

**www.e-rara.ch**

## **Das Messen auf der Sphäroidischen Erdoberfläche**

**Baeyer, Johann Jacob**

**Berlin, 1862**

**ETH-Bibliothek Zürich**

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-112695>

Vierter Abschnitt. Die astronomisch geodätischen Operationen.

---

### **www.e-rara.ch**

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

---

**Nutzungsbedingungen** Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

**Terms of Use** This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

**Conditions d'utilisation** Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

**Condizioni di utilizzo** Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

## Vierter Abschnitt.

### Die astronomisch geodätischen Operationen.

§. 25. Bestimmung der Excentricität und Abplattung für jede Polarcoordinate.

In §. 8 haben wir für eine kürzeste Linie auf einer durch Rotation entstandenen Oberfläche folgende Gleichung gefunden

$$r \sin \alpha = r' \sin \alpha'.$$

Uebertragen wir dieselbe auf das Rotationssphäroid, wo  $r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - ee \sin^2 \varphi}}$  ist, so finden wir

$$\frac{\cos \varphi \sin \alpha}{\sqrt{1 - ee \sin^2 \varphi}} = \frac{\cos \varphi' \sin \alpha'}{\sqrt{1 - ee \sin^2 \varphi'}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\sqrt{1 - ee \sin^2 \varphi'}}{\sqrt{1 - ee \sin^2 \varphi}} = \frac{\cos \varphi' \sin \alpha'}{\cos \varphi \sin \alpha}.$$

Setzen wir  $\frac{\cos \varphi' \sin \alpha'}{\cos \varphi \sin \alpha} = \cos K$  und erheben zum Quadrat, so erhalten wir

$$\frac{1 - ee \sin^2 \varphi'}{1 - ee \sin^2 \varphi} = \cos^2 K$$

und hieraus folgt

$$ee = \frac{\sin^2 K}{\sin^2 \varphi' - \cos^2 K \sin^2 \varphi} = \frac{\sin^2 K}{\sin^2 \varphi' \sin^2 G},$$

wenn  $\frac{\cos K \sin \varphi}{\sin \varphi'} = \cos G$  gesetzt wird.

Nun ist  $ee = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ , daher

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - ee \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - ee},$$

wir erhalten also die Abplattung

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{1 - ee}.$$

Man erkennt leicht, dass jede andere Polarcoordinate eine neue Bestimmung der Excentricität und der Abplattung liefert, und dass alle diese Bestimmungen nur dann



einander gleich sein könnten, wenn die Oberfläche der Erde einem richtigen Rotationsellipsoid angehörte und wenn ausserdem sämtliche Beobachtungen völlig fehlerfrei wären.

Da weder das Eine noch das Andere zutrifft, so müssen wir nothwendig mehr oder weniger abweichende Resultate erhalten, aus denen sich vorläufig beurtheilen lassen wird, ob die gefundenen Abweichungen augenscheinlich über die Grenzen der Beobachtungsfehler der gemessenen Polhöhen und Azimuthe hinausgehen oder nicht. Wenn sich hierauf auch noch kein weiterer Schluss sicher begründen lässt, so werden wir doch dadurch auf diejenigen Punkte aufmerksam gemacht, an welchen wir Abweichungen der Lothlinien vermuthen können.

Unsere nächste Aufgabe wird nun darin bestehen, aus allen gefundenen Abplattungen, mit Ausschluss grösserer Abweichungen, dasjenige Rotationssphäroid zu suchen, dessen Abplattung all' den verschiedenen Abplattungen, die wir gefunden haben, am nächsten kommt. Diese Aufgabe soll im folgenden Paragraphen behandelt werden.

§. 26. Bildung und Ausgleichung des astronomisch geodätischen Netzes der Polarcoordinaten.

Das astronomisch geodätische Dreiecksnetz wird durch die sämtlichen Sternwarten und astronomisch bestimmten Punkte gebildet, welche durch Polarcoordinaten mit einander in Verbindung gebracht wurden; es ist ein sphäroidisches Dreiecksnetz im grösseren Maassstabe, dessen Genauigkeit nicht von horizontalen Winkelmessungen allein, sondern vorzugsweise von den Polhöhen- und Azimuthal-Bestimmungen abhängig ist.

So wie ein gewöhnliches Dreiecksnetz gewisse Bedingungen zu erfüllen hat, um mathematisch möglich zu werden, wie z. B. die, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks  $= 180^\circ + \epsilon$  sein muss, und dass in einem Polygon die Rechnung von einer Seite aus, durch das ganze Polygon herum bis wieder zu derselben Seite zurück, für diese ein und dasselbe Resultat geben muss, eben so hat auch das astronomisch geodätische Netz gewisse Bedingungen zu erfüllen, damit es auf der mathematischen Oberfläche, auf die wir es beziehen, ohne Widerspruch möglich werde. So lange wie diese Bedingungen nicht erfüllt sind, können wir eben so wenig sichere Schlüsse auf die Krümmungsverhältnisse der Oberfläche machen, wie wir aus einer nicht ausgeglichenen Dreieckskette Entfernungen und Winkel mit Zuverlässigkeit ableiten können. Erst die Untersuchung über die Fehler einer Messoperation verschafft uns ein Urtheil über die mehr oder mindere Zuverlässigkeit der daraus gezogenen Resultate.



Die Wahrscheinlichkeitsrechnung setzt allerdings nur zufällige Fehlerursachen voraus und ist nicht Herr über constante Fehler oder andere Abweichungen, die ihren Grund ausserhalb unserer Messoperationen haben mögen, allein die wahrscheinlichen Fehler der Messoperationen geben einen annähernd richtigen Maassstab für die Grenzen, über welche die begangenen Fehler nicht wohl hinausgehen können. Wenn wir daher auf Abweichungen stossen, welche augenscheinlich diese Grenzen überschreiten, so werden wir berechtigt sein, sie fremdartigen Ursachen zuschreiben zu dürfen.

Obgleich also die Wahrscheinlichkeitsrechnung uns in Bezug auf locale Abweichungen in der Krümmung der Erdoberfläche keinen directen Aufschluss geben kann, so bietet sie uns doch, nach dem Gesagten, die Mittel dar, diejenigen Abweichungen kennen zu lernen, welche, wie früher schon erwähnt, die Fehlergrenze unserer Messoperationen überschreiten, und damit müssen wir uns vorläufig und so lange begnügen, bis es gelingt, andere Mittel und Wege zu entdecken, die zu einem unmittelbaren Erkennen und Bestimmen führen.

Ob jetzt schon diejenigen Punkte, welche Abweichungen zeigen, nach Bessels Formeln über die Unregelmässigkeiten in der Krümmung der Erdoberfläche (Astron. Nachr. N<sup>o</sup>. 329, 330 und 331) behandelt werden können, muss späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben; zunächst wird es darauf ankommen, diese Punkte kennen zu lernen, und das Netz der Polarcoordinaten so auszugleichen, dass die Lage seiner Punkte auf der Oberfläche eines Rotationssphäroids keinen Widerspruch enthalte.

Die Bedingung der kürzesten Linie auf einer durch Rotation entstandenen Oberfläche ist nach §. 8

$$-r \sin \alpha = r' \sin \alpha',$$

wo  $r$  und  $r'$  die Abstände der Endpunkte dieser Linien von der Drehungsaxe und  $\alpha$  und  $\alpha'$  die von Nord über Ost von 0 bis 360<sup>o</sup> gezählten Azimuthe in diesen Punkten sind. Jede Polarcoordinate liefert eine solche Gleichung; jedes Dreieck liefert drei; jede Figur überhaupt so viel Gleichungen als Seiten, Radien oder Diagonalen darin vorkommen.

In Bezug auf das Rotationssphäroid haben wir nun

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e e \sin^2 \varphi}} = n \cos \varphi,$$

$$r' = \frac{a \cos \varphi'}{\sqrt{1 - e e \sin^2 \varphi'}} = n' \cos \varphi',$$

wo  $\varphi$  und  $\varphi'$  die Polhöhen,  $n$  und  $n'$  die Normalen sind. Für diese Werthe geht unsere Bedingungsgleichung zunächst über in

$$\frac{a \cos \varphi \sin \alpha}{\sqrt{1 - e e \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cos \varphi' \sin \alpha'}{\sqrt{1 - e e \sin^2 \varphi'}}.$$



Setzen wir jetzt die beobachteten Polhöhen und Azimuthe in diese Gleichung, so wird sie, der Beobachtungsfehler wegen, nicht vollständig erfüllt werden. Die beobachteten Grössen bedürfen daher der Verbesserungen, die nach den Forderungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung so bestimmt werden müssen, dass die übrigbleibenden Fehler ein Minimum werden.

Die strenge Durchführung der allgemeinen Behandlung dieser Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate würde ziemlich verwickelt werden, allein zur Vergleichung mit dem Besselschen Sphäroid, wenn die Beobachtungen näherungsweise mit demselben übereinstimmen, können wir, ohne einen sehr erheblichen Fehler zu begehen, ihnen eine viel einfachere Form geben, wenn wir die Normalen einführen. Eine kleine Aenderung von  $\varphi$  und  $\varphi'$  hat auf die Wurzelgrössen im Nenner fast gar keinen Einfluss. Nach Encke's Tafeln, im Jahrbuch für 1852, beträgt die durchschnittliche Aenderung der Normalen zwischen  $38^{\circ}$  und  $65^{\circ}$  Breite, für eine Aenderung der Polhöhe um eine Minute, nur 4 Einheiten in der siebenten Stelle der Logarithmen, woraus hervorgeht, dass der Einfluss der bei den Polhöhen zulässigen Beobachtungsfehler die Logarithmen der Normalen nicht mehr in der siebenten Decimalstelle abändern kann, und da es ohne allen Nutzen sein würde, hier mit mehr als 7 Decimalstellen zu rechnen, so können wir die Normalen als constant ansehen. Unsere Bedingungsgleichung nimmt alsdann folgende ganz einfache Form an

$$n \cos \varphi \sin \alpha = n' \cos \varphi' \sin \alpha' \quad \text{oder}$$

$$1 = \frac{n' \cos \varphi' \sin \alpha'}{n \cos \varphi \sin \alpha}.$$

Bezeichnen wir nun die Aenderungen in Secunden mit  $\Delta\varphi'$ ,  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta\alpha'$ ,  $\Delta\alpha$ , so geht diese Gleichung über in

$$1 = \frac{n' \cos(\varphi' + \Delta\varphi') \sin(\alpha' + \Delta\alpha')}{n \cos(\varphi + \Delta\varphi) \sin(\alpha + \Delta\alpha)}$$

und wenn wir die Logarithmen nehmen, so ist  $\log \cos(\varphi' + \Delta\varphi') = \log \cos \varphi' - m' \Delta\varphi'$ , wo  $m'$  die logarithmische Differenz der Tafel für eine Secunde ist. Eben so ist auch  $\log \sin(\alpha' + \Delta\alpha') = \log \sin \alpha' + p' \Delta\alpha'$ . Unsere Gleichung wird daher

$$0 = \log n' + \log \cos \varphi' + \log \sin \alpha' - m' \Delta\varphi' + p' \Delta\alpha' - \log n - \log \cos \varphi - \log \sin \alpha + m \Delta\varphi - p \Delta\alpha,$$

und wenn wir  $\log \frac{n' \cos \varphi' \sin \alpha'}{n \cos \varphi \sin \alpha} = q$  schreiben

$$0 = q - m' \Delta\varphi' + p' \Delta\alpha' + m \Delta\varphi - p \Delta\alpha.$$

Bei der Formation dieser Gleichungen kommen uns die Enckeschen Tafeln sehr zu statten.



Jede Polarcoordinate liefert eine solche Gleichung.

Wenn alle Gleichungen formirt und zusammengestellt sind, so müssen sie nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst und die unbekannten Verbesserungen der Polhöhen und Azimuthe bestimmt werden. Fügt man dann die gefundenen Verbesserungen den beobachteten Grössen hinzu, so erfüllen alle Punkte, auf welche die Ausgleichung sich erstreckt, die Bedingung, dass sie auf der Oberfläche des Besselschen Rotationssphäroids liegen. Dasselbe Verfahren kann man auch anwenden, wenn eine Anzahl Punkte irgend einem anderen Sphäroid näherungsweise entsprechen. Man sucht dann die mittlere Excentricität und bestimmt damit den Quotienten

$$\frac{n}{n'} = \frac{\sqrt{1 - ee \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - ee \sin^2 \varphi'}}.$$

§. 27. Uebersicht der gewonnenen Resultate.

Wenn die einzelnen Polarcoordinate des astronomisch-geodätischen Netzes auf die Kugel übertragen sind, so können wir grösstentheils durch rein sphärische Rechnung folgende Resultate finden:

1. Den sphärischen Längenunterschied  $\omega$ , nach einer der Formeln unter Gleichung 57., der dann nach der Besselschen Tafel in den sphäroidischen Längenunterschied  $w$  verwandelt werden kann.
2. Den sphärischen Abstand der Parallelen nach §. 13, derselbe muss der Secundenzahl nach dem Unterschied der reducirten Breiten gleich sein; ist dies nicht der Fall, so entspricht der zu Grunde gelegte Radius  $a$  auch nicht der gemessenen Entfernung und muss so abgeändert werden, dass der Abstand der Parallelen in Secunden dem Unterschied der reducirten Breiten gleich wird.
3. Den Radius des Parallelkreises, der für Sphäre und Sphäroid gleich ist, nach Gleichung 64. und daraus die Länge eines Längengrades in Toisen, oder auch die Länge des Parallelbogens für den Längenunterschied  $w$ .
4. Kann man je zwei beliebige Punkte des Netzes, mit Hülfe ihrer Polhöhen und ihres sphäroidischen Längenunterschiedes, durch die Gleichung des verticalen Schnittes §. 7 mit einander verbinden und für dieselben die unter 1, 2, 3 aufgeführten Grössen bestimmen.
5. Aus den einzelnen sphärischen Bögen, die aber zusammen kein sphärisches Netz bilden, kann das sphäroidische dadurch wieder hergestellt werden, dass man alle  $\sigma$  in  $s$  verwandelt, Gleichung 51., und alle  $u$  in  $\varphi$ .
6. Nach §. 22 erhält man  $ee$  das Quadrat der Excentricität der Meridianellipse an jedem Punkt des Netzes und nach Gleichung 10. die Quadrate der Ex-



centricitäten  $\varepsilon\varepsilon$  aller unter einem beliebigen Azimuth von diesem Punkt ausgehenden verticalen Schnittellipsen, wenn man die Azimuthe der geodätischen Linien  $\alpha$  in die der verticalen Schnitte nach §. 17 verwandelt, nämlich

$$\varepsilon\varepsilon = \frac{ee(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 v)}{1 - ee \cos^2 \varphi \sin^2 v}.$$

7. Für jeden verticalen Schnitt unter dem Azimuth  $v'$  hat man nach Gleichung 7.

$$\operatorname{tg} \lambda' = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\cos v'}.$$

Das  $\lambda$  des Endpunktes findet man nach §. 16, die Excentricität nach der vorigen Nummer. Setzt man diese Grössen in die Gleichung 34., so findet man  $a'$ , die halbe grosse Axe der Schnittellipse, und den zugehörigen Krümmungsradius nach §. 4

$$R = \frac{a'(1 - \varepsilon\varepsilon)}{(1 - \varepsilon\varepsilon \sin^2 \lambda')^{\frac{3}{2}}}.$$

8. Setzt man den in 2. gefundenen sphäroidischen Abstand der Parallelen zwischen den Polhöhen  $\varphi'$  und  $\varphi$ , und die in 6. gefundene Excentricität  $e$  in die Gleichung 32. §. 6, so findet man die halbe grosse Axe  $a$  und den ersten Hauptkrümmungsradius im Meridian

$$\varrho = \frac{a(1 - ee)}{(1 - ee \sin^2 \varphi')^{\frac{3}{2}}}.$$

9. Den zweiten Hauptkrümmungsradius senkrecht auf den Meridian findet man, wie folgt:

Die Gleichung des verticalen Schnittes §. 7, Gleichung 37. geht für das Azimuth  $v' = 90^\circ$  über in

$$\sin \varphi' \cos w \cos \varphi - (1 - ee) \cos \varphi' \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - ee \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - ee \sin^2 \varphi'}} ee \sin \varphi' \cos \varphi'.$$

Ist die Polhöhe eines Punktes  $\varphi'$  und der Längenunterschied  $w$  eines anderen Meridians bekannt, so finden wir aus dieser Gleichung die Polhöhe  $\varphi$ , unter welcher der auf den Meridian von  $\varphi'$  senkrechte Schnitt den anderen Meridian schneidet, sehr leicht, wenn wir die Wurzelgrösse, die nur wenig von 1 verschieden ist, zunächst  $= 1$  annehmen. Wir erhalten dann

$$\operatorname{tg} \varphi' \cos w \cos \varphi - (1 - ee) \sin \varphi = ee \sin \varphi'$$

und wenn  $\frac{\operatorname{tg} \varphi' \cos w}{1 - ee} = \operatorname{tg} \psi$  gesetzt wird, so folgt

$$\sin(\psi - \varphi) = \frac{ee \sin \varphi' \cos \psi}{1 - ee}.$$



Führt man den hieraus hervorgehenden ersten Näherungswerth von  $\varphi$  in die Wurzelgrösse ein, so findet man

$$\frac{\sqrt{1-ee\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-ee\sin^2\varphi'}} = N$$

und damit den zweiten Näherungswerth von  $\varphi$  durch die Gleichung

$$\sin(\psi-\varphi) = \frac{ee\sin\varphi'\cos\psi N}{1-ee}.$$

Giebt der neue Werth von  $\varphi$ , abermals in die Wurzelgrösse gesetzt, einen von  $N$  verschiedenen Werth, so muss der dritte Näherungswerth von  $\varphi$  gesucht werden.

Die Bogenlänge der Schnittcurve wird aus den Polarcoordinaten berechnet.

Ferner haben wir nach Gleichung 7.

$$\operatorname{tg}\lambda' = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\cos\psi'} = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{0} = \infty, \text{ daher } \lambda' = 90^\circ;$$

$\lambda$ , am Endpunkt des Bogens, wird nach §. 16 gefunden.  $\varepsilon\varepsilon$  ist  $= \frac{ee\sin^2\varphi'}{1-ee\cos^2\varphi'}$ , weil  $\sin\psi' = 1$ . Setzen wir diese Werthe in die Gleichung 34., so erhalten wir  $a'$ , die halbe grosse Axe der Schnittellipse.

Der allgemeine Ausdruck des Krümmungsradius  $R = \frac{a'(1-\varepsilon\varepsilon)}{(1-\varepsilon\varepsilon\sin^2\lambda')^{\frac{3}{2}}}$  (§. 4)

wird, da  $\lambda' = 90^\circ$  ist,  $= \frac{a'}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}}$  und dies ist der Ausdruck für den zweiten Hauptkrümmungsradius senkrecht auf den Meridian.

Um denselben durch die Elemente der Meridianellipse auszudrücken, finden wir nach Gleichung 8. und für ein Azimuth  $= 90^\circ$

$$a' = \frac{a\sqrt{1-ee}}{\sqrt{1-ee\sin^2\varphi'} \cdot \sqrt{1-ee\cos^2\varphi'}}.$$

Der Werth, den wir vorhin für  $\varepsilon\varepsilon$  gefunden hatten, giebt

$$\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon} = \frac{\sqrt{1-ee}}{\sqrt{1-ee\cos^2\varphi'}},$$

daraus folgt

$$R = \frac{a'}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon}} = \frac{a}{\sqrt{1-ee\sin^2\varphi'}},$$

d. h. gleich der Normale unter der Polhöhe  $\varphi'$ .

10. Nach §. 25 findet man für jede Polarcoordinate die Excentricität; nach N°. 2 oder nach N°. 8 und 9 die halbe grosse Axe und die beiden Hauptkrümmungs-



radien. — Eine kürzeste Linie nebst den Polhöhen und Azimuthen an ihren Endpunkten, wenn sie nicht im Meridian liegt, reicht daher zur Bestimmung der Dimensionen des Rotationssphäroids vollständig aus. —

11. Auf jedem Punkt des astronomisch-geodätischen Netzes kann der grösste und kleinste Krümmungshalbmesser bestimmt werden.
  12. Den verticalen Schnitt unter dem Azimuth  $v$ , also auch den für  $v = 90^\circ$ , können wir beliebig verlängern, und für alle Durchschnitte mit den Meridianen der übrigen Punkte, deren Längenunterschiede  $w, w', w'' \dots$  bekannt sind, die Polhöhen  $\varphi, \varphi', \varphi'' \dots$  und die Winkel  $\lambda, \lambda', \lambda'' \dots$  bestimmen. Die Bogenstücke der Schnittellipse zwischen den einzelnen Meridianen können aus den Polarcoordinaten ganz eben so berechnet werden, wie diese aus den Triangulationen berechnet wurden. Auf diese Weise können wir in jedem Schnitt mehrere Gleichungen von der Form der Gleichung 34. bilden, in denen alle Grössen bis auf  $a'$  und  $\varepsilon\varepsilon$  bekannt sind. Aus je zwei dieser Gleichungen kann  $a'$  und  $\varepsilon\varepsilon$  bestimmt werden, aus denen sich dann  $a$  und  $ee$  ergeben. Wir können also unter jedem Azimuth  $v$  eine Gradmessung ganz analog, wie im Meridian, ausführen.
-