraden Linie.

Aufg. 3. Wenn zwei feste gerade Linien OA und OB gegeben sind und durch eine dritte von gegebener Richtung AB geschnitten werden, so soll der Ort des Punktes P gefunden werden, der die Strecke AB in einem gegebenen Verhältniss theilt.

Fig. 21.

Wir können hier schiefwinklige Achsen anwenden, weil die Aufgabe die Betrachtung von Winkeln nicht erfordert; nehmen wir also die feste Linie OA zur Achse der x , OC zur Achse der y , so dass die Gleichung von OB von der Form

$$y = mx$$

ist. Es wird verlangt, den Ort des Punktes P zu finden, welcher AB so theilt, dass immer $AP = n \cdot AB$. Weil der Punkt B in der geraden Linie $y = mx$ liegt, so haben wir

$$AB = m \cdot OA, \text{ daher } AP = mn \cdot OA;$$

es ist aber AP die Ordinate des Punktes P und OA seine Abscisse, daher wird der Ort von P durch die Gleichung

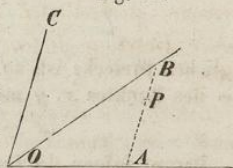
$$y = mnx$$

ausgedrückt, und ist somit eine durch den Punkt O gehende gerade Linie.

Aufg. 4. Von einer beliebigen Anzahl von Dreiecken mit gemeinschaftlicher Spitze sind die Grundlinien und die Summe ihrer Inhalte gegeben; man soll den Ort ihrer Spitze finden.

Aufl. Sind die Gleichungen der Grundlinien

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p &= 0, & x \cos \beta + y \sin \beta - p_1 &= 0, \\ x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_2 &= 0 \text{ etc.,} \end{aligned}$$



ihre Längen $a, b, c \dots$ und die gegebene Summe der Inhalte $= m^2$, so ist $a(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p)$, weil nach Art. 27 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p$ die Senkrechte vom Punkt x, y auf die erste Linie bezeichnet, der doppelte Inhalt des ersten Dreiecks und die Gleichung des Ortes muss daher sein

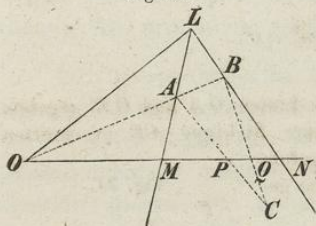
$$a(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) + b(x \cos \beta + y \sin \beta - p_1) + c(x \cos \gamma + y \sin \gamma - p_2) + \dots = 2m^2.$$

Diese ist aber, da sie x und y nur im ersten Grade enthält, die Gleichung einer geraden Linie.

Aufg. 5. Zwei Ecken eines Dreiecks ABC bewegen sich in festen geraden Linien LM, LN und die drei Seiten desselben drehen sich um feste Punkte O, P, Q , die in einer geraden Linie liegen; welches ist der Ort der dritten Ecke?

Aufl. Wir nehmen die gerade Linie OP , welche die drei festen Punkte enthält, zur Achse der x und die gerade Linie OL , welche den

Fig. 22.



Durchschnittspunkt der beiden festen geraden Linien mit dem Punkte O verbindet, zur Achse der y . Unter den Voraussetzungen

$OL=b, OM=a, ON=a', OP=c, OQ=c'$ sind die Gleichungen von LM und LN

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ und } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1,$$

und wenn ABC eine durch die Coordinaten von $C \ x', y'$ bestimmte Lage des beweglichen Dreiecks ist, so ist die Gleichung von CP , als der Verbindungslinie des Punktes x, y mit dem Punkte $P \ (x=c, y=0)$

$$(x' - c)y - y'x + cy' = 0.$$

Daraus folgen die Coordinaten von A , als dem Durchschnittspunkt dieser Linie mit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

$$x_1 = \frac{ab(x' - c) + acy'}{b(x' - c) + ay'}, y_1 = \frac{b(a - c)y'}{b(x' - c) + ay'}.$$

Die Coordinaten von B werden aus den vorigen gefunden, indem man statt a und c respective a' und c' einführt:

$$x_2 = \frac{a'b(x' - c') + a'cy'}{b(x' - c') + a'y'}, y_2 = \frac{b(a' - c')y'}{b(x' - c') + a'y'}.$$

Damit aber diese beiden Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in einer durch den Coordinatenanfang gehenden geraden Linie liegen, muss die Relation gelten

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}.$$

Darnach haben wir

$$\frac{b(a - c)y'}{ab(x' - c) + acy'} = \frac{b(a' - c')y'}{a'b(x' - c') + a'cy'}.$$

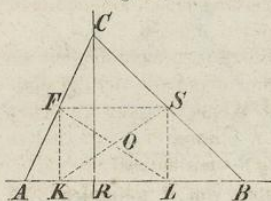
48. Anstatt die Bedingungen der Aufgabe direct in Gliedern der Coordinaten des Punktes auszudrücken, dessen Ort gesucht wird, ist es oft zweckmässig, sie zunächst in Gliedern anderer Linien der Figur zu bestimmen; dann ist es nöthig, so viele Relationen aufzustellen, als zur Elimination der so eingeführten unbekannten Grössen hinreichend sind, um durch diese eine Gleichung zwischen den Coordinaten des Punktes zu finden, dessen Ort gesucht wird. Die folgenden Beispiele werden zur Erläuterung dieser Methode hinreichen.

Aufg. 1. Den Ort der Mittelpunkte der Rechtecke zu finden, die in ein gegebenes Dreieck eingeschrieben sind.

Aufl. Wir nehmen CR und AB zu Coordinatenachsen und setzen $CR = p$, $BR = s$ und $AR = s'$; dann sind die Gleichungen von AC und BC

$$\frac{y}{p} - \frac{x}{s'} = 1 \text{ und } \frac{y}{p} + \frac{x}{s} = 1.$$

Fig. 24.



Wenn wir nun in der Entfernung $FK = k$ eine zur Basis parallele Linie FS ziehen, deren Gleichung $y = k$ ist, so finden wir die Abscissen der Punkte F und S , in denen diese den Linien AC und BC begegnet, durch Substitution von $y = k$ in die Gleichungen von AB und BC . So erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$\frac{k}{p} - \frac{x}{s'} = 1 \text{ oder } KR = -s' \left(1 - \frac{k}{p}\right);$$

aus der zweiten

$$\frac{k}{p} + \frac{x}{s} = 1 \text{ oder } RL = s \left(1 - \frac{k}{p}\right).$$

Daraus ergibt sich die Abscisse des Mittelpunktes von FS nach Art. 7

$$x = \frac{s - s'}{2} \left(1 - \frac{k}{p}\right),$$

welche auch für den Mittelpunkt des Rechtecks die Abscisse ist. Seine Ordinate ist

$$y = \frac{k}{2}.$$

Sollen wir eine Relation finden, welche zwischen dieser Ordinate und Abscisse für jeden Werth von k bestehen muss, so haben wir nur zwischen diesen Gleichungen k zu eliminiren; so erhalten wir für die Gleichung des verlangten Ortes

$$2x = (s - s') \left(1 - \frac{2y}{p}\right)$$

oder

$$\frac{2x}{s - s'} + \frac{2y}{p} = 1.$$

Der gesuchte Ort ist also eine gerade Linie und die Abschnitte, welche dieselbe in den Achsen bildet, zeigen, dass es die Verbindungslinie des Mittelpunktes der Basis AB mit dem Mittelpunkte der Höhe CR ist.

Aufg. 2. Zur Basis AB eines Dreiecks ist eine Parallele FS gezogen und in den Durchschnittspunkten F und S derselben mit den Seiten sind auf diesen Perpendikel FQ und SQ errichtet, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes dieser letzteren?

Aufl. Wir benutzen die nämlichen Achsen, wie in der Aufg. 1. Dann hat die Linie FQ , welche zu AC oder $\frac{y}{p} - \frac{x}{s'} = 1$ in F oder $-s' \left(1 - \frac{k}{p}\right)$, k senkrecht ist, die Gleichung:

$$\frac{1}{p} \left[x + s' \left(1 - \frac{k}{p} \right) \right] + \frac{1}{s'} (y - k) = 0.$$

In derselben Art findet man die Gleichung von SQ

$$\frac{1}{p} \left[x - s \left(1 - \frac{k}{p} \right) \right] - \frac{1}{s} (y - k) = 0.$$

Weil nun der Punkt, dessen Ort wir suchen, in beiden Linien FQ und SQ liegt, so drückt jede der eben geschriebenen Gleichungen eine Relation aus, der seine Coordinaten genügen müssen; weil aber diese Gleichungen k enthalten, so drücken sie Relationen aus, die nur für den speciellen Punkt des Ortes wahr sind, welcher dem Falle der Parallelen FS in der Höhe k über der Basis entspricht. Wenn wir aber zwischen diesen Gleichungen die unbestimmte Grösse k eliminiren, so erhalten wir eine Relation zwischen den Coordinaten x , y und den bekannten Grössen allein und diese ist, weil ihr für jede Lage der Parallelen FS genügt sein muss, die verlangte Gleichung des Ortes.

Um k zwischen den Gleichungen zu eliminiren, schreiben wir sie in der Form

$$FQ: \quad \frac{x}{p} + \frac{s'}{p} + \frac{y}{s'} = k \left(\frac{1}{s'} + \frac{s'}{p^2} \right)$$

und

$$SQ: \quad \frac{y}{s} - \frac{x}{p} + \frac{s}{p} = k \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{p^2} \right)$$

und erhalten nun die Gleichung des Ortes

$$\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{p^2} \right) \left(\frac{x}{p} + \frac{s'}{p} + \frac{y}{s'} \right) = \left(\frac{1}{s'} + \frac{s'}{p^2} \right) \left(\frac{y}{s} - \frac{x}{p} + \frac{s}{p} \right).$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie, weil x und y darin nur im ersten Grade vorkommen und man erkennt, dass sie durch die Spitze des gegebenen Dreiecks geht, weil die Coordinaten derselben $x = 0$, $y = p$ der Gleichung genügen. Nach Art. 36 geht sie auch durch den Durchschnitt der Linien

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{s'} + \frac{s'}{p} = 0, \quad \frac{y}{s} - \frac{x}{p} + \frac{s}{p} = 0,$$

welches die in den Endpunkten der Basis auf den anstossenden Seiten errichteten Perpendikel sind.

Aufg. 3. Parallel zur Basis eines Dreiecks ist eine gerade Linie gezogen und die Punkte, in denen sie die Seiten desselben schneidet, sind mit zwei festen Punkten in der Basis durch gerade Linien verbunden, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes dieser letzteren?

Aufl. Wir behalten die Achsen und die übrigen Bestimmungen der Aufgabe 2 und lassen die Coordinaten der festen Punkte T und V in der Basis sein für $T(m, o)$ und für $V(n, o)$. Alsdann ist die Gleichung von

$$FT \quad \left[s' \left(1 - \frac{k}{p} \right) + m \right] y + kx - km = o, \text{ und die von}$$

$$SV \quad \left[s \left(1 - \frac{k}{p} \right) + n \right] y - kx + kn = o.$$

Indem wir diese Gleichungen in die Form

$$(s' + m) y - k \left(\frac{s'}{p} y - x + m \right) = o,$$

$$(s - n) y - k \left(\frac{s}{p} y + x - n \right) = o$$

bringen und die Grösse k eliminiren, erhalten wir für die Gleichung des

$$\text{Ortes} \quad (s - n) \left(\frac{s'}{p} y - x + m \right) = (s' + m) \left(\frac{s}{p} y + x - n \right).$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie, weil x und y nur im ersten Grade darin enthalten sind.

Aufg. 4. In einem Dreiecke sind die Schnittpunkte einer Parallelen zur Basis mit den Seiten mit den gegenüberliegenden Basisecken verbunden; man soll den Ort des Durchschnittspunktes der Verbindungslinien angeben,

Aufl. Die Aufgabe ist zwar ein specieller Fall der vorigen, nimmt aber eine einfachere Auflösung an, indem man die Seiten AC und CB des Dreiecks zu Achsen wählt; sind dann ihre Längen a und b , so können die proportionalen Abschnitte, welche die Parallele in ihnen macht, durch μa und μb ausgedrückt werden. Dann sind die Gleichungen der

$$\text{Transversalen} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{\mu b} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{\mu a} + \frac{y}{b} = 1,$$

und indem man die eine von der andern subtrahirt und den Rest durch die Constante $1 - \frac{1}{\mu}$ dividirt, erhält man für die Gleichung des Ortes

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = o,$$

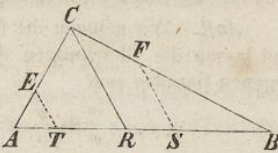
die wir früher (Art. 37, Aufg. 2) als Gleichung der geraden Linie gefunden haben, welche die Spitze des Dreiecks mit dem Mittelpunkt der Basis verbindet.

Aufg. 5. In der Basis eines Dreiecks sei ein Stück AT und am andern Ende ein Stück BS genommen, welches zu AT in einem festen Verhältniss steht; werden sodann ET und FS einer festen geraden Linie

CR parallel gezogen, so ist der Ort des Punktes O zu finden, in welchem sich die Linien EB und FA durchschneiden.

Aufl. Wir nehmen CR zur Achse der y , setzen $AT=k$, $BR=s$, $AR=s'$, $CR=p$ und das feste Verhältniss m , so dass $BS=mk$. Alsdann sind die Coordinaten von S $s - mk, 0$ und die von T $-(s' - k), 0$.

Fig. 25.



Wir finden sodann die Ordinaten von E und F , indem wir diese Werthe von x in die Gleichungen von AC und BC substituiren, also für

$$E \quad x = -(s' - k), \quad y = \frac{pk}{s'},$$

für $F \quad x = s - mk, \quad y = \frac{mpk}{s}.$

Wir bilden nun die Gleichungen der geraden Linien EB und FA , nämlich

$$EB \quad (s + s' - k)y + \frac{pk}{s'}x - \frac{pks}{s'} = 0,$$

$$FA \quad (s + s' - mk)y - \frac{mpk}{s}x - \frac{mpks'}{s} = 0,$$

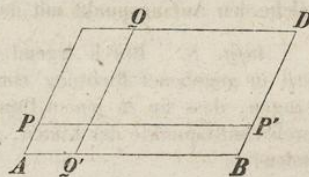
und eliminiren endlich k , indem wir die eine Gleichung von der andern abziehen und den Rest mit k dividiren; so erhalten wir

$$(m - 1)y + \left(\frac{mp}{s} + \frac{p}{s'}\right)x + \left(\frac{mps'}{s} - \frac{ps}{s'}\right) = 0,$$

die Gleichung einer geraden Linie.

Aufg. 6. PP' und QQ' sind ein Paar beliebige Parallelen zu den Seiten eines Parallelogramms, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes der Linien PQ und $P'Q'$?

Fig. 26.



Aufl. Wir nehmen zwei der Seiten des Parallelogramms zu Achse und setzen ihre Längen a und b , bezeichnen AQ' durch m und AP durch n . Dann ist die Gleichung von PQ , als der geraden Verbindungslinie von $P(o, n)$ mit $Q(m, b)$

$$(b - n)x - my + mn = 0,$$

und die Gleichung von $P'Q'$, der Verbindungslinie von $P'(a, n)$ mit $Q'(m, 0)$

$$nx - (a - m)y - mn = 0.$$

Da hier zwei unbestimmte Grössen m und n vorhanden sind, so kann man vermuthen, dass es nicht möglich sein werde, sie beide aus diesen zwei Gleichungen zu eliminiren; wenn man jedoch die beiden Gleichungen durch Addition vereinigt, so verschwinden beide Unbestimmte und man erhält den Ort

$$bx - ay = 0,$$

die Gleichung der Diagonale des Parallelogramms.

Aufg. 7. Ein Punkt und zwei feste gerade Linien sind gegeben; man zieht durch jenen irgend zwei gerade Linien und verbindet die Punkte, wo diese den festen geraden Linien begegnen, kreuzweis; welches ist der Ort des Durchschnittspunktes dieser Verbindungslinien?

Aufl. Wir nehmen die festen geraden Linien zu Coordinatenachsen und lassen die Gleichungen der durch den festen Punkt willkürlich gezogenen Geraden sein

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \text{ und } \frac{x'}{m'} + \frac{y'}{n'} = 1.$$

Weil diese Linien durch den festen Punkt $x'y'$ gehen müssen, sind

$$\frac{x'}{m} + \frac{y'}{n} = 1 \text{ und } \frac{x'}{m'} + \frac{y'}{n'} = 1$$

oder durch Subtraction

$$x' \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \right) + y' \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) = 0.$$

Die Gleichungen der Transversalen sind darnach

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \text{ und } \frac{x}{m'} + \frac{y}{n'} = 1;$$

und liefern durch Subtraction

$$x \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \right) - y \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und der vorher gefundenen lassen sich

$$\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m'} \right) \text{ und } \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right)$$

eliminiren und wir erhalten dadurch

$$x'y + y'x = 0$$

die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie. Sie steht in einer bald näher darzulegenden Beziehung zu der geraden Linie

$$x'y - y'x = 0,$$

welche den Anfangspunkt mit dem Punkte $x'y'$ verbindet.

Aufg. 8. Durch irgend einen Punkt in der Basis eines Dreiecks wird in gegebener Richtung eine gerade Linie von gegebener Länge so gezogen, dass sie in jenem Punkte halbirt ist; welches ist der Ort der Durchschnittspunkte der Linien, die ihre Enden mit denen der Basis verbinden?

Aufg. 9. Von einem Dreiecke ist die Basis und die Bestimmung bekannt, dass seine Seiten eine feste zur Basis parallele Linie AB in den Punkten C, D so schneiden, dass das Verhältniss $AC : BD$ gegeben ist, welches ist der Ort der Spitze?

Aufg. 10. Wenn in einem Dreiecke der Winkel an der Spitze und die Summe der Seiten bekannt sind, den Ort der Punkte zu bestimmen, welche die Basis in einem gegebenen Verhältniss theilen.

Aufg. 11. Zwei feste Punkte A, B , einer in jeder der Achsen, sind gegeben, zwei andere $A'B'$ werden so gewählt, dass

$$OA' + OB' = OA + OB;$$

welchen Ort beschreibt der Durchschnittspunkt der geraden Linien

$$AB', A'B?$$

49. Aufgaben, in welchen zu beweisen ist, dass eine bewegliche gerade Linie durch einen festen Punkt geht.

Wir haben im Artikel 36 gesehen, dass die gerade Linie

$$Ax + By + C + k(A'x + B'y + C') = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(A + kA')x + (B + kB')y + C + kC' = 0,$$

wo k eine unbestimmte Grösse ist, immer durch einen festen Punkt geht, nämlich durch den Punkt, wo die beiden geraden Linien

$$Ax + By + C = 0 \text{ und } A'x + B'y + C' = 0$$

sich schneiden. Wir entnehmen daraus den Satz: Wenn die Gleichung einer geraden Linie eine unbestimmte Grösse im ersten Grade enthält, so geht die gerade Linie immer durch einen festen Punkt.

Aufg. 1. Wenn in einem Dreieck der Winkel an der Spitze und die Summe der reciproken Werthe der Seiten gegeben sind, so geht die Basis immer durch einen festen Punkt.

Aufl. Wenn wir die Seiten zu Achsen wählen, ist die Gleichung der Basis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

und die Bedingung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \text{ oder } \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a}$$

zu erfüllen; daher ist die Gleichung der Basis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} - \frac{y}{a} = 1,$$

in welcher c constant und a unbestimmt ist; schreiben wir dies

$$\frac{1}{a}(x - y) + \frac{y}{c} - 1 = 0,$$

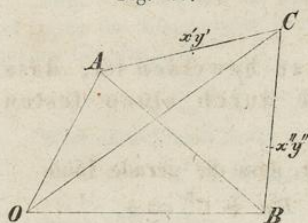
so erkennen wir, dass die Basis stets durch den Durchschnittspunkt der geraden Linien

$$x - y = 0 \text{ und } y = c$$

geht.

Aufg. 2. Die Ecken eines Dreiecks bewegen sich auf drei durch denselben Punkt gehenden festen geraden Linien OA , OB , OC und zwei seiner Seiten gehen durch feste Punkte; es ist zu beweisen, dass auch die dritte Seite durch einen festen Punkt geht.

Fig. 27.



Aufl. Wir wählen die festen geraden Linien OA , OB , in denen die Basisecken sich bewegen, zu Achsen, so dass die Linie OC , welche die Spitze des Dreiecks durchläuft, eine Gleichung von der Form $y = mx$ hat und bezeichnen die Coordinaten der festen Punkte durch $x'y'$, $x''y''$. Sind dann in irgend einer Lage die Coordinaten der Spitze $x = a$ und folglich $y = ma$, so ist die Gleichung von AC

$$(x' - a)y - (y' - ma)x + a(y' - mx') = 0.$$

Ebenso ist die Gleichung von BC

$$(x'' - a)y - (y'' - ma)x + a(y'' - mx'') = 0.$$

Die Länge des von der Linie AC bestimmten Abschnittes OA wird hiernach durch Substitution von $x = 0$ in die Gleichung derselben gefunden, nämlich

$$y = -\frac{a(y' - mx')}{x' - a};$$

ebenso die Länge des Abschnittes OB für $y = 0$ aus der Gleichung von BC

$$x = \frac{a(y'' - mx'')}{y'' - ma}.$$

Daraus ergibt sich die Gleichung von AB

$$x \cdot \frac{y'' - ma}{y'' - mx''} - y \cdot \frac{x' - a}{y' - mx'} = a.$$

Da hierin a unbestimmt ist und nur im ersten Grade vorkommt, so geht diese gerade Linie immer durch einen festen Punkt. Derselbe kann gefunden werden, indem man die Gleichung in der Form

$$\frac{y''}{y'' - mx''} \cdot x - \frac{x'}{y' - mx'} \cdot y - a \left(\frac{mx}{y'' - mx''} - \frac{y}{y' - mx'} + 1 \right) = 0$$

schreibt; er ist der Durchschnittspunkt der zwei geraden Linien

$$\frac{y''}{y'' - mx''} \cdot x - \frac{x'}{y' - mx'} \cdot y = 0$$

und

$$\frac{mx}{y'' - mx''} - \frac{y}{y' - mx'} + 1 = 0.$$

Aufg. 3. Man soll untersuchen, ob in der vorigen Aufgabe unter gewissen Bedingungen die Basis auch dann noch durch einen festen Punkt geht, wenn die gerade Linie, in welcher die Spitze C sich bewegt, den Punkt O nicht enthält.

Aufl. Wir behalten die Achsen und die Bezeichnung bei, mit der einen notwendigen Abweichung, dass die Gleichung der von der Spitze durchlaufenen geraden Linie durch $y = mx + n$ und daher die Coor-

dinaten der Spitze in irgend einer Lage durch a und $ma + n$ ausgedrückt werden. Dann ist die Gleichung von AC

$$(x' - a)y - (y' - ma - n)x + a(y' - mx') - nx' = 0.$$

Die Gleichung von BC ist

$$(x'' - a)y - (y'' - ma - n)x + a(y'' - mx'') - nx'' = 0.$$

Daraus $OA = -\frac{a(y' - mx') - nx'}{x' - a}$; $OB = \frac{a(y'' - mx'') - nx''}{y'' - ma - n}$.

Daher ist die Gleichung von AB

$$x \cdot \frac{y'' - ma - n}{a(y'' - mx'') - nx''} - y \cdot \frac{x' - a}{a(y' - mx') - nx'} = 1.$$

Wenn diese Gleichung von Brüchen befreit wird, so enthält sie im Allgemeinen a im zweiten Grade und die Basis geht daher im Allgemeinen nicht durch einen festen Punkt.

Wenn aber die Punkte $x'y'$, $x''y''$ in einer durch O gehenden geraden Linie

liegen, so dass wir $y'' = kx''$ und $y' = kx'$ substituiren können, so wird die Gleichung

$$x \cdot \frac{y'' - ma - n}{x''} - y \cdot \frac{x' - a}{x'} = a(k - m) - n,$$

welche a nur im ersten Grade enthält und somit eine durch einen festen Punkt gehende gerade Linie bezeichnet.

Aufg. 4. Wenn eine gerade Linie so bestimmt wird, dass die Producte der auf sie von einer Anzahl fester Punkte gefällten Perpendikel mit bestimmten Constanten die Summe Null geben, so geht dieselbe durch einen festen Punkt.

Aufl. Ist die Gleichung der geraden Linie

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

so ist die von $x'y'$ auf sie gefällte Senkrechte von der Länge

$$x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p$$

und die Bedingungen der Aufgabe liefern die Gleichung

$$m'(x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p) + m''(x'' \cos \alpha + y'' \sin \alpha - p) + m'''(x''' \cos \alpha + y''' \sin \alpha - p) + \dots = 0,$$

Unter Benutzung der Bezeichnung $\Sigma(m x')$ für die algebraische Summe der $m x$, d. h. für

$$m'x' + m''x'' + \dots$$

und in gleicher Art $\Sigma(m y')$ für

$$m'y' + m''y'' + \dots$$

$\Sigma(m)$ für

$$m' + m'' + \dots$$

können wir diese Gleichung schreiben

$$\Sigma(m x') \cos \alpha + \Sigma(m y') \sin \alpha - p \Sigma(m) = 0.$$

Und indem wir in die Originalgleichung den hieraus erhaltenen Werth von p substituiren, erhalten wir für die Gleichung der beweglichen geraden Linie

$$x \Sigma(m) \cos \alpha + y \Sigma(m) \sin \alpha - \Sigma(mx') \cos \alpha - \Sigma(my') \sin \alpha = 0$$

oder $x \Sigma(m) - \Sigma(mx') + [y \Sigma(m) - \Sigma(my')] \tan \alpha = 0$.

Da diese Gleichung die unbestimmte Grösse $\tan \alpha$ im ersten Grade enthält, so geht die durch sie ausgedrückte gerade Linie durch den festen Punkt, welchen die Gleichungen

$$x \Sigma(m) - \Sigma(mx') = 0, \quad y \Sigma(m) - \Sigma(my') = 0$$

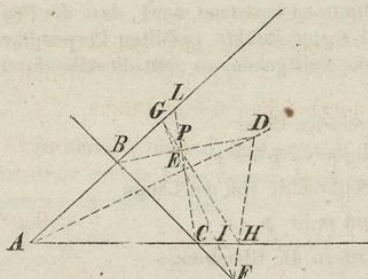
bestimmen, d. h. durch den Punkt

$$x = \frac{m'x' + m''x'' + \dots}{m' + m'' + \dots}, \quad y = \frac{m'y' + m''y'' + \dots}{m' + m'' + \dots}.$$

Dieser Punkt wird oft als das Centrum der mittlern Entfernungen der gegebenen Punkte bezeichnet.

Aufg. 5. Man giebt ein Dreieck ABC und zwei Punkte D, E , welche mit der Ecke A in derselben geraden Linie liegen; man verbindet diese Punkte mit einem beliebigen Punkte F der Gegenseite BC und bemerkt die Durchschnittspunkte G, H dieser Verbindungslinien mit je einer der beiden anliegenden Seiten des Dreiecks. Man soll beweisen,

Fig. 28.



dass die gerade Linie GH für jede Lage des Punktes F in der Geraden BC durch den festen Punkt P geht, in welchem die Linien BD und CE sich schneiden.

Es ist nicht schwer, diess auf dem gewöhnlichen Wege zu beweisen; wir überlassen dies dem Leser und bemerken überdiess, dass der im Art. 38 entwickelte Satz von der Transversale eines Dreiecks zum Beweise dienen kann.

Wenn man die Seite BC in unendlicher Entfernung voraussetzt, so geht der Satz in den folgenden über: Man hat einen Winkel BAC und zwei Punkte D, E , welche mit seinem Scheitel in gerader Linie liegen; wenn man durch diese letzteren zwei parallele Gerade zieht, welche den Schenkeln des Winkels im Punkte G, H begegnen, so geht die gerade Linie GH immer durch denselben Punkt, in welcher Richtung auch die Parallelen gezogen wurden.

Man darf endlich die Punkte A, D, E, B, C, F als Ecken eines zwei geraden Linien eingeschriebenen Sechsecks betrachten und alsdann unsern Satz als einen Specialfall aus dem allgemeinen Theorem über die in Curven zweiten Grades eingeschriebenen Sechsecke betrachten, welches

im Art. 264 gegeben werden wird. Aus demselben ergibt sich, dass die Punkte G , H und P in einer geraden Linie liegen und somit, da P unveränderlich ist, so lange A , B , C , D , E sich nicht ändern, dass die gerade Linie GH sich um einen festen Punkt dreht, während F die Gerade BC durchläuft.

50. Wenn die Gleichung einer geraden Linie die Coordinaten irgend eines Punktes im ersten Grade enthält, sowie

$$(Ax' + By' + C)x + (A'x' + B'y' + C')y + (A''x' + B''y' + C'') = 0,$$

so geht diese gerade Linie immer durch einen festen Punkt, wenn der Punkt $x'y'$ sich auf einer geraden Linie bewegt. Denn wenn der Punkt $x'y'$ stets in einer geraden Linie

$$Lx' + My' + N = 0$$

liegt, so kann mit Hilfe dieser Relation x' aus der gegebenen Gleichung eliminirt werden und die unbestimmte Grösse y' verbleibt im ersten Grade in derselben, die Linie geht also durch einen festen Punkt. Daraus entspringt der Satz: Wenn die Coefficienten in der Gleichung

$$Ax + By + C = 0$$

durch die Relation $aA + bB + cC = 0$

verbunden sind, in welcher a , b , c Constanten sind, indess A , B , C veränderlich gedacht werden, so geht die durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie immer durch einen festen Punkt.

Denn durch Elimination von C zwischen beiden Gleichungen erhalten wir

$$(cx - a)A + (cy - b)B = 0$$

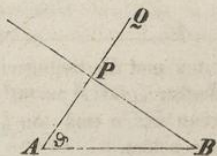
die Gleichung einer durch den Punkt $x = \frac{a}{c}$, $y = \frac{b}{c}$ gehenden geraden Linie.

51. Polar-Coordinaten. Es ist im Allgemeinen nützlich, diese Methode anzuwenden, wenn die Aufgabe verlangt, den Ort der Endpunkte von geraden Linien zu finden, welche nach einem gegebenen Gesetz durch einen festen Punkt gezogen sind.

Aufg. 1. A und B sind zwei feste Punkte; durch B wird eine gerade Linie gezogen und von A ein Perpendikel AP darauf gefällt, und dasselbe so verlängert, dass das Rechteck $AP \cdot AQ$ constant bleibt. Welches ist der Ort des Punktes Q ?

Aufl. Wir nehmen A zum Pol und AB

Fig. 29.



zur festen Achse, so dass AQ der durch q zu bezeichnende Radius vector und der Winkel $QAB = \vartheta$ ist; die Aufgabe fordert, die zwischen q und ϑ bestehende Relation zu finden.

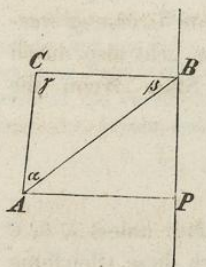
Wir setzen $AB = c$ und haben aus dem rechtwinkligen Dreieck APB $AP = c \cdot \cos \vartheta$; wegen $AP \cdot AQ = \text{const.} = k^2$ ist sodann

$$q c \cos \vartheta = k^2, \text{ oder } q \cos \vartheta = \frac{k^2}{c};$$

wir haben im Art. 44 gesehen, dass dieses die Gleichung einer zu AB senkrechten geraden Linie ist, die in der Entfernung $A = \frac{k^2}{c}$ vom Pol vorbeieht.

Aufg. 2. Von einem Dreieck, dessen Winkel gegeben sind, ist eine der Ecken A fixirt, die zweite B bewegt sich längs einer festen geraden Linie, man soll den Ort der dritten finden.

Fig. 30.



Aufl. Wir nehmen die feste Ecke A zum Pol und das von ihm zur festen Linie gefällte Perpendikel AP zur Achse, so dass $AC = q$, $\angle CAP = \vartheta$.

Da die Winkel des Dreiecks ABC gegeben sind, so ist AB in einem festen Verhältniss zu

$$AC (= m \cdot AC) \text{ und } \angle BAP = \vartheta - \alpha;$$

aber man hat

$$AP = AB \cdot \cos BAP,$$

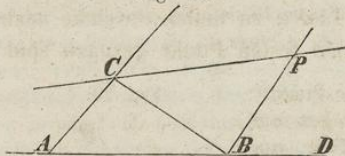
d. h. indem man AP durch a bezeichnet

$$m q \cos (\vartheta - \alpha) = a,$$

welches nach Art. 44 die Gleichung einer geraden Linie ist, die mit der gegebenen einen Winkel α bildet und die Entfernung $\frac{a}{m}$ vom Pol A besitzt.

Aufg. 3. In einem Dreieck ist die Basis und die Summe der Seiten gegeben; in einem Endpunkt der Basis B errichtet man auf der anliegenden Seite BC ein Perpendikel und verlangt, den Ort des Punktes P zu finden, wo dieses von der äusseren Halbierungslinie CP des Winkels an der Spitze getroffen wird.

Fig. 31.



Aufl. Indem wir den Punkt B zum Pol wählen, wird BP der Radius vector q und durch Wahl der verlängerten Basis zur festen Achse wird der Winkel $PBD = \vartheta$, und die Aufgabe verlangt, q durch ϑ auszudrücken. Wir bezeichnen die

Seiten und die Gegenwinkel des Dreiecks durch a, b, c, A, B, C ; dann ist offenbar $\angle BCP = 90^\circ - \frac{1}{2} C$ und aus dem Dreiecke PCB , $a = q \tan \frac{1}{2} C$. Wenn wir a und $\tan \frac{1}{2} C$ durch ϑ ausdrücken können, so ist die Aufgabe gelöst.

Aus dem Dreieck ABC ist

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

hier kann für b , $m - a$ eingesetzt werden, wenn m die gegebene Summe der Seiten bezeichnet und $\cos B$ ist $= \sin \vartheta$; daher

$$m^2 - 2am + a^2 = a^2 + c^2 - 2ac \sin \vartheta,$$

und

$$a = \frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \vartheta)}.$$

Hiernach bleibt nur übrig, einen Ausdruck für $\tan \frac{1}{2} C$ zu finden,

Es ist
$$\tan \frac{1}{2} C = \frac{b \sin C}{b(1 + \cos C)}.$$

Aber $b \sin C = c \sin B = c \cos \vartheta$; $b \cos C = a - c \cos B = a - c \sin \vartheta$;

also
$$\tan \frac{1}{2} C = \frac{c \cos \vartheta}{m - c \sin \vartheta}.$$

Darnach können wir q durch ϑ ausdrücken; denn indem wir die oben für a und $\tan \frac{1}{2} C$ erhaltenen Werthe in die Gleichung $a = q \tan \frac{1}{2} C$ einsetzen, erhalten wir

$$\frac{m^2 - c^2}{2(m - c \sin \vartheta)} = \frac{q c \cos \vartheta}{(m - c \sin \vartheta)}, \text{ oder } q \cos \vartheta = \frac{m^2 - c^2}{2c}.$$

Der Ort ist demnach eine zur Basis des Dreiecks senkrechte Linie, in dem Abstände $\frac{m^2 - c^2}{2c}$ vom Punkte B .

Der Leser kann zu eigener Uebung den Ort untersuchen, welcher bei gegebener Differenz der Seiten durch die innere Halbierungslinie des Winkels an der Spitze bestimmt wird.

Aufg. 4. Gegeben sind n feste gerade Linien und ein fester Punkt O ; wenn man durch diesen irgend einen Radius vector zieht, der diese geraden Linien in Punkten $r_1, r_2, r_3, \dots r_n$ schneidet, und in ihm einen Punkt R so bestimmt, dass

$$\frac{n}{Or} = \frac{1}{Or_1} + \frac{1}{Or_2} + \frac{1}{Or_3} + \dots + \frac{1}{Or_n},$$

so soll man den Ort von R bestimmen.

Aufl. Wenn die Gleichungen der geraden Linien durch $q \cos (\vartheta - \alpha) = p_1$, $q \cos (\vartheta - \beta) = p_2$, $q \cos (\vartheta - \gamma) = p_3$ usw. dargestellt werden, so ist die Gleichung des Ortes offenbar

$$\frac{n}{q} = \frac{\cos (\vartheta - \alpha)}{p_1} + \frac{\cos (\vartheta - \beta)}{p_2} + \frac{\cos (\vartheta - \gamma)}{p_3} + \dots$$

nach Art. 44 die Gleichung einer geraden Linie. Der hierin enthaltene Satz ist nur ein specieller Fall eines weit allgemeineren, welchen wir später beweisen werden.