www.e-rara.ch

# Philosophiae naturalis principia mathematica

Newton, Isaac

Genevae, 1739-1742

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 1325

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-13513

[Tomus tertius.]

**www.e-rara.ch**
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

**Nutzungsbedingungen** Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

**Terms of Use** This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

**Conditions d'utilisation** Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

**Condizioni di utilizzo** Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

Rar 1325





M. Knapp.

M. Knapp.

# PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, Eq. Aurato,

*Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio*

PP. Thomæ Le Seur & Francisci Jacquier

*Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,*

*Matheseos Professorum.*

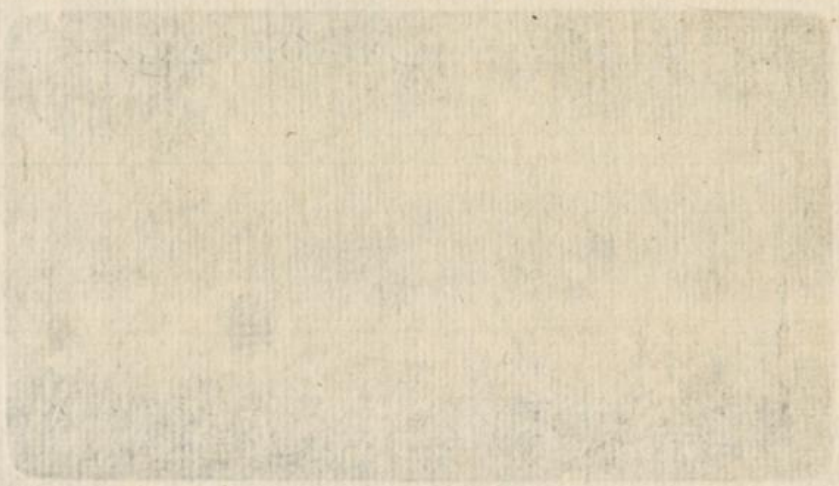
TOMI TERTII PARS I.



GENEVÆ,

Typis Barrillot & Filii Bibliop. & Typogr.

MDCCXLII.



SERENISSIMO PRINCIPI

# ARMANDO GASTONI DE ROHAN DE SOUBISE

S. R. E. CARDINALI AMPLISSIMO

EPISCOPO & PRINCIPI ARGENTINO

&c. &c. &c.

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC

CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

*Thomas* LE SEUR *& Franciscus* JACQUIER,

# MONITUM.

PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Libros tres totidem voluminibus complecti meditabamur, idque jam in alterâ operis noſtri parte fueramus polliciti. Cur tertium Newtoni Librum in duas dividamus partes datamque fidem non liberemus, in causâ ſunt præclara de fluxu & refluxu maris opera quæ anno 1740. à Celeberrimâ Pariſienſi Academiâ præmio fuere condecorata. Tot & tam eximia in hiſce operibus continentur quæ non ad fluxum refluxumque maris duntaxat, ſed etiam ad generales attractionis leges univerſamque Aſtronomiam referuntur ut Clariſſ. Vir D. J. L. CALANDRINUS cujus conſilia impensè veneramur, nos optimè facturos judicaverit, ſi prædicta opuſcula iis adjungeremus propoſitionibus quas de fluxu & refluxu maris habet Newtonus; quod quidem commodè fieri non poterat, niſi tertium librum in duas partes divideremus. Quamvis eam religiosè ſervemus legem, ſinè quâ honeſtus ſcriptor nemo eſſe poteſt, ut ſcilicet nihil inſigne ex aliquo Autore in uſum noſtrum convertamus quin ei quod ſuum eſt, dùm locus occurrit, tribuatur, ſpecialem nihilominùs grati animi ſignificationem profiteri volumus Clariſſimis omnique lau-

laude noſtrâ majoribus Viris DD. Caſſini, De Mairan, De Maupertuis, quorum præclaris inventis plurimùm debent hæc noſtra Commentaria. Sed tanta ſunt in univerſum hocce noſtrum opus prælaudati Clariſſ. D. J. L. CALENDRINI beneficia, ut huic Doctiſſimo Viro pares meritis gratias referre non poſſimus.

Jam ſub prælo eſt altera & ultima commentariorum noſtrorum pars; quia verò nullus eſt tam mediocris ingenii, quem uſus & exercitatio non edoceant, hinc factum eſt ut aliqua nobis in mentem venerint quæ brevi collecta appendice ſimul cum reliquâ tertii Libri parte juſti voluminis molem component.

Datum Romæ
in Conᵗᵘ. SSᵃ. Trinitatis
Anno 1742.

PP. LE SEUR ET JACQUIER

# DECLARATIO.

NEWTONUS in hoc tertio Libro telluris motæ hypotheſim aſſumit. Autoris propoſitiones aliter explicari non poterant, niſi eâdem quoquè factâ hypotheſi. Hinc alienam coacti ſumus gerere perſonam. Cæterum latis à ſummis Pontificibus contrà telluris motum Decretis nos obſequi profitemur.

EDI-

# EDITORIS MONITUM.

*INtelleximus quoſdam malignè interpretari notulas quas adjecimus Commentariis* PP. LE SEUR & JACQUIER, *quaſi ſæpius Newtoni mentem non attigiſſent ; ne autem ipſis vitio vertatur quod conceſſerunt ob ipſorum abſentiam ab urbe in quâ liber edebatur , ut nempe quæcumque viderentur corrigenda ab Editore ipſo mutarentur ſive levia ſive gravia forent, monendum puto me Autorum diligentiam & Doctrinam nuſquam deſideraſſe, correctiones quas feci leviſſimi eſſe momenti , nec eſſe tales ut propter ipſas quidquam ex debitâ Autoribus gloriâ tollatur quod meæ opellæ tribuatur , & aſteriſco notatas fuiſſe , non quod aliquid laudis exinde ſperaverim, ſed quia ſi illic aliquid vitii irrepſerit æquum eſt ut in Editorem non in Autores ea culpa transferatur; Ne ſimilibus cavillationibus occaſio in poſterum detur , tales diſtinctionis notulæ non adhibebuntur in II^a^ hujus Voluminis parte , in quâ ſperamus calculos Newtonianos circa Lunam potiſſimum ſatis intricatos , in apertam lucem expoſitum iri.*

IN-

# INTRODUCTIO AD TERTIUM LIBRUM.

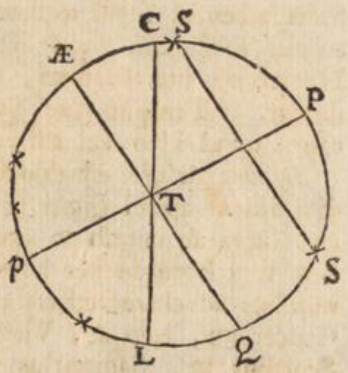
*Phil. Natural.* JS. NEWTONI.

## CAPUT PRIMUM.

*Quale oculo nudo appareat mundi ſyſtema paucis exponitur, & prima Aſtronomiæ Elementa breviter revocantur.*

1. FIGURA telluris eſt propemodùm ſphærica, & ideò gravium directio (ut pote quæ aquarum ſtagnantium ſuperficiei perpendicularis eſt) ad centrum terræ tendit quam proximè. Patet per Eclipſes Lunares in quibus umbra terreſtris, in quamcumque cœli plagam vergat, eſt ſemper ad ſenſum circularis.

2. Spectatori terreſtri cælum apparet tanquam ſuperficies ſphærica concava, ſtellis plurimis diſtincta, cujus ipſe ſpectator centrum occupat, quæque circà puncta fixa ceù cardines ab ortu ad occaſum æquabiliter convertitur, & 24 circiter horis integram revolutionem abſolvit. Puncta illa oppoſita P & p circà quæ rotari videtur ſphæra, *Poli* mundi dicuntur, quorum is qui nobis conſpicuus eſt, ut P, arcticus vel borealis dicitur, ipſi verò oppoſitus p antarcticus ſeu auſtralis appellatur. Recta linea P p utrumque polum connectens *Axis mundi* vocatur.

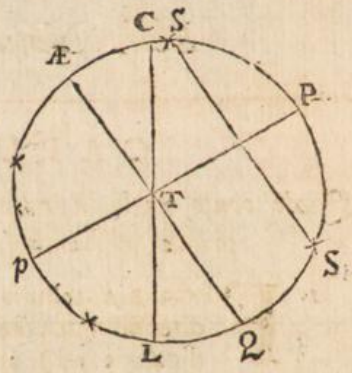



*Æquator* ſivè *æquinoctialis* eſt circulus ſphæræ cæleſtis maximus cujus poli iidem ſunt cum polis mundi; proindéque ſphæram mundanam dividit in duo hemiſphæria, Boreale Æ P Q, in quo eſt polus borealis P, & auſtrale Æ p Q, in quo eſt polus auſtralis p.

3. Stellæ ſingulæ, ut S, in circulis S s æquatori Æ Q parallelis, communi ſphæræ cæleſtis motu revolvi quotidie videntur. *Fixæ* nominan-

tur quæ eandem inter ſeſe diſtantiam perpetuò ſervant; *Erraticæ* verò ſeu *Planetæ* vocantur quæ diſtantias ſuas à fixis in dies mutant & motu proprio ferri conſpiciuntur. Planetæ ſunt ſeptem ſuis propriis ſignis notati, videlicet Sol ☉, Luna ☽, Mercurius ☿, Venus ♀, Mars ♂, Jupiter ♃ & Saturnus ♄; Terræ verò ſignum eſt hoc ♁.

4. *Ecliptica* eſt circulus ſphæræ maximus quem centrum ſolis motu proprio ab occaſu ad ortum ſingulis annis deſcribere videtur. Hic circulus Æquatorem obliquè interſecat ſub angulo inclinationis Æ T C, graduum $23\frac{1}{2}$ circiter. Puncta duo oppoſita in quibus æquator & ecliptica ſeſe mutuò ſecant, *Æquinoctialia* dicuntur quod ſole in iis poſito dies ubique terrarum nocti æqualis ſit, & indè tempus quo Sol punctum alterutrum æquinoctiale attingit, vocatur æquinoctium. Punctum æquinoctiale vernale eſt undè Sol motu proprio versùs polum borealem aſcendit in Eclipticâ, autumnale verò undè Sol versùs polum auſtralem deſcendit, ideóque æquinoctium eſt vernale vel autumnale.




Puncta *Solſtitialia* ſunt Eclipticæ puncta duo oppoſita quæ à punctis æquinoctialibus toto circuli quadrante diſtant, quæque proindè maximè recedunt ab æquatore & in quibus aſcenſus Solis ſuprà æquatorem & deſcenſus infrà eundem terminatur. Horum punctorum prius æſtivum appellatur quo nimirum terminatur Solis aſcenſus ſuprà æquatorem; poſterius brumale vel hybernum. Dicuntur ſolſtitialia quod ſole in iis verſante, per aliquot dies ex eodem Horizontis puncto oriri, & é regione, in eodem puncto occidere videatur. Tempus quo Sol puncta ſolſtitialia ingreditur vocatur Solſtitium, quod ideò vel æſtivum vel brumale eſt.

*Signum cæleſte* eſt duodecima pars eclipticæ & in 30 gradus rurſus dividitur. Primi Signi principium eſt in puncto æquinoctiali vernali à quo ſigna ab occaſu in ortum juxtà motum proprium Solis numerantur. Sex ſunt borealia per borealem eclipticæ partem diſtributa, hiſque nominibus ac characteribus deſignata: Aries ♈, Taurus ♉, Gemini ♊, Cancer ♋, Leo ♌, Virgo ♍. Sex etiam auſtralia videlicet Libra ♎, Scorpius ♏, Sagittarius ♐, Capricornus ♑ vel ♑, Aquarius ♒, Piſces ♓. Aries, Taurus ac Gemini quæ inter punctum æquinoctiale vernum & punctum ſolſtitiale æſtivum continentur dicuntur ſigna vernalia; Cancer, Leo, Virgo à ſolſtitiali æſtivo ad æquinoctiale autumnale numerata appellantur æſtiva; Libra, Scorpius & Sagittarius autumnalia;

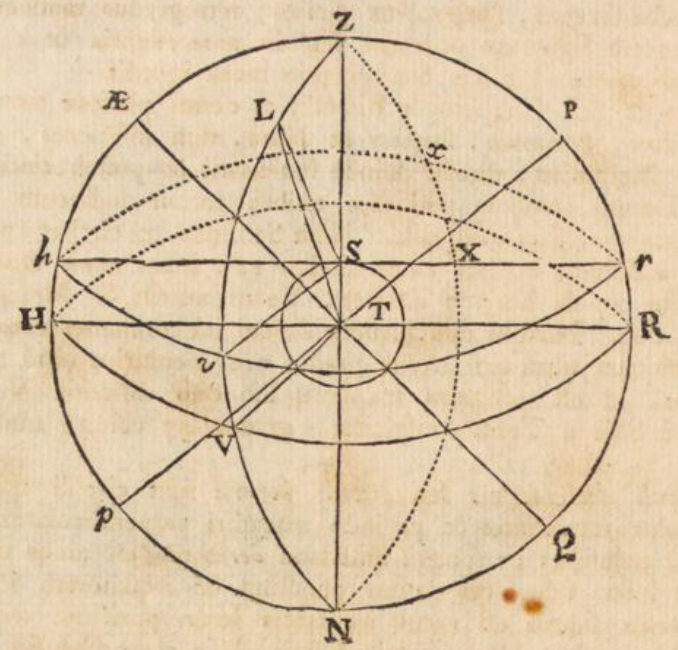
lia; Capricornus, Aquarius & Piſces, hyberna. Signa aſcendentia à puncto ſolſtitiali hyberno ad æſtivum, deſcendentia verò à ſolſtitiali æſtivo ad hybernum computantur.

5. *Zodiacus* eſt ſphæræ cæleſtis portio ſeu zona duobus circulis Ecliptícæ parallelis & gradibus 8 vel 9 hinc indè ab Eclipticâ diſtantibus terminata, ſub quâ planetæ omnes motus ſuos abſolvunt. Dum planeta ab occaſu in ortum ſeu ſecundum ordinem ſignorum, aut quod idem ſonat, in ſigna conſequentia nimirùm ab ariete ad taurum, à tauro ad geminos &c., motu proprio fertur, ille planeta tunc temporis directus vocatur; cum ipſius motus proprius ceſſare videtur, ſeu dum planeta in eodem cœli puncto morari per aliquot dies cernitur, eumdem ſitum fixarum reſpectu ſervans, ſtationarius dicitur; retrogradus tandem appellatur ubi contrà ſignorum ordinem ſeu in antecedentia ut à tauro ad arietem, ab ariete ad piſces &c. proprio motu incedit.

6. Luna & Sol ſunt ſemper directi; at cæteri planetæ tum ſuperiores, videlicet, Saturnus, Jupiter & Mars, tum inferiores, nimirum, Venus & Mercurius, directi deindè ſtationarii & poſteà retrogradi videntur. Eorum tempora periodica quibus totum zodiacum in conſequentia peragrant, ſunt inæqualia. Nam Saturnus 30 circiter annis periodum ſuam abſolvit; Jupiter annis circiter 12, Mars annis duobus ferè, Luna diebus 27 & horis 7 circiter, Venus autem & Mercurius cum Sole anno uno. Nam hi duo planetæ Solem ità conſtanter comitantur ut Venus nunquam ultrà 47 circiter gradus nec Mercurius ultrà 28 à Sole digrediatur, id eſt, angulus maximus ſub quo diſtantia Veneris aut Mercurii à Sole è Terrâ conſpicitur, gradus 47 vel 28 nunquam ſuperat.

7. *Circuli declinationis* ſeu *circuli horarii* ſunt circuli maximi per mundi polos tranſeuntes & proindè æquatori perpendiculares. Sideris vel puncti cujuſlibet in ſphærâ mundanâ *declinatio* eſt arcus circuli declinationis inter ſidus vel datum punctum & æquatorem interceptus. *Aſcenſio recta* ſideris eſt arcus æquatoris inter punctum æquinoctiale vernum & circulum declinationis ſideris illius comprehenſus ac ſecundum ordinem ſignorum numeratus. *Circuli latitudinis* ſiderum ſunt circuli ſphæræ maximi per polos eclipticæ & per ſidera tranſeuntes, atquè ideò Eclipticæ perpendiculares. Hinc *Latitudo* ſideris eſt arcus circuli latitudinis inter ſidus & Eclipticam interceptus. *Longitudo* ſideris eſt arcus eclipticæ ab arietis initio versùs ortum ſeu in conſequentia uſquè ad latitudinis circulum numeratus. Punctum interſectionis Eclipticæ cum circulo latitudinis ſideris dicitur locus ſideris Eclipticus ſive locus in Eclipticâ vel locus ad Eclipticam reductus.

8. Si per locum quemvis S in ſuperficie terræ ducatur per terræ centrum T linea recta ZSN quæ ſphæræ cæleſti occurrat in Z & N, punctum Z dicitur loci S *Zenith* ſeu vertex, & punctum N vocatur ejuſdem loci *Nadir*. *Horizon ſenſibilis* ſeu apparens loci S, eſt ſphæræ circulus h v r x centrum habens in S, & polos in Z & N. *Horizon*




*rationalis* ſeu verus eſt circulus H V R X, centrum habens in T, & polos in Z & N, ideóque horizonti ſenſibili parallelus.

*Circulus verticalis* eſt circulus quilibet maximus Z V N X ſper Zenith atquè Nadir & per aliud quodcumque punctum in ſphærâ mundanâ tranſiens, ideóque horizonti perpendicularis.

*Meridia-*

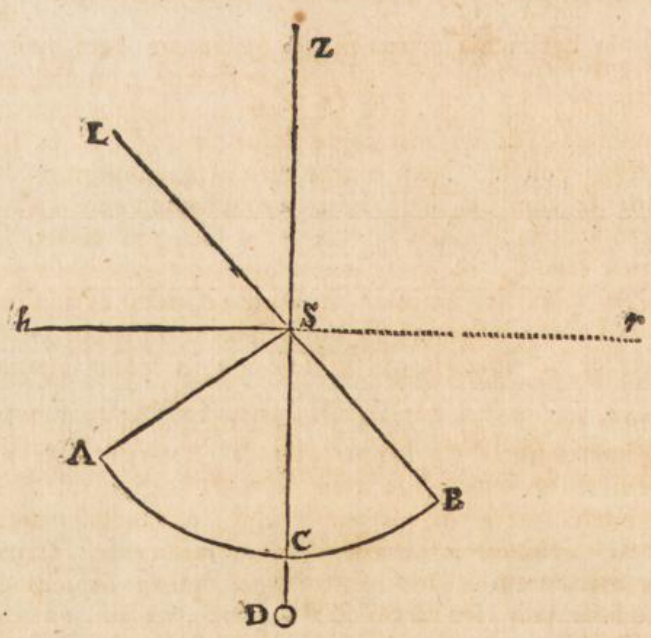
*Meridianus* eſt circulus verticalis PZNR per polos mundi P & p tranſiens, ac proindè æquatori perpendicularis & circulos omnes æquatori parallelos bifariam dividens. Interſectio plani Meridiani cum plano horizontis HR vel hr dicitur *Linea meridiana.* Circulus *Verticalis primarius* eſt ille verticalis qui per polos meridiani tranſit. Sit ZVNX verticalis primarius horizontem rationalem HVRX interſecans in V & X, quem meridianus etiam ſecat in H & R. Puncta quatuor R, X, H, V, dicuntur *cardines mundi*; punctum quidem R in hemiſpherio boreali cardo *Septentrionis*, H cardo *Meridiei*, V ad partes Orientis cardo *Orientis* & punctum oppoſitum X cardo *Occidentis.*

9. Diſtantia horizontis apparentis ab horizonte vero ſivè telluris ſemidiameter ST, ſenſibilis non eſt, ſi conferatur cum ſtellarum (Lunâ ferè ſolâ exceptâ) diſtantiis, & ideò terra reſpectu ſphæræ ſtellarum tanquam punctum, & quilibet terræ locus tanquam hujus ſphæræ centrum conſiderari poteſt. Nam omnes ferè Aſtronomorum obſervationes id ſupponunt & computa indè inita cum phænomenis cæleſtibus quadrant. Porrò quemadmodum ſingula terræ loca pro centro ſphæræ ſtellarum uſurpari poteſt, ità fingi poteſt in ſpatiis cæleſtibus ſphærica ſuperficies cujus tanta ſit diameter ut illius reſpectu evaneſcat Solis vel ſtellæ datæ à Tellure diſtantia, & hujus ſphæræ centrum poterit collocari indifferenter vel in terrâ vel in ſole aut in ſpatio intermedio.

10. *Altitudo poli P ſuprà horizontem* eſt meridiani arcus PR à polo ad horizontem interceptus. Ea ſemper æqualis eſt arcui ZÆ à vertice Z ad æquatorem ÆQ intercepto; Nam ſi ex circuli quadrantibus ZPR & ÆZP ſubducatur arcus communis ZP, remanebunt arcus æquales ÆZ & PR. *Altitudo æquatoris ſuprà horizontem* eſt arcus meridiani ÆH, inter æquatorem & horizontem interceptus; æqualis eſt complemento altitudinis poli ſeu arcui ZP, quod, ablato ex quadrantibus HÆZ & ÆZP communi arcu ÆZ manifeſtum eſt. *Altitudo apparens* ſideris vel puncti cujuſlibet L in ſphærâ mundanâ, eſt angulus LSv, ſub quo ex centro S horizontis ſenſibilis videtur arcus Lv circuli verticalis per L ducti uſquè ad horizontem ſenſibilem hvrx. Altitudo vera puncti L eſt angulus LTV, ſeu ipſius menſura arcus LV in circulo verticali per L ducto uſquè ad horizontem rationalem HVRX. Undè (9) ſtellarum fixarum & ſolis altitudines apparentes & veræ coincidunt.

11. Jam verò quâ ratione phænomena quæ ſuprà retulimus & alia quæ deinceps referemus obſervari potuerint, paucis exponemus; & quidem ab obſervatione altitudinis apparentis ſiderum quæ præcipuum

totius Aſtronomiæ fundamentum eſt, initium ducemus. Circuli quadrans SAB cujus limbus ACB in gradus & minuta diviſus eſt ità ſtatuitur ut filum SCD pondere D tenſum ideóque verticale, limbum illius tangat, deindè ità vertitur ut ſidus L cujus altitudo obſervanda eſt, per diopteras aut per teleſcopium lateri SB affixum videatur in eodem latere SB producto. Quo facto, habetur arcus AC, menſura altitudinis apparentis LSh; nam cum filum è quadrantis centro S, pendens ſit ſemper in plano verticali, quadrans ASB erit etiam in eodem plano, (Eucl. 18. XI.) ideóque hr ad SD perpendicularis, erit interſectio

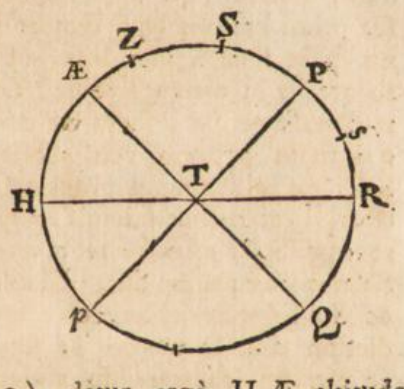



horizontis ſenſibilis & plani verticalis per L ducti, atquè angulus LSh ſideris L altitudo apparens. Sed ſi ab angulis rectis LSA, & hSD, ſubducatur communis hSA, remanent æquales anguli LSh & ASC; hujus verò menſura eſt arcus AC.

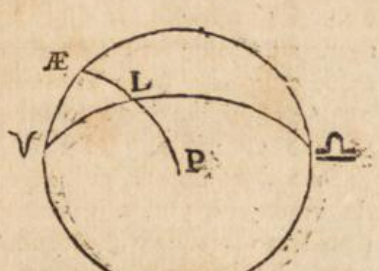
12. Hinc deſcribi poteſt linea meridiana ſuprà quam ſi ſtatuitur perpendiculariter quadrans circuli, obſervari poterit altitudo meridiana ſideris. Nam meridianus portiones illas circulorum æquatori parallelorum, quæ ſuprà horizontem eminent & qui arcus diurni dicuntur, bifariam ſecat (per El. XI. 19. & 4., & El. III. 30.) cum ſit illis circulis & horizonti eos arcus terminanti perpendicularis, & propterea ſi in circulo quolibet diurno ſumantur puncta duo hinc indè orientem & occi-

occidentem versùs à meridiano æquidistantia, ea puncta erunt suprà horizontem sensibilem æquè alta, & contrà si æquè alta sint, à meridiano hinc indè æquidistabunt. Quarè si stellæ fixæ meridiano vicinæ altitudo observetur versùs orientem, & deindè quadrans circà filum verticale immotum ceù circa axem convertatur versùs occidentem & expectetur donec stella eandem altitudinem habeat, recta quæ bifariam dividet angulum inter duas quadrantis cum horizonte intersectiones comprehensum, erit linea meridiana.

13. Datis per observationes duabus ejusdem stellæ nunquam occidentis altitudinibus meridianis SR, sR, dantur poli P & æquatoris ÆQ altitudines PR & ÆH suprà horizontem HR. Nam datis arcubus SR & sR datur eorum differentia Ss; & quia stella S circulum describit æquatori parallelum (3) cujus P est polus, erit SP=sP; undè datur Ps, cui si addatur sR, habebitur arcus PR altitudo poli. Est autem HÆ æqualis arcui ZP seu complemento altitudinis poli ad rectum (10), datur ergò HÆ altitudo æquatoris.




14. Datâ stellæ S altitudine meridianâ SR cum æquatoris vel poli altitudine, datur illius declinatio SÆ; est enim arcus SÆ æqualis differentiæ arcuum ÆPR & SR. Sic observando quotidiè altitudinem meridianam centri Solis & indè eruendo ipsius declinationem, determinatum est planum ecliptica & ejus ad æquatorem inclinatio seu maxima ab æquatore declinatio quæ inventa est 23 ½ grad. aut verius 23°. 29'. Datâ autem inclinatione ecliptica ad æquatorem cum solis declinatione, datur ascensio recta Solis ac longitudo. Sit enim P polus mundi, ♈Æ♎ æquator, ♈L♎ ecliptica, & PLÆ, circuli quadrans æquatori perpendicularis in Æ, & datis in triangulo sphærico Æ♈L rectangulo in Æ, latere seu declinatione Solis LÆ, & angulo Æ♈L, 23° 29', dantur latus ♈Æ ascensio recta solis, seu puncti L, & latus ♈L quod est ejusdem longitudo, imò datur etiam angulus ÆL♈, quem circulus declinationis efficit cum Ecliptica; Cum verò præter angulum Æ♈L, data fuerit longitudo ♈L, dabitur tum ♈Æ ascensio recta, tum ÆL, declinatio.




15. Si

15. Si quotidie obſervetur meridiana Solis altitudo, atquè indè eruantur ipſius declinatio, aſcenſio recta & longitudo, dabuntur motus Solis in Ecliptică, motus puncti declinationis in Æquatore & temporis momenta quibus declinatio vel nulla eſt vel maxima, ſeu dabuntur Æquinoctiorum & Solſtitiorum momenta (4). Porrò obſervatum eſt nec longitudinem nec aſcenſionem rectam ſolis uniformiter creſcere & proindè dies ſolares eſſe inæquales. Nam dies ſolaris eſt tempus unius revolutionis diurnæ ſolis à meridiano ad eundem meridianum; dies ſidereus ſeu primi mobilis (qui ſemper idem manet) eſt tempus revolutionis diurnæ ſtellæ fixæ à meridiano ad eumdem. Undè cum Sol motu proprio ab occaſu in ortum feratur, ſi ſtella fixa & Sol in eodem meridiano ſimul obſerventur, ſtella ad eumdem meridianum priùs redibit quam Sol qui motu proprio versùs orientem tendit. Attamen ſi aſcenſio recta Solis ex ipſius motu proprio in Ecliptică uniformiter creſceret, dies Solares, licet diebus ſidereis longiores, eſſent tamen inter ſe æquales; Quarè cum Solis aſcenſio recta non augeatur uniformiter, neceſſe eſt ut dies Solares inæquales ſint. Simili modo collatis inter ſeſe Æquinoctiorum & Solſtitiorum obſervationibus deprehenſum eſt Solem intervallo 8 ferè dierum diutiùs morari in ſignis borealibus quam in ſignis auſtralibus; ac tandem comparando antiquas obſervationes ad determinandum momenta æquinoctiorum vel ſolſtitiorum cum recentioribus, definita eſt quantitas anni æquinoctialis, ſivè tempus quo Sol motu proprio ab uno æquinoctio ad idem æquinoctium, vel ab uno ſolſtitio ad idem ſolſtitium progreditur & ab Authoribus Calendarii Gregoriani Lahirio, Caſſino & Blanchinio inventa eſt $365^{\text{dier.}}\ 5^{\text{hor.}}\ 49'$.

16. Datâ quantitate anni æquinoctialis, datur motus Solis medius pro quolibet dato tempore, hoc eſt motus qui Soli competeret ſi uniformiter in Ecliptică ferretur. Eſt enim ut $365^{\text{d.}}\ 5^{\text{h.}}\ 49'$ ad tempus datum, ità $360°$ quos Sol anni æquinoctialis tempore deſcribit proprio motu ad arcum eclipticæ dato tempore conficiendum. Hâc proportione arcus eclipticæ anno communi $365^{\text{dier.}}$ deſcribendus eſt XI Signorum $29°.\ 45'\ 40''$, die uno eſt $59'\ 8''\ 20'''$, horâ unâ eſt $2'\ 28''$, minuto uno eſt $2''\ 28'''$.

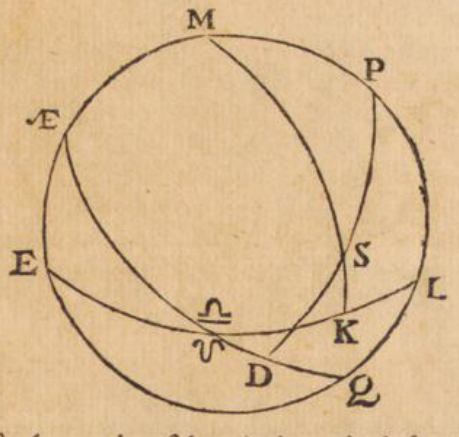
Arcus æquatoris qui dato tempore ſub Meridiano tranſit ſimili modo invenietur; nam quæratur arcus æquatoris dato tempore ſidereo ſub meridiano tranſiens, dicendum eſt: ut 24 horæ ſidereæ ad tempus datum, ità 360 grad. ad arcum quæſitum, is ergo horâ unâ erit $15°$; minuto uno primo $15'$, minuto ſecundo $15''$. Cum autem Sol die uno deſcribat motu proprio medio ad Æquatorem reluto arcum $59'\ 8''\ 20'''$ ab occaſu ad ortum, ut inveniatur arcus æquatoris dato tempore ſolari medio ſub Meridiano tranſiens, dicatur ut 24 horæ Solares ad datum tempus Solare, ità $360°$

$59'$

59′ 8″ 20‴ ad arcum quæſitum. His igitur proportionibus tempus ſolare medium vel tempus ſidereum convertitur in gradus æquatoris & contrà. Facilè autem patet ex dictis diem ſolarem medium æqualem eſſe 24 horis ſidereis cum 3′ 56″ 32‴.

17. Si obſervetur altitudo meridiana Solis & dato ante vel poſt meridiem tempore obſervetur etiam altitudo meridiana ſtellæ alicujus, ſtellæ hujus dabuntur declinatio & aſcenſio recta. Nam ex datâ altitudine meridianâ Solis datur ejus aſcenſio recta (14) & tempore quod inter duas obſervationes intercedit in arcum æquatoris converſo (16) datur arcus æquatoris qui tempore inter duas obſervationes elapſo per Meridianum tranſit; hic arcus addatur vel ſubducatur aſcenſioni rectæ Solis, & ſumma vel differentia erit aſcenſio recta ſtellæ. Declinatio autem ſtellæ ex ipſâ altitudine ejus meridianâ eruitur (14). Quod ſi centrum Solis & centrum ſtellæ in meridiano ſimul reperiantur, eadem eſt utriuſque aſcenſio recta.

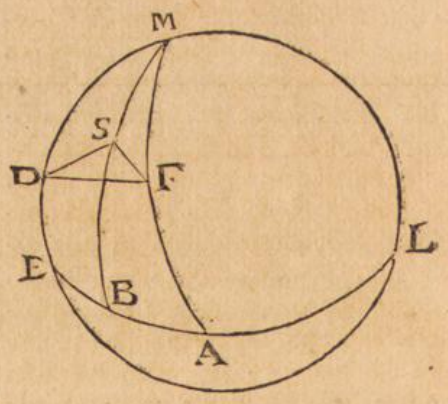
18. Datis declinatione & aſcenſione rectâ ſtellæ, dantur ipſius longitudo & latitudo. Sunto ÆQ æquator, EL ecliptica, P polus mundi, M polus eclipticæ, S ſtella, PSD quadrans circuli declinationis, & MSK, quadrans circuli latitudinis. Quæruntur arcus ♈ vel ♎ K & KS. In triangulo PSM datur latus PM ſeu diſtantia polorum P & M 23° 29′, datur quoque latus PS declinationis SD complementum & angulus MPS ſeu ÆPD, cujus menſura eſt arcus ÆD datus ob datos per aſcenſionem rectam arcum ♈ D vel ♎ D & quadrantem Æ♈. Quarè (per trig. ſphær.) invenitur latus MS latitudinis SK complementum & angulus M, cujus menſura eſt arcus KL; ex circuli quadrante ♈L vel ♎L ſubducatur KL, & dabitur ♈ K longitudo ſtellæ S. Hinc etiam facilè patet quomodò datis longitudine ♈K & latitudine KS ſtellæ S inveniri poſſit ipſius aſcenſio recta & declinatio. Nam dato ♈K datur KL, & indè datur angulus SMP, & dato SK, datur SM, undè cum datum ſit MP, dantur in triangulo SMP latus PS complementum declinationis & angulus ÆPD, cujus eſt menſura ÆD, ex quâ ſi auferatur quadrans Æ♈, dabitur aſcenſio recta ♈D.




19. Ex hujuſmodi obſervationibus & calculis inventum eſt fixa-

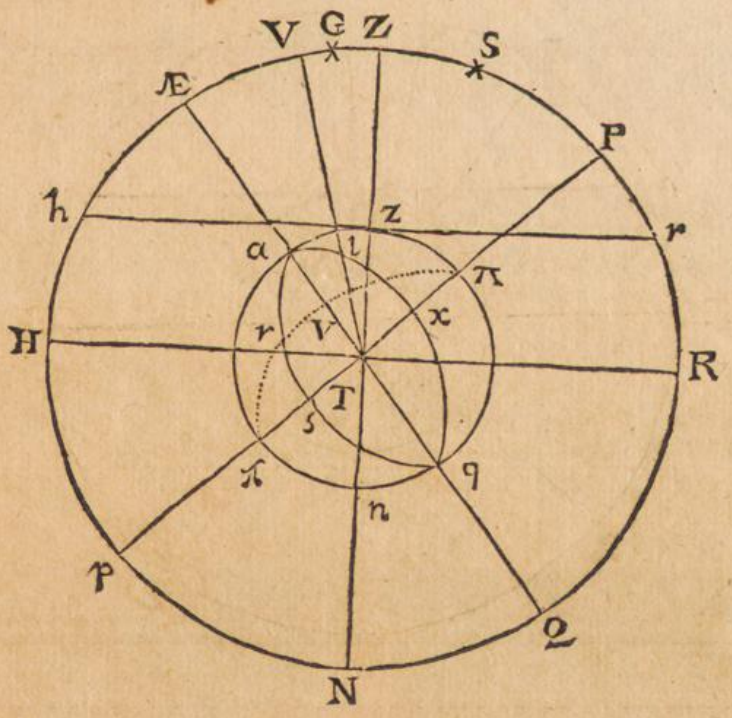
rum latitudines immutabiles esse, longitudines verò per singulos annos 50 secundis, & per annos 72 gradu uno quamproximè augeri. Undè manifestum fit stellas fixas motu proprio sed lentissimo in circulis ecliptica parallelis progredi in consequentia, aut si stellæ fixæ omni proprio motu priventur, puncta æquinoctialia singulis annis in antecedentia moveri per arcum 50″, atquè hæc est præcessio æquinoctiorum ex quâ fit ut Sol motu proprio ab æquinoctio ad idem æquinoctium citiùs revertatur quam à stellâ fixâ ad eandem. Annus igitur Solaris æquinoctialis brevior est anno Solari sidereo, hoc est brevior est tempore unius revolutionis Solis à stellâ fixâ ad eandem fixam; differentia est 20′ 17″ quo tempore Sol motu proprio arcum 50″ conficit. Est ergò annus sidereus 365 dier. 6 hor. 9′ 17″.

20. Stellarum distantiam dicimus arcum circuli maximi inter stellarum centra comprehensum, aut, quod eodem redit, angulum quem rectæ à centris stellarum ad oculum spectatoris ductæ efficiunt. Si ope semicirculi vel quadrantis observentur distantiæ stellæ alicujus ab aliis duabus stellis quarum longitudo & latitudo notæ sunt, illiùs quoque longitudo & latitudo dabuntur. Nam esto ecliptica EL, polus ejus M, stellæ notæ longitudinis & latitudinis S & F, tertia stella D. Ducantur tres circuli latitudinis MDE, MSB & MFA, sintque datæ distantiæ DS & DF. Quia dantur latitudines SB & FA stellarum S & F, dabuntur earum complementa SM & FM cum angulo BMA, cujus mensura est arcus BA, differentia longitudinis stellarum S & F, & ideò in triangulo SFM, dabitur SF, cum angulo MSF. Datis in triangulo DSF, tribus lateribus dabitur angulus DSF, & si ex 360° seu quatuor angulis rectis subducatur summa angulorum datorum DSF & FSM, dabitur angulus DSM, cum quo & notis lateribus DS & SM, reperientur latus MD complementum quæsitæ latitudinis stellæ D, & angulus EMB cujus mensura est arcus EB, differentia longitudinum stellarum D & S; hæ autem observationes distantiarum Astrorum inter se propter Astrorum continuam conversionem non facile ad summam acribeiam perducuntur.




21. Sit πzæπ q telluris globus per cujus centrum T transit axis mundi Pp. Loci z sit horizon sensibilis hr, horizon rationalis HR, &

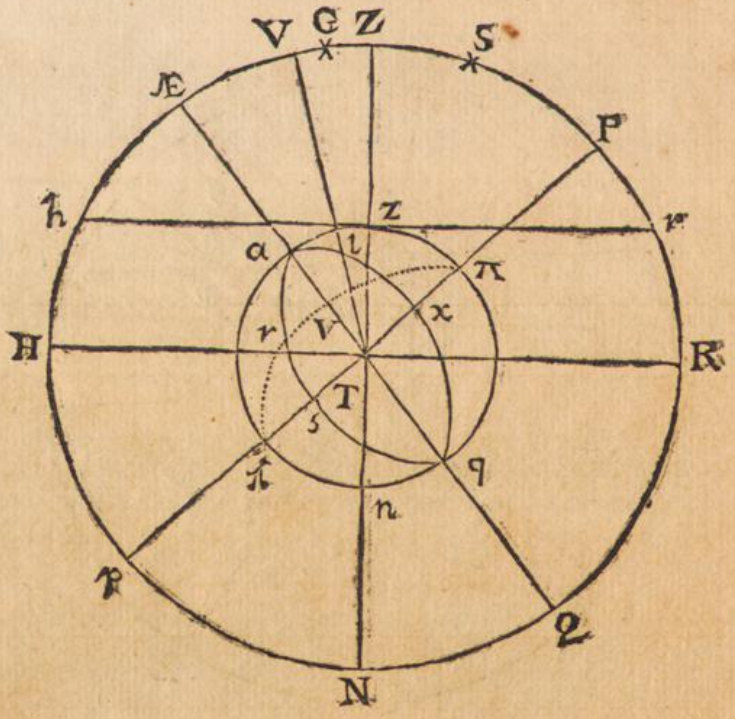
& meridianus PZHN. His ità conſtitutis, axis telluris dicitur pars Π π, axis mundi Pp telluris ſuperficie terminata in punctis Π & π, quæ poli terræ vocantur. Polus Π polo cœleſti P nobis conſpicuo ſubjectus borealis vel arcticus, alter π auſtralis vel antarcticus appellatur. Interſectio plani æquatoris cœleſtis cujus eſt diameter Æ Q, cum telluris ſuperficie, ſivè circulus maximus æ s q x, cujus poli ſunt Π & π, dicitur æquator terreſtris aut etiam circulus æquinoctialis vel κατ' ἐξοχὴν linea. Latitudo loci cujuſvis z in ſuperficie terræ eſt diſtantia ejus ab æquatore, ſi-




vè eſt meridiani terreſtris arcus z æ inter locum z & æquatorem æ z q x interceptus. Undè patet latitudinem loci z in ſuperficie terræ numero graduum æqualem eſſe declinationi cœleſti verticis Z ejuſdem loci, ſeu elevationi poli PR. Nam arcus PR & ZÆ, ſunt æquales (10) & arcus ZÆ ac z æ ſimiles; Per locum in ſuperficie terræ pro arbitrio determinatum ducatur meridianus Π r π æquatorem æ s q x ſecans in r; dicaturque Π r π primus meridianus, & loci cujuſvis alterius z longitudo dicetur æquatoris arcus r æ inter meridianum primum Π r π & me-

ridianum zæπq loci z interceptus atquè ab occasu ad ortum numeratus.

22. Si per trigonometriam mensuretur distantia z l duorum locorum z & l sub eodem meridiano sitorum & ope quadrantis circuli ex iisdem locis observentur distantiæ S Z & S V, stellæ fixæ S à locorum verticibus Z & V, dabitur telluris semidiameter z T. Nam datis arcubus S V & S Z, dabitur eorum differentia vel summa V Z, & hinc



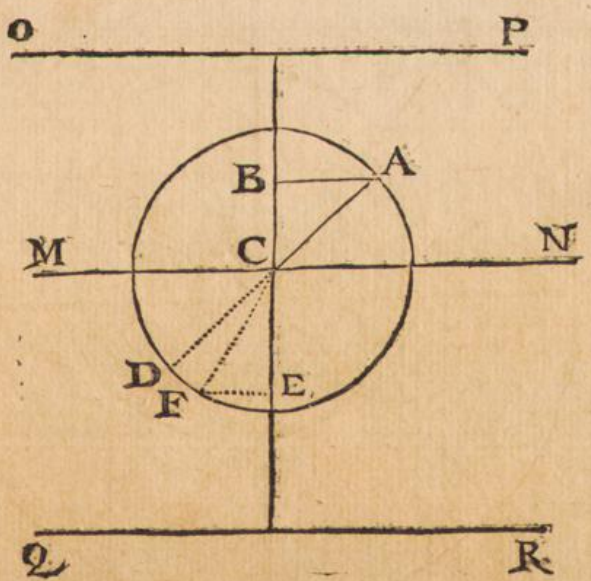

datur arcus l z qui arcui V Z similis est. Quarè per observationes astronomicas notum erit quot gradus vel minuta in arcu l z contineantur & per trigonometricas mensuras ejusdem arcûs longitudo hexapedis vel pedibus aut aliis mensuris notis data erit, & indè inferendo ut numerus minutorum in arcu l z contentorum ad 360° seu ad 21600', ità longitudo l z mensuris notis expressa ad circulum telluris maximum, dabitur hic circulus ex quo invenietur semidiameter z T.

CAPUT

## CAPUT II.

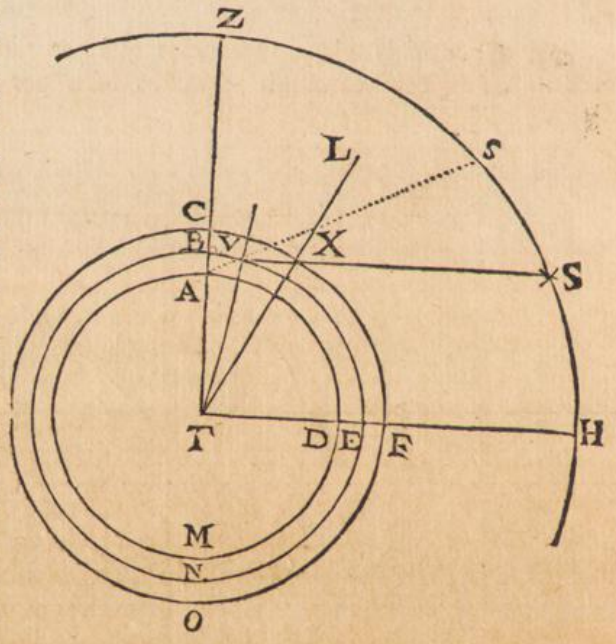
*Siderum refractio & parallaxis breviter explicantur.*

23. SIt MN plana ſuperficies quâ aer rarior MOPN aerem denſiorem contingit. Radius lucis per rectam AC propagatus




ex aere rariori in denſiorem obliquè tranſeat per punctum C & indè feratur per CE, per C ducatur BF ad MN perpendicularis, experientiâ certum eſt radium AC in aere denſiori non propagari per rectam continuam ACD, ſed in puncto C ità refrangi per CE accedendo ad perpendicularem BCF, ut ſinus anguli cujuſvis ACB ſit ſemper ad ſinum anguli ECF in datâ ratione. AC dicitur radius incidens, C punctum incidentiæ, CE radius refractus, ACB angulus inclinationis, ECF angulus refractus, & DCE angulus refractionis.

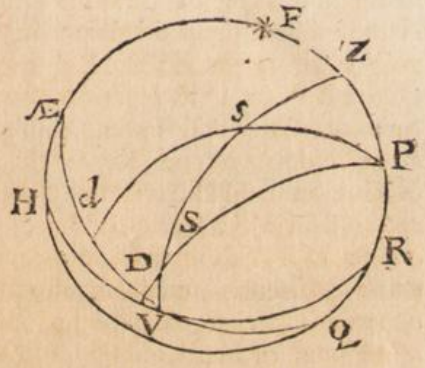
24. Si atmoſphæra CXFOMA terræ ADM circumfuſa, diviſa intelligatur in innumeras ſuperficies ſphæricas telluris ſuperficiei concentricas CXFO, BVEN aer inter duas hujuſmodi ſuperficies contentus & aeris ſuperioris pondere compreſſus eò denſior erit quò minùs à telluris centro T diſtabit. Sit ZSH circulus verticalis ex centro telluris T deſcriptus, arcus SH altitudo ſideris S ſuprà horizontem rationalem TH, & ZS diſtantia ſideris à vertice Z. Si radius lucis SX è ſidere S propagatus incidat in atmoſphæram in X, is refringetur in X per XV accedendo ad ſemidiametrum TX ſuperficiei ſphæricæ CXFO perpendicularem (23) & quoniam aëris denſitas in V major eſt quam in X radius in puncto V, ſuperficiei BVE rursùs refringetur accedendo ad TV, atquè ità continuò incurvabitur & in lineam XVA versùs T cavam flectetur. Hanc curvam tangat in A recta As, circulo verticali ZH occurrens in s, & quoniam radius lucis SXVA oculum ſpectatoris in A ingreditur ſecundum directionem tangentis As, ſidus, quod eſt reverâ in S, videbitur in s, in loco nempe altiore; notum enim eſt ex opticâ objectum videri in eâ rectâ ſecundum quam fit directio radiorum oculos ingredientium.




25. Producatur TX ad L, ut ſit SXL angulus inclinationis radii SX in atmoſphæram incidentis, & VXT angulus refractus, data erit ratio ſinus anguli SXL, ad ſinum anguli VXT (23) ac proindè ſinus angulorum inclinationis erunt ſemper ut ſinus angulorum refractorum. Quarè ſideris in vertice Z conſtituti, ubi nullus eſt angulus inclinationis, nulla erit refractio, & ſiderum in æqualibus à vertice diſtantiis ſitorum, ubi æquales ſunt inclinationum anguli, æquales erunt refractiones. Solis igitur, Lunæ, fixarum ac ſiderum omnium extrà terreſtrem atmoſphæram conſtitutorum, in paribus à vertice diſtantiis refractiones ſunt æquales.

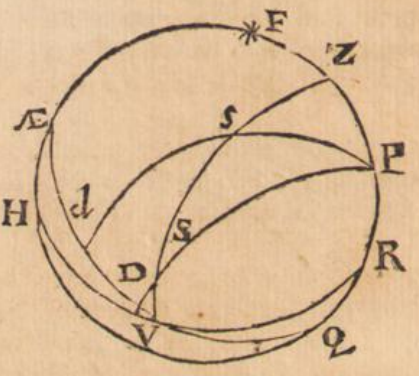
26. Si-

26. Siderum refractio ad ſingulos altitudinis gradus, obſervatione definiri poteſt. Eſto H R horizon, P polus mundi, ÆQ æquator, PZH Meridianus, Z S V circulus verticalis, P S D & P s d, circuli declinationis. Stellæ fixæ F propè Zenith conſtitutæ obſervetur altitudo meridiana H F, quæ à refractione libera eſt, & indè eruatur ejus declinatio F E (14). Deindè obſervetur ejuſdem ſtellæ in S poſitæ altitudo quælibet S V, & ope horologii oſcillatorii notetur tempus quod inter primam & ſecundam obſervationem intercedit, & inveniatur arcus æquatoris Æ D qui eo tempore per meridianum tranſiit (16). Stella quæ ob refractionem in loco altiori s apparet ſit reverâ in S, erit P S D circulus declinationis ſtellæ in S conſtitutæ, & in triangulo P Z S, dabitur angulus Z P S, cujus menſura eſt arcus Æ D cum latere P Z quod eſt diſtantiâ poli à vertice & latere P S, quod eſt declinationis D S ſeu Æ F complementum, undè invenitur latus Z S cum altitudine S V, complemento lateris Z S. Si ergò ex altitudine obſervatâ S V, ſubducatur altitudo inventa S V, quæ à refractione libera eſt, dabitur arcus S s, refractio ſtellæ in quolibet gradu altitudinis. Hoc modo D. De la Hire in tabulis Aſtronomicis obſervavit refractiones ſiderum diverſis anni tempeſtatibus, in pari altitudine eaſdem eſſe exceptis refractionibus circà horizontem quas nonnullis inconſtantiis obnoxias expertus eſt, atquè hinc unicam tabulam refractionum ex ipſis obſervationibus deductam conſtituit, quam poſtea correxit D. Caſſinus & eâ correctâ utuntur Aſtronomi. Quoniam verò radiorum lucis in atmoſphæram incidentium obliquitas cum ſideris à vertice diſtantiâ creſcit, iiſdem obſervationibus invenit refractiones ſiderum à vertice ad horizontem uſquè ubi maximæ ſunt, continuò augeri; at quod ex alienis obſervationibus ſupponebat, videlicet refractiones borealium regionum ipsâ etiam æſtate, longè majores eſſe quam in zonis temperatis, id minimè verum eſſe oſtendunt accuratiores obſervationes ab Academicis Pariſienſibus ad circulum polarem habitæ, quibus refractiones etiam horizontales Pariſienſibus æquales invenerunt. Vide Domini De Maupertuis nobiliſſimum opus de figurâ telluris per obſervationes ad circulum polarem definitâ.



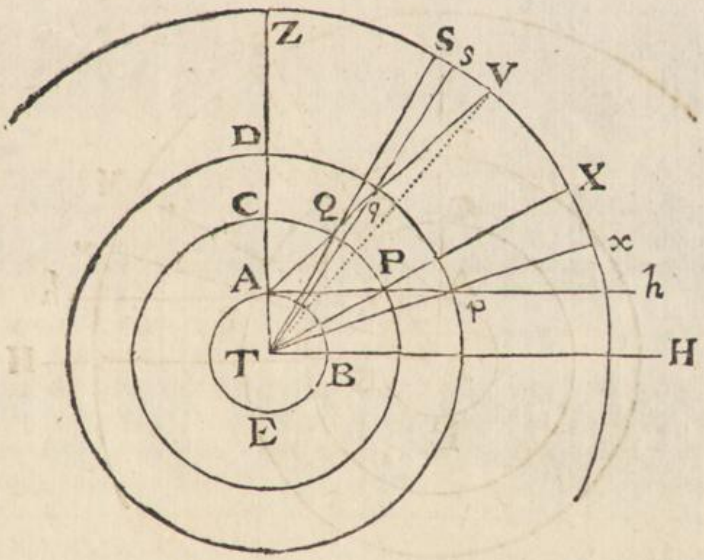

27. Refractio ſideris declinationem, aſcenſionem rectam, longitudinem ac latitudinem afficit & arcus circuli maximi quo ſideris declinatio, aſcenſio recta, longitudo & latitudo minuitur vel augetur per refractio-

fractionem, dicitur refractio declinationis vel aſcenſionis rectæ &c.; at ex datâ altitudinis refractione aliæ refractionum ſpecies inveniri poſſunt. Nam in figurâ ſuperiori dantur in triangulo sZP latera Zs & ZP cum angulo sZP & indè reperitur latus sP cum angulo sPZ cujus menſura eſt arcus Æd, undè cum detur arcus ÆD, dabitur arcus dD refractio aſcenſionis rectæ ſideris S; & quia dantur arcus ds & DS, dabitur etiam horum arcuum differentia, quæ eſt refractio declinationis. Sed datis declinatione & aſcenſione rectâ: puncti cujuſvis in ſphærâ mundanâ, dantur ipſius latitudo & longitudo (18); patet igitur quomodo latitudinis & longitudinis refractiones poſſint inveniri.




28. Jam de *Parallaxibus* pauca nobis delibanda ſunt. Cætera, ubi opus fuerit, ſuis locis exponemus. Itaque diſtantia locorum in ſphærâ cæleſti ad quæ ſidus vel phænomenon quodvis è ſuperficie telluris & ex ejus centro ſpectatum refertur, ſivè arcus circuli maximi inter illa duo loca interceptus, ipſius ſideris aut phænomeni parallaxis appellatur, quæ proindè nulla eſt niſi terræ ſemidiameter ſenſibilem habeat rationem ad diſtantiam ſideris à terrâ. Sit T centrum telluris ac cœli; A oculus in ſuperficie terræ; Z zenith loci A; Q ſidus vel phænomenon quodvis; CQP verticalis per Q tranſiens; ZSXH verticalis in ſuperficie ſphæræ cæleſtis; ABE verticalis in ſuperficie terræ; TH horizon rationalis & Ah horizon ſenſibilis. His ità conſtitutis, locus phyſicus ſideris Q, eſt punctum illud in quo ſideris centrum hæret. Locus opticus apparens ſeu viſus eſt punctum V in ſuperficie ſphæræ cæleſtis, in quo recta ex oculo A per centrum ſideris Q ducta terminatur. Locus opticus verus eſt punctum S in ſuperficie ſphæræ cæleſtis in quo terminatur recta linea TQS ex terræ centro T per Q ducta. *Parallaxis* eſt arcus SV ſivè differentia duorum locorum opticorum. *Angulus parallacticus* qui plerumque etiam *Parallaxis* vocatur, eſt angulus AQT quem in centro ſideris efficiunt rectæ AQ & TQ ex oculo A & ex centro terræ T ad ſideris centrum Q ductæ. Parallaxis altitudinis quæ & parallaxis ſimpliciter dicitur, eſt differentia inter diſtantiam ZV à zenith Z ex loco A viſam & diſtantiam veram ZS, ſivè eſt arcus SV in circulo verticali ZSVH, undè manifeſtum eſt altitudinem ſideris veram per parallaxim minui & ejus à vertice diſtantiam augeri, atquè ideò parallaxim eſſe refractioni contrariam. Parallaxis horizontalis eſt parallaxis Xh, ſideris P in horizonte ſenſibili Ah apparentis, 29.

29. Parallaxis S V eſt ménſura anguli parallactici A Q T. Jungatur T V, & angulus externus A Q T æqualis erit duobus internis oppoſitis Q T V & Q V T; ſed angulus Q V T ſivè A V T, evaneſcente A T reſpectu T V, nullus eſt (9), ergò angulus parallacticus A Q T, æqualis eſt angulo Q T V, ſeu S T V, cujus menſura eſt arcus S V.

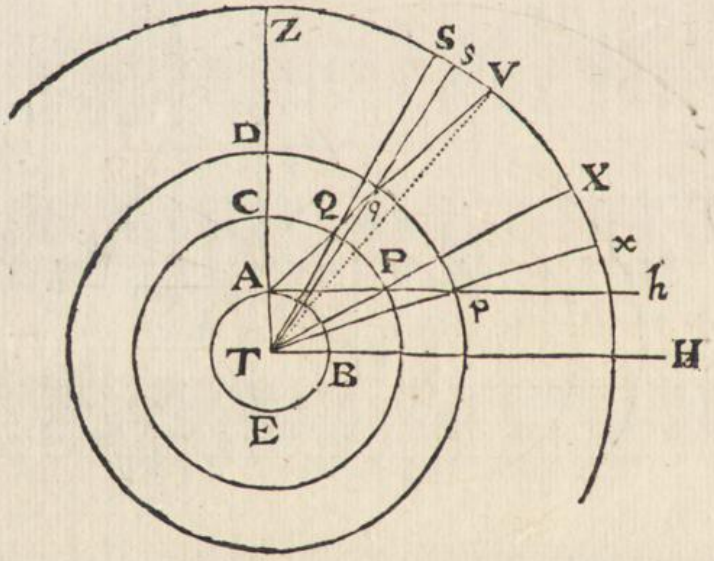



30. Manente ſideris à centro terræ diſtantiâ, ſinus parallaxeos eſt ad ſinum diſtantiæ viſæ ſideris à vertice in ratione datâ ſemidiametri telluris ad diſtantiam ſideris à centro terræ. Nam in triangulo A Q T, eſt A T ad Q T, in ratione ſinûs anguli parallactici A Q T ſeù ſinus parallaxeos ad ſinum anguli T A Q ſivè ad ſinum diſtantiæ viſæ Z V à vertice, & ideò, datis A T & Q T, data eſt ratio ſinuum illorum. Hinc verò ſequitur ſideris in vertice Z, conſtituti parallaxim eſſe nullam, eandem creſcere cum diſtantiâ à vertice & in horizonte fieri maximam. Sequitur quoquè ſinus parallaxium in paribus ſideris à centro terræ diſtantiis eſſe ut ſinus diſtantiarum viſarum à vertice, & ideò ſi detur parallaxis ſideris in aliquâ à vertice diſtantiâ, dabitur in aliâ quâvis diſtantiâ à vertice.

31. Datâ ſideris Q, parallaxi A Q T, cum angulo Z A V ſeu diſtantiâ apparente à vertice, datur in ſemidiametris terræ tum diſtantia Q T ſideris Q à centro terræ, tum diſtantia ejus A Q à loco A. Dato enim angulo Z A Q datur T A Q complementum illius ad duos re-

 ctos,

ctos, undè, ob datum etiam angulum AQT, dantur tres anguli trianguli QAT, ex quibus datur ratio laterum inter se. Hinc datâ sideris P parallaxi horizontali, si inferatur ut sinus parallexeos ad sinum totum, ità semidiameter telluris AT ad quartum obtinebitur distantia PT sideris à centro terræ ob angulum TAP rectum.



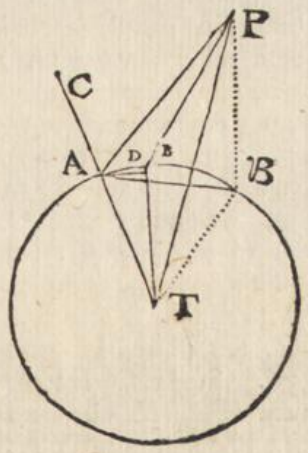

32. Sinus parallaxeon siderum Q & q in æqualibus distantiis apparentibus à vertice, sunt in ratione reciprocâ distantiarum siderum à centro terræ. Etenim ut sinus parallaxeos AQT, ad sinum anguli ZAV, ita est AT ad QT & ut sinus anguli ZAV, ad sinum parallaxeos AqT, ità qT ad AT, ideòque ex æquo, sinus parallaxeos AQT est ad sinum parallaxeos AqT ut qT ad QT. Ex quo etiam sequitur siderum in eâdem altitudine apparente existentium, hujus majorem esse parallaxim quod minùs distat à centro terræ.

33. Parallaxis altitudinis, uti de refractione dictum est, sideris declinationem, ascensionem rectam, longitudinem & latitudinem mutat; & eodem modo quo ex refractione altitudinis inveniuntur aliæ refractionum species, sic ex datâ parallaxi altitudinis eruuntur parallaxes declinationis, ascensionis rectæ, longitudinis & latitudinis; illud quoque observandum est sideris in meridiano existentis nullam esse ascensionis rectæ refractionem nec parallaxim; cum enim altitudinis refractio sidus attollat, & altitudinis parallaxis illud deprimat, in eodem meridiano

seu

ſeu circulo declinationis (per hyp.) aſcenſio recta indè non mutatur. Similiter ſi circulus verticalis in quo ſidus reperitur ſit ad eclipticam perpendicularis, nulla erit longitudinis refractio nullaque parallaxis; nam in hoc caſu circulus verticalis eſt ſimul circulus latitudinis, & ſiderum in eodem latitudinis circulo exiſtentium longitudo eſt eadem.

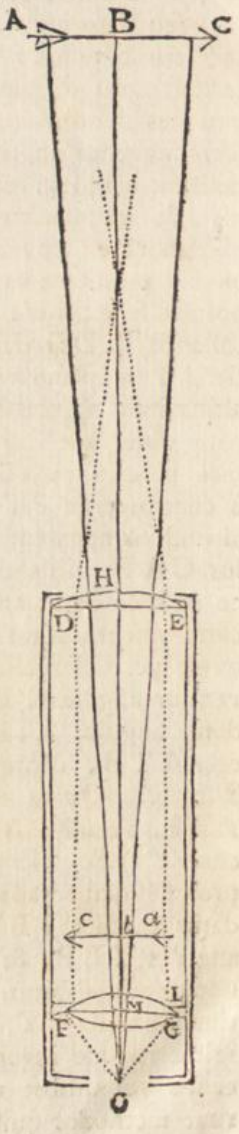
34. Datâ differentiâ longitudinis locorum duorum in ſuperficie terræ, ſeu dato arcu æquatoris inter locorum illorum meridianos interceptо, datur tempus quo Sol vel ſtella fixa ab uno meridiano ad alterum motu diurno tranſit (16); & indè definiri poteſt utrum obſervationes in illis duobus locis habitæ, reſpondeant eidem temporis abſoluti momento an non. Facilè idem innoteſcit per Lunæ & Jovis Satellitum eclipſes; eodem enim momento temporis eclipſis initium ac finis, & macularum in Lunâ notarum immerſio in umbram vel emerſio ex umbrâ ex omnibus terræ locis undè conſpici poſſunt videntur, atquè ex his phænomenis differentia longitudinis locorum determinatur. His poſitis ſi ex locis duobus A & B, quorum diſtantia ADB data eſt, Phænomeni vel ſideris P in plano verticali APBT, exiſtentis altitudines apparentes & à refractionibus liberæ obſervatæ fuerint eodem tempore, inveniri poterit puncti P parallaxis & diſtantia à centro terræ PT. Nam per obſervationem altitudinis apparentis in loco A, datur angulus CAP, diſtantia apparens ſideris à vertice & indè datur angulus PAT, anguli CAP complementum ad duos rectos, eodemque modo per obſervationem in loco B factam invenitur angulus PBT. Sed dato arcu ADB, datur angulus ATB & hinc in triangulo iſoſcele ATB, dantur anguli æquales TAB & TBA. Quarè dantur etiam in triangulo ABP, anguli PAB, & PBA quos latera PA & PB efficiunt cum chordâ AB. Ergò triangula duo ABT & ABP dantur ſpecie ac proindè datur ratio PB ad BT, & quia datis angulis ABT & ABP datur angulus PBT, ductâ rectâ PT, dabuntur in triangulo PTB, angulus TBP, & ratio laterum TB & BP, atquè ideò triangulum hoc ſpecie dabitur. Innoteſcet igitur tum angulus parallacticus BPT, tùm diſtantia PT, ſeu ejus ratio ad telluris notam ſemidiametrum. Hâc igitur ratione inveniri poteſt parallaxis ſideris aut Phænomeni vel quieſcentis vel utlibet moti. Verùm Aſtronomi recentiores plures invenerunt methodos quibus unicus obſervator in eodem loco manens ſiderum



motu diurno ac proprio agitatorum parallaxes poteſt determinare. De his, ubi è re viſum fuerit, dicemus. Vid. Keill. in Introductione ad veram Aſtronomiam.

## CAPUT III.

### *De Teleſcopii ac Micrometri uſu & Phænomenis horum Inſtrumentorum beneficio obſervatis pauca.*



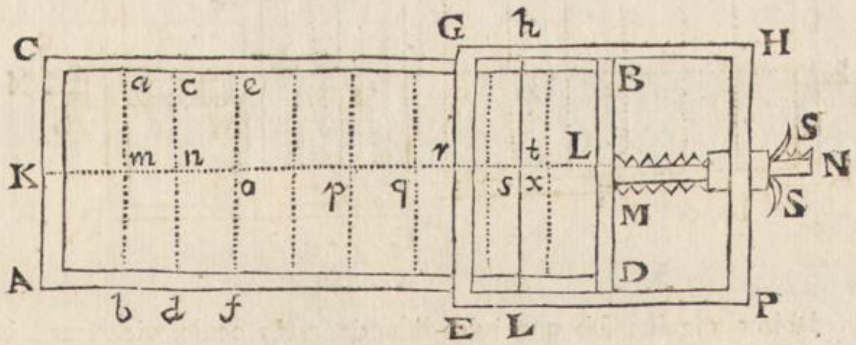

35. SIt Teleſcopium Aſtronomicum DFGE, vitrum objectivum DE, oculare FG; objectum AC; ità remotum ut radii qui ex ſingulo illius puncto in totam vitri objectivi ſuperficiem incidunt pro parallelis poſſint uſurpari. Radii illi ex eodem puncto v. gr. A propagati, à vitro objectivo ità franguntur ut poſt vitrum DE coeant in unum punctum a, quod eſt puncti A imago, & ſimiliter punctum C pingitur in c, totumque objectum AC in ac, ſitu inverſo, eſtque c a foci locus in quo proindè oculus O, trans virtum oculare FG, videt objectum AC, ſeu ipſius imaginem a c. Hinc ſi in foci loco c a poſitum ſit corpus aliquod opacum, oculus illud diſtinctè videbit tanquam objecto AC, ſeu potiùs imagini ejus a c contiguum.

36. Sit BO Radius ad AC normalis & per centra H & M vitrorum tranſiens, ideóque irrefractus. Jungatur recta AO, & objectum AB, oculo nudo videretur ſub angulo AOB, eſtque proindè angulus AOB, magnitudo apparens objecti AB. Quoniam verò radii ex punctis imaginis b & a parallelè propagati colliguntur à vitro oculari FG in ejus foco O ubi oculus verſatur, pars objecti AB, ſeu ejus imago a b, videtur ſub angulo MOL, & (per probl. 31. Element. Dioptr. Clariſſ. Wolf.) diſtantia foci lentis objectivæ Hb, eſt ab diſtantiam foci lentis ocularis b M, ut angulus MOL ad angulum AOB, ſeu ut magnitudo apparens imaginis a b ad magnitudinem apparentem objecti AB nudo oculo viſi, ex quo pa-

ret

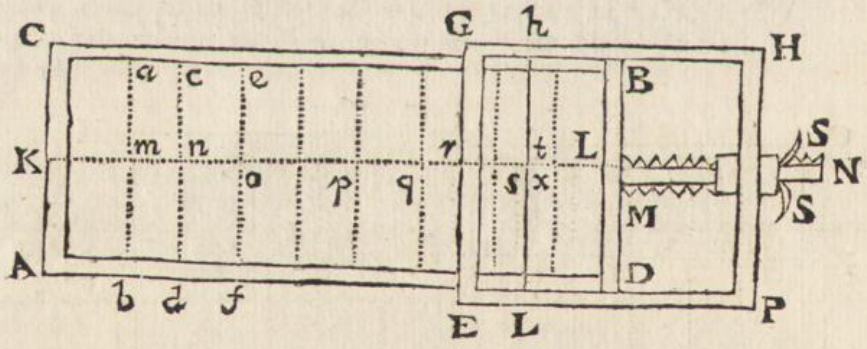
tet quod in eodem Teleſcopio magnitudines apparentes objectorum ſunt proportionales magnitudinibus imaginum in foco poſitarum & trans vitrum oculare viſarum.

37. His poſitis, facile eſt micrometri uſum intelligere. Eſt autem micrometrum inſtrumentum quod in foco lentis objectivæ teleſcopii aptatur ad magnitudines apparentes quæ gradum unum vel gradum cum ſemiſſe non ſuperant, dimetiendas. Illius conſtructionem quam D. De-la-Hire in tabulis Aſtronomicis veluti uſibus Aſtronomicis accommodatiorem dedit, referemus. Conſtat ex duobus quadris rectangulis quorum alterum ABCD, ut plurimum longitudinem habet duorum pollicum cum ſemiſſe & latitudinem unius pollicis cum ſemiſſe. Hujus quadri, latera longa AD, CB, in partes æquales & tertiâ parte unius pollicis inter ſe diſtantes dividuntur, ità tamen ut lineæ ductæ per ſingu-




las diviſiones ſint ad latera AD, CB, perpendiculares. Hiſce diviſionibus fila ſerica benè tenſa applicantur, glutinanturque cerâ. Additur filum ſericum KL, dictum tranſverſale, quod ad angulos rectos fila parallela modò deſcripta ab, cd, ef, &c. fecet & in medio laterum AC, BD glutinatur. Alterum quadrum EFGH cujus longitudo EF non ſuperat unum pollicem cum ſemiſſe, ita priori accommodatur ut ejus latera EF, GH, moveantur ſuper latera AD, CB, alterius quadri nec ab ipſo ſeparentur. Facies hujus ſecundi quadri quæ diviſam faciem prioris reſpicit, filo etiam ſerico & tenſo hL, inſtruitur, quod, cum movetur quadrum ubiquè prioris quadri filis parallelum maneat, eaque ſuperlabitur quam proximè, nec tamen eis occurrit. Cochlea deindè MN, lateri BD, longioris quadri affigitur, cujus ſtriatum receptaculum lateri FH alterius adhæret & in foramine rotundo circumvolvitur. Cochlea ejuſque receptaculum auriculis S, S inſtructum ità inter ſe aptari debent ut receptaculum & quadrum EH, ne minimùm quidem moveri poſſit, niſi receptaculi motu converſionis.

Quadrum ABCD, teleſcopii cujuſvis longitudinis tubo in diſtantiâ foci objectivæ lentis ità aptatur ut ipſius quadri planum perpendiculare ſit ad teleſcopii axem. His ità conſtitutis, teleſcopium in cœlum convertatur & ità diſponatur ut duæ ſtellæ fixæ quarum diſtantia apparens in minutis ſecundis aliundè nota ſit, ſint in filo tranſverſali KL, poſitæ verſeturque cochlea donec filum mobile hL, per centrum x, ſtellæ unius tranſeat, alterius ſtellæ centro m, vel n, exiſtente in alio filo ab, vel cd. Hâc obſervatione notum erit cuinam diſtantiæ apparenti reſpondeat longitudo mx, vel nx, in lineis & lineæ partibus data, & indè per proportionis regulam, obſervatâ quâlibet aliâ ſiderum diſtantiâ




nq, dabitur angulus ſub quo hæc diſtantia nudo oculo videretur; inferendo ſic: ut mx vel nx ad nq, ità diſtantia apparens ſtellarum duarum m, vel n, & x ad diſtantiam apparentem punctorum n & q. Moveatur jam quadrum EFGH ope receptaculi ſtriati donec filum ejus ſericum hl, exactè conveniat cuilibet ex filis parallelis alterius quadri, noteturque poſitio auricularum receptaculi & iterum moveatur receptaculum donec idem filum quadri EFGH proximo filo alterius congruat, vel, quod idem eſt, moveatur quadrum EFGH, per ſpatium quatuor linearum, numerenturque revolutiones receptaculi & partes unius revolutionis quæ filorum intervallo linearum quatuor conveniunt. Condatur tandem tabula revolutionum receptaculi & partium ejus quæ ſingulis minutis primis & ſecundis ex noto ſuperiùs toto intervallo debentur.

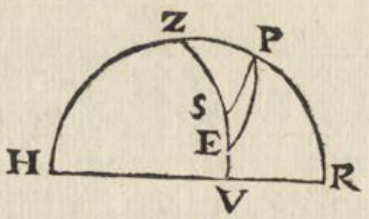
38. Ubi diameter planetarum erit obſervanda, directo teleſcopio cum micrometro ad planetam ità diſponantur fila movendo teleſcopium ut ſideris limbus unum ex filis parallelis immobilibus percurrat; deindè receptaculum convertatur, donec filum mobile limbum alterum Planetæ contingat. Manifeſtum eſt ex diſtantiâ cognitâ inter fila micrometri

quæ

quæ planetam comprehendunt, notam fieri Planetæ diametrum apparentem.

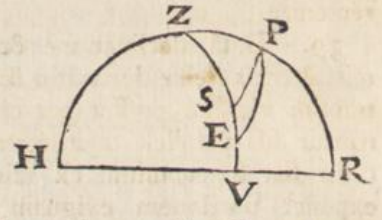
39. Datâ declinatione & aſcenſione rectâ ſtellæ fixæ, inveniri poteſt alterius ſtellæ declinatio & aſcenſio recta, modò tamen duæ illæ ſtellæ tranſire viciſſim poſſint per campum teleſcopii immoti. Ità enim diſponantur fila parallela micrometri ut motus diurnus ſtellæ quæ alteram præcedit fiat ſuper unum ex illis V G. Super a b, in quo ſitu filum c d, exponet portionem exiguam paralleli quem ſtella deſcribit, & filum K L illud ad angulos rectos interſecans, circulum aliquem declinationis. Notetur temporis momentum quo ſtella præcedens filo transverſali occurrit in m. Similiter immoto teleſcopio obſervetur tempus appulsûs alterius ſeu ſequentis ſideris ad idem filum tranſverſale ſeu circulum declinationis, & ſi intereà filum parallelum mobile h L, ſideri huic aptetur, immoto manente micrometro ope diſtantiæ m x, filorum a b & h L, diſtantiam apparentem inter parallelos ſiderum duorum quæ eſt differentia declinationis ſiderum, obtinebimus. Sed ſi differentia temporis inter utriuſque ſideris tranſitum per filum tranſverſale in minuta tam prima quam ſecunda gradûs convertatur (16) differentiam aſcenſionalem ſiderum habebimus.

40. Hæc obſervatio ſupponit nullum eſſe ſideris motum proprium nullamque parallaxim. Si ſidus motum proprium habeat, illum oportet ex obſervationibus determinare quoad declinationem & aſcenſionem rectam illiúſque rationem habere. Quo peracto, ſi aliqua ſit ſideris parallaxis poterit ità reperiri. Obſervetur ſideris ad meridianum appellentis aſcenſio recta quæ parallaxi obnoxia non eſt (33), & differentia inter hanc aſcenſionem rectam ſideris in meridiano exiſtentis & aſcenſionem rectam ejuſdem ſideris alibi exiſtentis obſervatam, erit parallaxis aſcenſionis rectæ ex qua parallaxis altitudinis inveniri poterit. Sit enim H R hotizon, H Z R meridianus, Z zenith, P polus mundi, Z S E V circulus verticalis, S ſidus obſervatum in loco S & deindè in meridiano, E locus ſideris viſus, S locus verus, & ideò S E parallaxis altitudinis; S P & P E circuli declinationis. Datur, (per hyp.) angulus S P E, cujus menſura eſt parallaxis aſcenſionis rectæ ſideris obſervata. Datur etiam punctum illud quod eſt interſectio æquatoris & meridiani tempore obſervationis ſideris in E, apparentis, undè habetur arcus æquatoris inter meridianum R Z H & circulum declinationis P E interceptus qui eſt menſura anguli Z P E. Quarè in triangulo Z P E, dantur latus Z P diſtantia poli à vertice, & latus Z E diſtantia viſa




ſideris

ſideris à vertice cum angulo ZPE. Innoteſcet igitur angulus PZE. ab angulo ZPE, ſubducatur datus SPE, & dabitur angulus ZPS. Denique in triangulo ZPS, ex datis angulis PZS & ZPS, cum latere ZP, dabitur latus ZS, vera ſideris à vertice diſtantia quæ ex visâ ZE, ablata relinquet SE parallaxim altitudinis.




41. Teleſcopium maculas quamplurimas variabiles quæ ſuper corpus Solis incedere videntur oſtendit, ex earum motu ſolem circà proprium axem 25 ½ diebus revolvi infertur. In Venere pro variâ ejus ad Solem & Terram poſitione phaſes diverſæ conſpiciuntur phaſibus Lunaribus ſimiles ità ut partem illuminatam Soli conſtanter obvertat. Prætereà Mercurius & Venus tanquam maculæ nigræ & rotundæ diſcum Solis trajicere viſi ſunt. Undè notum factum eſt Planetas illos eſſe corpora opaca à Sole illuſtrata. In Jove, Marte ac Venere maculæ obſervatæ fuerunt quarum motus rotationem illorum planetarum circà proprium axem probat. Circà Jovem quatuor revolvi videntur lunulæ Jovis corpus perpetuò comitantes. Sunt omnes ut & Jupiter ipſe corpora opaca lumen ſuum à Sole mutuantia; nam Jove inter ipſas & Solem diametraliter interpoſito, lumine privantur & cælo ſereno evaneſcunt; ubi verò aliqua Jovialis Lunula inter Solem & Jovem tranſit, ejus umbra inſtar maculæ nigræ ac rotundæ obſervatur in ipſo Jovis diſco. Quinque pariter Lunulæ Saturnum comitantur & circà eum revolutiones ſuas agunt lumineque privantur dum radii Solares à Saturni corpore opaco intercipiuntur. Hugenius ex propriis obſervationibus intulit Saturnum cingi annulo tenui, plano, nuſquam cohærente cum corpore Saturni & ad Eclipticam inclinato; quæ hypotheſis, ſi ità nunc poteſt appellari, non ſolùm Phænomenis ab Hugenio obſervatis, ſed & aliis plurimis quæ magnâ diligentiâ à Caſſino & Maraldo obſervata fuere ſatisfacit. Tandem per teleſcopium ſtellæ longè plures quam oculo nudo cernuntur; Stellæ illæ quas nebuloſas dicunt & integra via lactea nihil aliud ſunt quam plurimarum ſtellarum quæ oculo non diſtinguuntur congeries. Novæ quoque in cælis ſtellæ apparent & quæ antè videbantur, nonnunquam inconſpicuæ fiunt, illarum quædam apparitionis & diſparitionis periodos habent quæ quámdam regularitatem obtinere videntur, earumque magnitudo ſub initio apparitionis creſcit & ſub finem decreſcit.

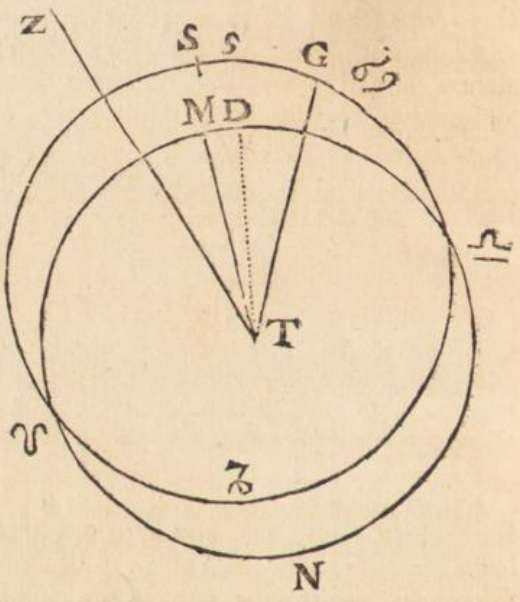
42. Si ſæpius obſervetur tum motus Solis in Ecliptica (15) tum ipſius diameter apparens (39) quam fieri poteſt accuratiſſimè, circà datum punctum in plano deſcribi poterit curva ſimilis orbitæ quam Sol circà terram percurrere videtur. Nam cum diametri Solis apparentes

ſint

ſint reciprocè ut ipſius à tellure diſtantiæ, ex datis diametris apparentibus dantur diſtantiarum rationes & ex dato Solis motu in Eclipticâ, dantur anguli inter illas diſtantias contenti. Si verò ex hujuſmodi obſervationibus conferantur diametri apparentes Solis cum ipſius angulari velocitate circà terram, apparet areas quas Sol radio ad terram ducto verrit, eſſe temporibus proportionales, Soliſque orbitam non multum differre à circulo & haberi poſſe pro ellipſi cujus umbilicum alterum occupat terra. Eſt autem Solis diameter apparens maxima 32′ 40″, & minima 31′ 36″ juxtà D. Caſſini in tabulis Aſtronomicis & ideò maxima diſtantia Solis à terrâ eſt ad diſtantiam minimam ut 32′ 40″ ad 31′ 36″, ſivè ut 1960 ad 1896 circiter, ſive 245 ad 237. Ex ſimilibus obſervationibus, tum diametri apparentis Lunæ, tum velocitatis ipſius in unâ revolutione colligitur hunc planetam radio ad centrum terræ ducto areas deſcribere temporibus circiter proportionales.

43. Si itaquè obſervetur locus Solis in Eclipticâ quandò tum ipſius velocitas tum diameter apparens minima eſt, dabitur tempore dato locus Apogæi Solis & collatis plurium annorum obſervationibus innoteſcet Apogæi motus annuus qui juxtà D. Caſſini eſt 1′ 2″ & indè per proportionis regulam habetur motus Apogæi pro quolibet dato tempore. Hinc ſi tempore quovis obſervetur Solis longitudo vera, dabitur eodem tempore locus Apogæi Solis & ipſius anomalia vera ex quâ eruetur ejuſdem anomalia media (per ſchol. ad prop. 31. lib. 1.) ac proindè longitudo media habebitur tempore obſervationis. Hæc longitudo media aſſumatur tanquam radix ſeu principium motuum mediorum Solis & tempus obſervationis tanquam epocha temporum mediorum computandorum & dato quolibet alio tempore medio inveniri poterit medius Solis motus huic tempori proportionalis, & indè habebitur ipſius longitudo media & diſtantia ejus media ab Apogæo ſeu anomalia media dabitur ex quâ deindè eruetur anomalia coæquata, ac proindè longitudo vera Solis habebitur.

44. Quia verò dies Solares ſunt inæquales (15), neceſſe eſt ut tempus apparens quod diebus ſolaribus conſtat, fluat etiam inæquabiliter. Differentia quæ eſt inter tempus apparens ſeu verum & tempus æquabile ſeu medium dicitur æquatio temporis quâ indigemus ut tempus medium convertatur in tempus apparens & viceverſâ, ideóque ut invento loco Solis pro tempore medio, inveniatur etiam pro tempore vero & contrà.




45. Sit T, Cœli & Terræ centrum T Z, planum immobile circuli alicujus horarii, ♈ M ♎ N æquator, ♈ S ♋ ♎ ♑ Ecliptica, S Sol, ♈ S Solis longitudo vera, ♈ S ejuſdem longitudo media, cui æqualis capiatur arcus æquatoris ♈ M, & ♈ D ſit Solis aſcenſio recta vera. Ducantur ad puncta mobilia M & D radii æquatoris T M & T D qui ſemper moveantur cum punctis M & D, in conſequentia. Quoniam æquator per circulum horarium T Z, motu æquabili diurno nempè qui fit ab oriente in occidentem, tranſit; ſi punctum D aſcenſionis rectæ Solis etiam æquabiliter progrederetur in æquatore ab occidente in orientem, dies Solares ſeu revolutiones ſingulæ puncti D à circulo horario T Z ad eundem, eſſent æquales & tempus apparens à medio non differret. Sed cum motus aſcenſionis rectæ D, inæquabilis ſit, dies & horæ Solares ſunt quoquè inæquales. At punctum M, æquabiliter progreditur in æquatore ab occaſu ad ortum, & ideò motus illius conſtitui poteſt pro menſurâ temporis medii. Itaque longitudo Solis media ♈ S vel æqualis eſt aſcenſioni rectæ ♈ D vel eâ major eſt aut minor. In primo caſu punctum M coincidit cum puncto D, in ſecundo caſu eſt ultrà D, versùs orientem & in tertio caſu eſt citrà D, versùs occidentem. Temporis abſoluti momentum quo punctum M, coincidit cum puncto D, ſumatur tanquam principium à quo tempus apparens & tempus medium incipiunt computari & quo ſimul coincidunt; & in aliis caſibus tempus apparens à medio differet pro quantitate arcûs M D in tempus ſolare converſi (16); Nam dum punctum D, eſt ſub meridiano T Z, horâ $12^{a}$ computatur in loco cujus meridianus eſt T Z, & ubi punctum M diſtat à puncto D, arcus M D, in tempus ſolare converſus, dabit differentiam inter meridiem apparentem & meridiem medium qui contingit quandò punctum M eſt in meridiano T Z.

46. Itaquè tempus medium in apparens ſic convertitur. Quæritur longitudo Solis tum media, tum vera tempori dato reſpondens (44) indè eruitur longitudinis veræ aſcenſio recta (14), ſi hæc major eſt mediâ Solis longitudine, differentia in tempus ſolare converſa ſubtrahitur ex tempore medio ut fiat apparens, additur ſi minor eſt. At tempus apparens in medium ità mutatur. Tempus apparens tanquam medium conſideratur, & inquiritur pro dato tempore longitudo Solis tùm media, tum vera, & indè eruitur longitudinis veræ aſcenſio recta; ſi hæc mediam Solis longitudinem ſuperat, differentia in tempus ſolare converſa additur tempori apparenti ut fiat medium. Si verò longitudinis veræ aſcenſio recta minor eſt mediâ Solis longitudine, differentia in tempus ſolare converſa à tempore apparente ſubducitur. Quod ſi media Solis longitudo æqualis ſit aſcenſioni rectæ longitudinis veræ, tempus apparens congruit cum medio nullâque eget æquatione. Hæc omnia ex modò dictis (46) manifeſta ſunt; ſi enim punctum D eſt orientalius puncto M, hoc citiùs ad meridianum T Z, pervenit quam illud, ac proindè hora 12ª temporis medii computatur, cum nondùm eſt meridies temporis apparentis, & contrarium contingit, ſi punctum D puncto M fuerit occidentalius. Ubi tempus apparens in medium oportet converti, tempore apparente utimur tanquam medio ad locum Solis inveniendum; cum enim tempus apparens non multum differat à tempore medio, differentia inter aſcenſionem rectam & longitudinem mediam Solis eſt quam proximè eadem, ſivè per tempus medium, ſivè per tempus apparens inquiratur.

47. Jam verò ſi tempore quovis apparente obſervetur Solis aſcenſio & longitudo vera, indèque eruatur ipſius longitudo media (44) ac tempus apparens convertatur in tempus medium (47) habebimus locum Solis medium pro dato temporis medii momento, & hic locus erit radix motuum Solis, momentum verò temporis medii datum epocha temporum computandorum; quibus ſemel conſtitutis ad quodlibet aliud datum tempus medium vel apparens inveniri poterit locus Solis verus vel medius in Eclipticâ & contrà. Expoſuimus jam (44) quomodò locus Solis dato tempore medio inquiratur. Si datum ſit tempus apparens, hoc tanquam tempus medium uſurpetur & quæratur locus Solis verus huic correſpondens (44); Deindè longitudini Solis ſic inventæ tantum longitudinis addatur vel dematur quantum temporis æquationi debetur & ità prodibit locus Solis tempori apparenti reſpondens. Facile eſt ex dictis problema inverſum ſolvere, ſeu ex dato loco Solis medio aut vero tempus medium aut apparens huic Solis loco reſpondens invenire.

48. Nec opus eſt ut moneamus eaſdem eſſe motuum cæleſtium apparentias, ſive cœlum omne cum ſtellis circà tellurem motu diurno revolvatur ab oriente in occidentem, ſive terra circà proprium axem eodem tempore ab occidente in orientem converti ſupponatur immoto cœlo; ſive etiam terra immota maneat & Sol proprio motu ab occaſu ad ortum feratur, ſeu circa Solem immotum terra motu annuo circumvolvatur in Eclipticâ. Nam in utrâque ſuppoſitione diametri apparentes & velocitates relativæ ſunt eædem.

# DE MUNDI SYSTEMATE.

## LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus Principia Philoſophiæ tradidi, non tamen Philoſophica ſed Mathematica tantùm, ex quibus videlicet in rebus Philoſophicis diſputari poſſit. Hæc ſunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philoſophiam maximè ſpectant. Eadem tamen, ne ſterilia videantur, illuſtravi ſcholiis quibuſdam philoſophicis, ea tractans quæ generalia ſunt, & in quibus Philoſophia maximè fundari videtur, uti corporum denſitatem & reſiſtentiam, ſpatia corporibus vacua, motumque lucis & ſonorum. Supereſt ut ex iiſdem principiis doceamus conſtitutionem ſyſtematis mundani. De hoc argumento compoſueram librum tertium methodo populari, ut à pluribus legeretur. Sed quibus principia poſita ſatis intellecta non fuerint, ii vim conſequentiarum minimè percipient, neque præjudicia deponent, quibus à multis retro annis inſueverunt: & propterea ne res in diſputationes trahatur, ſummam libri illius tranſtuli in propoſitiones, more mathematico, ut ab iis ſolis legantur qui principia prius evolverint. Verumtamen quoniam propoſitiones ibi quam plurimæ occurrant, quæ lectoribus etiam mathematicè doctis moram nimiam injicere poſſint, auctor eſſe nolo ut quiſquam eas omnes evolvat; ſufficerit ſiquis definitiones, leges motuum & ſectiones tres priores libri primi ſedulo legat, dein tranſeat ad hunc librum de mundi ſyſtemate, & reliquas librorum priorum propoſitiones hic citatas pro lubitu conſulat.

De Mundi Systemate

# REGULÆ PHILOSOPHANDI.

## REGULA I. (a).

*Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum phænomenis explicandis sufficiant.*

Dicunt utique philosophi: Natura nihil agit frustra, & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

## REGULA II.

*Ideóque effectuum naturalium ejusdem generis eædem assignandæ sunt causæ, quâtenus fieri potest.*

Uti respirationis in homine & in bestiâ; descensus lapidum in *Europâ* & in *Americâ*; lucis in igne culinari & in Sole; reflexionis lucis in terrâ & in planetis.

R E-

(a) 49. * *Regula prima.* Hæc regula duas habet partes; prima est, ne Philosophia in vana abeat opinionum commenta, causæ rerum naturalium non aliæ admitti debent quam quæ reverâ existunt & quæ phenomenis explicandis sufficiunt; unde si velimus cum evidentiâ ac certitudine philosophari, omnes hypotheses negligendæ nobis sunt; hypothesis enim si legitima est, causæ quidem possibilitatem, minime verò existentiam adstruit, cum effectus idem pluribus modis produci possit. Verumtamen ubi certitudinis obtinendæ ab Experimentis & indè Mathematicâ via procedendo spes non affulget hypothesibus quibusdam particularibus uti licet ad veritatem novis experimentis indagandam, quemadmodum Astronomi varias adhibuerunt hypotheses ut phænomena cælestia prædicere & accuratius observare, atque ità veras eorum causas conjectando investigare possent. Altera pars regulæ ea scilicet quæ præscribit non plures admittendas esse rerum naturalium causas quam quæ eorum phænomenis explicandis sufficiunt, manifesta est; nam cum vera effectûs causa per experientiam semel inventa est, & matheseos ope præsertim demonstratum est causæ illius eam esse vim quæ ad effectum producendum sufficiat, liquet aliam quamlibet causam esse inutilem.

## REGULA III.

*Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta inſtituere licet, pro qualitatibus corporum univerſorum habendæ ſunt.*

Nam qualitates corporum non niſi per experimenta innoteſcunt, ideoque generales ſtatuendæ ſunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non poſſunt, non poſſunt auferri. Certè contra experimentorum tenorem ſomnia temerè confingenda non ſunt, nec à naturæ analogiâ recedendum eſt, cum ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur. Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius à duritie partium, & inde non horum tantùm corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras meritò concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium: & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras eſſe & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas & ſibi mutuò contiguas ab invicem ſeparari poſſe, ex phænomenis novimus, & partes indiviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe (b) ex mathematicâ certum eſt. Utrum verò partes illæ diſtinctæ

(b) 50. * *Ex mathematicâ certum eſt.* Demonſtrationes paſſim reperiuntur apud eos autores qui de materiæ diviſibilitate tractant, ut ex incommenſurabilitate lateris quadrati & ejus Diagonalis &c.

De Mundi Systemate.

tinctæ & nondum diviſæ per vires naturæ dividi & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento quod particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: (c) concluderemus vi hujus regulæ, quod non ſolum partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quod indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu terræ gravia eſſe in terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & lunam gravem eſſe in terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in lunam, & planetas omnes graves eſſe in ſe mutuo, & cometarum ſimilem eſſe gravitatem in Solem, per experimenta & obſervationes aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit per hanc regulam quod corpora omnia in ſe mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex phænomenis de gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de quâ utique in corporibus cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus. Attamen gravitatem corporibus eſſentialem eſſe minimè affirmo. Per vim inſitam intelligo ſolam vim inertiæ. Hæc immutabilis eſt. (d) Gravitas recedendo à terrâ, diminuitur.

R E-

(c) * *Concluderemus vi hujus regulæ*, ſeu ex analogiâ naturæ quæ ſimplex eſſe ſolet & ſibi ſemper conſona. * Hinc patet differentia Newtonianiſmi & hypotheſeos Atomorum; Atomiſtæ neceſſario & Metaphyſicè atomos eſſe indiviſibiles volunt, ut ſint corporum Unitates; Metaphyſicam hanc quæſtionem miſſam facit Newtonus, & huc redit ejus ſententia, ſi illæ partes quas Deus condidit indiviſas, quæque ideo ſunt corporum Phyſica Elementa ſeu Phyſicæ Monades, frangendo dividerentur, tunc exinde edocti, ſtatueremus eas poſſe dividi, ideoque ulterius ulteriuſque ſine fine diviſibiles eſſe diceremus, omnem hâc de re Theoriam Metaphyſicam experimentis facile poſtponentes. Hæc etiam fluunt ex Lockii, de ratione quâ agnoſcimus qualitates eſſentiales, Doctrinâ; Ignoramus planè, inquit ille, quænam qualitates cum ſubjecti natura ſint conjunctæ ſi rem Metaphyſicè ſpectemus; ſed fit ut experientiâ Magiſtrâ, has aliaſve qualitates ad univerſa ſubjecta quæ ad eamdem Claſſem referimus pertinere deprehendamus, aut ſaltem ad omnia in quæ experimenta inſtituere licuit & eas eſſentiales dicere lubuit. Hinc infert Newtonus, eadem iſtâ regulâ quâ utimur vulgo ad agnoſcendas eas qualitates, eâdem etiam regulâ in rebus Philoſophicis uti debemus ubi experientiâ quidem, ſed minus obviâ ac vulgari, ſimilem Inductionem inſtituere dabitur. Adjungit quidem præter eam Inductionem, caracterem hunc Metaphyſicum, ut illæ qualitates intendi ac remitti nequeant, etenim qualitates quæ remitterentur, gradatim eâdem ratione quâ remittuntur, aboleri poſſent, ſicque Univerſorum corporum qualitates non amplius forent.

(d) * *Gravitas recedendo a terrâ diminuitur*, ut infrà demonſtrabitur.

## REGULA IV.

*In Philoſophiâ experimentali, propoſitiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, pro veris aut accuratè aut quamproximè haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ aut accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.*

(e) Hoc fieri debet ne argumentum inductionis tollatur per hypotheſes.

(e) * *Hoc fieri debet.* Hanc regulam in quæſtionibus opticis hoc fere modo exponit Newtonus. In Phyſicis non ſecus ac in Mathematicis Scientiis, ad res difficiles inquirendas methodus analytica priùs eſt uſurpanda quam ſynthetica methodus in auxilium vocetur. Hæc prima methodus in eo poſita eſt ut adhibeantur experimenta atquè obſervationes ex quibus deindè per inductionem concluſiones generales deducantur, non obſtantibus contrariis hypotheſibus, niſi eas aliquo experimento aut certâ aliquâ veritate nixas eſſe contigerit. Nam quod hypotheſes ſpectat, eæ in Philoſophiâ experimentali locum habere non debent. Quamvis ratiocinia ab experimentis & obſervationibus per inductionem deducta ad ſtabiliendas modo demonſtrativo concluſiones generales ſatis non ſint, hic tamen ratiocinandi modus eſt omnium quos rerum naturâ admittere poſſit optimus, iſque eò tutior reputari debet quo generalior eſt inductio; Si autem nulla repugnaverint phænomena, generalem concluſionem deducere licebit. Sin verò deinceps contraria occurrant phænomena, exceptionibus neceſſariis limitanda erit atquè reſtringenda concluſio. Hujus analyſeos auxilio à compoſitis ad ſimplicia, à motibus ad vires producentes, & generatim ab effectibus ad eorum cauſas perveniri poteſt. Quod ad ſyntheſim pertinet, hæc cauſas cognitas atquè probatas tanquam principia aſſumit quorum ope phænomena inde nota explicantur. 50.

De Mundi Systemate.

# PHÆNOMENA.

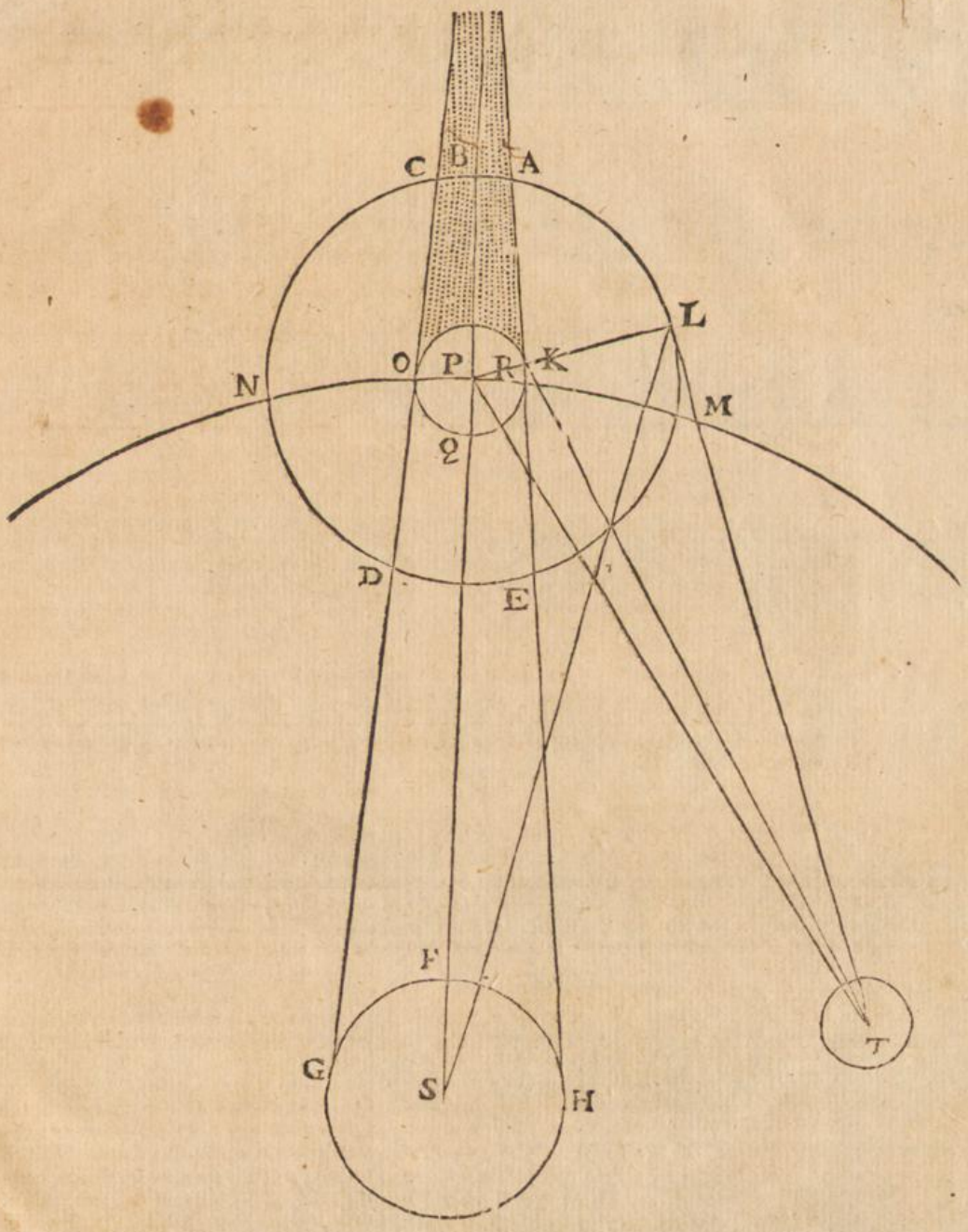
## PHÆNOMENON I.

(f) *Planetas circumjoviales, radiis ad centrum jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica, stellis fixis quiescentibus, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum ab ipsius centro.*

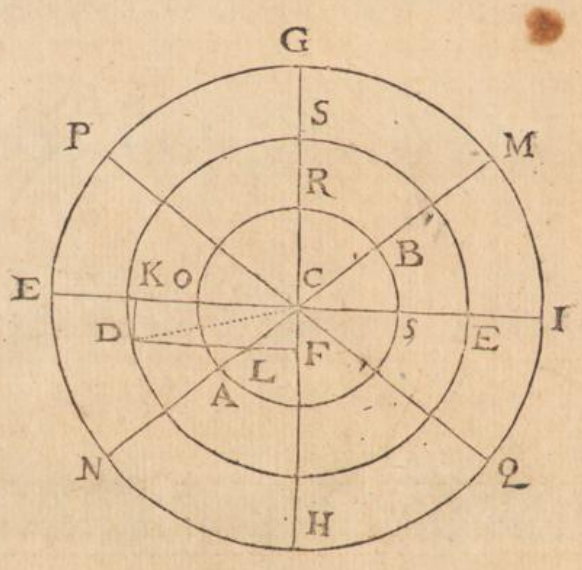
(f) 51. * *Planetæ circumjoviales.* Lemma ..... Satellitum Jovis & Saturni orbes ac motus determinare.

Sit HFGH Sol, cujus centrum S, T Terra; KOQ Jupiter vel Saturnus circà Solem S describens orbitam M P N, ACDEL orbita satellitis; radii Solis extremi GO, HR paulo plusquam dimidium planetæ P illustrant, & producti umbram conicam R A C O terminant, cujus axis est recta SPB per Solis & Planetæ centra transiens. Dum satelles in orbitâ suâ L C D E girans, conum umbrosum attingit in A, in umbram immergitur & cessat videri; deindè ex umbrâ emergens in C rursus apparet. Attamen satellitum Saturni, ob nimiam illorum à Sole & Tellure distantiam, eclipses observari huc usquè non potuerunt, sed omnium satellitum Jovis eclipses è terrâ conspici possunt, cum hoc tamen discrimine quod immersiones & emersiones quarti & tertii & nonnunquam secundi in eâdem eclipsi cernantur, primi verò immersio tantum vel emersio observari possit. Sit jam satelles in L, & ductis è terrâ T rectis T P, T L, angulus P T L, dicitur elongatio seu digressio geocentrica satellitis L à Planetâ primario P. Ducatur etiam recta T K discum primarii Planetæ tangens in K, & angulus P T K erit semidiameter primarii è tellure visâ seu apparens, ideóque elongatio geocentrica erit ad semidiametrum apparentem ut angulus P T L ad angulum P T K. Observatis pluribus hujusmodi elongationibus geocentricis & semidiametris apparentibus, iisque inter se collatis, inveniuntur elongationes maximæ ubi ratio anguli P T L ad angulum P T K maxima est, & hoc modo observatum est elongationes maximas geocentricas ejusdem satellitis in variis orbitæ suæ locis æquales esse inter se quam proximè, ideóque satellites describunt circulos Planetæ primario concentricos. Quia ergò, ubi elongatio maxima est, P K est quamproximè ad P L, ut angulus P T K ad angulum P T L, ob datam rationem horum angulorum & datam quoquè semidiametrum P K, datur & P L, seu distantia satellitis à centro primarii. Angulus P S L sub quo è centro Solis S videretur distantia satellitis à centro primarii P, dicitur ejus elongatio heliocentrica quæ maxima est, cum angulus S P L rectus est. Quia verò P L data est, elongationes maximæ heliocentrica & geocentrica æquales sunt, ubi planeta P à Sole & terrâ æquè distat.

Cognitis orbitarum diametris, tempora periodica satellitum inveniri possunt per eorum eclipses maximæ durationis, atquè etiam per transitum satellitis aut umbræ illius per medium discum Planetæ primarii. Nam cum radius circuli sit æqualis arcui grad. 57.29578, (lib. 1. not. 372.) & data sit ratio radii P L ad diametrum Planetæ primarii O R, erit quamproximè ut P L ad O R, ità gradus 57.29578 ad numerum graduum arcûs exigui C A, qui ferè æqualis est diametro O R, ob parallelas O C, R A. Fiat deindè ut numerus graduum aut partium gradûs C A vel O R ad gradus 360, ità tempus quo describitur C A vel O R ad tempus periodicum satellitis, quod ità dabitur. Suppositâ Theo-


C
B
A
L
O
P
R
K
N
M
Q
D
E
F
G
S
H
T

DE MUNDI SYSTEMATE. Theoriâ primarii Planetæ per obſervationes determinatâ, tempora periodica inveniuntur menſurando intervalla temporis inter duas ſatellitum conjunctiones, vel etiam inter duas digreſſiones maximas.




52. 52. Satellitum à centro Jovis diſtantias obſervandi & in diametri partibus æſtimandi triplicem methodum deſcribit Clariſſ. Caſſinus in Elementis Aſtronomiæ anno 1740. editis.

1°. Sit ARB Jupiter, DSED orbita ſatellitis, micrometro capiatur diameter Jovis AB, deinde ubi ſatelles in maximâ elongatione verſatur, capiatur diſtantia DC, inter centrum Jovis C, & ſatellitem D, quo facto, diſtantia DC, conferatur cum diametro Jovis, habebitur diſtantia ſatellitis à centro Jovis in partibus diametri.

2°. Adhibendum eſt teleſcopium in cujus foco aptantur fila quatuor, quorum duo GH, EI ſeſe perpendiculariter ſecent, reliqua duo NM, PQ his ad angulos ſemirectos inſiſtant in communi ſectione C. Quibus ità paratis dirigatur teleſcopium & continuò vertatur, donec centrum Jovis C, motu diurno unum ex his filis, putà EI, percurrere videatur, in quo ſitu filum GH circulum aliquem horarium repræſentabit. Obſervetur deinde differentia temporis inter appulſum centri Jovis & appulſum ſatellitis in maximâ ſuâ elongatione verſantis ad eundem circulum horarium GH, differentia temporis convertatur in gradus & minuta, ità ut quatuor minutis horariis reſpondeat gradus unus, habebitur portio DF vel KC, circuli paralleli Jovis. Obſervetur etiam differentia temporis inter appulſum ſatellitis ad L, & appulſum ad F, quæ differentia ſimili modo in gradus circuli paralleli graduumque partes convertatur, habebitur LF, cui æqualis eſt FC, ob angulos LCF, FLC, ſemirectos. Datis verò DF & FC, datur DC. Jam conferatur DC, cum diametro Jovis AB vel OS, cujus diametri menſura habebitur, ſi tempus quo diameter per filum horarium GH, tranſit in gradus & minuta convertatur, utriuſque diametri DC, OC obtinebitur ratio, & eorumdem abſoluta magnitudo in gradibus circuli maximi ſphæræ habebitur, gradibus circuli paralleli Jovis ad gradus circuli maximi reductis, dicendo, ut radius circuli maximi ad radium paralleli, ità numerus graduum & minutorum in arcu circuli paral-

Conſtat ex obſervationibus aſtronomicis. (g) Orbes horum planetarum non differunt ſenſibiliter à circulis jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora verò periodica eſſe in ſeſquiplicatâ ratione ſemidiametrorum orbium conſentiunt aſtronomi; & idem ex tabulâ ſequente manifeſtum eſt.

(h) *Satellitum jovialium tempora periodica.*

$1^d.18^h.27'.34''$ $3^d.13^h.13'.42''$. $7^d.3^h.42'.36''$. $16^d.16^h.32'.9''$.

(i) *Diſtantiæ ſatellitum à centro jovis.*

| *Ex obſervationibus.* | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| Borelli | $5\frac{2}{3}$ | $8\frac{2}{3}$ | 14 | $24\frac{2}{3}$ | Semidiam. Jovis |
| Townlei *per microm.* | 5,52 | 8,78 | 13,47 | 24,72 | |
| Caſſini *per teleſcop.* | 5 | 8 | 13 | 23 | |
| Caſſini *per eclipſ. ſatell.* | $5\frac{2}{3}$ | 9 | $14\frac{23}{60}$ | $25\frac{1}{10}$ | |
| (l) *Ex temporibus periodicis.* | 5,667 | 9,017 | 14,384 | 25,299 | |

Elon-

paralleli ad numerum graduum & minutorum in arcu circuli maximi. Nam in circulis inæqualibus, gradus qui æqualibus arcubus continentur eſſe reciproce ut circulorum radios ex elementis patet.

3°. In Eclipſibus Satellitum centralibus, dum nempe duratio eſt omnium maxima, obſervetur tempus quod ab ingreſſu centri ſatellitis in diſcum Jovis uſque ad illius egreſſum interfluxit. Deinde fiat, ut tempus periodicum ſatellitis ad tempus moræ in diſco Jovis, ità 360° ad quartum proportionalem, hoc eſt, ad gradus quos continet arcus æqualis diſco Jovis ſatellitis orbitæ applicato. Iterum (ex trigon.) inferatur, ut ſinus ſemiſſis ejuſdem arcûs ad ſinum totum, ità ſemidiameter Jovis ad ſemidiametrum orbitæ ſatellitis, ideóque comparari poterit ſemidiameter Jovis cum ſemidiametro orbitæ ſatellitis, hoc eſt, cum diſtantiâ ſatellitis à centro ac proindè habebitur diſtantia ſatellitis à centro Jovis in partibus ſemidiametri Jovis.

Quod Saturnum ſpectat, ſolis oculis Teleſcopio adjutis diſtantias ſatellitum à centro Saturni cum diametro annuli comparare ſolent Aſtronomi. 52.

(g) * *Orbes horum planetarum* (51).

(h) * *Satellitum Jovialium tempora periodica* (ibid.).

* In noviſſimo Caſſini Opere ſuprà laudato tempora Periodica paulo majora conſtituuntur, ſcilicet, primus Satelles, $62^h$, $2^{us}$. Sat., $4'$ $12''$; $3^{us}$. Sat., $17^h$; $4^{us}$. Sat., $1^h$, $32'$, $58''$, tardius revolutiones ſuas abſolvere ſtatuuntur; illæ autem differentiæ totius temporis Periodici reſpectu minimæ ſunt, maximæ enim differentiæ non excedunt trecenteſimam partem durationis totius revolutionis.

(i) * *Diſtantiæ ſatellitum à centro Jovis* (52).

(l) * *Ex temporibus periodicis.* Newtonus computum inìit hoc modo. Aſſumpſit diſtantiam obſervatam primi Satellitis $5\frac{2}{3}$, ſeu 5'667, & deindè per tempora periodi-

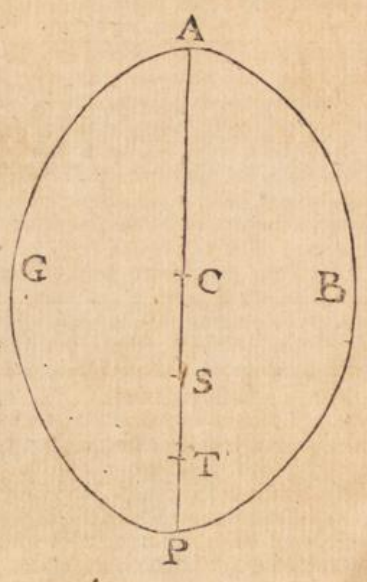
DE MUNDI SYSTEMATE.

Elongationes ſatellitum jovis & diametrum ejus D. *Pound* micrometris optimis determinavit ut ſequitur. (m) Elongatio maxima heliocentrica ſatellitis quarti à centro jovis micrometro in tubo quindecim pedes longo capta fuit, & prodiit in mediocri jovis à terrâ diſtantiâ $8'.\ 16''$ circiter. Ea ſatellitis tertii micrometro in teleſcopio pedes 123 longo capta fuit, & prodiit in eadem jovis à terrâ diſtantiâ $4'.\ 42''$. Elongationes maximæ reliquorum ſatellitum in eâdem jovis à terrâ diſtantiâ ex temporibus periodicis prodeunt $2'.\ 56''.\ 47'''$, & $1'.\ 51''.\ 6'''$.

Diameter jovis micrometto in teleſcopio pedes 123 longo ſæpius capta fuit, & (n) ad mediocrem jovis à ſole vel terrâ

52. riodica etiam obſervata quæſivit aliorum Satellitum diſtantias, ſupponendo quadrata temporum periodicorum cubis diſtantiarum proportionalia. Nam ſi Logarithmi temporum periodicorum primi & ſecundi Satellitis dicantur $l$, $L$, & Logarithmi diſtantiarum $d$, $D$, erit $2l$ ad $2L$, arithmetice ut $3d$ ad $3D$, ideóque $2l + 3D = 2L + 3d$, unde invenitur $D = d + \frac{2L}{3} - \frac{2}{3}l$. Eſt autem $d = 0{,}7533532$, $\frac{2}{3}L = 2{,}3245791$, & $\frac{2}{3}l = 2{,}1228512$, quare habetur $D = 0{,}955093$, cui reſpondet numerus 9,07, uti Newtonus invenit; & ità inveniuntur cæterorum Satellitum diſtantiæ per eorum tempora periodica.

(m) 53. * *Elongatio maxima heliocentrica* ſatellitis in mediocri Jovis à Sole diſtantiâ æqualis eſt ipſius elongationi maximæ geocentricæ in mediocri diſtantiâ ejuſdem Jovis à Terrâ. Sit enim A B P G orbita Jovis, Sol in S, A aphelium Jovis; P perihelium, T Terra, erit A S maxima diſtantia Jovis à Sole, S P minima; A T verò maxima diſtantia Jovis à Terrâ, P T minima, & ideò mediocris diſtantia Jovis à Sole ſeu $\frac{1}{2}$ A P $= \frac{1}{2}$ A S $+ \frac{1}{2}$ S P, & mediocris diſtantia Jovis à Terrâ erit $\frac{1}{2}$ A T $+ \frac{1}{2}$ T P $= \frac{1}{2}$ A P. Quare duæ illæ mediocres diſtantiæ ſunt æquales, ideóque elongationes maximæ heliocentricæ & geocentricæ in mediocribus illis diſtantiis ſunt etiam æquales.




(n) 54. * *Et ad mediocrem Jovis à Sole.* Datur poſitio lineæ ducta ab oculo ſpectatoris ad Jovem tempore obſervationis,

râ distantiam reducta, semper minor prodiit quam 40″, nunquam minor quam 38″, sæpius 39″. In telescopiis brevioribus hæc diameter est 40″ vel 41″. (o) Nam lux jovis per inæqualem refrangibilitatem nonnihil dilatatur, & hæc dilatatio minorem habet rationem ad diametrum jovis in longioribus & perfectioribus telescopiis quam in brevioribus & minus perfectis. Tempora

nis, & per theoriam Solis, datur etiam positio lineæ ductæ ab oculo ad Solem (47) eodem tempore; undè datur angulus his duabus lineis interceptus, seu elongatio Jovis à Sole. Insuper datur, per theoriam Jovis, locus ejus in propriâ orbitâ, & ideò notus est angulus quem comprehendunt duæ lineæ à centro Solis ductæ ad Jovem & ad Terram seu oculum observatoris. In triangulo igitur ex tribus illis lineis facto cujus angulus unus est in oculo spectatoris seu in Terrâ, alter in Sole & tertius in Jove, dantur anguli omnes & exinde datur ratio laterum seu ratio distantiæ Jovis à Sole ad distantiam Jovis à Terrâ tempore observationis. Datur verò, per theoriam Jovis ex observationibus constitutam, ratio distantiæ Jovis à Sole tempore observationis ad ipsius distantiam mediocrem à Sole vel à Terrâ. Quare datur ratio distantiæ Jovis à Terrâ tempore observationis ad distantiam ejus mediocrem à Sole vel à Terrâ. Sed diametri apparentes Jovis è Terrâ visi sunt inter se inversè ut distantiæ Jovis à Terrâ, dabitur itaque ratio diametri apparentis tempore observationis ad diametrum apparentem in mediocri distantiâ Jovis à Terrâ vel Sole.

(o) 55. * *Nam Lux Jovis.* Newtonus prop. 7. lib. 1. optices experimentis & calculo invenit quod, si ex puncto lucido in axem telescopii posito ad ingentem distantiam, radii in vitrum objectivum incidant axi paralleli, distincta & minima hujus puncti imago in vitri foco depicta, est circulus, non verò punctum ut esse deberet, obstante nimirum non tantum vitri sphæricitate, sed præcipuè radiorum inæquali refrangibilitate quâ Lux ea dilatatur. Nam in vitro plano convexo cujus convexitas puncto lucido obvertitur cujusque sphæricitas diametrum habet 100 ped. seu 1200 digit. apertura verò 4 digit. diameter circelli qui ex vitri sphæricitate oritur erit ad diametrum ejusdem circelli maximè distincti qui ex inæquali refrangibilitate provenit ut $\frac{961}{72000000}$ ad $\frac{4}{250}$, seu ut 1 ad 1200; distincta siquidem ejus puncti lucidi imago & maximè splendida continet partem 250am. aperturæ vitri objectivi optimè elaborati, neglectâ luce debili & subobscurâ quæ imaginem illam circumdat. Undè in Telescopio cujus apertura est 4 digit. & longitudo 100 ped. hujus imaginis diameter trans vitrum oculare visa occupat 2″ 45‴ vel 3″, & in Telescopio cujus apertura est duorum digitorum & longitudo 20 aut 30 ped. occupabit imago 5″ vel 6″. Itaque in Telescopio optimo Hugeniano 123 ped. error erit circiter 2″ in minoribus major.

55.

* In Telescopiis autem rectè constitutis sive secundum Theoriam Prop. 56. Dioptrices Hughenii, id curatur ut aberratio lucis circa imaginem puncti lucidi æquale occupet spatium super retinâ, sed imago ipsius objecti in Telescopiis majoribus majus occupat spatium in retina idque secundum rationem Radicum quadratarum longitudinis Telescopiorum, Ergo lux erratica quæ dilatat objecti imaginem ab utraque ejus extremitate, minorem habet rationem ad illius objecti apparentiam in majoribus Telescopiis quam in minoribus, in ratione nempe inversâ Radicum quadratarum longitudinis Telescopiorum.

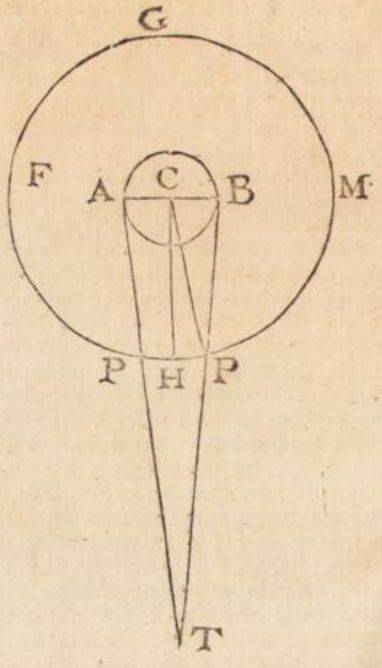
Hæc omnia ex Doctrina Newtonianâ circa colores ita jam sunt cognita ut ea fusius & accuratius demonstrare necessarium non judiçemus.

De Mundi Systemate.

pora quibus satellites duo, primus ac tertius, transibant per corpus jovis, ab initio ingressus ad initium exitus, & ab ingressu completo ad exitum completum, observata sunt ope telescopii ejusdem longioris. Et (P) diameter jovis in mediocri ejus à terrâ distantiâ prodiit per transitum primi satellitis $37\frac{1}{8}''$, & per transitum tertii $37\frac{1}{8}''$. Tempus etiam quo umbra primi satellitis transiit per corpus jovis observatum fuit, & inde diameter jovis in mediocri ejus à terrâ distantiâ prodiit $37''$ circiter. Assumamus diametrum ejus esse $37\frac{1}{4}''$ quamproximè; & elongationes maximæ satellitis primi, secundi, tertii, & quarti æquales erunt semidiametris jovis 5,965, 9,494, 15,141, & 26,63 respectivè.

PHÆ-

56. 56. Hugenius planetarum lucem obstaculo quodam intercipiens majores invenit planetarum diametros quam ab aliis micrometro definitum est; nam lux erratica, ubi tegitur planeta, vividioribus radiis minus extenuatur, ideóque latius propagari videtur. Contrariam ob causam fit quod planetæ in Sole visi, dilatatâ luce non parum attenuentur. Mercurius in Sole Hevelio, Galletio & Halleio observantibus, non superavit 12″ vel 15″, & Venus Crabtrio solum 1′ 3″, Horroxio 1′ 12″ occupare visa est, quæ tamen juxtà mensuras Hevelii & Hugenii extrà discum Solis captas implere debuisset 84″ ad minimum. Sic & Lunæ diameter apparens quæ anno 1684, paucis diebus ante & post Eclipsim Solis mensurata fuit in observatorio Parisiensi 31′ 30″, in ipsâ Eclipsi non superabat 30′ vel 30′ 5″. Quare patet diametros planetarum extrà Solem minuendas esse & intrà Solem augendas minutis aliquot secundis.




(P) 57. * *Et diameter Jovis in mediocri &c.* Sit T tellus, AB diameter Jovis, PFGM orbita satellitis, ductis è terrâ radiis TA, TB fere parallelis, dum satelles describit arcum Pp, videbitur è terrâ describere diametrum Jovis AB cui æqualis est arcus Pp quamproximè, propter distantiæ TP magnitudinem. Datis autem tempore periodico & tempore quo describitur Pp, datur ratio Pp ad totum circulum, seu datur arcus Pp, in gradibus vel partibus gradûs, & inde datur dimidius arcus PH, hincque habetur angulus PCH seu APC. Jam verò datur PC ob datas per observationem elongatio-

## PHÆNOMENON II.

*Planetas circumſaturnios, radiis ad ſaturnum ductis, areas deſcribere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum ab ipſius centro.*

(†) *Caſſinus* utique ex obſervationibus ſuis diſtantias eorum à centro Saturni & periodica tempora hujuſmodi eſſe ſtatuit.

*Satellitum ſaturniorum tempora periodica.*

$1^d. 21^h. 18'. 27''.$ $2^d. 17^h. 41'. 22''.$ $4^d. 12^h. 25'. 12''.$
$15^d. 22^h. 41' 14''.$ $79^d. 7^h. 48'. 00''.$

*Diſtantiæ ſatellitum à centro Saturni in ſemidiametris annuli*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Ex obſervationibus* | $1\frac{19}{20}$. | $2\frac{1}{2}$. | $3\frac{1}{2}$. | 8. | 24. |
| *Ex temporibus periodicis.* | 1,93 | 2,47. | 3,45. | 8. | 23,35. |

Quarti ſatellitis elongatio maxima à centro Saturni ex obſervationibus colligi ſolet eſſe ſemidiametrorum octo quamproximè.

gationes maximas ſatellitum à centro Jovis in mediocri Jovis à Tellure diſtantiâ; quare ſi fiat AB ad PC ut duplus ſinus anguli dati PCH, ad ſinum totum, dabitur (ex trig.) diameter apparens Jovis ſeu angulus ATB, ſub quo videtur in mediocri ejus à Tellure diſtantiâ. Eodem modo patet determinari diametrum Jovis per tranſitum umbræ hanc diametrum percurrentis.

(†) *Caſſinus unique &c.* Hæc ex Philoſophicis Tranſactionibus n. 187. ſunt deprompta: Exigua quædam eſt horum differentia à numeris quos in Elementis Aſtronomiæ aſſignat Caſſinus filius, ille ita determinat ſatellitum Sat. Tempora Periodica, & diſtantias.

| | | |
|---|---|---|
| Primi | $1^d. 21^h. 18'. 27''.$ | 1. 933. &c. |
| Secundi | $2^d. 17^h. 44'. 22''.$ | 2. 5. |
| Tertii | $4^d. 12^h. 25'. 12''.$ | 3. 5. |
| Quarti | $15^d. 22^h. 34'. 38''.$ | 8. |
| Quinti | $79^d. 7^h. 47'. 0''.$ | 23. paulo plus. |

Obſervat autem primi & ſecundi ſatellitis diſtantias à Saturno æſtimatione ſolummodo potuiſſe determinari; motibus verò eorum ſatis accuratè nunc cognitis ex unius nempe quarti cognitâ diſtantiâ 8 ſemi-Diametrorum annuli per Regulam Kepleri reliquorum diſtantias poſſe exquiri, atque ita inveniri.

| | | |
|---|---|---|
| Diſtantia primi | 1. | 93. |
| Secundi | 2. | 47. |
| Tertii | 3. | 45. |
| Quarti (ex obſervat.) | 8. | |
| Quinti | 23. | 23. |

Quæ quidem, inquit, adeò congruunt cum obſervationibus immediatis ut ſine errore ſenſibili adhiberi poſſint. *Elem. Aſt. Tom. I. pag. 640. & ſeq.*

mè. At elongatio maxima ſatellitis hujus à centro ſaturni, micrometro optimo in teleſcopio Hugeniano pedes 123 longo capta, prodiit ſemidiametrorum octo cum ſeptem decimis partibus ſemidiametri. Et ex hâc obſervatione & temporibus periodicis, diſtantiæ ſatellitum à centro ſaturni in ſemidiametris annuli ſunt 2,1. 2,69. 3,75. 8,7. & 25,35. Saturni diameter in eodem teleſcopio erat ad diametrum annuli ut 3 ad 7, & diameter annuli diebus Maii 28 & 29 anni 1719. prodiit 43″. Et (q) inde diameter annuli in mediocri ſaturni à terrâ diſtantiâ eſt 42″, & diameter ſaturni 18″. (r) Hæc ita ſunt in teleſcopiis longiſſimis & optimis, propterea quod magnitudines apparentes corporum cœleſtium in longioribus teleſcopiis majorem habeant proportionem ad dilatationem lucis in terminis illorum corporum quam in brevioribus. Si rejiciatur lux omnis erratica, manebit diameter ſaturni haud major quam 16″.

PHÆ-

57. (q) * *Et indè diameter annuli.* Quia diametri apparentes ſunt in diſtantiarum ratione reciprocâ, datis diametro annuli diebus Maii 28 & 29 anno 1719, & diſtantiâ Saturni à terrâ iiſdem diebus datâ (per theoriam planetæ) dabitur quoque diameter annuli in datâ mediocri diſtantiâ Saturni à terrâ, hæc autem diameter prodiit 42″; ſed Saturni diameter erat ad diametrum annuli ut 3. ad 7 (per obſ.) quare diameter Saturni in mediocri à terrâ diſtantiâ eſt 18″.

(r) * *Hæc ità ſunt* (55). * Si in hoc Teleſcopio Lux erratica ſubtendat angulum duorum ſecundorum, fiet diameter annuli 40″ & Saturni 16″ ut revera ſint in ratione 5 ad 2. hinc autem ut id obiter notemus cum Parallaxis Solis in diſtantiâ terræ mediocri à Sole ſit 10″ ſive diameter Tellutis à Sole tunc viſa ſit 20″, diſtantia verò mediocris terræ à Sole ſit ad mediocrem diſtantiam Saturni à Terrâ vel à Sole, quod idem eſt (n. 53.) ut 100 ad 954, hinc Diameter terræ erit ad Diametrum annuli ut 100 ad 1908, ſive ut 1 ad 19 & ad Diametrum ipſius Saturni ut 1 ad $7\frac{3}{5}$.

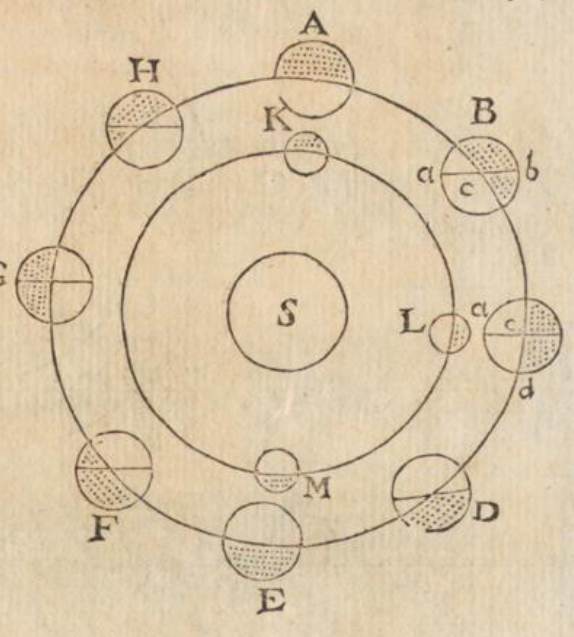
Pariter, cum Diameter Jovis in mediocri ejus à Sole diſtantiâ ſit $37\frac{1}{4}''$ ſitque mediocris diſtantia terræ ad mediocrem diſtantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52; erit Diameter terræ, ad Diametrum Jovis ut 1 ad $\frac{52\times37\frac{1}{4}}{200}$. Sive ut 1 ad 9. 685; ſicque Diameter Jovis eſt circiter dimidia Diametri annuli Saturni & eſt ad ipſius Saturni Diametrum ut 5 ad 4. Solis autem Diameter vera eſt circiter Decupla Diametri Jovis.

## PHÆNOMENON III.

*Planetas quinque primarios mercurium, venerem, martem, jovem & ſaturnum orbibus ſuis ſolem cingere.*

Mercurium & venerem circa ſolem revolvi ex (f) eorum phaſibus lunaribus demonſtratur. Plenâ facie lucentes ultra ſolem ſiti ſunt; dimidiatâ è regione ſolis; falcatâ cis ſolem, per diſcum

57.





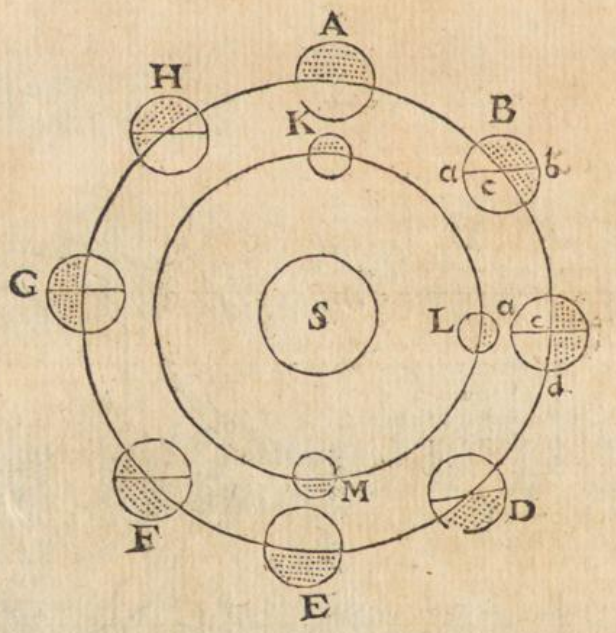


(f) * *Ex eorum phaſibus Lunaribus.* Si Veneris faciem teleſcopio contemplemur, in unâ ejus conjunctione cum Sole plenâ facie fulgere cernitur, deindè phaſes habere phaſibus Lunaribus ſimillimas partemque illuminatam Soli conſtanter obvertere videtur. Dum verò ad alteram conjunctionem cum Sole pervenit, tenebris obvolvitur & nonnunquam per diſcum Solis ad modum maculæ nigræ & rotundæ tranſit, nunquam verò Soli opponitur neque ab eo digreditur ultrà gradus 47. Eadem ferè de Mercurio obſervantur quantùm licet per ejus exiguitatem cum hoc tamen diſcrimine quod ejus elongationes maximæ à Sole 28 gradus nunquam ſuperent. Sunt igitur Venus & Mercurius corpora opaca & rotunda quorum pars circiter dimidia Soli obverſa illuſtratur & pars altera à Sole averſa lumine privatur. Undè cum Venus & Mercurius in unâ conjunctione in E vel M hemiſphærium obſcurum telluri T obvertant, hemiſphærium verò illuſtratum Soli S, neceſſe eſt ut in illâ conjunctione inter ſolem & tellurem conſtituantur; è contrà ubi in alterâ proximè ſequenti conjunctione in A vel K verſantur, totam faciem illuſtratam & Soli obverſam è tellure T, obſervamus, hinc neceſſe eſt ut tunc temporis Sol S, inter ipſos atquè tellurem T poſitus ſit. Ubi verò Venus aut Mercurius à Sole digreditur, primum gibboſa apparet, tum dimidiatâ facie lucet, poſteà falcata fit & denique tota obſcuratur ut in locis B, C, D, E, & contrariâ ratione ſplendeſcere in locis, F, G, H, videtur. Si verò ex tellure T, ad Veneris centrum ducatur linea recta ad quam ducatur planum perpendiculare a b, per centrum Veneris tranſiens, ea pars tantum apparet quæ eſt inter planum a c, & planum c d, undè cum projectio plani C c d, ſit ellipſis, hinc gibboſa apparet planetæ pars viſa in B, in C dimidiata & in D, falcata &c., quia à puncto A,

DE MUNDI SYSTEMATE.

discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex martis quoque plenâ facie prope solis conjunctionem, & gibbosâ in quadraturis, certum est, quod is solem ambit. De jove etiam & saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur: hos enim luce à sole mutuatâ splendere ex umbris satellitum in ipsos projectis manifestum est.

PHÆ-




T

57. Conjunctionis superioris cum Sole, elongatio seu angulus ATB, crescit usquè ad situm C è regione Solis, ubi digressio maxima est & deinde decrescit in D, atque evanescit in E, ac postea rursùs crescit usquè ad G, ac deindè decrescit & denique rursùs evanescit in A. Evidens ergò est quod Venus & Mercurius circà Solem revolvantur in orbitis quæ tellurem excludunt. Jam cum maximæ elongationes Veneris à Sole majores sint elongationibus maximis Mercurii, necesse est ut orbita Veneris orbitam Mercurii complectatur.

Mars, Jupiter & Saturnus Soli S oppositi, è tellure M in E plenâ facie lucentes conspiciuntur, ideóque tellus tunc temporis inter solem & planetas illos collosa-

## PHÆNOMENON IV.

*Planetarum quinque primariorum, & vel ſolis circa terram vel terræ circa ſolem tempora periodica, ſtellis fixis quieſcentibus, eſſe in ratione ſeſquiplicatâ mediocrium diſtantiarum à ſole.*

Hæc à *Keplero* inventa ratio in confeſſo eſt apud omnes. (t) Eadem utique ſunt tempora periodica, eædemque orbium dimenſiones, ſive ſol circa terram, ſive terra circa ſolem revolvatur. Ac de menſurâ quidem temporum periodicorum convenit inter aſtro-

lócatur. At verò in conjunctione ut in A, iidem planetæ pleno orbe fulgent, proindéque partem illuſtratam ſoli ac terræ obvertentes, ſunt ultrà ſolem poſiti; deindè verò digrediuntur à Sole & Mars quidem in quadrato cum Sole aſpectu ut in C, aliquantulum gibboſus apparet, quod hemiſpherium ipſius illuſtratum & ſoli obverſum non poſſit totum terræ ſenſibiliter obverti, quia non ſatis magna eſt ejus à tellure diſtantia. At Jupiter & Saturnus cum longiùs à Sole & tellure diſtent, hemiſphærium illuminatum Soli ac telluri ſemper obvertunt ſenſibiliter; nam cum (ex obſ.) Mars Jovem & Jupiter Saturnum nonnunquam tegant, neceſſe eſt ut orbita Saturni orbitam Jovis & hæc orbitam Martis complectatur, tres verò orbitæ illæ terram & ſolem ambiant. Quia verò diametri apparentes planetarum ſuperiorum multò minores videntur in oppoſitionibus quam in conjunctionibus planetarum, & diſtantiæ à terrâ ſunt ut diametri apparentes inverſè, neceſſe eſt ut orbitæ Martis, Jovis & Saturni ſint telluri admodum excentricæ.

(t) 58. * *Eadem utiquè ſunt tempora periodica.* Tempora periodica planetarum circà ſolem hoc modo poſſunt inveniri. Obſerventur planetarum oppoſitiones & conjunctiones cum Sole, tunc enim planeta è Sole videtur in loco qui oppoſitus eſt loco Solis è terrâ viſi, unde dato Solis loco datur planetæ locus in cœlo. Jam verò obſervatis pluribus oppoſitionibus cum temporum intervallis inter ſingulas oppoſitiones interceptis, datur tempus quo planeta circà ſolem motu vero deſcribit angulos ad ſolem inter oppoſitiones contentos & per regulam proportionis habetur tempus quo planeta 360 gradus ſeu revolutionem unam abſolvit. Tempore periodico ità craſsè determinato, habetur numerus revolutionum planetæ tempore ſatis longo peractarum. Si autem capiantur duæ oppoſitiones valdè diſſitæ iiſque addatur arcus neceſſarius ut planeta ad idem orbitæ ſuæ punctum redeat, totumque tempus dividatur per numerum revolutionum, habebitur tempus periodicum accuratiùs, ſupponendo quod aphelia planetæ non aliter moveantur quam fixæ. Sufficit verò in his Newtoni Phænomenis ut hæc tempora, neglectis minutiis, definiantur. 58.

Poteſt etiam tempus periodicum determinari per obſervationes latitudinum planetæ. Nam dum latitudo nulla eſt, planeta verſatur in plano Eclipticæ, ſeu in nodo orbitæ ſuæ; invenitur autem tempus, ubi latitudo nulla eſt, obſervando illam antequam nulla ſit & ubi decreſcit, aut poſtquam nulla fuit & ubi creſcit, atquè per regulam proportionis ex incrementis vel decrementis, determinatur tempus, quandò nulla fuit. Si itaque obſervetur hoc modo tempus elapſum inter appulſum planetæ ad nodum & reditum ejuſdem ad eundem nodum, hoc erit tempus periodicum planetæ; conſtat enim planetarum nodos vix in unâ revolutione planetæ moveri.

59. Longitudo ac latitudo planetæ ob-

DE MUNDI SYSTEMATE.

aſtronomos univerſos. Magnitudines autem orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentiſſimè ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis reſpondent, non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi invenerunt, ſuntque inter ipſas ut plurimum intermediæ; uti in tabulâ ſequente videre licet.

*Planetarum ac telluris tempora periodica circa ſolem reſpectu fixarum, in diebus & partibus decimalibus diei.*

| ♄ | ♃ | ♂ | ☿ | ♀ | ☽ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10759,275. | 4332,514. | 686,9785. | 365,2565. | 224,6176. | 87,9692. |

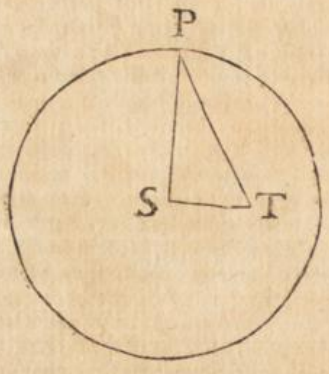
*Planetarum ac telluris diſtantiæ (u) mediocres à ſole.*

| | ♄ | ♃ | ♂ | ☿ | ♀ | ☽ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Secundum *Keplerum* | 951000. | 519650. | 152350. | 100000. | 72400. | 38806. |
| Secundum *Bullialdum* | 954198. | 522520. | 152350. | 100000. | 72398. | 38585. |
| Secundum tempora periodica | 954006. | 520096. | 152369. | 100000. | 72333. | 38710. |

§ 9. ſervari poſſunt (per not. 17. 18. 20.) & indè determinatur tempus Syzigiarum, cum videlicet longitudo planetæ non differt à longitudine ſolis quo tempore fit conjunctio, vel differt ſemicirculo ut in oppoſitione. Quod Mercurium ſpectat, determinatur ipſius conjunctio inferior cum ſole per ipſius tranſitum in diſco ſolis qui vicibus octo obſervatus fuit, dum tranſitus Veneris ſemel tantum viſus eſt, in his verò non ſupponitur telluris motus nec quies. Determinato tempore periodico planetæ, habetur motus ejus medius in orbitâ & ex obſervatis pluribus locis planetæ è Sole viſis per oppoſitiones vel conjunctiones aut per digreſſiones, dantur etiam ipſius motus veri, ac proindè dantur differentiæ inter motus veros & motus medios. Indè verò determinantur aphelia & perihelia planetarum cum ipſorum excentricitate, atque conſtrui poſſunt tabulæ per quas tempore quolibet inveniri poteſt eorum locus in propriâ orbitâ. Quæ omnia quomodò ex obſervationibus determinari poſſint independenter ab hypotheſibus tom. 1. Element. Aſtronom. expoſuit celeberrimus Caſſinus.

(u) 60. * *Diſtantiæ mediocres à Sole.*

De




Planetarum diſtantiæ à Sole per obſervationes poſſunt definiri. Hic autem non quæruntur abſolutæ diſtantiæ planetarum à Sole, ſed ſolummodò rationes illarum diſtantiarum ad diſtantias ſolis à tellure. Itaque ſit Sol in S, terra quieſcens vel mota in T, planeta in P; obſervetur locus planetæ in cœlo, & per theoriam ſolis, dabitur locus ſolis tempore obſervationis ſeu poſitio lineæ TS, undè datur angulus STP. Quæratur etiam locus plane-

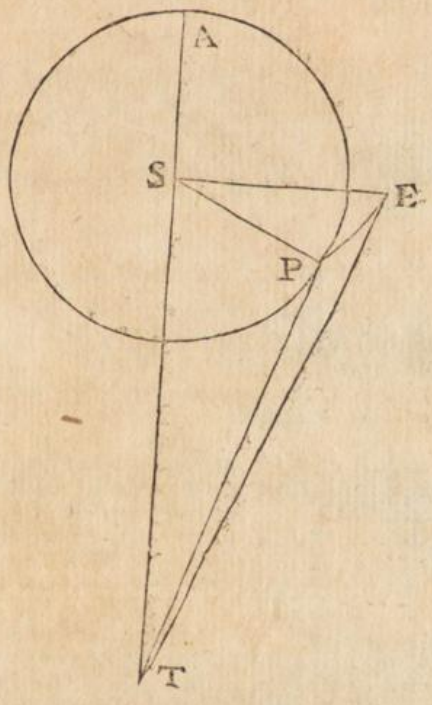
tæ

(x) De distantiis mercurii & veneris à sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum elongationes à sole determinentur. De distantiis etiam superiorum planetarum à sole tollitur



61.

tæ P, in propriâ orbitâ per theoriam planetæ, & quia datur locus terræ T e Sole visus atque locus planetæ P, dabitur angulus PST. In triangulo igitur PST, dantur tres anguli ac proinde datur etiam ratio laterum PS & ST, sed, per theoriam solis, datur ratio ST ad mediocrem distantiam Solis à terrâ, & per theoriam planetæ P, datur ratio distantiæ SP, ad mediocrem distantiam planetæ à Sole, ergò dabitur ratio distantiæ mediocris planetæ à Sole ad distantiam mediocrem solis à terrâ. Negligimus autem minutias quæ ex inclinatione orbium planetarum ad eclipticam oriri possunt, & prætereà observationes possunt fieri dum planeta est propè nodos, ubi fere in plano Ecliptiæ versatur.




(x) 61. * *De distantiis Mercurii & Veneris.* Sit A B P orbita Veneris, S Sol, Terra T, Venus P in maximâ suâ elongatione. Quia orbita Veneris est ferè circularis, linea T P tanget orbitam in P, ideóque angulus S P T, rectus. Undè est ut sinus totus ad sinum elongationis maximæ seu anguli observati S T P, ità distantia Solis à Terrâ S T ad distantiam S P, Veneris à Sole. Supponitur autem orbita circularis, quia Venus nunquam digreditur à Sole ultrà 47° 30′ & ejus elongationes maximæ nunquam minores sunt gradibus 45° 30′. Quare angulus SPT est fere rectus. Si verò considerare velimus inclinationem orbitæ Veneris, sit latitudo Veneris ex tellure observatâ PTE, è Sole visa P S E, E punctum in Ecliptica, erit ut P S ad P T, ità tangens latitudinis P T E, ad tangentem latitudinis P S E. Nam ob angulos E P T & E P S rectos, est P T ad P E ut sinus totus ad tangentem anguli P T E; & similiter P S ad P E ut sinus totus ad tangentem anguli P S E, ideóque ut P S ad P T, ità tangens anguli P T E ad tangentem anguli P S E, quarè dabitur angulus iste cum recto E P S, & ideò erit S P ad S E ut sinus anguli S E P, complementi P S E ad rectum ad sinum anguli P S E, dabitur ergò S E, seu ratio ejus ad S T, sicque observatis variis distantiis S P, dabitur mediocris; quia verò datur ratio S T ad mediocrem distantiam Solis à terrâ tempore observationis, dabitur ratio distantiæ mediocris Veneris ad distantiam mediocrem Solis à terrâ. Mercurii distantiæ à terrâ determinantur etiam per elongationes ejus maximas à Sole, sed quia orbita Mercurii est admodum excentrica, si Mercurius sit in P, in maximâ digressione, per observationem notus sit oportet angulus S T P & per Theoriam motuum Mercurii angulus P S T unde deducetur angulus T P S, quia angulus ille rectus non est, unde tandem cætera determinentur ut in Venere neglectis minutiis.

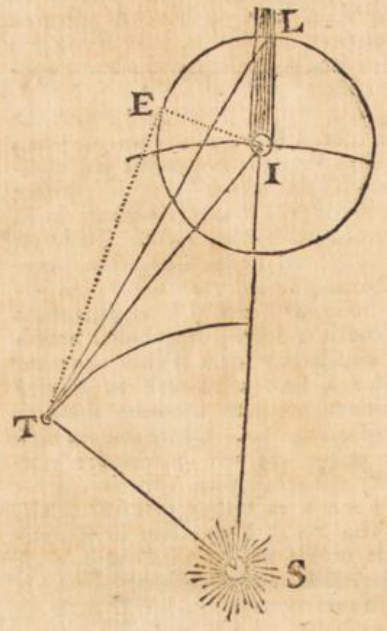
De Mundi Systemate.

tur omnis disputatio per eclipses satellitum jovis. (y) Etenim per eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur jovis longitudo heliocentrica. Ex longitudinibus autem heliocentricâ & geocentricâ inter se collatis determinatur distantia jovis.

PHÆ.

62. (y) 62. * *Etenim per Eclipses Jovis determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentricâ.*

* Sit S Sol; T terra; I Jupiter; L Satelles ejus per medium umbræ I L transiens: Ex Terrâ T observetur in partibus semi-Diametri Jovis, distantia centri Jovis à Satellite in umbram sese immergente & ex eâ emergente, medium inter eas distantias erit distantia à centro Jovis ad Satellitem in medio umbræ immersum in partibus semi-Diametri Jovis, eadem distantia in minutis & secundis observari poterit, eritque mensura anguli I T L; Ducatur T E tangens ad orbitam satellitis, & I E quæ erit in E T perpendicularis, quia cognoscitur ratio maximæ elongationis hujus satellitis ad semi-Diametrum Jovis, & hic habetur in secundis semi Diameter Jovis habebitur in secundis angulus I T E sub quo apparere deberet lineâ I E, si Satelles foret in maximâ suâ elongatione eo temporis momento; sed ex Trigonometricis, est sinus anguli I T E, ad sinum totum sive sinum anguli E, ut est I E ad T I, rursus in Triangulo T I L est I L (sive I E ipsi æqualis) ad T I ut sinus anguli observati I T L ad sinum anguli T L I; Itaque ut sinus anguli I T E ad sinum totum, ita sinus anguli I T L ad sinum anguli T L I sive T L S; unde in Triangulo T L S, cognito per observationem angulo S T L & invento ut




indicatum est angulo T L S, habetur angulus T S L, qui additus vel detractus è longitudine Heliocentricâ terræ dat Jovis Heliocentricam longitudinem. Q. E. I.

## PHÆNOMENON V.



*Planetas primarios, radiis ad terram ductis, areas describere temporibus minimè proportionales; at radiis ad solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.*

Nam respectu terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in perihelìis ac tardius in apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est astronomis notissima, & (z) in jove apprimè demonstratur per eclipses satellitum, quibus eclipsibus heliocentricas planetæ hujus longitudines & distantias à sole determinari diximus.

## PHÆNOMENON VI.

*Lunam radio ad centrum terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.*

Patet ex lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus lunaris aliquantulum à vi solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce phænomenis negligo.

(z) *Et in Jove apprimè demonstratur.* Nam per eclipses satellitum determinatur locus Jovis è Sole visus ejusque à Sole distantia, & ideò collatis plurium eclipsium observationibus, habetur motus veGz.

rus Jovis in propriâ orbitâ circà Solem & orbita ipsa describi potest; unde quemadmodum de Sole diximus (43) patet Jovem describere areas temporibus proportionales circà Solem.

De Mundi Systemate.

# PROPOSITIONES.

## PROPOSITIO I. THEOREMA I.

*Vires, quibus planetæ circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum jovis, & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.*

PAtet pars prior propoſitionis per phænomenon primum, & propoſitionem ſecundam vel tertiam libri primi: & pars poſterior per phænomenon primum, & corollarium ſextum propoſitionis quartæ ejuſdem libri.

Idem intellige de planetis qui Saturnum comitantur, per phænomenon ſecundum.

## PROPOSITIO II. THEOREMA II.

*Vires, quibus planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere ſolem, & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.*

Patet pars prior propoſitionis per phænomenon quintum, & propoſitionem ſecundam libri primi: & pars poſterior per phænomenon quartum, & propoſitionem quartam ejuſdem libri. Accuratiſſimè autem demonſtratur hæc pars propoſitionis per (a) quietem apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicatâ (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) motum apſidum

62. (a) * *Per quietem apheliorum.* * Aſtronomi motus cœleſtes calculant referendo Aſtra ad Eclipticam, cujus initium per interſectionem æquatoris & Eclipticæ determinatur; ſed illud initium fixum non eſt, & propter axis terræ nutationem interſectio illa in antecedentia fertur 51 circiter ſecundis ſingulo anno, hinc fixæ totidem ſecundis progredi videntur, Aphelia Planetarum etiam progredi videntur reſpectu ejus initii Eclipticæ, progreditur ergo ſingulo anno - - - -

sidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.



## PROPOSITIO III. THEOREMA III.

*Vim, quâ luna retinetur in orbe suo, respicere terram, & esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.*

Patet assertionis pars prior per phænomenon sextum, & propositionem secundam vel tertiam libri primi: & pars posterior per motum tardissimum lunaris apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium & minutorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per corol. 1. prop. XLV. lib. 1.) quod si distantia lunæ à centro terræ sit ad semidiametrum terræ ut D ad 1; vis à quâ motus talis oriatur sit reciprocè ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id est, reciprocè ut ea

Aphelium terræ - - - 62″.
Saturni - - - 78″.
Jovis - - - 57″.
Martis - - - 72″.
Veneris - - - 86″.
Mercurii - - - 80″.

Sed multum abest quam ut ille Apheliorum motus, certissimè determinetur, & uniformis esse deprehendatur; ex observationibus motûs Aphelii terræ nunc plus procedere quam 50″ nunc minus deprehenditur, unde quidam Astronomi non alium esse ejus motum præter motum ipsius initii Ecliptícæ censent. Pariter ex observationibus Aphelii Saturni, ejus motus irregularis videretur, aliquando accelerari aliquando retrocedere, ex. gratia, ab anno 1694 ad finem anni 1708, minutis fere 33 retrocessisse testatur Cassinus. Aphelium Jovis ad motum fixarum proximè accedere videtur, &c. Unde constat, Aphelia quamproxime quiescere, & eam quantitatem exiguam motus ipsis assignati quæ excedit motum fixarum, forte observationum erroribus deberi, forte actioni mutuæ vicinorum Planetarum inter se; sic cum anno 1703 Saturnus & Jupiter conjuncti fuerint, & cum nonnisi quinque annis nonaginta gradibus à se mutuo discedant patet quod ab anno 1698 ad annum 1708 Jupiter inter Solem & Saturnum erat versatus, ejusque actio in Saturnum adjuncta fuerat actioni Solis in Saturnum; Posito autem quod revera vis Solis in Saturnum decrescat secundum quadrata distantiarum, & Jovis interpositione vim qualemcumque illi addi quæ X dicatur, ex Propositione XLV. primi Libri habebitur angulum Apsidis intra cum summa esse 180gr. $\sqrt{\frac{1+X}{1+3X}}$. sed $\frac{1+X}{1+X}$ est fractio ideóque ille angulus est minor 180gr. regreditur itaque Apsis ex his hypothesibus planè ut observatione constat: Unde non obscure colligitur Apheliorum fixarum respectu quies (semotis his accidentalibus causis) ac per consequens quod vires quibus Planetæ ad Solem retrahuntur sunt in duplicatâ distantiarum ratione accuratè, siquidem si vel unâ sexagesimâ parte, accederet ratio à duplicata ad triplicatam, Apsides tribus ad minimum gradibus progrederentur ut demonstratum fuit in fine 1i. Coroll. Prop. 45ae. Lib. I.

62.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ea ipsius D dignitas cujus index est $2\frac{4}{243}$, hoc est, in ratione distantiæ paulo majore quam duplicatâ inversè, sed quæ partibus $59\frac{1}{4}$ proprius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. (b) Actio solis quâtenus lunam distrahit à terrâ, est (c) ut distantia lunæ à terrâ quamproximè; (d) ideoque (per ea quæ dicuntur in corol. 2. prop. XLV. lib. 1.) est ad lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, seu 1 ad $178\frac{29}{48}$. Et neglectâ solis vi tantillâ, vis reliqua quâ lunâ

62.

(b) * *Actio Solis quâtenus Lunam distrahit à terrâ.* * Motus Apogæi Lunaris uniformis non est, sed aliquando procedit, aliquando recedit, aliquando quiescit, sed ita ut omnibus compensatis progrediatur, & octo aut novem annis 360. gr. percurrerit; Pariter & actio Solis quâ Lunam distrahit à terrâ non est continua, actio Solis Lunam à terrâ distrahit dum Luna à Syzygiâ non plus quam 55. gradibus hinc inde discessit, circa quadraturas verò actio Solis cum terræ attractione consentit, Lunamque ad terram attrahit, sed tunc & debilior est & per pauciores gradus agit, quam circa Syzygias, hinc effectus qui resultat pendet ex actione Solis quâ Luna distrahitur. (Lib. I. Prop. LXVI. Cor. 6. 7. 8. cum notis).

(c) * *Est ut distantia Lunæ à Terrâ quam proximè.* * Propter motum Telluris cum Lunâ circa Solem, omnia puncta Lunaris Orbitæ successivè obvertuntur Soli, & versantur in Syzygiâ, postea verò in quadraturâ, & cum ea orbita non sit circulus cujus terra sit centrum, patet puncta Syzygiarum & quadraturarum, nunc viciniora nunc remotiora fore terræ; Jam verò vis quâ Sol distrahit Lunam à terrâ, in Syzygiis, sicut & vis quâ Sol Lunam attrahit terram versus in Quadraturis crescit secundum distantias Lunæ à terrâ, in iis autem punctis præcipua est Solis actio ad Apogæum Lunæ movendum, unde effectus resultans pendebit à differentiâ earum actionum quæ erit sicut distantia Lunæ à terrâ: Vel ut melius res concipiatur, fingatur Orbitam Lunæ cingi undique Solibus æqualiter à terrâ distantibus, ita ut singulum punctum Orbitæ Lunaris sit simul in Syzygiâ & quadraturâ; cum actio Solis in Syzygia sicut & actio Solis in quadratura sit ut distantiæ Lunæ à terrâ, differentia earum actionum erit etiam ut distantia Lunæ à terra, sed effectus differentiæ earum actionum erit idem ac id quod resultabit ex translatione dicti puncti per Syzygiam & postea per Quadraturam, hinc si motus Apogæi medius assumatur is pendebit ab actione quæ erit ut distantia Terræ à Lunâ; addit autem Newtonus quam proxime propter actionem in punctis inter Syzygias & quadraturas, sed quæ parum hanc rationem turbant nam in punctis intermediis ubi actio quâ Luna distrahitur à Terra magis recederet ab hac ratione actiones compositæ sese mutuò destruunt & in punctis à Syzygiis aut à quadraturis non remotis actio Solis sequitur proxime easdem rationes ac in ipsis Syzygiis ac quadraturis; hinc actio Solis quâtenus Lunam distrahit à terra est proxime ut distantia terræ à Lunâ.

(d) * *Ideoque per ea quæ dicuntur in Cor. 2. Prop. XLV. Lib. I.* * Dicitur in eo Corollario, quod si ex vi decrescente secundum quadrata distantiarum auferatur vis quæ crescat secundum ipsas distantias, quæ sit ad priorem ut 1 ad 357.45, motus progressivus Apogæi erit 1d. 31′. 28″ in singulâ revolutione; motus autem progressivus Apogæi Lunaris est circiter duplo velocior, hinc vis illa ablatitiâ debet esse ad vim Lunæ centripetam ut 2 ad 357.45 sive ut 1. ad 178.725.

lunâ retinetur in orbe erit reciprocè ut $D^2$. Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in propositione sequente.

*Corol.* Si (e) vis centripeta mediocris quâ lunâ retinetur in orbe augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicatâ semidiametri terræ ad mediocrem distantiam centri lunæ à centro terræ: habebitur vis centripeta lunaris ad superficiem terræ, posito quod vis illa descendendo ad superficiem terræ perpetuo augeatur in reciprocâ altitudinis ratione duplicatâ.

## PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

*Lunam gravitare in terram, & vi gravitatis retrahi semper à motu rectilineo, & in orbe suo retineri.*

Lunæ distantia mediocris à terrâ in syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundum *Ptolemæum* & plerosque astronomorum 59, secundum *Vendelinum* & *Hugenium* 60, secundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, secundum *Streetum* $60\frac{2}{5}$, & secundum *Tychonem* $56\frac{1}{2}$. Ast *Tycho*, & quotquot ejus tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones solis & lunæ (omnino (f) contra naturam lucis) majores quam fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, (g) auxerunt parallaxin lunæ scrupulis totidem, hoc est, quasi duodecimâ vel decimâ quintâ parte

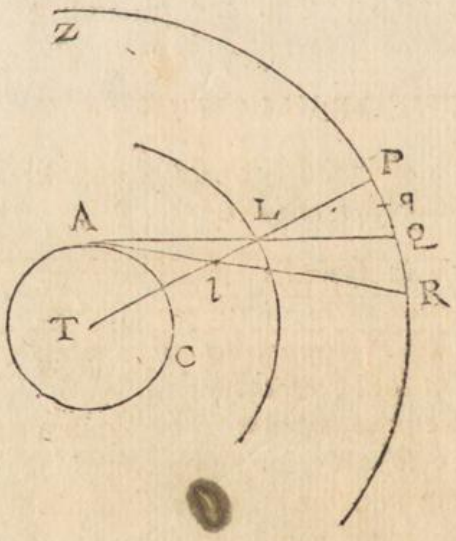
(e) * *Si vis centripeta mediocris.* Quoniam vis ablatitia Solis est ad vim centripetam Lunæ ut 1 ad $178\frac{29}{40}$, si vis ablatitia Solis sit 1, erit vis centripeta Lunæ $178\frac{29}{40}$, ideóque detractâ vi ablatitiâ Solis, erit vis Lunæ quâ revera retinetur in orbitâ suâ per vim terræ minutam actione Solis $177\frac{29}{40}$. Quare si vis mediocris quâ Luna retinetur in orbe, augeatur in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, obtinebitur vera vis Lunæ centripeta, qualis foret si nulla esset actio Solis. Hinc posito quod vis illa descendendo ad superficiem terræ perpetuò augeatur in reciprocâ altitudinis seu distantiæ à centro terræ ratione duplicatâ, ut habeatur vis centripeta in superficie terræ, dicendum est ut quadratum semidiametri terræ ad quadratum distantiæ mediocris centri Lunæ à centro terræ, ità vis centripeta ad quartum quod erit vis in superficie terræ. 62.

(f) * *Omninò contrà naturam lucis* (25).

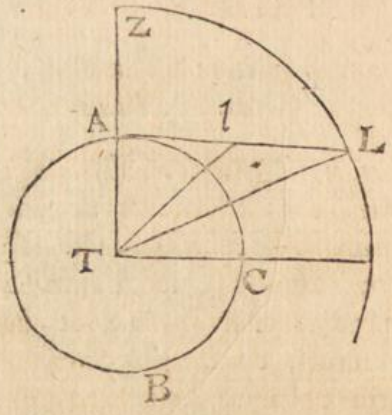
(g) * *Auxerunt parallaxin Lunæ.* Tantùm augeri parallaxim Lunæ quantùm augetur refractio, patet si determinetur parallax-

DE MUNDI SYSTEMATE.

te totius parallaxeos. Corrigatur iſte error, & (h) diſtantia evadet quaſi $60\frac{1}{2}$ ſemidiametrorum terreſtrium, ferè ut ab aliis aſſignatum eſt. Aſſumamus diſtantiam mediocrem ſexaginta ſemidiametrorum in ſyzygiis; & lunarem periodum reſpectu fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab aſtronomis ſtatuitur; atque ambitum terræ eſſe pedum Pariſienſium 123249600, uti (i) à *Gallis* menſurantibus definitum eſt: &




62. rallaxis Lunæ, quod ità præſtari poteſt. Sit A C T, tellus cujus centrum T, obſervetur altitudo meridiana centri Lunæ L ex loco A in Q à refractionibus libera, & ex tabulis eruatur pro tempore obſervationis longitudo & latitudo Lunæ; deindè (per trigon.) quæratur ipſius declinatio, habebitur ejus diſtantia à vertice Z ſeu locus P e terræ centro T viſus, differentia P Q ſeu angulus P L Q aut æqualis A L T eſt parallaxis Lunæ. Porrò ut habeatur locus Q è loco A viſus à refractione liber, quoniam refractio auget altitudinem, ſit locus viſus q, Q q metietur refractionem, undè arcus Q q, addendus eſt arcui P q ut habeatur parallaxis tota P Q; ſi verò refractio major aſſumatur ut q R, parallaxis erit major nempè P R, quaſi Luna eſſet in l; undè tantum augetur parallaxis quantum refractio ipſa.



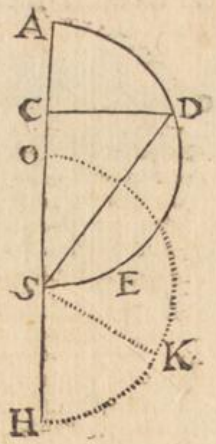

(h) * *Diſtantia evadet.* Sit T centrum terræ & angulus A L T parallaxis horizontalis mediocris. Ob angulum L A T rectum, erit ſemidiameter terræ A T ad diſtantiam mediocrem Lunæ à terrâ T L, ut ſinus parallaxeos mediocris ad ſinum totum. Eſt autem parallaxis iſta 58′ circiter. Jam ducatur T l, ſitque angulus A l T 63′ vel 62′, ob refractionem malè conſtitutam, erit T l ad T l ferè ut 58 ad 62 vel 63, ideoque cum ſit juxtà Tychonem T l = 56 $\frac{1}{2}$ ſemid. terræ, erit ut 58 ad 62 vel 63 ità 56 $\frac{1}{2}$ ad 60 $\frac{23}{58}$ vel 61 $\frac{41}{115}$. Quarè ſi corrigatur error qui ex refractione malè conſtitutâ oritur, diſtantia mediocris Lunæ à terrâ evadet quaſi 60 $\frac{1}{2}$ ſemid. terreſtr.

(i) * *A menſurantibus Gallis*, à Picar-

& si luna motu omni privari fingatur ac dimitti, ut urgente vi illâ omni, quâ (per corol. prop. III.) in orbe suo retinetur, descendat in terram; hæc spatio minuti unius primi cadendo describet pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$. (k) Colligitur hoc ex calculo vel per propositionem XXXVI. libri primi, vel (quod eodem recidit) per corollarium nonum propositionis quartæ ejusdem libri, confecto. Nam arcus illius quem luna tempore minuti

carto nimirum inventum est gradui circuli maximi terrestris respondere hexapedas 57060 seu ped. Paris. 342360. Quare inferatur (22) ut numerus graduum arcus distantiæ duorum locorum ad 360°. seu peripheriam integram, ità idem arcus in milliaribus aut pedibus expressus ad ambitum telluris in eâdem mensurâ inveniendum, sicque definitum est ambitum telluris esse ped. Paris. 123249600 ejusque proinde diameter est ped. Paris. 39231576.

(k) 63. * *Colligitur hoc per propositionem XXXVI. lib. I.* * In hâc Propositione 36. sit S centrum terræ SA distantia mediocris Lunæ à Terra, SO dimidium ejus distantiæ mediocris, velocitas quâ corpus revolvi potest in circulo OKH erit ad velocitatem Lunæ in propriâ orbitâ ut $\sqrt{2}$ ad 1, sit $X$ arcus quem Luna in propriâ orbita uno minuto primo describit, erit $X\sqrt{2}$ arcus OK eodem tempore descriptus in circulo OKH & area OKS erit $\frac{1}{2}$ SO×$X\sqrt{2}$, æqualis areæ ASD=$\frac{1}{2}$ AS×CD (nam ob exiguitatem arcus AD pro rectâ sumi potest sive $\frac{1}{2}$ SO×$X\sqrt{2}$=SO×CD unde est $CD=\frac{X}{\sqrt{2}}$, sed est SC ad CD ut CD ad AC ergo $AC=\frac{CD^2}{SC}=\frac{X^2}{2SC}$ sed SC est proximè æqualis SA ergo $AC=\frac{X^2}{2SA}$; rursus sit 1 ad $p$ ut radius ad circumferentiam, orbitæ Lunaris Peripheria erit $p$SA, & quoniam tota à Luna

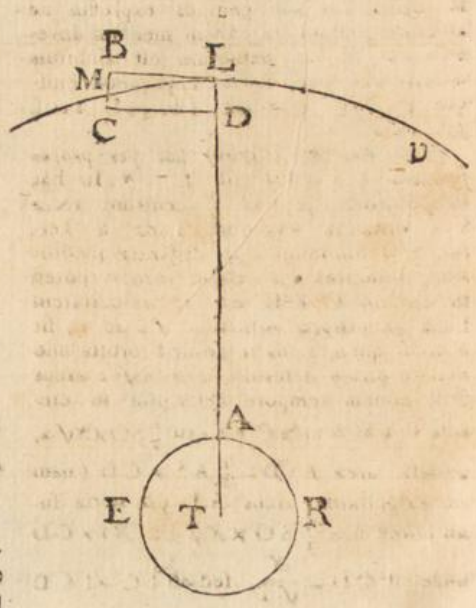



describitur tempore 27d. 7h. 43'. sive minutis 39343; erit arcus $X=\frac{pSA}{39343}$ & AC $=\frac{p^2SA^2}{2\times 39343^2\times SA}=\frac{p^2SA}{3095743298}$, est verò $\frac{pSA}{60}$ ambitus terræ qui pedum 123249600 ex Picarto adsumptus fuit; ideoque $pSA=7394976000$; unde divisione facta est $AC=2.388756p$; sed Radius est ad Peripheriam ut 1 ad 6.283185 &c. unde tandem habetur AC=15.00878 &c. Alter autem calculus ex Cor. 9. Prop. IV. deductus, ita se habet. 63.

DE MUNDI SYSTEMATE.

minuti unius primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$ circiter, vel magis accuratè pedum 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Unde cum vis illa accedendo ad terram augeatur in duplicatâ distantiæ ratione inversâ, ideoque ad superficiem terræ major sit partibus 60×60 quam ad lunam; corpus vi illâ in regionibus nostris cadendo, describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses $60\times60\times15\frac{1}{12}$, & spatio minuti unius secundi pedes $15\frac{1}{12}$, vel magis accuratè pedes 15. dig. 1. & lin. $1\frac{4}{9}$. Et eâdem vi gravia reverâ descendunt in terram. Nam penduli, in latitudine Luteriæ Parisiorum ad singula minuta secunda oscillantis, longitudo est pedum trium Parisien-

63. Sit R A E terra, cujus centrum T, V L orbita Lunæ cujus pars L M à Lunâ percurritur minuti unius primi intervallo. Quoniam Luna periodum suam respectu fixarum complet diebus 27, hor. 7. minutis primis 43, ut ab astronomis statuitur, hoc est, minutis primis 39343, erit L M, $\frac{1}{39343}$ totius peripheriæ. Porrò ambitus terræ est ped. Paris. 123249600, unde dabitur orbitæ Lunaris circumferentia quæ ejus est sexagecupla 7394976000 ped. Paris. quæ si dividatur per 39343, quotus dabit longitudinem arcûs à Lunâ minuto primo descripti pedibus Parisiensibus expressam scilicet 187964. ped. circiter cujus quadrato 35330465296 per diametrum divisо, quæ est pedum 2353893976 habebitur sinus versus L D ped. Paris. 15.0093 &c. proximè ut priori calculo.




* Sed ex Corollario propositionis præcedentis, vis quâ Luna retinetur in orbe suo augeri debet in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ ut corrigatur vis ejus per Solis actionem diminutionem, & spatia per diversas vires iisdem temporibus percursa sunt ut illæ vires, ergo linea A C inventa 15ped.009 est ad spatium quod Luna demptа vi Solis describeret ut $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$ illud ergo spatium est 15ped.0934, quæ $\frac{9344}{10000}$ pedis efficiunt accuratè pollices 1. lin. $1\frac{4}{9}$.

risiensium & linearum $8\frac{1}{2}$, ut observavit *Hugenius*. Et (l) altitudo, quam grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus in duplicatâ ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit etiam *Hugenius*) (m) ideoque est pedum Parisiensium 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$. Et propterea vis quâ luna in orbe suo retinetur, si descendatur in superficiem terræ, æqualis evadit vi gravitatis apud nos, ideoque (per reg. 1. & 11.) est illa ipsa vis quam nos gravitatem dicere solemus. Nam si gravitas ab eâ diversa esset, corpora viribus utrisque conjunctis terram petendo duplo velocius descenderent, & spatio minuti unius secundi cadendo describerent pedes Parisienses $30\frac{1}{6}$: omninò contra experientiam.

(n) Calculus hic fundatur in hypothesi quod terra quiescit. Nam si terra & luna moveantur circum solem, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: manente lege gravitatis distantia centrorum lunæ ac terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium circiter; uti computationem ineunti patebit. Computatio autem iniri potest per prop. LX. lib. 1.

*Scho-*

(l) * *Et altitudo.* (471. lib. 1.).

(m) * *Ideóque est ped. Paris.* (ibid.).

(n) 64. * *Calculus hic fundatur in hypothesi quod terra quiescit.* * Undecima Sectione Libri I. quæsivit Newtonus qualis oriretur differentia inter motus corporum attractorum, quando tota vis uni immoto tribuitur, aut quando (sicut res se habet) attractione mutuâ in se agunt, & demonstravit Propositione 58 & 59. Quod si è duobus corporibus se mutuo attrahentibus & circa commune gravitatis centrum Ellipses similes describentibus, alterutrum sit nostra sedes, ita ut motum totum alteri tribuamus quod circa nos Ellipsim describere videretur; illud eâdem vi centripetâ eamdem Ellipsim circa nos si immoti reverâ foremus nonnisi longiori tempore describeret, ita ut tempus quo mutuâ actione gravitatis circa nos *motos* revolvi videretur, foret ad tempus quo circa nos *immotos* revolveretur in ratione subduplicatâ corporis Centralis immoti ad summam duorum Corporum revolventium; Unde, manente eâdem gravitatis Lege, Ellipsis quæ describeretur circa nos *immotos* eodem tempore quo describitur Ellipsis relativa circa nos *motos*, minor foret quam ea Ellipsis relativa, & ratio axium invenietur dicendo, quadratum temporis quo hæc Ellipsis describitur sive (ex hyp.) quadratum temporis quo describitur Ellipsis relativa circa nos, est ad quadratum temporis quo Ellipsis relativæ ellipsi æqualis circa nos verè immotos describitur, ut Cubus semi Axis Ellipseos minoris descriptæ circa corpus immotum ad Cubum semi Axis Ellipsis majoris descriptæ circa corpus etiam immotum & quæ Ellipsi relativæ est æqualis, sed illa tempora erant in subduplicatâ ratione massæ corporis immoti 64.

DE MUNDI SYSTEMATE.

## *Scholium.*

Demonſtratio propoſitionis ſic fuſius explicari poteſt. Si lunæ plures circum terram revolverentur, perinde ut fit in ſyſtemate ſaturni vel jovis: harum tempora periodica (per argumentum inductionis) obſervarent legem planetarum à *Keplero* detectam, & propterea harum vires centripetæ forent reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro terræ, per prop. 1. hujus. Et ſi earum infima eſſet parva, & vertices altiſſimorum montium prope tangeret: hujus vis centripeta quâ retineretur in orbe, gravitates corporum in verticibus illorum montium (per computationem præcedentem) æquaret quamproximè, efficeretque ut eadem lunula, ſi motu omni quo pergit in orbe ſuo privaretur, defectu vis centrifugæ quâ in orbe permanſerat, deſcenderet in terram, idque eâdem cum velocitate quâ gravia cadunt in illorum montium verticibus, propter æqualitatem virium quibus deſcendunt. Et ſi vis illa quâ lunula illa infima deſcendit, diverſa eſſet à gravitate, & lunula illa etiam gravis eſſet in terram more corporum in verticibus montium: eadem lunula vi utrâque conjunctâ duplo velocius deſcenderet. Qua-

65. moti ad ſummam maſſarum duorum Corporum, ergo, ut maſſa corporis immoti ad ſummam maſſarum duorum Corporum, ſic Cubus ſemi-Axis Ellipſeos minoris deſcriptæ circa corpus immotum ad cubum ſemi-axis Ellipſis majoris reverâ deſcriptæ; Hinc cum hactenus immotam terram ſuppoſuerimus Lunamque revolventem tempore quo reverâ revolvitur & ſemiaxem orbitæ Lunaris 60 ſemi Diametrorum terræ aſſumſerimus, ſitque maſſa terræ ad maſſam Lunæ ut 42. ad 1. erit 42. ad 43. ut Cubus 60. ad Cubum ſemi axeos ejus Ellipſeos quam (manente eadem gravitatis Lege eodemque tempore Periodico) Lunâ relativè deſcribet circa terram dum ipsâ terrâ mutuâ Lunæ attractione circa centrum gravitatis commune reverâ revolvetur; ille ergo ſemi Axis erit $\frac{43 \times 216000}{42}$ cujus Radix Cubica eſt 60.47 ferè $60\frac{1}{2}$ ut habet Newtonus.

65. Eodem modo quo Luna in orbitâ ſuâ revolvitur circà tellurem ità aliud quodvis grave ex puncto extrà telluris ſuperficiem ſecundum rectam horizontalem ſatis validè projectum orbitam deſcriberet & planetæ, inſtar periodum ſuam compleret (10. lib. 1.). Sed quò altius eſt ſuprà terram punctum illud ex quo grave projicitur, eò minori opus eſt vi projectili ut projectum in planetam mutetur, & quò humilius eſt eò majori (ibid.) hoc eſt, celeritas per vim projectilem impreſſa erit inverſè ut diſtantia, v. gr. Si Luna eâdem celeri-

Quare cum vires utræque, & hæ corporum gravium, & illæ lunarum, centrum terræ reſpiciant, & ſint inter ſe ſimiles & æquales, eædem (per reg. I. & II.) eandem habebunt cauſam. Et propterea vis illa, quâ luna retinetur in orbe ſuo, ea ipſa erit quam nos gravitatem dicere ſolemus: idque maximè ne lunula in vertice montis vel gravitate careat, vel duplò velocius cadat quam corpora gravia ſolent cadere.

## PROPOSITIO V. THEOREMA V.

*Planetas circumjoviales gravitare in jovem, circumſaturnios in ſaturnum, & circumſolares in ſolem, & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.*

Nam revolutiones planetarum circumjovialium circa jovem, circumſaturniorum circa ſaturnum, & mercurii ac veneris reliquorumque circumſolarium circa ſolem ſunt phænomena ejuſdem generis cum revolutione lunæ circa terram; & propterea (per reg. II.) à cauſis ejuſdem generis dependent: præſertim cum demonſtratum ſit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra jovis, ſaturni ac ſolis, & recedendo à jove, ſaturno & ſole decreſcant eâdem ratione ac lege, quâ vis gravitatis decreſcit in receſſu à terrâ.

*Corol.* I. (°) Gravitas igitur datur in planetas univerſos. Nam venerem, mercurium, cæteroſque eſſe corpora ejuſdem generis

leritate quâ nunc in orbitâ ſuâ revolvitur juxta terram projiceretur ſecundùm directionem horizontalem, circà tellurem non giraret, ſed terreſtrium projectilium more in terram caderet, antequam * per tertiam partem minuti eſſet mota. Nam arcus quem Luna 20 ſcrupulis ſecundis horariis in ſuo circulo percurrit eſt 11″ ſi juxta tellurem accedat & eadem celeritate moveatur ille arcus erit 11′; ſinus verſus Arcus 11′ eſt $\frac{51}{10.000.000}$ Radii qui Radius cum ſit pedum 19615783 erit ſinus ille verſus pedum centum circiter, ſed grave prope terram viginti iſtis ſcrupulis ſecundis cadendo percurrit 20 × 20 × 15 $\frac{1}{12}$, ſive 6033 ped. Unde Luna in circulo ſuo non manebit ſed longè prius in terram impegerit quam 20 ſecunda elapſa fuiſſent. 66

(°) 66. * *Gravitas igitur datur in Planetas univerſos;* * Datur gravitas in terram & eâ gravitate Luna circa eam revolvitur per Prop. IV; datur gravitas in Jovem & Saturnum, nam revolutiones Planetarum circumjovialium circa Jovem, &

DE MUNDI SYSTEMATE.

generis cum jove & ſaturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis per motus legem tertiam mutua ſit, jupiter in ſatellites ſuos omnes, ſaturnus in ſuos, terraque in lunam, & ſol in planetas omnes primarios gravitabit.

*Corol.* 2. (p) Gravitatem, quæ planetam unumquemque reſpicit, eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

*Corol.* 3. Graves ſunt planetæ omnes in ſe mutuò per corol. 1. & 2. Et (q) hinc jupiter & ſaturnus prope conjunctionem ſe invicem attrahendo, ſenſibiliter perturbant motus mutuos, ſol perturbat motus lunares, ſol & luna perturbant mare noſtrum, ut in ſequentibus explicabitur.

## *Scholium.*

Hactenus vim illam quâ corpora cœleſtia in orbibus ſuis retinentur centripetam appellavimus. Eandem jam gravitatem eſſe conſtat, & propterea gravitatem in poſterum vocabimus. Nam cauſa vis illius centripetæ, quâ lunâ retinetur in orbe, extendi debet ad omnes planetas per reg. I. II. & IV.

PRO-

66. circumſaturniorum circa Saturnum ſunt ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa terram, pendent ergo (per reg. 2.) ex gravitate eorum Satellitum in eos Planetas; Quamvis autem non ſint aut non obſervati ſint Satellites circa Martem, Venerem & Mercurium, attamen Jovi, Saturno, Terræ in cæteris ita ſunt ſimiles ut dubitandi locus non relinquatur quod ſi Satellites juxta ipſos collocarentur idem eveniret illis ac Lunæ & circumſaturniis aut circumjovialibus, unde ſequitur Gravitatem etiam dari in illos Planetas; Poſtea propter mutuam attractionem, terram eſſe gravem in Lunam, &c. conſtabit.

(p) * *Coroll.* 2. Patet (ex reg. 1. & prop. 1.).

(q) * *Et hinc Jupiter.* Hæc mutua planetarum perturbatio ut potè cum ſequentibus propoſitionibus conjuncta deinceps convenientius explicabitur, * ſufficiant in præſentiarum quæ de eâ ſuperius dictum eſt, occaſione quietis Apheliorum, vide notam a ad Prop. 2.

## PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

*Corpora omnia in planetas ſingulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis planetam, paribus diſtantiis à centro planetæ, proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.*

(r) Deſcenſus gravium omnium in terram (demptâ ſaltem inæquali retardatione quæ ex aëris perexigua reſiſtentia oritur) æqualibus temporibus fieri, jamdudum obſervarunt alii; & accuratiſſimè quidem notare licet æqualitatem temporum in pendulis. Rem tentavi in auro, argento, plumbo, vitro, arenâ, ſale communi, ligno, aquâ, tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam ligno, & idem auri pondus ſuſpendebam (quam potui exactè) in alterius centro oſcillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, conſtituebant pendula, quoad pondus, figuram, & aëris reſiſtentiam omnino paria: & paribus oſcillationibus, juxta poſitæ, ibant unà & redibant diutiſſimè. (ſ) Proinde copia materiæ in auro (per corol. 1. & 6. prop. XXIV. lib. II.) erat ad copiam materiæ in ligno, ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in totum lignum; hoc eſt, ut pondus ad pondus. Et ſic in cæteris. In corporibus ejuſdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor eſſet quam pars milleſima materiæ totius, his experimentis manifeſtò deprehendi potuit. Jam verò naturam gravitatis in planetas eandem eſſe atque in terram, non eſt dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc terreſtria ad uſque orbem lunæ, & unà cum lunâ motu omni privata demitti, ut in terram ſimul cadant; & per

(r) * *Deſcenſus gravium omnium* (3. lib. 1.).

(ſ) * *Proindè copia materiæ.* Quantitas materiæ in medio non reſiſtente eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inverſè (per cor. 6. prop. 24. lib. 2.) ideóque datis tempore & longitudine penduli, ut pondus comparativum directè. Sed pondus comparativum eſt actio vis motricis (per cor. 6. prop. 20. lib. 2.). Ergò copia materiæ in auro erat ad copiam materiæ in ligno ut vis motricis actio in totum aurum ad ejuſdem actionem in lignum, hoc eſt, (per cor. 1. prop. 24. lib. 2.) ut pondus ad pondus. *6 6.*

DE MUNDI SYSTEMATE.

(t) per jam ante oſtenſa certum eſt quod temporibus æqualibus deſcribent æqualia ſpatia cum lunâ, ideoque quod ſunt ad quantitatem materiæ in lunâ, ut pondera ſua ad ipſius pondus. Porro quoniam ſatellites jovis temporibus revolvuntur quæ ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro jovis, (u) erunt eorum gravitates acceleratrices in jovem reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro jovis; & propterea in æqualibus à jove diſtantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, deſcriberent æqualia ſpatia; perinde ut fit in gravibus in hâc terrâ noſtrâ. Et (x) eodem argumento planetæ circumſolares, ab æqualibus à ſole diſtantiis demiſſi, deſcenſu ſuo in ſolem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. (y) Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, ſunt ut corpora; hoc eſt, pondera ut quantitates materiæ in planetis. Porro jovis & ejus ſatellitum pondera in ſolem proportionalia eſſe quantitatibus materiæ eorum patet ex motu ſatellitum quam maximè regulari; per corol. 3. prop. LXV. lib. 1. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in ſolem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri: motus ſatellitum (per corol. 2. prop. LXV. lib. 1.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si, paribus à ſole diſtantiis, ſatelles aliquis gravior eſſet in ſolem pro quantitate materiæ ſuæ, quam jupiter pro quantitate materiæ ſuæ, in ratione quâcunque datâ, puta *d* ad *e*: diſtantia inter centrum ſolis & centrum orbis ſatellitis, major ſemper foret quam diſtantia inter centrum ſolis & centrum jovis in ratione ſubduplicatâ quam

66. (t) * *Per jam antè oſtenſa* (prop. 4. lib. hujus).

(u) * *Erunt eorum gravitates acceleratrices.* (Per cor. 2. prop. 5.).

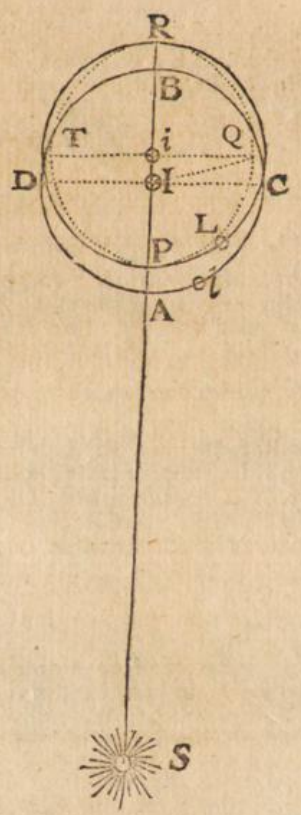
(x) * *Et eodem argumento.* Gravitates acceleratrices planetarum in Solem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro Solis (cor. 2. prop. 5.) & propterea in æqualibus à Sole diſtantiis eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales, proindeque temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo deſcriberent ſpatia æqualia. Quanto autem tempore planeta quilibet circumſolaris omni motu revolutionis privatus ſolâ vi centripetâ deſcendetet & ad ſolem uſquè perveniret ex datâ ejus à Sole diſtantiâ innoteſcit per not. 401. lib. 1. dimidio ſcilicet temporis periodici quo planeta ad diſtantiam duplò minorem revolvi poſſet, ſive tempore quod eſt ad tempus periodicum planetæ ut 1 ad $4\sqrt{2}$, idem planeta cadendo ſolem attingeret.

(y) * *Vires autem quibus corpora inæqualia.* (Def. 7. & not. 15. lib. 1.).

quam proximè; (z) uti calculo quodam inito inveni. Et si satelles minus gravis esset in solem in ratione illa *d* ad *e*, distantia centri orbis satellitis à sole minor foret quam distantia centri jovis à sole in ratione illâ subduplicatâ. Ideoque si in æquali-



(z) * *Uti calculo quodam inito inveni.* * Sit S Sol, I Jupiter, L Satelles gravior in Solem quam Jupiter paribus in distantiis in ratione *d* ad *e*, Fiat SI ad S*i* sicut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ & quoniam gravitas est inversè ut quadrata distantiarum, gravitas in Solem ad distantiam S I erit ad gravitatem in Solem ad distantiam S *i* ut *d* ad *e*; unde si gravitas Jovis in I positi sit ut *e*, & gravitas satellitis gravioris in I etiam positi sit ut *d*, ejusdem satellitis gravitas in *i* positi erit ut *e*, quare erit æqualis gravitati Jovis in I positi: Fingatur satelles *l* qui Jove nec gravior nec levior sit, qui circa Jovem I circulum describat ACBD; & fingatur in *i* corpus centrale Jovi simile circa quod, semotâ Solis actione, satelles gravior L describere poterit orbitam P Q R T priori A C B D æqualem; Restituatur Solis actio, actio ejus in utrumque satellitem erit æqualis, in similibus orbitarum punctis nam propter ingentem puncti S distantiam erit S A ad S P, & S B ad S R ut S I ad S *i*, ideoque ut $\frac{1}{\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{\sqrt{e}}$ gravitates in eis punctis forent ut *d* ad *e*, ideóque si satellites forent æque graves, paribus in distantiis gravitates in eis punctis forent ut *d* ad *e*, sed quia gravitas satellitis *l* est ad gravitatem satellitis L ut *e* ad *d* compensatur discrimen gravitatis ex distantiâ ortum per discrimen gravitatis ex Hypothesi constitutum: mutatio autem quæ ex actione Solis oritur in orbitam satellitis relatè ad ejus primarium pendet ex discrimine actionis Solis in satellitem & in primarium, hoc est in oppositione pendet ex residuo actionis Solis in primarium demptâ actione Solis in satellitem; & in conjunctione ea mutatio pendet ex residuo actionis Solis in satellitem demptâ Solis actione im primarium: Cum ergo actio Solis in satellites L & *l*, sit eadem;




66.

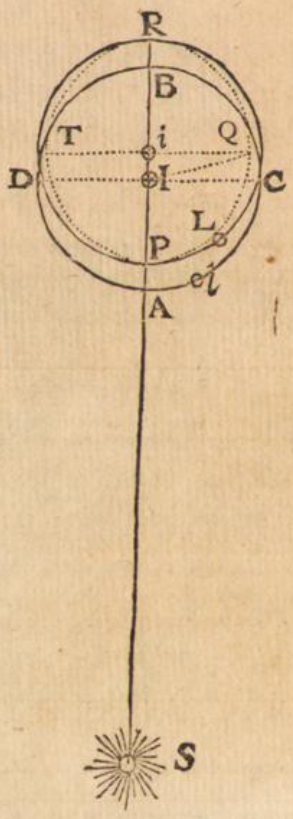
sed actio Solis in primarium *i* sit minor quam in primarium I, in oppositione minus est residuum quod mutationem pariet in orbita satellitis L, quam residuum quod mutationem satellitis *l* parit in orbitâ & majus è contra est residuum in conjunctione respectu orbitæ satellitis L quam respectu orbitæ satellitis *l*; sed illa Residuæ tam in oppositione quam in conjunctione vim centripetam minuunt; Ergo vis centripeta major manet in R quam in B, & minor è contra in P quam in A, unde patet

De Mundi Systemate.

æqualibus à ſole diſtantiis, gravitas acceleratrix ſatellitis cujuſvis in ſolem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix jovis in ſolem, parte tantum milleſimâ gravitatis totius; foret diſtantia centri orbis ſatellitis à ſole major vel minor quam diſtantia

*Prop.* 66. patet quod ut reſtituatur ſimilitudo inter orbitam ſatellitis L, & orbitam ſatellitis *l* corpus centrale debeat removeri à puncto R & accedere verſus P, hoc eſt transferri ex i verſus I; ita ut centrum orbitæ ſatellitis L remotius eſſe debeat à Sole quam ipſius corpus Centrale.

Jam verò dico illud corpus centrale ad I transferri debere, nam ſit corpus centrale in I, ſemotâ Solis actione, ſatelles L eodem tempore Periodico ac prius deſcribet Ellipſim cujus centrum i, focus verò I & axis major RP, (per Cor. Prop. XV. Lib. I.) & in mediocri ſuâ diſtantia IQ (Cor. 4. Prop. XVI. Lib. I.) velocitatem eamdem habebit quam habet ſatelles *l* in ſuo circulo, qualem v. gr. habet in C ubi velocitatum illarum directiones ſunt Parallelæ tam inter ſe quam diametro RP, & ob diſtantiarum IQ & IC æqualitatem vires centrales ſunt æquales directionis obliquitate paulum differentes; Addatur jam actio Solis, & cum ſit SQ ad SC ut Si ad SI actiones illæ Solis (ex Hyp. & demonſtratis) in ſatellites diverſæ gravitatis ſed poſitos in Q & C erunt etiam æquales; Movebitur ergo ſatelles L in mediocribus diſtantiis Q & T ut ſatelles *l* movetur in C & D quam proximè, tam ratione corporis centralis I quam etiam ex adjuncta actione Solis, mutationes verò ex Sole pendentes in A & P, & in R & B æquales ſunt, quia ſunt differentia ejuſdem vis Solis in in I & virium Solis in A & P, ut & virium Solis in R & P, vires autem in A & P ſunt æquales ex Hyp. & dem. ut & in R & P. Unde cum vis Primarii magna cenſenda ſit reſpectu vis S; rationes virium Centripetarum reſiduarum in P & A, B & R manent inter ſe in eadem ratione ac ſi nulla foret actio Solis, & ut ſemotâ actione Solis curvas ſuas iiſdem temporibus deſcribere faciebant, celeritate quidem majori in P, minori in R, media




verò in A & B, itaque eadem proximè iis in punctis manebit ratio deſcriptionis curvarum; cum ergo demonſtratum ſit quod in punctis P Q R T, A C B D actio Solis non turbet relationem quæ intercedit inter modum quo curvæ illæ P Q R T, ACBD deſcribuntur cùm virium rationes eædem maneant ac prius quamproximè, idem etiam de punctis intermediis erit intelligendum. Unde ſequitur quod ſatelles L in orbita P Q R T revolvi poterit eodem tempore iiſdemque proxime Legibus ac Satelles

tantia jovis à ſole (a) parte $\frac{1}{1000}$ diſtantiæ totius, id eſt, parte quintâ diſtantiæ ſatellitis extimi à centro jovis: quæ quidem orbis eccentricitas foret valde ſenſibilis. Sed orbes ſatellitum ſunt jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices jovis & ſatellitum in ſolem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera ſaturni & comitum ejus in ſolem, in æqualibus à ſole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis: & pondera lunæ ac terræ in ſolem vel nulla ſunt, vel earum maſſis accuratè proportionalia. Aliqua autem ſunt per corol. 1. & 3. prop. v.

Quinetiam pondera partium ſingularum planetæ cujuſque in alium quemcunque ſunt inter ſe ut materia in partibus ſingulis. Nam ſi partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: planeta totus, pro genere partium quibus maximè abundet, gravitaret magis vel minùs quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ ſint vel internæ. Nam ſi verbi gratia corpora terreſtria, quæ apud nos ſunt, in orbem lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore

telles L in orbitâ ſuâ A C B D, ſi gravior ſit Jove paribus in diſtantiis in ratione duplicatâ diſtantiæ Solis à centro ſuæ orbitæ ad diſtantiam Solis ab ipſo Jove. Q. E. D.

Eamdem demonſtrationem applicari poſſe ad caſum ubi ſatelles ſupponeretur levior Jove paribus in diſtantiis, illumque tunc deſcripturum Ellipſim cujus centrum Sole vicinius erit quam Jupiter ita ut ſit gravitas ſatellitis ad gravitatem Jovis in duplicatâ ratione diſtantiæ Solis à centro Orbitæ ad diſtantiam Solis à Jove. Q. alterum E. D.

Hâc ratione ſatis conſtare aſſertum Newtoni credimus, idem tamen aliter *inito calculo* magis ad mentem Newtoni demonſtrari poſſe non negamus; ſed ratio eum calculum ineundi ex iis quæ poſtea de motibus Lunaribus dicentur, erit deducenda.

(a) * *Parte* $\frac{1}{2000}$ *diſtantiæ totius.* Gravitas acceleratrix Jovis ſit 1, erit (per hyp.) gravitas acceleratrix ſatellitis $1+\frac{1}{1000}$, ſed (ex dem.) diſtantia inter centrum Solis & centrum orbis ſatellitis major eſt quam diſtantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione illâ ſubduplicatâ quamproximè, hoc eſt, ut 1, ad $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}$. Quarè utriuſque diſtantiæ differentia eſt $\sqrt{1+\frac{1}{1000}}-1$ ſeu $\sqrt{\frac{1001}{1000}}-1=\sqrt{1.001}-1=1.0004998$ &c. $-1=.0004998$ &c. ſive $=\frac{5}{10000}=\frac{1}{2000}$, ideóque diſtantia centri orbis ſatellitis à Sole major erit quam diſtantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ diſtantiæ totius, 66.

DE MUNDI SYSTEMATE.

pore lunæ: si horum pondera essent ad pondera partium externarum lunæ ut quantitates materiæ in iisdem, ad pondera verò partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam supra ostensum est.

*Corol.* 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari possent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materiâ: omnino contra experientiam.

*Corol.* 2. Corpora universa, quæ circa terram sunt, gravia sunt in terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Hæc est qualitas omnium in quibus experimenta instituere licet, & propterea per reg. III. de universis affirmanda est. Si æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omninò destitueretur, vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Aristotelis*, *Cartesii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus nisi in formâ materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis, quæ pro quantitate materiæ quam maximè gravitant, & vicissim corpora maximè gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in corollario superiore.

*Corol.*

66. tius, id est parte quintâ distantiæ Satellitis extimi à centro Jovis.

* Nam est Diameter Jovis circiter decima pars Diametri Solis ut supra indicavimus sive ut 997 ad 10.000, distantiâ extimi satellitis est 26.63 semi Diametrorum Jovis, ergo ea distantiæ semi Diametros Solis continebit 2.663 aut accuratiùs 2.655.

Solis semi Diameter mediocris è terrâ visus secundum Cassini tabulas est 16′. 3″ vel 16′ 4″. Jam verò in Triangulo Rectangulo cujus angulus verticis est 16′. 4″ altitudo continet Basim 213.96 vicibus; ergo inter solem & terram intervallum est quod Solis semi Diametros 213.96 contineret, sive proximè, Solis Diametros 107.

Jovis autem distantia mediocris à Sole est ad distantiam mediocrem terræ à Sole, ut 52 ad 10, ergo ea continebit semi Diametros Solis 1112.592, ejus numeri bis millesima pars est .556296 quæ est excentricitas Jovis si satelles sit Jove $1000^{a}$. parte gravior vel levior paribus in distantiis, ille verò numerus .556296 est quinta pars numeri 2.78148 paulò majoris quam 2.655 sed distantiâ extimi satellitis à Jove continebat Solis semi Diametros 2.655; Ergo excentricitas Jovis si satelles sit Jove $1000^{a}$. parte gravior vel levior paribus in distantiis est ad minimum quintâ pars distantiæ satellitis extimi à Jove. Q. E. D.

*Corol.* 3. Spatia omnia non ſunt æqualiter plena. Nam ſi ſpatia omnia æqualiter plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo regio aëris impleretur, ob ſummam denſitatem materiæ, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aëre deſcendere poſſet. Nam corpora in fluidis, niſi ſpecificè graviora ſint, minimè deſcendunt. Quod ſi quantitas materiæ in ſpatio dato per rarefactionem quamcunque diminui poſſit, quidni diminui poſſit in infinitum?

*Corol.* 4. Si omnes omnium corporum particulæ ſolidæ ſint ejuſdem denſitatis, neque ſine poris rarefieri poſſint, (z) vacuum datur. Ejuſdem denſitatis eſſe dico, (a) quarum vires inertiæ ſunt ut magnitudines.

*Corol.* 5. Vis (b) gravitatis diverſi eſt generis à vi magneticâ. Nam attractio magnetica non eſt ut materia attracta. Corpora

(z) * *Vacuum datur.* Quibus reſponſionibus hoc Newtoni ratiocinium effugiant Carteſiani jam diximus (lib. 2. num. 187.).

(a) * *Quarum vires inertiæ.* Cum enim vis inertiæ ſit quantitati materiæ proportionalis, ſi vires inertiæ ſunt ut magnitudines, magnitudines ſunt ut quantitates materiæ, hoc eſt, ſunt ejuſdem denſitatis.

(b) * *Vis gravitatis diverſi eſt generis.* Clariſſ. Muſkenbroek in Diſſertatione de Magnete plurima atque accuratiſſima de hujuſce lapidis actione refert experimenta. Ex deſcriptâ à diligentiſſimo viro experimentorum ſerie palam quidem fit æqualem non eſſe magnetis in varia corpora actionem, eamque tempeſtatum viciſſitudinibus obnoxiam & modò remitti modò intendi. At vim magneticam in ratione multò minori quam triplicatâ diſtantiarum decreſcere eadem oſtendunt experimenta. Hinc poſt tranſcriptum hoc ipſum Corollarium V., ſubdit Muſkenbroek: «utinam memoriæ prodita fuiſſent «experimenta ex quibus Newtonus hæc «collegit; forſitan enim vir ſtupendæ ſub«tilitatis in Mathematicis diſciplinis me«thodum invenit ſeparandi attractiones à «repulſionibus quarum proportionem in di- 66.
«ſtantiæ ratione triplicatâ decreſcere de«prehendit, ſed quia nihil de hâc re ulte«rius determinavit nec amplecti ejus ſen«tentiam poſſumus:». Ut intelligantur hæc Clariſſ. Muſkenbroekii verba, ſciendum eſt virum doctiſſimum ſuis experimentis in eam inductum fuiſſe ſuſpicionem, quod ſcilicet magnes conſtaret partibus valdè heterogeneis, quarum quædam attraherent quædam repellerent ità ut duæ illæ vires oppoſitæ vel ſimplicis repulſionis vel attractionis proportionem turbent. Idque non caret veriſimilitudine, cum experimentis notiſſimum ſit magnetes non ſolùm ſeſe mutuò attrahere, ſed etiam alterutro magnete in contrariam partem converſo, unum ab altero repelli. Uterque magnetis polus vim repellentem atque attrahentem æquè oſtendit & idcircò ex eodem polo vis attrahens & repellens emanat. Si amici magnetum poli ſibi obvertantur, attractio præpollet repulſioni, ſi e contrà inimici poli ſeſe invicem reſpiciant, prævalet repulſio. Quamobrem qui ſolam attractionem vult cognoſcere, perſpectam habere debet eorumdem polorum vim repulſivam eamque addere vi attrahenti experimento cognitæ, ſumma in-

pora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longè major pro quantitate materiæ

66. dicabit vim totam attrahentem. Hinc forsan fieri posset ut separatis ab invicem attractionis repulsionisque viribus, constans quam Newtonus deprehendit inter attractiones & distantias proportio obineret. At verò cum ex crassis observationibus duntaxat id se animadvertisse fateatur Newtonus, non ità longè quærenda videtur mens nostri autoris.

* Vim magneticam decrescere in ratione triplicatâ distantiarum ab experimentis statuit Wisthonus in egregio opusculo, De Acus magneticæ inclinatione: ipse autem Muyschenbroekius in Tomo primo Physices suæ, Rationem diminutionis vis magneticæ esse ferè quadruplicatam distantiarum deducit ingeniosissimis experimentis, scilicet magnetem unum alteri lanci bilancis appendit, ponderibus in alterâ lance ad æquilibrium instituendum impositis, tum admovet magnetem sub eo qui suspensus est, sic vis attractionis magnetum æquilibrium tollit, quod adjectis ponderibus restituitur; & pondera illa addenda varia sunt pro varia distantia magnetum inter se, ita ut videantur sequi rationem quadruplicatam inversam spatii vacui inter magnetes intercepti, quod spatium vacuum non est Cylindricum aut Prismaticum, quia magnetes quibus utebatur Cl. Muyschenbroekius erant Sphærici unde hæc ratio non est accurate ratio quadruplicata inversa distantiarum.

Aliâ ratione hæc experimenta possunt institui, nempe considerando actionem magnetis in acum magneticam, quantum nempe pro variâ magnetis distantiâ à magnetico meridiano acum detorqueat, atque hâc ratione, experimenta à Wisthono instituta fuisse (nisi memoria fallit) puto, quæ forte Methodus ea est etiam quâ Newtonus usus fuerat, & sane omnibus probè notatis quæ ad æstimationem virium requiruntur, vis magneticæ diminutionem secundum triplicatam rationem procedere experimentis quam accuratissimè potui institutis deprehendi, quæ quidem experimenta (cum non sint ad manum ea quæ Wisthonus hâc de re tradidit) referre nostri puto esse instituti.

Sit ergo A C B, meridianus magneticus, N C S acus magnetica actione magnetis M, extra meridianum magneticum tracta, sitque linea C m à centro acus ad centrum magnetis ducta meridiano magnetico perpendicularis & statim supponatur distantiam C m à centro acus ad centrum magnetis esse Physicè infinitam.

Vis magnetica terræ retrahit acum a situ S C N ad B C A, sed quia illi situi est obliqua, resolvenda est in duas vires unam lineæ S C N perpendicularem alteram ipsi Parallelam; hæc frustra agit obnitente centro C, illa vero gyrationem acus efficit, itaque si in puncto quovis c, a c repræsentet vim magneticam totam, a n repræsentabit vim quâ convertitur acus quæ ideo est ad vim magneticam totam in eo puncto ut sinus anguli a c n (declinationis acus à meridiano magnetico) ad Radium; In omnibus punctis C N vim æqualem exerceri supponi potest, sed in parte C S vis ea repulsivè agit, ideoque consentit cum vi quæ convertit partem C N, & ejus efficaciam geminat: Notum est verò quod si vires æquales in omnibus punctis C N agant æqualiter & perpendiculariter ut eam lineam convertant earum omnium efficacia eadem erit ac si summa omnium virium perpendiculariter ageret in puncto P duabus tertiis partibus acus C N à centro C remoto, hic ergo collecta censeri potest tota vis magnetica convertens partem C N, & eodem ratiocinio vis repulsiva convertens partem C S, in puncto p, duabus tertiis arcus C S à centro C remoto, collecta censeri potest; & propter æqualitatem linearum C N, C S, ideoque partium C P ac C p, tota vis magnetica tam attractiva quam repulsiva acumconvertens puncto P applicata censeri potest.

Si magnes M ab acu infinitè distaret, pari ratiocinio ostenderetur vim totam quâ con-

teriæ quam vis gravitatis, & in receſſu à magnete decreſcit in ratione diſtantiæ non duplicatâ, ſed ferè triplicatâ, quantùm ex craſſis quibuſdam obſervationibus animadvertere potui.



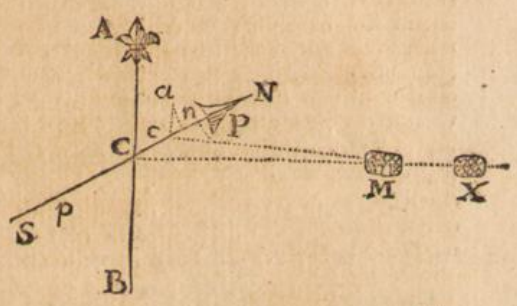
PRO-

convertit acum in puncto P eſſe collectam & per reſolutionem virium, vim quâ convertit acum, eſſe ad vim totam ejus magnetis M ut ſinus anguli NCM (deviationis nempe acus à magnete) ad Radium.

Hinc in caſu, in quo acus quieſcit, vis magnetica terræ convertens acum eſt æqualis vi magnetis convertenti acum, ſiquidem manet acus in æquilibrio in ſitu NSC, cum ergo ſit vis magnetica terræ tota, ad vim magneticam terræ convertentem acum ut Radius ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico; & ſit vis magnetis convertens acum (æqualis illi vi magneticæ terræ convertenti acum) ad vim totam magnetis ut ſinus deviationis acus à magnete ad Radium; ex æquo & per compoſitionem rationum habebitur vis tota magnetica terræ ad vim totam magnetis M ut ſinus deviationis acus à magnete, ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico, quod etiam per compoſitionem virium demonſtrari potuiſſet.

Itaque ſi idem magnes ad aliam diſtantiam ponatur, ut in X, ita ut in alio ſitu acum conſtituat, habebitur etiam vis magnetis in X, ad vim totam magneticam terræ, ut ſinus declinationis acus à meridiano magnetico ad ſinum deviationis acus à magnete. Quare per compoſitionem rationum erit vis magnetis in X, ad vim magnetis in M, ut ſinus declinationis acûs à meridiano magnetico cum magnes eſt in X diviſus per ſinum deviationis ab eo magnete in X poſito, ad ſinum declinationis acus à meridiano magnetico cum magnes eſt in M diviſum per ſinum deviationis à magnete, in M poſito, hoc eſt, vis magnetis in diverſis diſtantiis, (infinitis, reſpectu magnitudinis acus) eſt ut ſinus declinationis acus à magnetico meridiano diviſus per ſinum deviationis ejus à magnete.

Equidem quando magnes ſatis eſt vicinus ab acu ut diverſa cenſeri poſſit ejus diſtantia à diverſis punctis acus, & fortior ſit ejus vis in puncta viciniora quam in




remotiora, ſimulque actio magnetis ad diverſa puncta acus diverſa cum obliquitate applicetur, centrum actionis vis magnetis fiet vicinius extremitati N, attamen ob figuram vulgarem acus magneticæ quæ ſpiculi inſtar formata circa punctum P latior eſt, centrum rotationis acus in puncto P manere cenſeri poteſt niſi nimia ſit magnetis vicinia. 66.

Ideoque diſtantia magnetis ab acu & angulus deviationis acus à magnete determinabuntur ducendo lineam à centro magnetis ad id punctum P atque his Principiis per experimenta mox recenſenda vires magnetum in diverſis diſtantiis poſitorum fuerunt æſtimatæ.

In his experimentis adhibita fuit acus magnetica trium pollicum; quæ ut ſolet, attingebat utràque extremitate circulum diviſum in ſuos gradus, ductaque linea perpendiculari in centrum acus cùm ſponte in meridiano magnetico jacebat, applicabatur magnes Parallelepipedon ſuper eam lineam ita ut ejus facies Polares perpendiculares eſſent ei lineæ, Poluſque ejus meridionalis acum ſpectaret, Borealemque ejus extremum ad ſe traheret, menſurabantur diſtantiæ à centro acus ad centrum magnetis in Pollicibus lineiſque Pariſienſibus, & obſervabatur quantùm in ſingulis magnetis diſtantiis diſcederet acus à meridiano magnetico, tum, primò graphicè, poſtea calculo Trigonometrico, diſtantia centri magnetis, à centro Rota-

DE MUNDI SYSTEMATE.

tionis acus, ut & angulus ejus lineæ cum acu, determinabantur; diviso itaque sinu declinationis acus per sinum istius anguli Quotiens exprimit Rationem vis magneticæ

66. in distantia singula inventa, sive Logarithmis utendo, Differentia Logarithmorum Sinuum angulorum deviationis à meridiano magnetico & à magnete erit Logarithmus vis magneticæ, in distantia in quâ anguli illi habentur, & tertia pars ejus differentiæ erit Logarithmus Radicis cubicæ vis magneticæ, & assumptis iis Radicibus cubicis in numeris, si per eas dividatur numerus aliquis constans (qui hic est $57\frac{3}{4}$) Quotientes erunt ipsæ distantiæ; Unde liquet quod Radices cubicæ virium magnetis sunt inverse ut distantiæ sive quod vis magnetica sit inverse in ratione triplicatâ distantiarum: sequenti verò tabellâ exhibentur hæc experimenta magnâ curâ instituta, cum calculo inde deducto; Prima columna designat distantias à Centro acus ad Centrum magnetis; Secunda columna designat distantiam à Centro rotationis acus ad centrum magnetis; Tertia declinationem acus à meridiano magnetico cum suo Logarithmo & tertiâ ejus parte; Quarta, declinationem acus à lineâ ductâ à centro rotationis acus ad centrum magnetis cum suo Logarithmo & tertiâ parte; Quinta, differentias earum tertiarum partium, cum suis numeris qui rationem exprimunt Radicum cubicarum virium magnetis in diversis distantiis; Sexta denique Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per istos numeros divisi, qui Quotientes ipsas distantias quamproxime æquant.

| Distantia à Centr. magn. ad Centrum acus. | Distantia à Centr. magn. ad Cent. rotat. acus. | Declin. à merid. magnetico cum Logar. & ejus tertiâ parte observata. | Declin. à magnete cum Logarith. & ejus tert. parte. | Differentia tertiar. part. Logar. cum suis numeris. | Quotientes numeri $57\frac{3}{4}$ per numer. qui Radic. Cubic. virium magneticarum exhibent divisi. |
|---|---|---|---|---|---|
| 51.46 | 40 | 75d. | 19d. 27 | | |
| | | 9.9849438 | 9.5224235 | 0.1541734 | |
| | | 3.3283146 | 3.1741412 | n. 1.426 | 40.4 |
| 60.16 | 50 | 61 | 35. 41 | | |
| | | 9.9418193 | 9.7658957 | 0.2586412 | |
| | | 3.3139398 | 3.2552986 | n. 1.144 | 50.4 |
| 67.49 | 60 | 44d. 30.' | 53d. 42'. | | |
| | | 9.8456618 | 9.9062964 | —1.9797885 | |
| | | 3.2818873 | 3.3020988 | n. 0.9545 | 60.5 |
| 83 | 80 | 21 | 77°. 6' | | |
| | | 9.5543292 | 9.9888982 | —1.8541437 | |
| | | 3.1837764 | 3.3296327 | n. 0.7147 | 80.8 |
| 101 | 100 | 11d. | 85d. 46' | | |
| | | 9.2805988 | 9.9988135 | —1.7605951 | |
| | | 3.0935329 | 3.3329378 | n. 0.5762 | 100.2 |
| 120.7 | 120 | 6. 20' | 89' 22' | | |
| | | 9.0426249 | 9.9999735 | —1.6809838 | |
| | | 3.0143083 | 3.3333245 | n. 0.4797 | 120.3 |
| 150.2 | 150 | 3. 20 | 91. 15 | | |
| | | 8.7645111 | 9.9998966 | —1.5882049 | |
| | | 2.9215037 | 3.3332988 | n. 0.3874 | 149. |
| 160.1 | 160 | 2d. 40' | 91d. 38' | | |
| | | 8.6676893 | 9.9998235 | —1.5559553 | |
| | | 2.8892298 | 3.3332745 | n. 0.3597 | 160.5 |

Eodem

## PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

*Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.*

Planetas omnes in se mutuò graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à centro planetæ. Et inde consequens est (per prop. IXIX. lib. 1. & ejus corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cum planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius; & actioni omni reactio (per motûs legem tertiam) æqualis sit; planeta *B* in partes omnes planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Oritur igitur & componitur gravitas in planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus (c) in attractionibus magneticis & electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas.

Res-

Eodem modo experimenta instituta sunt linea à centro magnetis ad centrum acus angulum 45 graduum cum meridiano magnetico constituente.

Repetita fuere ea experimenta cum duobus diversis magnetibus, & vires quidem diversæ sunt repertæ sed decrescere secundum eamdem distantiarum rationem deprehensæ sunt.

Repetita fuere cum magnetibus iisdem & armatis & armatura spoliatis & quod omninò observabile est, idem magnes eamdem declinationem acus magneticæ produxit sive armatus foret sive non armatus, in eadem nempe centri magnetis à centro acus distantia ac directione; Quod quidem Paradoxon videbitur cum vis quâ magnes armatus ferrum sustinet, multum differat à vi quâ idem magnes non armatus ferrum trahit. Idem tamen Phænomenon in utroque magnete deprehendi in quâlibet distantiâ ac directione ita ut cum tutius mensurarentur distantiæ centri acus & centri magnetis, magnete non armato sum usus in experimentis præcedentibus, ex quibus satis probari credo; *In recessu à magnete vim magneticam decrescere in ratione ferè triplicatâ quantum saltem crassis illis observationibus animadverti potest.*

(c) * *In attractionibus magneticis & electricis*, ubi ut plurimùm quò majùs est attrahens, eò cæteris paribus, major est attractio.

Res (d) intelligetur in gravitate, concipiendo planetas plures minores in unum globum coire & planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. (e) Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hâc lege gravitare deberent in se mutuò, cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in terram totam ut sunt hæc corpora ad terram totam, longè minor est quàm quæ sentiri possit.

*Corol.* 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à particulis. Patet per corol. 3. prop. LXXIV. lib.

PRO-

66. (d) * *Res intelligetur in gravitate.* Vires quæ sunt ut materia in omnium formarum corporibus atque ideò non mutantur cum formis, reperiri debent in corporibus universis singulisque corporum partibus & esse proportionales quantitati materiæ, hinc vis corporis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Si itaque concipiamus Jovem & Satellites ejus ad se invicem accedere ut globum unicum componant, pergent singuli sese mutuò trahere, & viceversâ si corpus Jovis resolveretur in globos plures, hi quoque globi satellitum instar sese mutuò traherent.

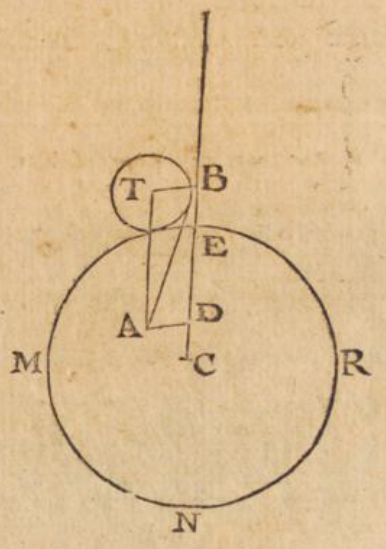
67. Globi cujusque vis absoluta est ut quantitas materiæ in eodem globo; vis autem motrix quâ globus unusquisque trahitur in alterum & quæ ponderis nomine vulgò designatur, est ut contentum sub quantitatibus materiæ in globis duobus applicatum ad quadratum distantiæ inter centra (per cor. 4. prop. 76. lib. 1.) & huic vi proportionalis est quantitas motûs quâ globus uterque dato tempore movebitur in alterum (def. 8. lib. 1.) vis autem acceleratrix quâ globus unusquisque pro ratione materiæ suæ attrahitur in alterum est ut quantitas materiæ in globo altero applicata ad quadratum distantiæ inter centra (per cor. 2. prop. 76. lib. 1.) & huic vi proportionalis est velocitas quâ globus attractus dato tempore movebitur in alterum (def. 7. lib. 1.). Hinc coporum cæleſtium motus inter se possunt facile determinari. Quia verò respectu terræ totius exigua admodum sunt corpora terrestria, patet minimam quoque esse mutuam horum corporum attractionem respectu attractionis in terram totam. Sic sphæra terræ homogenea diametroque pedis unius descripta minus trahet corpusculum juxtà superficiem suam quam terra juxtà suam in ratione diametri sphæræ ad diametrum terræ (prop. 72. lib. 1.) hoc est in ratione 1 ad 39231566 sive 1 ad 40000000 circiter, quæ tantilla vis sentiri non potest.

(e) * *Si quis objiciat* &c. Majora etiam quæ in terrâ concipi possunt corpora haud magnos effectus producent. Sit enim EMNK, tellus cujus centrum C, eaque ponatur sphærica & homogenea. Sit corpus ubicumque putà in loco B, sublato omni impedimento, ad telluris superficiem perpendiculariter dirigeretur per rectam BEC; in ipsâ telluris superficie adatur sphæra T, telluri homogenea triumque milliarium sive Leucæ unius marinæ diametro descripta quam tangat recta BEC; designet EC vim gravitatis in ipsa superficie terræ & designabit TB gravitatem in ipsa superficie sphæræ T (prop. 72. lib. 1.) gravitas in E, in tellurem erit ad gravitatem in B in eandem, ut $BC^2$ ad $EC^2$ (prop. 74. lib. 1.). Quare ponendo

## PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

*Si globorum duorum in se mutuò gravitantium materia undique in regionibus, quæ à centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciprocè ut quadratum distantiæ inter centra.*

Postquam invenissem gravitatem in planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciprocè proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accuratè in vi totâ ex viribus pluribus compositâ, an verò quam proximè. Nam fieri posset ut proportio, quæ in majoribus distantiis accuratè obtineret, prope superficiem planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret.




do $BC^2$ ad $EC^2$ ut EC ad BD, recta BD exibebit gravitatem in terram in loco B, ac proinde completo rectangulo TBAD, gravitatis directio erit per diagonalem BA (41. lib. 1.). Jam in triangulo rectangulo BAD, est BD ad AD ut radius ad tangentem anguli DBA. Quia verò telluris semidiameter mediocris est fere 1145 Leucarum Marinarum (quarum nempe viginti gradum complent, uno marino milliari singulo gradus minuto respondenti) poni etiam potest recta BD æqualis EC, ideoque erit ad TB, sive BD ad AD ut 2290 ad 1, unde prodit angulus ABD, minuti primi cum dimidio. Si itaque loco sphæræ T, intelligatur mons aliquis cujuscumque figuræ cujus attractio æquipolleat attractioni ipsiusmet sphæræ, pendulum ad radicem hujusce montis constitutum vi montis attractum deviabit à perpendiculo magis quam minuti unius primi intervallo. Hæc autem aberratio minor fiet, si pendulum in partes contrarias ab aliis montibus circumpositis trahitur, si densitas partium internarum terræ, major sit quam densitas partium montis, denique ex Piramidali montium figurâ, aliisque forte causis, hinc admodum difficile ut perturbationes illæ sensibiles fiant nisi in maximis montibus; ut etiam Dnus. Bouguer attractionem montis Chimboraco in Peruvio sensibilem deprehendit.

De Mundi Systemate.

raret. Tandem verò, (f) per prop. LXXV. & LXXVI. libri primi & ipsarum corollaria, intellexi veritatem propositionis de quâ hic agitur.

*Corol.* 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos planetas. Nam pondera corporum æqualium circum planetas in circulis revolventium sunt (per corol. 2. prop. IV. lib. 1.) ut diametri circulorum directè & quadrata temporum periodicorum inversè; & pondera ad superficies planetarum, aliasve quasvis à centro distantias, majora sunt vel minora (per hanc propositionem) in duplicatâ ratione distantiarum inversâ. Sic ex temporibus periodicis veneris circum solem dierum 224 & horarum $16\frac{1}{4}$, satellitis extimi circumjovialis circum jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, satellitis Hugeniani circum saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & lunæ circum terram dierum 27. hor. 7. min. 43, collatis cum distantiâ mediocri veneris à sole & cum elongationibus maximis heliocentricis satellitis extimi circumjovialis à centro jovis $8'.16''$. satellitis Hugeniani à centro saturni $3'.4''$. & lunæ à centro terræ $10'.33''$. (g) computum ineundo inveni quod corporum

68. (f) * *Per prop. 75. & 76. lib.* 1. Ex singularum particularum viribus componitur vis planetæ totius (cor. 1. prop. 7.) & gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à particulis (per cor. 2. prop. ejusdem). Hinc vis planetæ totius decrescit in duplicatâ ratione distantiarum à centro, modò tamen planetæ ex uniformi materiâ constare ponantur (prop. 75. lib. 1.) & hujusmodi planetæ duo se mutuò trahent vi decrescente in duplicatâ ratione distantiæ inter centra (per corollaria ejusdem prop.). Quamvis autem planetæ in progressu à centro ad circumferentiam non sint uniformes, obtinebit idem decrementum in ratione duplicatâ distantiæ (prop. 76. lib. 1.) si secundùm quamcumque Legem crescat vel decrescat densitas in progressu à centro ad circumferentiam, & similiter hujusmodi planetæ duo sese invicem trahent viribus in ratione duplicatâ distantiarum inter centra decrescentibus.

(g) 68. * *Computum ineundo*, * ut hæc omnia ad Algebrica signa revocentur; sit S centrum Solis, V centrum Veneris, P centrum alterius Planetæ Primarii, L satelles in maximâ suâ elongatione heliocentricâ quam metitur angulus LSP, unde angulus SLP est rectus.
Dicatur tempus Periodicum Veneris $t$; tempus Periodicum satellitis L circa primarium P dicatur $\theta$.
Distantia SP qualiscumque sit dicatur $z$;
Ratio SP ad SV quæ datur per Phænom. IV. exprimatur per rationem $a$ ad $b$, inde erit $SV = \frac{bz}{a}$;
& Radio existente 1 sinus elongationis maximæ heliocentricæ satellitis L, sive sinus anguli LSP dicatur $e$;
Hinc in Triangulo SLP Rectangulo, erit sinus

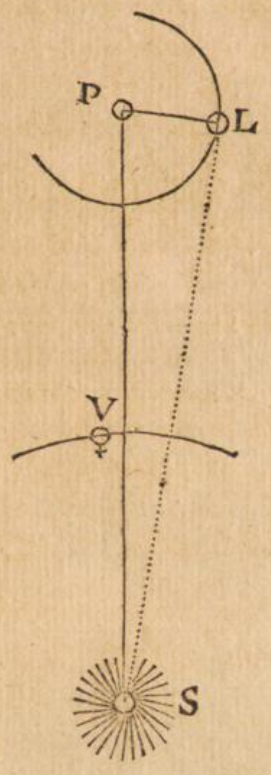
porum æqualium & à centro solis, jovis, saturni ac terræ æqualiter distantium pondera sint in solem, jovem, saturnum ac terram



sinus totus anguli SLP (1) ad sinum anguli LSP ($e$) ut latus SP ($z$) ad latus PL quod erit ergo $ez$;
Quoniam vis Solis in venerem & vis Primarii in satellitem, sunt per Cor. 2. Prop. IV. Lib. 1. ut Distantiæ Veneris & Satellitis à Centro Solis & Primarii divisæ per quadrata temporum Periodicorum, sive ut $\frac{bz}{att}$ ad $\frac{ez}{\theta\theta}$, sive, si vis Solis dicatur 1, erit vis Primarii $\frac{aett}{b\theta\theta}$.

Sed vis Primarii in satellitem in distantia PL, est ad vim quâ in ipsum ageret si tantumdem distaret quantùm distat Venus à Sole, inversè ut quadrata distantiarum, fiat ergo $\frac{1}{e^2z^2}$ ad $\frac{a^2}{b^2z^2}$ ut $\frac{aett}{b\theta\theta}$ ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ & habebitur tandem quod vis Solis in venerem est ad vim Primarii P in satellitem, si tantumdem distaret ab ipso quantum distat Venus à Sole ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

Jam verò transferantur Venus & Satelles in alia quâcumque distantiâ sed ita ut ambo iterum æqualiter distent à Corpore suo Centrali; Vires quidem Centralium corporum in ipsos mutabuntur, sed eodem modo utrinque mutabuntur; unde manebunt in eâdem ratione ac priùs, nam erit ut quadratum novæ distantiæ ad quadratum prioris distantiæ, ut vis prior Solis in Venerem ad vim novam; & in eadem ratione erit vis prior Primarii in satellitem ad ejusdem vim novam unde alternando, vis Prior Solis in Venerem est ad vim Ptiorem Primarii in satellitem, ut vis nova Solis in venerem ad vim novam primarii in Satellitem, ergo in qualicumque distantia, si modo æqualiter distent Venus & Satelles à suo Corpore Centrali vis Solis erit ad vim Primarii ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.




Denique, cum pondera Corporum sint ut Vires Centrales & quantitates materiæ quæ per eas Vires urgentur conjunctim, & in hoc Corollario Newtonus supponat *Corpora æqualia & æqualiter à Corporibus centralibus distantia* Pondera talium Corporum erunt ut Vires Centrales ideoque Pondus in Solem erit ad Pondus in Primarium qualemcumque ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta}$. 68.

Computus per Logarithmos commodè initur, exempli gratia sit P centrum Jovis, & L hujus extimus satelles, est $b$ ad $a$ ut 72333 ad 520096 quorum Logarithmi sunt 4.8593365 & 5.7160855; est $e$ sinus anguli 8′ 16″ cujus Logarithmus est

De Mundi Systemate.

terram ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, $\frac{1}{169282}$ (h) respectivè, & auctis vel diminutis distantiis, pondera diminuuntur vel augentur in duplicatâ ratione: pondera æqualium corporum in solem, jovem, saturnum ac terram in distantiis 10000, 997, 791, & 109 ab eorum centris, atque ideò in eorum superficiebus, (i) erunt ut 10000, 943, 529, & 435 respectivè. Quanta sint pondera corporum in superficie lunæ dicetur in sequentibus.

*Corol.*

§. 8. $-3.3810609$ (Radio existente 1) hinc Logarithmus $\frac{ae}{b} = -2.2378099$, & Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3}$ hujus triplus est $-6.7134297$.

Præterea Logarithmus $t$ (sive $224^d$. horar. $16\frac{3}{4}$, hoc est, horarum $5392\frac{3}{4}$) est 3.7318103, Logarithmus $\theta$ (sive $16^d$. $16\frac{8}{15}$ horar., hoc est, horarum $400\frac{8}{15}$ est 2.6026384 ideoque Log. $\frac{t}{\theta}$ est 1.1291719 & Log. $\frac{tt}{\theta\theta}$ hujus duplus est 2.2583438.

Unde tandem Logarithmus $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ est $-4.9717735$, quæ fractio in Decimalibus potuisset exprimi, sed eam Newtonus exprimit unitate divisâ per Denominatorem quemdam, cujus Logarithmus obtinebitur hunc Logarithmum $-4.9717735$ ex Logarithmo unitatis nempe 0. tollendo, erit ideo 3.0282265 cujus Logarithmi numerus est 1067 ut eum Newtonus invenit.

(h) * *Respectivè &c.* * In præcedentibus Editionibus (ante Londinensem) indicabat Newtonus hic loci elementa ex quibus rationes verarum Diametrorum Jovis, Saturni & Terræ determinaverit, quæ quidem elementa, ex novis observationibus, quibusdam minutiis immutavit, illa hæc esse nobis videntur.

Primò, Diametrum Solis ex mediocri Terræ distantiâ visam, 32′ 8″ assumit, qualem etiam Cassinus in novissimis Astronomicis Tabulis eam constituit, cum prius 32. 12″ statueretur; tum Diametrum Jovis in mediocri ejus à Tellure distantia 37″ facit qualem eam prodiisse sub finem primi Phænomeni dicit, cum prius fieret 40″: Ex his, cùm distantia mediocris Solis (sive Telluris n. 53.) à Jove sit ad mediocrem distantiam Solis à Terrâ ut 520096 ad 100000 (per Phænom. IV.) & Diametri veræ Sphærarum sub parvis angulis visarum sint directè ut anguli sub quibus videntur & ut Distantiæ ex quibus spectantur erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Jovis ut 1928″×100000 ad 37″×520096 sive 10,000 ad 997. ut calculo invenitur.

Secundò, Diametrum Saturni in mediocri ejus à Sole sive Tellure distantia assumit 16″, quem 22″ in prioribus Edit. faciebat, inde cum distantia ejus mediocris à Sole sive Tellure, sit ad mediocrem distantiam Solis à terrâ ut 954006 (Phæn. IV.) ad 100000 erit Diameter vera Solis ad veram Diametrum Saturni ut 1928″×100000 ad 16″×954006, sive 10000 ad 791.

Denique Parallaxim Solis, in distantia ejus mediocri 10″ 30‴ constituit, Parallaxis verò Solis est ipsa semi-Diameter Terræ e Sole visa, ergo Diametri veræ Solis & Terræ, sunt ut Diameter Solis apparens ad duplum Parallaxeos Solis, hoc est, 1928, ad 21, sive ut 10000 ad 109 proximè.

(i) * *Erunt ut*; * Ut insistere pergamus ei Analysi quâ Newtonus usus esse videtur, assumptis omnibus ut in Nota 68.

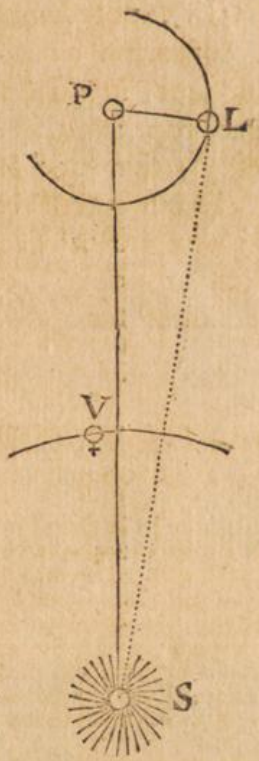
Tangens semi-Diametri apparentis Solis dicatur $s$, Radio existente 1.

Sinus Parallaxeos Solis (quæ est semi-Diameter primarii P e Sole visi) dicatur $p$.

Vera semi-Diameter Primarii dicatur $d$.

Erit ex natura Parallaxeωn $p$ ad 1 sicut $d$ ad

*Corol.* 2. Innoteſcit etiam quantitas materiæ in planetis ſingulis. Nam quantitates materiæ in planetis ſunt ut eorum vires in æqualibus diſtantiis ab eorum centris, id eſt, in ſole, jove,




$d$ ad PS quæ dicebatur $z$ quæque ideo dicenda erit $\frac{d}{p}$.

Pariter ſicut 1 ad $s$, diſtantia $z$ ſive $\frac{d}{p}$ ad ſemidiametrum veram Solis quæ erit $\frac{sd}{p}$.

Rurſus Parallaxis ſatellitis L dicatur $q$. Ex naturâ Parallaxeωn erit $q$ ad 1 ut $d$ ad PL, quæ ideo erit $\frac{d}{q}$ & numerus ſemi-Diametrorum Primarii P in ea linea PL contentus erit $\frac{1}{q}$, & cum ſingula ſemi-Diameter è Sole ſpectata, videantur ſub angulo cujus ſinus eſt $p$, propter iſtorum ſinuum parvitatem, anguli erunt ut ſinus, & ſinus elongationis heliocentricæ qui dicebatur $e$ continebit ſinum $p$ numero vicium qui dici poterit $\frac{1}{q}$ ideoque erit $e=\frac{p}{q}$.

Si autem fingatur Corpus in Solis ſuperficie poſitum, quod itaque ab ejus Centro diſtet quantitate æquali ejus veræ ſemi-Diametro $\frac{sd}{p}$, vis Solis in id Corpus, erit ad vim P in corpus æquale ad eamdem diſtantiam à Centro ejus Primarii poſiti ut 1 ad $\frac{a^3e^3}{b^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ per not. 68, ſive ſubſtitutione factâ $\frac{p^3}{q^3}$ loco $e^3$, ut $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$.

Sed hæc vis Primarii in id corpus, erit ad vim ejuſdem corporis in ſuperficie Primarii poſiti inverſe ut Quadrata diſtantiarum ſive inverſe ut Quadrata Diametrorum verarum Solis & Primarii ſive erit $\frac{p^2}{s^2d^2}$ ad $\frac{1}{d^2}$ ſicut $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ ad $\frac{a^3ps^2}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ quæ quantitas exprimet vim Primarii in corpus in ſuâ ſuperficie poſitum, dum vis Solis in Corpus æquale in ſuâ ſuperficie etiam poſitum erit 1: Quæ quantitas $\frac{a^3ps^2}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ eſt æqualis quantitati $\frac{a^3p^3}{b^3q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (quæ vim in æqualibus diſtantiis exprimit) diviſæ per $\frac{p^2}{s^2}$. Sed ob æqualitatem corporum vires in Corpora ſunt ut Pondera Corporum; hinc ergo habetur ratio Ponderis Corporum æqualium in ſuperficiebus Solis, Jovis, Saturni ac Terræ.

Quare ſi Logarithmis utamur; Ex Logarithmo $p$ tollatur Logarithmus $s$, & reſidui duplum tollatur ex Logarithmo numeri

DE MUNDI SYSTEMATE.

jove, ſaturno ac terrâ ſunt ut 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpectivè. Si parallaxis ſolis ſtatuatur major vel minor quam $10''' . 30'''$, (k) debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ ratione.

*Corol.* 3. Innoteſcunt etiam denſitates planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri, per prop. LXXII. lib. 1. ideoque ſphærarum heterogenearum denſitates (l) ſunt ut pondera illa applicata ad ſphærarum diametros. Erant autem veræ ſolis, jovis, ſaturni ac terræ diametri ad invicem ut 10000, 997, 791, & 109, & pondera in eoſdem ut 10000, 943, 529 & 435 reſpectivè, & propterea denſitates ſunt ut 100, $94\frac{1}{2}$, 67 & 400. (m) Denſitas terræ

68. meri qui exprimebat vim Primarii in æqualibus diſtantiis, reſiduum erit Logarithmus vis Primarii in Corpora in ejus ſuperficie poſita.

Calculus iſte reſpectu Terræ commodè fieri poteſt, quia datur ex obſervatione Parallaxis Solis $p$, & apparens Solis ſemidiameter: In Jove & Saturno Parallaxis ipſorum eſt æqualis eorum ſemidiametro apparenti in mediocri ipſorum diſtantiâ, & ſemidiameter apparens Solis in ipſis eſt ad ſemidiametrum Solis apparentem in terrâ, inverſè ut diſtantiæ eorum & Terræ à Sole.

(k) *Debebit quantitas materiæ in terrâ augeri vel diminui in triplicatâ* Parallaxeων *ratione.* * Nam cum quantitates materiæ in Planetis ſingulis, ſint ut eorum vires in æqualibus diſtantiis; Quantitas materiæ in Sole eſt ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 p^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, manente ergo ratione $a$ ad $b$ diſtantiarum nempe Terræ & Veneris à Sole, manentibus temporibus Periodicis Veneris & Lunæ $t$ & $\theta$, & ſinu Parallaxeos Lunæ $q$, liquet quod ſi varietur ſinus Parallaxeos Solis $p$ & ex novis obſervationibus, putà ex obſervatione tranſitus Veneris ſuper diſcum Solis, alia Parallaxis cujus ſinus ſit $\pi$ deprehendatur, eo caſu invenietur quantitas materiæ in Sole ad quantitatem materiæ in terrâ ut 1 ad $\frac{a^3 \pi^3}{b^3 q^3} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, itaque quantitas materiæ terræ in præcedenti Hypotheſi Parallaxeos $p$ reperta, erit ad eam quæ tunc invenietur ut $p^3$ ad $\pi^3$ ſive (ob exiguitatem angulorum Parallacticorum) ut cubi Parallaxeων.

(l) * *Sunt ut pondera illa.* Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras homogeneas & inæquales ſunt in ſuperficiebus ſphærarum ut ſphærarum diametri (loco cit.), & pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras heterogeneas & æquales in ſuperficiebus ſphærarum ſunt ut quantitates materiæ in ſphæris, hoc eſt, ut denſitates ſphærarum (2. lib. 1.). Undè pondera corporum æqualium & homogeneorum in ſphæras heterogeneas & inæquales in ſuperficiebus ſphærarum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione denſitatum & diametrorum ſphærarum, conſequenter denſitates ſphærarum ſunt pondera illa directe & ſphærarum diametri inverſè.

(m) * *Denſitas terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi Solis* &c. * Ratio Ponderum in ipſis ſuperficiebus Solis & Terræ exprimebatur numeris 1 ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ (denominationibus iiſdem

terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet à parallaxi ſolis, ſed determinatur per parallaxin lunæ, & propterea hic rectè definitur. Eſt igitur ſol paulò denſior quam jupiter, & jupiter quam ſaturnus, & terra quadruplo denſior quam ſol. Nam per ingentem ſuum calorem ſol rareſcit. Luna vero denſior eſt quam terra, ut in ſequentibus patebit.

*Corol.* 4. Denſiores igitur ſunt planetæ qui ſunt minores, cæteris paribus. Sic (n) enim vis gravitatis in eorum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & denſiores ſunt planetæ, cæteris paribus, qui ſunt ſoli propiores; ut jupiter ſaturno, & terra jove. In diverſis utique diſtantiis à ſole collocandi erant planetæ ut quilibet pro gradu denſitatis calore ſolis majore vel minore frueretur. Aqua noſtra, ſi terra locaretur in orbe ſaturni, rigeſceret, ſi in orbe mercurii in vapores ſtatim abiret. Nam lux ſolis, cui calor proportionalis eſt, (o) ſeptuplo denſior eſt in orbe mercurii quam apud nos: & thermometro

dem adhibitis quæ in Notis (g) & (i) aſſignantur. Denſitates verò ſunt ut illa pondera applicata ad ſphærarum Diametros vel ſemi-Diametros; ſemi-Diameter vera Solis erat $\frac{sd}{p}$, & ſemi-Diameter vera terræ erat $d$; Quare denſitates Solis & terræ erant ut $\frac{1}{\frac{sd}{p}}$ ad $\frac{a^3 p s^2}{b^3 q^2 d} \times \frac{tt}{\theta\theta}$ ſive ut 1 ad $\frac{a^3 s^3}{b^3 q^2} \times \frac{tt}{\theta\theta}$, in quâ quantitate Parallaxis Solis quæ dubia eſt non amplius adhibetur, ſed tantum quantitates de quibus conſtat apud Aſtronomos, Parallaxis nempe Lunæ, ſemi-diameter apparens mediocris Solis, Ratio diſtantiarum terræ & Veneris à Sole, & ratio temporum Periodicorum Veneris & Lunæ, quare ea *Denſitas terræ hic rectè definitur.*

(n) * *Sic enim vis gravitatis.* Quoniam ſphærarum heterogenearum denſitates ſunt ut pondera in earum ſuperficiebus ad ſphærarum diametros applicata, ideóque pondera ut denſitates & ſphærarum diametri conjunctim, ſi denſiores ſint planetæ qui ſunt minores, minor diameter in variis planetis per majorem denſitatem quâdam ex parte compenſabitur ac proinde vis gravitatis in variorum planetarum ſuperficiebus ad æqualitatem magis accedet quam ſi planetæ omnes vel denſitate æquales forent, vel planetæ majores forent minoribus denſiores. 68.

(o) * *Septuplo denſior eſt.* Nam (14. lib. 1.) denſitas lucis decreſcit in ratione duplicatâ diſtantiarum à Sole, ſed (phæn. 4.) diſtantia terræ eſt ad diſtantiam Mercurii ut 1000 ad 387 proxime. Eſt igitur denſitas lucis in Mercurii ad denſitatem lucis in terrâ ut 1000000 ad 149769 ſeu ut 6,68 ad 1, hoc eſt ferè ut 7 ad 1.

* Addit Newtonus *Thermometro expertus ſum quod ſeptuplo Solis æſtivi calore aqua ebullit*, hæc videntur referri ad n. 270 Tranſactionum Philoſophicarum qui continet ſcalam de caloris gradibus, ingeniose ſane conſtructam, cujus author non indicatur: «Conſtructa fuit hæc Tabula ope Thermometri & ferri candentis; Per Thermometrum ex oleo lini «conſtructum inveni (inquit author) quod «ſi oleum ubi Thermometer in nive liqueſcente

DE MUNDI SYSTEMATE.

metro expertus ſum quod ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit. Dubium vero non eſt quin materia mercurii ad calorem accommodetur, & propterea denſior ſit hâc noſtrâ; cum materia omnis denſior ad operationes naturales obeundas majorem calorem requirat.

PRO-

68. «cente locabatur (cõmputus enim in hæc «Tabula inchoatur à calore quo aqua in«cipit rigeſcere tanquam ab infimo calo«ris gradu ſeu communi termino caloris «& frigoris) occupabat ſpatium partium «10000 idem oleum calore corporis hu«mani rarefactum occupabat ſpatium «10256 & calore aquæ jamjam ebullire in«cipientis ſpatium 10705 & calore aquæ «vehementer ebullientis 10725, & calore «ſtanni liquefacti ubi incipit rigeſcere «11516 &c.; Rarefactio aëris æquali calo«re fuit decuplo major quam rarefa«ctio olei quaſi quindecim vicibus major «quam rarefactio ſpiritus vini. Et ex his «inventis ponendo calores olei ipſius ra«refactioni proportionales & pro calore «corporis humani ſcribendo partes 12 pro«diit calor aquæ ubi vehementer ebullit «partium 34 ». In eâdem autem Tabulâ ponendo calorem corporis humani 12, ponit calorem aeris æſtivi 4, 5, vel 6. Quare medium aſſumendo, eſt ut quinque ad 34 ſive proximè ut 1 ad 7, ita calor aeris æſtivi ad calorem aquæ ebullientis: qui ergo ſeptuplus eſt caloris aeris æſtivi ſecundum aſſertum Newtonianum.

Diſputari autem poſſet, quod calor rarefactioni olei proportionalis ſupponatur abſque ſufficienti ratione, & quod terminus à quo rarefactio ea numerari incipit (is nempe gradus frigoris quo aqua incipit rigeſcere) ſit ad arbitrium aſſumptus; cum ea rarefactio numerari debuiſſet ab abſoluto frigore eo nempe frigoris gradu quo partes olei nullam ulteriorem compreſſionem per vim frigoris pati poſſent, qui gradus eſt ignotus; At hujus Tabellæ conſtructio, ingeniose demonſtratur ab eodem Autore per ferri candentis refrigerationem; Locavit enim ferrum candens in vento uniformiter ſpirante, ut aer à ferro calefactus ſemper abriperetur à vento, & aër frigidus in locum ejus uniformi cum motu ſuccederet, ſic enim aëris partes æquales æqualibus temporibus calefactæ ſunt & concipiebant calorem calori ferri proportionatam; Hinc ſi dividatur tempus refrigerii ferri in inſtantia æqualia, erit, ut totus calor ferri initio primi inſtantis, ad calorem durante eo inſtanti amiſſum, ſic calor ferri initio ſecundi inſtantis ad calorem durante eo ſecundo inſtanti amiſſum, &c. ideóque fingatur lineam rectam duci cujus abſciſſæ deſignent tempora; ordinatæ in extremis abſciſſis erigantur, quæ calores ferri ſingulis momentis deſignent; differentiæ earum ordinatarum erunt iis ipſis ordinatis proportionales Geometricè, ideóque curva per earum ordinatarum vertices tranſiens erit Logarithmica, creſcentibus ergo temporibus Arithmeticè, calor ferri Geometricè decreſcit & propterea calorum eorum Geometrica ratio per Logarithmorum tabulam haberi poterit.

Quo ſuppoſito, imponebat Autor candenti ferro particulas diverſorum metallorum, & aliorum corporum liquabilium, & notavit tempora refrigerii donec particulæ omnes amiſsâ fluiditate rigeſcerent & tandem calor ferri æquaretur calori corporis humani; hinc calores omnes quibus cera, biſmuthum, ſtamnum, plumbum, Regulus ſtibii, eorumque variæ miſcelæ liqueſcunt innotuere, ſive eorum Geometricæ rationes, cumque calores ita inventi eamdem habuerint inter ſe rationem cum caloribus per Thermometrum inventis, propterea rectè aſſumptum fuit, rarefactiones olei ipſis caloribus eſſe proportionales.

## PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

*Gravitatem pergendo à ſuperficiebus planetarum deorſum decreſcere in ratione diſtantiarum à centro quam proximè.*

Si materia planetæ quoad denſitatem uniformis eſſet, obtineret hæc propoſitio accuratè: per prop. LXXIII. lib. 1. Error igitur tantus eſt, quantus ab inæquabili denſitate oriri poſſit.

## PROPOSITIO X. THEOREMA X.

*Motus planetarumè in cœlis diutiſſimè conſervari poſſe.*

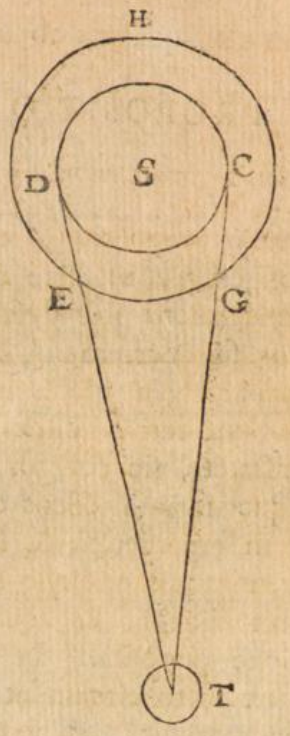
In ſcholio propoſitionis XL. lib. II. oſtenſum eſt quod globus aquæ congelatæ, in aëre noſtro liberè movendo & longitudinem ſemidiametri ſuæ deſcribendo, ex reſiſtentiâ aëris amitteret motus ſui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proximè in globis utcunque magnis & velocibus. Jam verò globum terræ noſtræ denſiorem eſſe, quàm ſi totus ex aquâ conſtaret, ſic colligo. Si globus hicce totus eſſet aqueus, quæcunque rariora eſſent quam aqua, ob minorem ſpecificam gravitatem emergerent & ſupernatarent. Eaque de causâ globus terreus aquis undique coopertus, ſi rarior eſſet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppoſitâ. Et par eſt ratio terræ noſtræ maribus magnâ ex parte circumdatæ. Hæc ſi denſior non eſſet, emergeret ex maribus, & parte ſui pro gradu levitatis extaret ex aquâ, maribus omnibus in regionem oppoſitam confluentibus.

Eodem argumento (P) maculæ ſolares leviores ſunt quàm materia lucida ſolaris cui ſupernatant. Et in formatione qualicunque planetarum ex aquâ, materiâ omnis gravior, quo tempore

(P) *69. Maculæ Solares.* Si radii Solares teleſcopio duobus vitris inſtructo excipiantur, locuſque circumpoſitus obſcuretur, inverſa Solis imago ſuprà chartam ad axem teleſcopii normalem pingitur & maculæ conſpiciuntur quæ nunc emergere nunc evaneſcere obſervantur. Maculas illas in materiâ Solari ſupernatare vel ſaltem Soli quam proximas eſſe certum eſt.

pore massa fluida erat, centrum petebat. Unde cum terra communis suprema quasi duplo gravior sit quam aqua, & paulò inferiùs in fodinis quasi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verisimile est quod copia materiæ totius

69. Sit enim Sol in S, ex Tellure T visus subangulo D T C 32′. Si macula orbitam aliquam H E G H extrà Solis superficiem describeret, non videretur Solis discum ingredi antequam ad E perveniisset ubi recta T E D ex terrâ ducta discumque Solis tangens maculæ orbitam secat, & ductâ T G C Solem quoque tangente, per Solis superficiem tantummodò progredi videretur, quandiù describeret arcum E G qui semiperipheriâ minor est, ideóque arcus ille tempore quod semiperiodo minus est percurreretur. Sed ex observationibus notum est quamplures maculas, duas aut tres integras periodos absolvisse 27 dierum spatio atque 13 ½ dies impendisse ut à limbo occidentali Solis ad limbum orientalem pervenirent; illarum ergò macularum orbitæ vel in ipsâ superficie Solari extiterunt, vel Soli fuerunt proxime.




* Newtonus hic loci receptam opinionem sequitur maculas Solares ipsi Solari superficiei inhærere; quæ opinio his tribus argumentis nititur; 1°. Quod illæ maculæ in medio Solis disco latiores videantur quam juxta ejus limbum ubi angustissimæ apparent; & quidem hoc demonstrat maculas eas non esse Planetas rotundos, ut quidam volebant, sed esse corpora lata, non verò spissa, & à Sole non multum distare, nullomodotamen exinde probatur eas esse in ipsâ superficie Solis: 2um. Argumentum est, Quod spatium quod maculæ emetiuntur in medio disco Solis diurno spatio, sit proportionatum revolutioni ipsarum, quod majus esse debuisset si forent cis Solem, sed rursus hoc argumentum proximitatem macularum superficiei Solis, non verò earum ipsi superficiei Solis adhærentiam probat.

Denique, asserit Keillius (Lection. Ast. V.) observationibus constare maculas quæ integram revolutionem 27 dierum absolvunt tredecim cum semisse dies impendere ut à limbo Occidentali Solis ad Orientalem perveniant, unde meritò concludit quod cum dimidium tempus Periodi suæ in transcurrendo Solis disco impendant, ipsarum orbita in ipsâ superficie Solari extet; At Wolfius (Ast. nº. 413.). Quoniam, inquit, maculæ Solares tribus circiter diebus diutius post Solem latent quam Hemisphærium nobis conspicuum peragrantes consumunt, Soli quidem proximæ sunt, non ipsi tamen superficiei Solari inhærent, sed aliquam ab eâ distantiam habent.

Et quidem in Astronomorum fastis quæ in

tius in terrâ quasi quintuplo vel sextuplo major sit quàm si tota ex aquâ constaret; præsertim cùm terram quasi quadruplo densiorem esse quam jovem jam ante ostensum sit. Quare si Jupiter

in manibus venerunt, numquam deprehendi maculam per tredecim super discum Solis actu visam fuisse, nullam reducem ante decimum quintum diem observatam & quidem cum anno 1739 plurimæ maculæ Solis discum percurrerent, multasque ab ingressu ad egressum usque persequerer, nulla integros tredecim dies in disco perstare mihi visa est; Cum autem quæstio hæc tota, sit de facto, referam observationes duas quæ accuratissimè institutæ videntur, desumetur altera è Transactionibus Philosophicis Anglicanis n. 294, altera è Diario eruditorum ad annos 1676. 1677.

«15. Maii anni 1703 Septempedali Telescopio] circa Centrum Solis maculam detexit Dnus. Stannyan, eamdem observavit diebus sequentibus, & 22. Maii mane jam admodum vicinam limbo Solis eam vidit; 23a. Maii horâ sextâ matutina appulerat ad ipsum limbum Solis, angusta & tenuis, similis aristæ, & ejus distantia à limbo Solis non excedebat ipsius maculæ parvam Diametrum, Octava, Decima, Duodecimaque hora illam adhuc videbat; secunda hora ipsi circumferentiæ applicata erat nec visibilis ipsi fuisset nisi totâ die oculos in ipsam intentos habuisset; Quarta denique hora nullum ejus vestigium telescopio decem & octo pedum optimo apparebat, unde statuendum illam omninò e Sole exivisse hora 3a. post Meridiem 23æ. diei Maii.

Tertia Junii & sequentibus diebus ad observationes rediit noster, usus Telescopio decem & octo pedum, tandem die septima Junii, hora tertia pomeridiana, eamdem maculam (ut postea certior ejus factus est) Solis discum subeuntem vidit, hora quarta decem & octo pedum Telescopio Sole luccidissimo eam distinctè vidit, sed tenuem admodum & Elliptica atmosphæra cinctam, sequentibus verò diebus ex via cui institit, eamdem esse quam prius viderat agnovit, & eam est persecutus sequentibus diebus, donec tandem 18. Junii tenuis apparere incepit, die verò decima nona ab hora 5ta. matutina eam observare cæpit Telescopio decem & octo pedum ferè singulis semihoris, hora duodecima Atmosphæra & sensibili latitudine spoliatam vidit & adeo vicinam Solis limbo, ut vix inter ipsam & limbum Solis lucis radius perciperetur; hora secunda evanescebat, ita ut hora secunda cum semisse evanuisse censenda sit. 69.

Ergo à 23. Maii horâ tertiâ pomeridianâ ad septimam Junii eâdem horâ latuit macula, per integros scilicet quindecim dies, ab eo tempore ad 19 Discum pertransivit, per duodecim nempe dies.

Altera observatio Illmi. Cassini huic omninò congrua exstat in primo Eruditorum diario anni 1677., illic exhibet Cassinus figuram maculæ quæ 30. Octobris 1676. observari cæpit, evanuit Novembris 3a. Iterum conspicua facta est quindecim post dies nempe 18a. Novembris; evanuit verò post duodecim dies, nempe horâ quartâ diei 30æ. Novembris, observationibus magnâ curâ institutis ad singulas ferè horas, postea verò 15a. Decembris hora meridiana cum semisse Telescopio 35. pedum in limbo orientali Solis visa est, ut instar lineæ obscuræ nec aliis Telescopiis observari poterat, sequentibus verò diebus facile videri potuit; hinc per quindecim dies maculas latere per duodecim dies Solis discum transcurrere liquet.

Ex quibus sequitur æqualitatem temporum occultationis & apparentiæ macularum observationibus non constare; quinimò rectius inæqualitatem eorum temporum exinde deduci. Ut quâdam quantitate à Solis disco distare maculas deducatur, & quidem cum differentia temporum eorum sit circiter dierum trium, in singulo quadrante erit horarum decem & octo, quo tempore decem gradus circa Solis centrum maculæ percurrunt; sed sinus versus decem graduum sunt 15. Centesimæ Radii, hinc tandem deducetur quod semi-Diameter Solis sit ad semi-Diame-

DE MUNDI SYSTEMATE.

Jupiter paulo denſior ſit quàm aqua, hic (q) ſpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 ſemidiametrorum ſuarum deſcribit, (r) amitteret in medio ejuſdem denſitatis cum aëre noſtro motus ſui partem fere decimam. Verùm cum reſiſtentia mediorum minuatur in ratione ponderis ac denſitatis, ſic ut aqua, quæ partibus $13\frac{1}{2}$ levior eſt quàm argentum vivum, minus reſiſtat in eâdem ratione; & aer, qui partibus 860 levior eſt quàm aqua, minus reſiſtat in eâdem ratione: ſi aſcendatur in cœlos ubi pondus medii, in quo planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſiſtentia prope ceſſabit. Oſtendimus utique in ſcholio ad prop. XXII. lib. II. quod ſi aſcenderetur ad altitudinem milliarium ducentorum ſupra terram, (f) aër ibi rarior foret quam ad ſuperficiem terræ in ratione 30 ad 0,000000000000003998, ſeu 75000000000000 ad 1 circiter. Et

69. trum circuli quem deſcribunt maculæ ut 85 ad 100 ſive ut 17 ad 20, & maculæ quindecim circiter ſemi-Diametris terræ ſupra Solis ſuperficiem emineant: Hinc idem Wolfius eas eſſe Nubes in Solis Atmoſphærâ elatas, conjectatur quæ quidem fuerat Keplери ſententia.

(q) * *Spatio dierum triginta.* Si arcus quem Jupiter motu diurno medio circà Solem deſcribit multiplicetur per 30 & factum dividatur per ſemidiametrum apparentem Jovis in mediocri ejus diſtantiâ à terrâ, quotus erit numerus ſemidiametrorum Jovis quas intervallo 30 dierum deſcribit. Poteſt etiam idem inveniri dicendo ut tempus periodicum Jovis ad 360 gradus ità 30 dies ad arcum hoc tempore deſcriptum, hic arcus dividatur per ſemidiametrum apparentem Jovis & quotus erit numerus ſemidiametrorum quas Jupiter 30 diebus deſcribit.

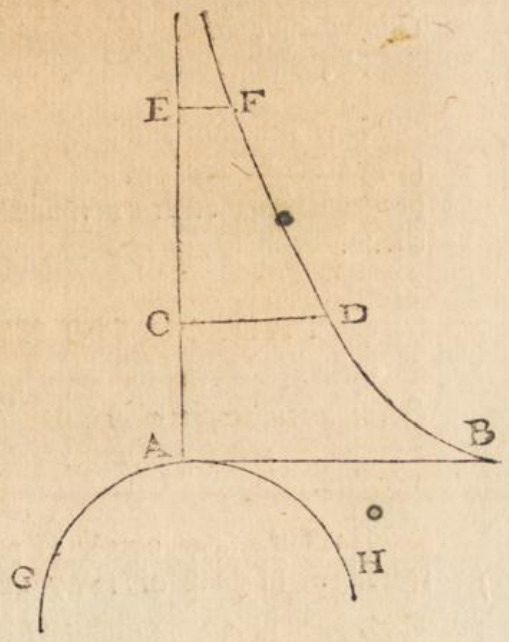
(r) * *Amitteret in medio ejuſdem denſitatis.* (per ſchol. prop. 40. lib. 2. circà finem). Si diameter jovis dicatur $D$, $V$ velocitas ejus ſub initio motûs, & $T$ tempus quo velocitate $V$ in vacuo deſcribet ſpatium $S$ quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}D$ ut denſitas jovis ad denſitatem aëris noſtri, hoc eſt, ut 860 ad 1 circiter. jupiter in aëre noſtro projectus cum velocitate $V$ tempore quovis $t$ alio $t$ amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$. Quoniam igitur Jupiter intervallo 30 dier. longitudine $459\frac{D}{2}$ deſcribit, & denſitas Jovis eſt ad denſitatem aëris noſtri ut 860 ad 1 ciciter, erit $1 : 860 = \frac{8}{3}D : S = \frac{6880}{3}D$, & $459\frac{D}{2} : 30^{\text{dies}} = \frac{6880}{3}D : T = \frac{137600}{459}$. Undè ſi ponatur $t = 30$. dieb. erit $T + t = \frac{151370}{459}$, & $\frac{t}{T+t} = \frac{1377}{15137} = 0{,}09096 = \frac{1}{10}$ ferè. Cum autem Jupiter ſupponatur paulò denſior quam aqua, minorem adhuc velocitatis ſuæ partem amitteret in aëre noſtro.

(f) 70. * *Aër ibi rarior foret.* Si gravitas particularum aëris in omnibus à terrâ diſtantiis eadem ſit, ſintque diſtantiæ in progreſſione arithmeticâ, demonſtratum eſt (in ſchol. prop. 22. lib. 2.) denſitates fore in progreſſione geometricâ. Hinc patet in variis à terrâ diſtantiis per Logarithmicam exhiberi poſſe varias aëris denſitates. Sit enim F D B Logarithmica, ſumptis abſciſſis A C, A E, in progreſſione arithmeticâ, ordinatæ A B, C D, E F

Et (t) hinc ſtella jovis in medio ejuſdem denſitatis cum aere illo ſuperiore revolvendo, tempore annorum 1000000, ex reſiſtentiâ medii non amitteret motus ſui partem decimam centeſimam milleſimam. In ſpatiis utique terræ proximis, nihil invenitur quod reſiſtentiam creet præter aërem, exhalationes & vapores. His ex vitro cavo cylindrico diligentiſſimè exhauſtis gravia intra vitrum liberrimè & ſine omni reſiſtentia ſenſibili cadunt; ipſum aurum & pluma tenuiſſima ſimul demiſſa æquali cum velocitate cadunt, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem pedum quatuor ſex vel octo ſimul incidunt in fundum, ut experien-

E F denſitates aëris in locis A, C, E, repræſentabunt (33. lib. 2.). Quare datis altitudinibus A C, A E, & ratione $\frac{AB}{CD}$, innoteſcet ratio $\frac{AB}{EF}$. Nam (ex naturâ Logarithmicæ, per cor. 2. theor. 2. de Logarithmicâ) $AC : AE = L.\frac{AB}{CD} : L.\frac{AB}{EF}$, ideóque $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = L.\frac{AB}{EF}$.

Jam quia altitudines mercurii in barometro ſunt ut preſſiones atmoſphæræ in diverſis ab horizonte diſtantiis (prop. 20. lib. 2.). Si aëris denſitas compreſſioni ponatur proportionalis, datis altitudinibus mercurii in barometro in locis A, C, datâque altitudine A E, dabitur altitudo mercurii in barometro in loco E, ideóque nota erit denſitas aëris in E. Ut autem hæc omnia ad præſentem caſum transferamus, ſit GAH pars ſuperficiei terreſtris, altitudo mercurii in barometro in A = 30 poll. diſtantia A C = 2280 ped. Anglicis & altitudo mercurii in barometro in C = 28 poll. quemadmodum Newtonus experimento cognitum ſupponit. Sit altitudo A E = 200 milliaribus hoc eſt = 1056000 ped. Anglicis, ſi milliare ſit menſura ped. 5280, erit $\frac{AE}{AC} L.\frac{AB}{CD} = \frac{1056000}{2280} L.\frac{30}{28}$ = 13.8750613 circiter cui Logarithmo in tabulis reſpondet numerus 7500000000000 erit ergò denſitas aëris in A, hoc eſt, in




ſuperficie terræ ad ejuſdem denſitatem in diſtantia 200 milliarum ſeu ped. 1056000 ut 7500000000000 ad 1, circiter. 70

(t) * *Hinc ſtella Jovis.* Denſitas Jovis eſt ad denſitatem aëris illius ſuperioris ut 860 × 7500000000000 ad 1. Hinc

De Mundi Systemate.

perientiâ compertum eſt. Et propterea ſi in cœlos aſcendatur aëre & exhalationibus vacuos, planetæ & cometæ ſine omni reſiſtentiâ ſenſibili per ſpatia illa diutiſſimè movebuntur.

## HYPOTHESIS I.

*Centrum ſyſtematis mundani quieſcere.*

Hoc ab omnibus conceſſum eſt, dum aliqui terram, alii ſolem in centro ſyſtematis quieſcere contendant. Videamus quid inde ſequatur.

## PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

*Commune centrum gravitatis terræ, ſolis & planetarum omnium quieſcere.*

Nam centrum illud (per legum corol. IV.) vel quieſcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo ſemper progrediente, centrum mundi quoque movebitur contra hypotheſin.

## PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

*Solem motu perpetuo agitari, ſed nunquam longè recedere à communi gravitatis centro planetarum omnium.*

Nam cum (per corol. 2. prop. VIII.) materia in ſole ſit ad materiam in Jove ut 1067 ad 1, & diſtantia jovis à ſole ſit ad ſemi-

79. $1 : 860 \times 750000000000 = \frac{6}{5} D : S =$ $1720000000000000 : D$, & $459\frac{D}{2}$ eſt ad $1720000000000000$, ut anni pars duodecima ſeu $\frac{1}{12}$ ad $T = \frac{860000000000000}{1367}$, annis $= 630000000000$ ferè. Ponatur $t =$ 1000000 annis & erit pars motûs amiſſa tempore $t = \frac{t}{1+t} = \frac{1000000}{630000000000+1000000}$ $= \frac{1}{6300000+1} = \frac{1}{6300000}$ ferè.

ſemidiamétrum ſolis in ratione paulò majore (†); incidet commune centrum gravitatis jovis & ſolis in punctum (u) paulo ſupra ſuficiem ſolis. Eodem argumento cùm materia in ſole ſit ad materiam in ſaturno ut 3021 ad 1, & diſtantia ſaturni à ſole ſit ad ſemidiametrum ſolis in ratione paulò minore: incidet commune centrum gravitatis ſaturni & ſolis in punctum (x) paulò infra ſuperficiem ſolis. (y) Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo ſi terra & planetæ omnes ex unâ ſolis parte conſiſterent, commune omnium centrum gravitatis vix integrâ ſolis diametro à centro ſolis diſtaret. (z) Aliis in caſibus diſtantia centrorum ſemper minor eſt. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuò quieſcit, ſol pro vario planetarum ſitu in omnes partes movebitur, ſed à centro illo nunquam longè recedet.

*Corol.* Hinc commune gravitatis centrum terræ, ſolis & planetarum omnium pro centro mundi habendum eſt. Nam cum terra, ſol & planetæ omnes gravitent in ſe mutuò, & propterea, pro vi gravitatis ſuæ, ſecundum leges motus perpetuò agitentur: perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum eſſet in quod corpora omnia maximè gravitant (uti vulgi eſt opinio) privilegium iſtud concedendum eſſet ſoli. Cùm autem ſol moveatur, eligendum erit punctum quieſcens, à quo centrum ſolis quam minimè diſcedit, & à quo idem adhuc minus diſcederet, ſi modo ſol denſior eſſet & major, ut minus moveretur.

(†) * *Et diſtantia Jovis à Sole ſit ad ſemidiametrum Solis in ratione paulo majore*, * cum ſemi-Diameter Solis è tellure viſa ſit 16′ 4″ & diſtantia Terræ à Sole ſit ad diſtantiam Jovis à Sole ut 10 ad 52 circiter, ſintque anguli ſub quo idem objectum videtur è diverſis diſtantiis reciprocè ut illæ diſtantiæ fere, erit 52 : 10 = 16′ 4″ : ad ſemi-Diametrum Solis è Jove viſam, quæ itaque erit 3′. 5″ circiter, fingatur ergo Triangulum Rectangulum cujus vertex ſit in Jove & baſis ſit Solis ſemi-Diameter, angulus verticis erit 3′ 5″; Ideóque (per Tabulas Tangentium) baſis ejus continebitur in ejus altitudine 1115 vicibus; hinc diſtantia Jovis à Sole eſt ad ſemi-Diametrum Solis, ut 1115 ad 1, ideóque in ratione paulò majore quam ratio 1067 ad 1, hoc eſt, quam ratio materiæ in Sole ad materiam in Jove. 70.

(u) * *Paulò ſuprà ſuperficiem Solis* (60. lib. 1.).

(x) * *Paulò infrà ſuperficiem Solis* (ibid.).

(y) * *Et ejuſdem calculi veſtigiis* (61. lib. 1.).

(z) * *Aliis in caſibus.* Si nempè ad diverſas Solis partes planetæ conſiſtant, centrum gravitatis modò versùs unam partem, modò versùs alteram incidit, hinc centrum gravitatis quaſi medio loco iis in caſibus poni debet, minor itaque fit centrorum diſtantia. 71.

DE MUNDI SYSTEMATE.

## PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

*Planetæ moventur in ellipſibus umbilicum habentibus in centro ſolis, & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales.*

Diſputavimus ſupra de his motibus ex phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori. Quoniam pondera planetarum in ſolem ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro ſolis; ſi ſol quieſceret & planetæ reliqui non agerent in ſe mutuò, forent orbes eorum elliptici, ſolem in umbilico communi habentes, & areæ deſcriberentur temporibus proportionales (per prop. 1. & XI. & corol. 1. prop. XIII. lib. 1.) actiones autem planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt (ut poſſint contemni) & motus planetarum in ellipſibus circa ſolem mobilem minùs perturbant (per prop. LXVI. lib. 1.) quam ſi motus iſti circa ſolem quieſcentem peragerentur.

Actio quidem jovis in ſaturnum non eſt omnino contemnenda. Nam gravitas in jovem eſt ad gravitatem in ſolem (paribus diſtantiis) ut (a) 1 ad 1067; ideoque in conjunctione jovis & ſaturni, quoniam diſtantia ſaturni à jove eſt ad diſtantiam ſaturni à ſole fere ut 4 ad 9, (b) erit gravitas ſaturni in jovem ad gravitatem ſaturni in ſolem ut 81 ad 16×1067. ſeu 1 ad 211 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis ſaturni in ſingulis planetæ hujus cum jove conjunctionibus adeo ſenſibilis ut ad eandem aſtronomi hæreant. Pro (c) vario ſitu planetæ in his conjunctionibus, eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminui-

71. Quoniam Sol pro diverſo planetarum ſitu diverſimode agitatur, motu quodam libratorio lente ſemper errabit, nunquam tamen integrâ, ſui diametro à centro quieſcente ſyſtematis totiùs recedet. Quia verò Solis & planetarum ponderibus (per cor. 1. prop. 8.) inventis, datoque ſitu omnium ad invicem, datur commune gravitatis centrum (61. lib. 1.) patet quoque dato communi gravitatis centro haberi locum Solis ad tempus propoſitum.

(a) * *Ut* 1 *ad* 1067 (cor. 2. prop. 8.).

(b) * *Erit gravitas Saturni in Jovem* (prop. 8.)

(c) * *Pro vario ſitu planetæ.* Saturnum his perturbationibus obnoxium eſſe patet (per cor. 6. 7. 8. 9. prop. 66. lib. 1.).

minuitur, aphelium nunc promovetur nunc fortè retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. (d) Error tamen omnis in motu ejus circùm ſolem à tantâ vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere poteſt conſtituendo umbilicum inferiorem orbis ejus in communi centro gravitatis jovis & ſolis (per prop. LXVII. lib. 1.) & propterea ubi maximus eſt, vix ſuperat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix ſuperat minuta duo prima annuatim. In (e) conjunctione autem jovis & ſaturni gravitates acceleratrices ſolis in ſaturnum, jovis in ſaturnum & jovis in ſolem ſunt fere ut 16, 81 & $\frac{16\times81\times3021}{25}$ ſeu 156609, ideoque differentia gravitatum ſolis in ſaturnum & jovis in ſaturnum eſt ad gravitatem jovis in ſolem ut 65 ad 156609 ſeu 1 ad 2409. Huic autem differentiæ proportionalis eſt maxima ſaturni efficacia ad perturbandum motum jovis, & propterea perturbatio orbis jovialis longe minor eſt quam ea ſaturnii. Reliquorum orbium perturbationes ſunt adhuc longè minores (f) præterquam quod orbis terræ ſenſibiliter perturbatur à lunâ. (g) Commune centrum gravitatis terræ & lunæ, ellipſin circum ſolem in umbilico poſitum percurrit, & radio ad ſolem ducto areas in eâdem temporibus proportionales deſcribit, terra vero circum hoc centrum commune motu menſtruo revolvitur.

PRO-

(d) * *Error tamen omnis.* Si ad evitandum omnem fere errorem, orbis Saturni umbilicus (per prop. 67. lib. 1.) locetur in communi centro gravitatis Jovis & Solis, Theoria Saturni juxtà hanc hypotheſim conſtituta ſatis accuratè congruit cum phænomenis, ità ut error qui ex hâc hypotheſi oritur, ubi maximus eſt, vix ſuperet minuta duo prima, & error maximus in motu medio vix minutis duobus primis annuatim major obſervetur. Hinc non parum confirmantur ea quæ de mutuâ planetarum perturbatione hactenus dicta ſunt.

(e) * *In conjunctione autem Jovis.* Quoniam in conjunctione Jovis & Saturni, diſtantia Saturni à Sole, Saturni à Jove, & Jovis à Sole ſunt inter ſe ut 9, 4 & 5, circiter, gravitatis acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem erunt ut $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{16}$ & $\frac{3021}{25}$ (per cor. 1. prop. 8.) hoc eſt, ut 16, 81 & $\frac{16\times81\times3021}{25}$. 71.

(f) * *Præterquam quod orbis terræ.* Orbem terræ ſenſibiliter perturbari à lunâ oſtendetur deinceps ubi vis lunæ definietur.

(g) * *Commune centrum gravitatis terræ & lunæ,* (prop. 65. lib. 1.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

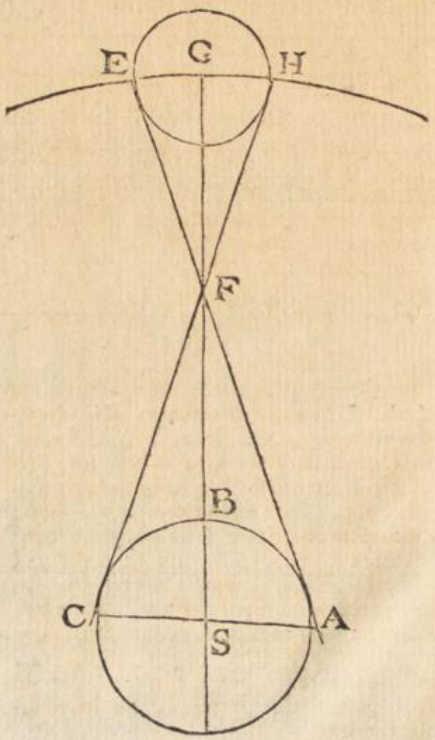
## PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

*Orbium aphelia & nodi quieſcunt.*

Aphelia quieſcunt, per prop. XI. lib. I. ut & orbium plana, per ejuſdem libri prop. I. & quieſcentibus planis quieſcunt nodi. Attamen à planetarum revolventium & (h) cometarum actionibus in ſe invicem orientur inæqualitates aliquæ, ſed quæ ob parvitatem hic contemni poſſunt.

*Corol* 1. Quieſcunt etiam ſtellæ fixæ, propterea quod datas ad aphelia nodoſque poſitiones ſervant.

*Corol.* 2. Ideoque (i) cum nulla ſit earum parallaxis ſenſibilis ex terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immenſam cor-




quo

72.

(h) * *Et cometarum actionibus.* Eodem prorſus modo quo planetæ in ſe invicem agunt; patet quoque cometas in alios planetas agere ſimileſque effectus producere, ſed cum obſervationes Aſtronomicæ oſtendant apheliorum nodorumque motum eſſe tardiſſimum, ob parvitatem contemni poſſunt inæqualitates quæ ex planetarum & cometarum actionibus in ſe invicem oriuntur.

(i) * 72. *Cum nulla ſit earum parallaxis.* In hypotheſi terræ motæ, quieſcentibus Sole & ſtellis, tellus integram revolutionem abſolvit ſpatio 23. hor. 56'. 4". circiter & circà ſolem revolvitur unius anni intervallo circulumque deſcribit qui ecliptica vel orbis annuus appellatur. Referat S ſolem, ſit F ſtella fixa in Ecliptica plano ad diſtantiam quamlibet conſtituta; Sit ABCD orbis annuus, ponaturque tellus primum in loco A deindè poſt ſex menſes perveniat ad locum C in quo diſtet à loco A totâ diametro orbis annui, hoc eſt, 20000 terræ diametris circiter, ità ut anguli FSA, FSC ſint recti, ſtella F ex tellure A viſa reſpondebit puncto E, quod ad diſtantiam infinitam à terrâ removeri ſupponitur. Deindè eadem ſtella ob motum terræ ab A verſùs B, progredi videbitur ab E verſùs G, donec tellure perveniente ad C ſtella videatur in H, diſtans ſcilicet à loco in

corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione systematis nostri. Quinimo fixæ in omnes cœli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per prop. LXX. lib. 1.

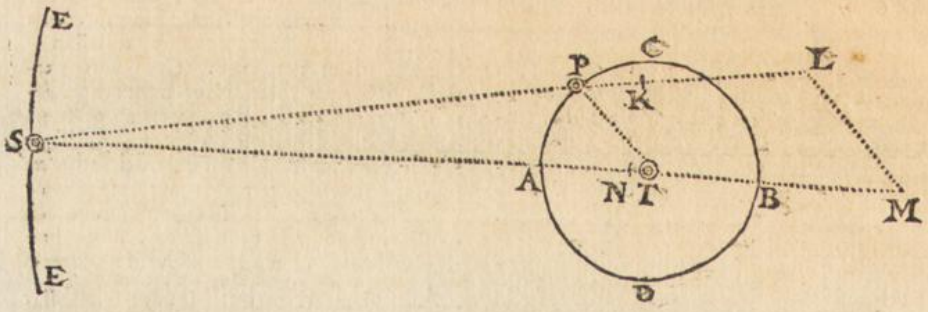
quo ante sex menses versabatur, toto arcu EH, cujus mensura est angulus EFH vel AFC. Hujus anguli semissis AFG, est parallaxis orbis annui ex terræ motu annuo oriunda. Dato autem angulo AFS, facilè invenitur distantia stellæ fixæ à terrâ AF, si fiat, ut sinus anguli AFS, ad sinum totum, ità AS Semidiameter orbis annui quæ est 10000 diametrorum terræ circiter ad AF. Jam verò patet ex telluris annuo motu oriri debere translationem fixarum inter se parallaxi duplicatæ circiter æqualem. At stellæ majores & propiores respectu remotiorum quæ telescopiorum ope duntaxat conspici possunt, moveri non observantur. Nulla est itaque fixarum parallaxis sensibilis ex terræ motu annuo oriunda, ideóque immensa est fixarum à tellure distantia. Sivè autem terra moveatur, sivè quiescat, stellas fixas immensis intervallis à terrâ distare certissimum est, nam parallaxim annuam minuto primo longè minorem esse consentiunt omnes Astronomi. Fingamus verò annuam fixæ alicujus proximioris parallaxim esse unius minuti primi, à tellure distabit stella illa 3437 semi-Diametris orbitæ quam describit terra siquidem sinus unius minuti est ad Radium ut 1 ad 3437, & si semi-Diameter orbitæ sit 10000 semi-Diametrorum terræ, ad minimum 68740000 terræ ipsius semi-Diametris distabit fixa à Tellure.

73. Christianus Hugenius in Cosmotheoro lib. 2. aliam excogitavit methodum quâ rationem distantiæ fixarum ad distantiam Solis conjectando investigaret. Supponit itaque sirium quæ stella est inter alias fulgentissima, Soli circiter æqualem esse. Deindè tentavit quâ ratione Solis diametrum ità imminuere posset ut non major aut splendidior sirio appareret. Quod ut assequeretur, tubi vacui duodecim circiter pedes longi aperturam alteram occlusit lamellâ tenuissimâ in cujus medio tam exiguum erat foramen ut lineæ partem duodecimam non excederet; oculoque alteri aperturæ admoto, ea videretur Solis particula cujus diameter erat ad diametrum totiùs ut 1 ad 182. Cum verò particula illa sirio splendidior adhuc appareret, foramini globulum vitreum ejusdem cum foramine diametri objecit, talisque foci globulum selegit ut lux Solis ad oculum transmissa non major aut splendidior videretur eâ quam à sirio emissam nudis oculis intuemur. Quo facto, hujus particulæ Solis diametrum invenit partem $\frac{1}{27664}$ diametri totiùs. Quarè Sol instar sirii appareret, si conspicua foret pars diametri totiùs Solaris tantùm $\frac{1}{27664}$, distantia autem Solis à terrâ in quâ tantillus videretur foret ad distantiam in quâ ejus diametrum apparentem intuemur ut 27664 ad 1, divisâque apparente Solis diametro mediocri per 27664, foret diameter Solis 4‴ circiter. Hinc sirii quoque distantia à terrâ est ad distantiam Solis ab eâdem ut 27664 a 1 & diameter apparens Sirii 4‴. Jam distantia Solis à terrâ si Parallaxis Solis ponatur 10″ 30‴ est ferè 20000 semid. terrestrium, erit ergo distantia Sirii 553280000 semid. terrestr. Si verò distantiam mediam Saturni à terra constituamus 190800 semid. terrestr. prodit distantia inter Saturnum & Sirium 553089200 semid. terrestr. 73.

De Mundi Systemate.

## *Scholium.*

Cum planetæ ſoli propiores (nempe mercurius, venus, terra, & mars) ob corporum parvitatem parum agant in ſe invicem: horum aphelia & nodi quieſcent, niſi quâtenus à viribus jovis, ſaturni & corporum ſuperiorum turbentur. Et (a) inde colligi poteſt per theoriam gravitatis, quod horum aphelia moventur aliquantulum in conſequentia reſpectu fixarum, idque in propor-




74. (a) 74. * *Et indè colligi poteſt.* Deſignet S Planetam aliquem ſuperiorem puta Jovem cujus Orbita ESE; ſit T Sol, P Planeta aliquis inferior, ponaturque corporum S, P, aliorumve plurium ſyſtema revolvi circà corpus T manentibus orbium ESE & PAB formâ, proportionibus & inclinatione ad invicem mutentur verò utcumque magnitudines & per theoriam gravitatis colligitur (cor. 15. & 16. prop. 66. & not. in eadem corollaria) errores angulares corporis P in quâvis revolutione genitos, ideóque & motus aphelii in quâlibet revolutione corporis P eſſe ut quadratum temporis periodici quam proximè. Si itaque numerentur illi errores, in variis Planetis P durante eodem determinato tempore, per centum v. gr. annos ut hic aſſumit Newtonus, errores integri eo tempore deſcripti erunt ut errores ſingulâ revolutione commiſſi & ut numerus revolutionum ſæculo integro peractarum, ille numerus revolutionum eſt inverſè ut tempus periodicum & errores (qui ſunt, ut dictum eſt, directè ut quadratum temporis Periodici) ergo errores Apheliorum durantibus centum annis erunt in ſimplici temporum periodicorum ratione. Sed tempora periodica Planetarum P ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro T (per phæn. 4.). Sunt ergò errores Planetarum inferiorum in hâc ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro Solis. Quare ſi ponatur eum eſſe aphelii Martis progreſſum ut in annis centum conficiat 33′ 20″ in conſequentia reſpectu fixarum, invenietur motus aphelii aliorum planetarum qualis à Newtono definitur, dicendo ut Radix quadrata cubi diſtantiæ martis ad Radicem quadratam cubi diſtantiæ terræ à Sole, ita 33′ 20″ ad motum Aphelii terræ annis centum. Quamvis autem ex ipsâ gravitatis theoriâ colligatur planetarum inferiorum aphelia nunc promoveri nunc retrahi, medios tamen apheliorum motus notabili aliquo tempore in conſequentia fieri, patet ratiocinio ſimili illi quod de Lunâ factum eſt in nota c p. 24. hujuſce, unde facile conſtabit reverà medium motum reſultantem poſt centum annos eſſe

ut

portione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum planetarum à ſole. Ut ſi aphelium martis in annis centum conficiat $33'.\ 20''$ in conſequentia reſpectu fixarum; aphelia terræ, veneris, & mercurii in annis centum conficient $17'.\ 40''$, $10'.\ 53''$, & $4'.\ 16''$ reſpectivè. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hâc propoſitione.



PRO-

ut ipſa tempora periodica, ideóque in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à Sole. Secundùm ea quæ dicuntur in cor. 16. prop. 66. lib. 1., &c. De præſenti ſcholio hæc dicta ſint. Sed prætermittenda non ſunt verba doctiſſimi Viri Joannis Bernoullii cujus authoritatem maximè veneramur. Sic ferè habet Clariſſ. Autor in Diſſertatione de Syſtemate Carteſiano quæ anno 1730. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecorata fuit, Paragrapho XLI. «(( Newtonus ſupponit motum aphelii Martis in conſequentia eum «eſſe ut centum annorum ſpatio $33'\ 20''$ «conficiat. Hinc colligit per theoriam «gravitatis quod aliorum planetarum in«feriorum aphelia moventur in conſequen«tia reſpectu fixarum, idque in propor«tione ſeſquiplicatâ diſtantiarum horum «planetarum à Sole. Nullo fundamento «meràque apparentiâ nixus videtur New«tonus in conſtituendâ hâc ratione ſeſ«quiplicatâ. Neque enim intelligo, ne«que ut arbitror, plures alii me ipſo perſ«picaciores intelligunt quare mutua pla«netarum gravitatio, etiamſi concederetur, hanc proportionem poſtulet. Et «certè hæc eadem gravitatio planè irre«gularem effectum & ſuæ regulæ contra«rium producit reſpectu aphelii Saturni, «cum Newtonus ipſe ſtatuat in conjun«ctione Jovis & Saturni aphelium illud «nunc promoveri nunc retrahi. Numquid «de ſingulis planetis inferioribus idem quo«que ſtatuendum videretur. Nam ſi talis «admittenda foret attractio, tellus v. gr. «ubi in aphelio verſatur Jovemque reſ«pectu zodiaci præcedit, retraheretur, & «contra promoveretur ubi Jupiter tellu«rem præcederet. Undè hæc gravitatio «contrarios omninò effectus ante & poſt «conjunctionem telluris & Jovis produ«ceret. Sed nil tale obſervatur, idque ex «ſuâ hypotheſi Newtonus minime colli«git, ſicut facere deberet.)).

74.

* Ex prædictis autem facile reſponderi poſſe videtur Viri Doctiſſimi quæſitis.

1°. Enim conceſſa Planetarum gravitatione motum Apheliorum Planetarum inferiorum ſecundum proportionem ſeſquiplicatam diſtantiarum fieri debere, Mathematicè ſequitur ex Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I. ut ſupra oſtenſum eſt, illud autem Corollarium 16. tam ex Sectione nona Lib. I. quam ex ipſa Prop. LXVI. legitimè deduci, ex ipſo Newtono notiſque illis locis adjectis probatum credimus.

2°. Quod queritur V. D. eamdem gravitationem contrarium effectum regulæ ſuæ producere reſpectu Aphelii Saturni, id vitio vertendum non eſt Syſtemati Newtoniano, quin è contra egregia procul dubio eſt ejus confirmatio. Quippe eo ipſo quod Saturnus cæteris Planetis ſit exterior, ex Syſtemate Newtoniano fluit vim Solis in Saturnum agentem augeri per vim Planetarum interiorum in conjunctione, unde Aphelium ejus debet regredi per Prop. XLV. (quod in Saturno obſervari, ex ipſo Caſſino didicimus, ut ſuperius notâ c pag. 23. retulimus) dum è contra Aphelia Planetarum interiorum per vim exteriorum in conjunctione poſitorum progredi debeant.

3°. Queritur denique quod Aphelia Planetarum inferiorum nunc retrahi nunc promoveri debeant, quod tamen non obſervatur; ſcilicet Newtonus ſtatuit quidem Aphelia Planetarum inferiorum in ſyzygiis promoveri, in Quadraturis retardari, plus promoveri verò quam retardari unde in totum progredi videntur; Aphelii autem ea veluti libratio obſervabilis non

DE MUNDI SYSTEMATE.

## PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

*Invenire orbium principales diametros.*

Capiendæ ſunt hæ in ratione ſubſeſquiplicatâ temporum periodicorum, per prop. XV. lib. I. (b) Deinde ſigillatim augendæ in ratione ſummæ maſſarum ſolis & planetæ cujuſque revolventis ad primam duarum mediè proportionalium inter ſummam illam & ſolem, per prop. LX. lib. I.

PRO-

74. eſt; etenim qui praxi Aſtronomicæ operam dant facile ſentiunt loca Apheliorum ita non determinari, ut nutatio Aphelii in ſingulis orbitæ partibus obſervatione obtineatur, imo poſt plures duntaxat revolutiones ſatis tutò Aphelii progreſſum inveniri, ipſæ Methodi ad eas obſervationes adhibitæ docent, hinc, ad obſervationes provocare non licet ut illam nutationem vel veram vel fictitiam eſſe probetur, ſiquidem obſervationes hâc de re nihil docere nos poſſunt.

Addit verò, *tellus ubi in Aphelio verſatur Jovemque reſpectu Zodiaci præcedit retraheretur, & contra promoveretur ubi Jupiter tellurem præcederet, unde gravitas contrarios effectus produceret ante & poſt conjunctionem Telluris & Jovis*; ſi in hoc exemplo agatur de motu Telluris in longum hæc revera fluunt ex gravitationis ſyſtemate, & reverâ in Lunâ inde producitur ea inæqualitas quæ *Variatio* dicitur Aſtronomis notiſſima; ſimilem inæqualitatem in terra non quidem obſervarunt Aſtronomi quia minima eſſe debet per ipſam gravitationis naturam, & cum ſeſe utrinque compenſet nullum ſui relinquit Veſtigium; Quod ſi in hoc exemplo de motu Aphelii Terræ agatur ut ex ſermonis ſerie, quis forte ſuſpicaretur, res fieri non debet ut hic indicatur, nam in tota ſyzygia Aphelium telluris progredi debere, & in quadraturâ duntaxat regredi, liquet per XLV. & LXVI. primi Libri.

Quas quidem adnotationes eâ mente non adjungimus ut quidquam derogetur ſummæ Viri Illuſtriſſimi, apud omnes φιλομαθηματικους authoritati. Sed cum Newtonus brevitate ſuâ occaſionem dederit V. Ill. dicendi, eum nullo fundamento meràque apparentiâ proportionem motus Apheliorum ſtatuiſſe, hâc notâ ipſi inuſtâ eum purgare & veritas & Commentatoris officium poſtubabant.

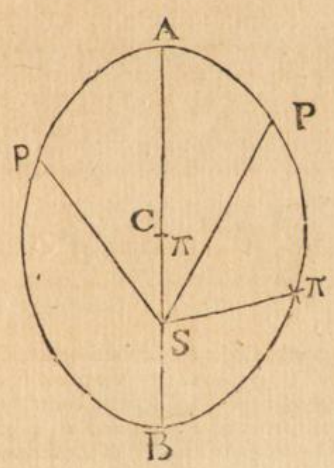
(b) *Deinde ſigillatim* Jam capti ſunt orbium axes majores in ratione ſubſeſquiplicatâ temporum periodicorum, nempè nullâ habitâ ratione maſſarum, planetæ ſpectati ſunt tanquam totidem puncta in ellipſibus circà immotum in umbilico Solis centrum revolventia. Quoniam verò fit ut propter Solis & planetæ actiones mutuas, planeta ellipſim deſcribat cujus focus eſt commune gravitatis centrum planetæ & Solis, major axis ellipſeos quam planeta deſcribit circà Solem qui ipſe ſimul revolvitur circà commune centrum gravitatis, eſt ad axem majorem ellipſeos quam idem planeta circà Solem quieſcentem eodem tempore periodico deſcribere poſſet in ratione ſummæ maſſarum Solis & planetæ ad primam duarum medie proportionalium inter ſummam illam & Solem (prop. 60. lib. I.) ideóque ut axis major orbitæ corrigatur, augendus eſt in dictâ ratione. Datur autem ratio inter maſſas Solis & planetarum, ac proinde datur ratio in quâ orbitarum axes majores ſunt augendi. Vide de his not. 64. hujus libri.

## PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

*Invenire orbium eccentricitates & aphelia.*

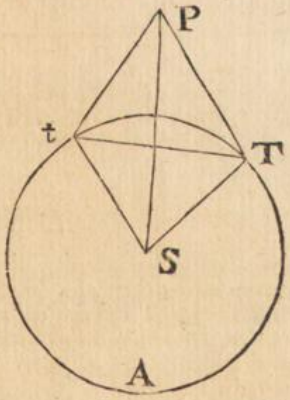
(c) Problema confit per prop. XVIII. lib. I.

PRO-




75.

que P planeta seu potiùs locus Planetæ ad Eclipticam reductus sivè punctum ubi perpendicularis ex planetâ in planum Eclipticæ demissa incidit. Ponatur tellus in T, observeturque planetæ longitudo




(c) 75. * *Problema confit.* Sit S Sol, sintque planetæ loca tria P, p, π è Sole visa & data sit recta B A axis major ellipseos, describatur (per prop. 18. lib. 1.) ellipsis cujus umbilicus est S & axis major A B, quod fit, si ex axe B A demantur longitudines S P, S p, S π & cum residuis arcus ex punctis P, p, π describantur, intersectio horum trium arcuum erit alter focus Ellipseos quo invento orbita planetæ determinabitur, simulque dabitur distantia Solis à centro ellipseos, hoc est, excentricitas, notumque erit ellipseos punctum à Sole remotissimum, id est, aphelium.

Quia verò problema illud supponit data esse tria planetæ loca centrica, hoc est, ex Sole visa, datasque eorum à Sole distantias, hic adjungemus methodum quâ Clariss. Halleius ex dato tempore periodico, planetæ locum centricum ejusque à Sole distantias invenire docuit. Referat T t A orbitam Telluris, S Solem, sit-

geocentrica, ex datâ theoriâ Telluris, dabitur longitudo apparens Solis, ideóque dabitur angulus P T S. Post integram planetæ revolutionem, planeta rursùs erit in P, quo tempore tellus sit in t, ex eo puncto iterum observetur planeta, inveniaturque angulus P t S elongatio planetæ à Sole. Ex datis observationum momentis, dantur loca Telluris in Ecliptica è Sole visa ejusque à Sole distantiæ, ac proindè in triangulo t S T, dantur latera t S, S T & angulus t S T, quarè invenientur anguli S t T, S T t & latus t T. Si itaque ab angulis datis P T S & P t S, auferantur anguli noti t T S, T t S dabuntur anguli P T t & P t T; undè in triangulo P t T ex datis angulis unà cum latere T t, innotescet P T. Deindè in triangulo P T S, dantur latera P T, T S cum angulo intercepto P T S, ideóque dabitur S P, quæ distantia planetæ à Sole curtata appellatur & notus fiet angulus T S P, ex quo dabitur

DE MUNDI SYSTEMATE.

## PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

*Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem lunæ ex ipsius motu diurno oriri.*

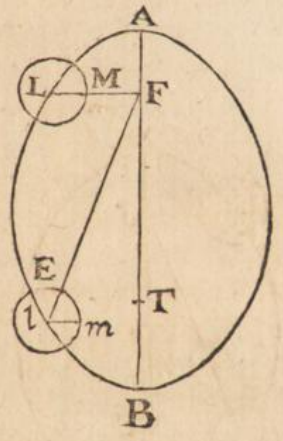
Patet per motus legem 1. & corol. 22. prop. LXVI. lib. 1. Jupiter utique respectu fixarum revolvitur horis 9. 56′, mars horis 24. 39′. venus horis 23. circiter, terra horis 23. 56′, sol diebus $25\frac{1}{2}$ & luna diebus 27. 7 hor. 43′. Hæc ita se habere ex phænomenis manifestum est. (d) Maculæ in corpore solis ad eundem situm in disco solis redeunt diebus $27\frac{1}{2}$ circiter, respectu terræ; ideoque respectu fixarum sol revolvitur diebus $25\frac{1}{2}$ circiter. Quoniam vero lunæ circa axem suum uniformiter revolventis dies menstruus est: hujus facies eadem ulteriorem

75. bitur locus planetæ heliocentricus. Est autem (ex trigon.) tangens latitudinis geocentricæ planetæ ad tangentem latitudinis heliocentricæ ut distantia planetæ à Sole curtata ad distantiam ejusdem à tellure curtatam, sed per observationem, nota est latitudo geocentrica planetæ, quare innotescet planetæ latitudo heliocentrica ex quâ simul & distantiâ à Sole curtatâ elicietur planetæ à Sole vera distantia & simili modo vera distantia Planetæ à terra, unde tandem in Triangulo cujus tria puncta sunt Sol, terra & Planeta omnia latera sunt cognita. Hâc ratione obtineri possunt varia loca centrica planetæ variæque à Sole distantiæ.

Cæterum hæc fusè variisque adhibitis methodis, explicata reperiuntur in introductione ad veram Physicam Joannis Keill, in Astronomiâ Physicâ Davidis Gregorii, & potissimum in elementis Astronomicis à Clariss. Cassino nuper editis.

(d) * *Maculæ in corpore Solis.* Cum revolutio macularum circà Solem sit admodum regularis & maculæ ipsæ vel Soli supernatent vel à Sole parum distent (69) non maculæ circà solem sed Sol ipse $25\frac{1}{2}$ dierum spatio circiter, circà proprium axem motu vertiginis movetur. Jovem, Venerem & Martem circà axem suum gyrare ex maculis quoque in horumce planetarum corporibus per vices in conspectum redeuntibus colligitur. In Mercurio autem qui Soli proximus est, ob nimium Luminis splendorem, & in Saturno ob maximam ejus à terrâ distantiam maculæ nullæ hactenus deprehendi potuerunt quibus determinaretur eorum vertigo, Attamen nil obstat quominus ex analogiæ lege colligamus Mercurium quoque & Saturnum circà axem suum gyrare. Macularum solarium theoriam elegantissimè expostuerunt Clariss. D. De-Lisle in Libro cui titulus, monumenta quæ ad Astronomiæ Physicæ & Geographiæ progressum conducunt, sæpeque laudatus D. Cassinus in Elementis Astronomicis. De maculis Veneris ejusque circà axem revolutione quædam inter Astronomos est lis; à Cassino patre 23 horis & 20′ absolvi, ex maculâ sive potius splendore quodam in disco Veneris notabili annis 1666, 1667 compertum fuerat, non ita tamen tuto, ipse enim scribebat de motu Veneris referente ipsius filio, *debiles adeò & confusas esse Veneris maculas ut earum terminos accuratè notare non liceat, unde utrum aliquis sit Veneris motus per eas determinare frustra quæritur.* Anno vero 1726. D^nus. Bianchinus maculas Veneris Lunaribus similes diu est persecutus, earumque revo-

rem umbilicum orbis ejus (e) ſemper reſpiciet quamproximè, & propterea pro ſitu umbilici illius deviabit hinc inde à terrâ. Hæc



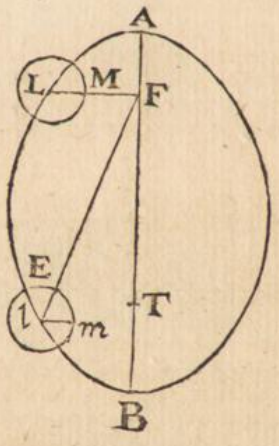

revolutionem 24 diebus 8. horis abſolvi deduxit, circa axem admodum obliquum Eclipticæ; in ſuam autem ſententiam D^num. Caſſinum filium non adduxit, quia apparentiæ à D^no. Bianchino obſervatæ per motum 23 horarum explicari poterant, dum Parentis obſervationes, cum hypotheſi revolutionis 24 dierum & 8. horarum conſentire non poſſent, hinc quæſtio in medio remanſit non facile ſolvenda, maculæ enim Veneris nonniſi Cœlo puriſſimo obſervari poſſunt & Lutetiæ nequidem cum maximis Teleſcopiis videri potuiſſe narrat idem Ill. Caſſinus filius.

(e) 76. *Semper reſpiciet quamproximè.* Sit orbita lunæ ellipſis A L B A, in cujus umbilico T locatur terra, ductus ex umbilico radius vector areas ellipticas temporibus proportionales deſcribit (prop. 1. lib. 1.); demiſſis autem à duobus quibuſvis in ellipſeos peripheriâ punctis ad alterum umbilicum F rectis L F, l F, angulus L F l erit quamproximè ad quatuor rectos ſicut tempus quo arcus L l à Lunâ deſcribitur ad integrum tempus periodicum Lunæ, ſi ellipſis ſit parum excentrica. Jam referat L M meridiani Lunaris, hoc eſt, circuli per axem converſionis Lunæ planum, quod productum tranſeat per F, idem planum in quocumque orbitæ ellipticæ puncto locetur Luna, productum quoque per F tranſibit. Quoniam enim Luna circà axem ſuum uniformiter revolvit eodem tempore quo circà tellurem periodum ſuam abſolvit, patet meridiani planum quod Lunâ exiſtente in L ſitum L M obtinebat, dum Lunæ centrum aliud quodvis punctum l attigit, ad talem ſitum l E perveniſſe, ut poſitâ l m parallelâ ad L M, angulus m l E ſit ad quatuor rectos ſicut tempus quo Luna arcum L l, percurrit ad integrum tempus periodicum Lunæ, ideóque (prop. 11. lib 5. elem.) angulus m l E eſt ad quatuor rectos ſicut L F l ad quatuor rectos, ac proinde angulus m l E æqualis eſt angulo L F l, & ob rectas L F, l m parallelas jacebit l E in directum ipſi l F, hoc eſt, ubi Luna in l verſatur, ejuſdem meridiani planum quod in priori ſitu L productum etiamnum tranſit per F. Quarè in quocumque Lunaris orbitæ puncto centrum Lunæ occurat, productum ejuſdem meridiani planum tranſit per F. 76

His præmiſſis patet eandem ferè Lunæ faciem ſemper ad terram converti eaſdemque ferè Lunares maculas obſervatori terreſtri apparere. Cum enim productum ejuſdem meridiani planum per alterum orbitæ Lunaris focum F tranſeat, ſitque Lunaris orbita parum excentrica, hoc eſt, non multum diſtent umbilici F & T, eadem quamproximè Lunæ facies terræ obvertitur. Si verò accuratè obſervatis Lunaribus maculis, Lunæ facies ad terram converſa diligentiùs conſideretur, non eadem præcisè facies à nobis videbitur. Quoniam enim ejuſdem meridiani planum L M non ad terram T, ſed ad alterum focum F dirigitur, patet Lunæ in L exiſtentis hemiſphærium e tellure T viſum aliquantulum eſſe diverſum ab illo quod videtur, dum Luna reperitur in l; nam pars hemiſphærii Lunaris verſus plagam B quæ anteà occultabatur fit conſpicua, & contrà pars hemiſphærii alterius versùs R quæ anteà apparebat oculis evaneſcit, motus hic Lunæ è terrâ apparens quo fit ut quædam

DE MUNDI SYSTEMATE.

Hæc eſt libratio lunæ in longitudinem: Nam (f) libratio in latitudinem orta eſt ex latitudine lunæ & inclinatione axis ejus ad planum eclipticæ. Hanc librationis lunaris theoriam D. (g) *N. Mercator* in aſtronomiâ ſuâ initio anni 1676 edita, ex literis




76 maculæ in partem à terrâ averſam ſe recipiant, dum aliæ ex parte aversâ in conſpectum prodeunt, libratio Lunæ in longitudinem appellatur. Librationem hanc bis in quolibet menſe periodico reſtitui manifeſtum eſt, quandò nempè Luna in apogæo A aut perigæo B verſatur; in utroque enim ſitu ejuſdem meridiani planum quod protenſum in F incidit, tranſit etiam per T. Cæterum hæc libratio omnibus inæqualitatibus obnoxia eſt quibus afficitur motus in longitudinem. (Vid. corollaria prop. 66. lib. 1.).

(f) 77. * *Libratio in latitudinem.* Quoniam axis circà quem Luna revolvitur, non eſt ad Lunarem orbitam normalis, ſed ad illam inclinatus, manifeſtum eſt Lunæ polos per vices ad terram vergere, ideóque Lunæ maculas nunc huic nunc illi polo vicinas è terrâ ſpectari. Quia verò axis Lunæ eſt ferè ad planum Eclipticæ normalis, patet hanc librationem pendere à ſitu Lunæ reſpectu nodorum orbitæ Lunaris cum ecliptică, ſeu ab ipsâ latitudine Lunæ. Ex illâ libratione oritur ut dum Luna versùs auſtrum ab ecliptică maximè recedit, hoc eſt, dum in limite auſtrali verſatur, Lunæ polus borealis & aliquæ ultrà polum Lunaris globi partes à Sole illuſtrentur, intereadum polus auſtralis & aliquæ citrà hunc polum regiones Lunares in tenebris immerguntur; Si ergò in hoc ſitu contingat Solem in eâdem plagâ cum limite auſtrali verſari, Luna à conjunctione cum Sole ad nodum aſcendentem, hoc eſt, versùs Boream progrediens, has regiones maculaſque polo Boreali vicinas oculis ſubducet, dum interim ab oppoſitâ plagâ aliæ cum polo auſtrali regiones è tenebris emergunt, contrariumque accidet deſcendente Lunâ novâ à limite boreali, borealiores nempè Lunæ partes paulatim in lucem è tenebris prorepent, dum auſtraliores evaneſcunt.

(g) 78. * *D. N. Mercator.* Hic tranſcribemus N. Mercatoris verba. «Harum «tamen variarum atquè implicitarum li«brationum (Lunæ ſcilicet) cauſas, hy»potheſi elegantiſſimâ explicavit nobis Vir «Cl. Iſaac. Newton cujus humanitati «hoc & aliis nominibus plurimum debere «me lubens profiteor. Hanc igitur hypo«theſim Lectori gratificaturus, exponam «verbis, ut potero, nam delineationes in «plano vix ſufficiunt huic negotio. Ita«que reverſus ad globum, cogita nunc «illum repræſentare ſphæram in quâ mo«vetur Luna cujus centrum occupet tellus; «ipſum verò Lunæ globum credito polis «& axe ſuo inſtructum circà quem re«volvatur motu æquabili ſemel menſe ſy«dereo, dum à fixâ aliquâ digreſſa ad «eandem revertitur, & æquator Lunaris «ad firmamentum continuatus intelligatur «congruere plano horizontis lignei, & po«lus æquatoris Lunaris in firmamento im«mineat polo Boreo globi ad zenith ele«vato. Orbitam verò Lunæ concipito «partim ſuprà horizontem ligneum attol«li, partim verò infrà eundem deprimi, «quemadmodum in hoc ſitu, globi conſ«pici-

literis meis plenius expoſuit. Simili motu (h) extimus ſaturni ſatelles circa axem ſuum revolvi videtur, eâdem ſui facie ſaturnum perpetuò reſpiciens. Nam circum ſaturnum revolvendo,

«spicitur ecliptica, licet angulus æquato-
«ris Lunaris & ejus orbitæ non ſit fortè
«æquè magnus atque hic quem globus exhi-
«bet. Deindè finge tibi globulos duos
«æquales quorum uterque polis, æquato-
«re & meridiano unico primario inſignia-
«tur & uterque filo ſuſpendatur alterutri
«polorum alligato. Horum alter referat
«Lunam fictitiam motu æquabili ſecun-
«dum horizontis lignei circumlatam, atque
«eodem tempore circà axem ſuum re-
«volutam reſpectu firmamenti, ità ut pla-
«num meridiani primarii Lunatis perpe-
«tuò tranſeat per centrum terræ. Alter
«verò globulus veram Lunam imitatus in
«orbitâ ſuâ feratur motu inæquali, nunc
«ſuprà horizontem ligneum emergens,
«nunc infrà eundem deſcendens, ità ut
«planum æquatoris hujus Lunæ veræ ſem-
«per parallelum maneat plano horizontis
«lignei, & planum meridiani primarii
«ejuſdem Lunæ veræ ſemper parallelum
«plano meridiani primarii Lunæ fictæ. Ità
«fit ut Luna ficta eandem nobis faciem ob-
«vertens ſemper nulli prorsùs librationi
«ſit obnoxia. At Luna vera dum à peri-
«gæo pergit ad apogæon præcedens Lunam
«fictam, meridianum ſuum primarium oſ-
«tendit in medietate ſiniſtrâ ſui diſci tot
«gradibus abeuntem à medio quot ſunt
«inter longitudinem Lunæ veræ & fictæ.
«Ab apogæo verò ad perigæon deſcendens
«Luna vera ſequitur fictam atque tum me-
«ridianus primus veræ Lunæ recedit ab
«ejus medio ad dextram, hoc eſt, macu-
«læ omnes vergunt in occaſum, & cum
«differentia inter mediam & veram Lunæ
«longitudinem in quadraturis evadat ma-
«jor, propter evectionem ſyſtematis Lu-
«naris à centro telluris, hinc eſt quod in
«quadraturis librationes in longum cer-
«nuntur majores. Similiter intelligitur
«cauſa librationis in latum, quando Lu-
«na ſuperato nodo aſcendente, ſivè ſectio-
«ne horizonti lignei & orbitæ ſuæ, ten-
«dit ad limitem boreum, tum enim nobis
«in centro ſphæræ poſitis, polus Lunæ
«boreus & quæ ſunt circà eum maculæ 78
«abſconduntur & polus auſtralis cum ſuis
«maculis in conſpectum venit, undè ma-
«culæ omnes conſpicuæ in boream tende-
«re videntur; contrarium accidit, Lunâ
«ad limitem auſtralem accedente. Ab iiſ-
«dem cauſis procedit macularum ex par-
«te lucidâ in obſcuram tranſitus & viciſ-
«ſim. Nam in limite auſtrali polus Lunæ
«boreus à Sole illuſtratur & quidquid eſt
«zonæ frigidæ arctico Lunari incluſum,
«dum frigida auſtralis in tenebris verſatur.
«Quod ſi igitur Solem concipias in eâdem
«plagâ cum limite auſtrali & lunam poſt
«conjunctionem inde procedere ad no-
«dum aſcendentem, tum maculæ ſuperio-
«res apud polum boreum ſitæ, paulatim
«cum ſuo polo à Luce in Tenebras con-
«cedunt, dum inferiores maculæ cum po-
«lo auſtrali ex Tenebris in Lucem prore-
«punt. Contrarium evenit ſemeſtri poſt,
«cum Sol acceſſit ad limitem Lunæ bo-
«reum». Hactenus N. Mercator ſed plenior librationum Lunarium expoſitio habetur in elementis Aſtronomicis Clariſſ. Caſſini, ubi Vir Doctiſſ. varias harumce librationum apparentias reſpectu fixarum & Solis determinat, docetque methodum quâ ad quodlibet tempus datum poſſit definiri apparens macularum Lunarium ſitus.

(h) * *Extimus Saturni ſatelles*, tertio ſatellite ſæpè major apparet, poſteàque decreſcit ac tandem juxtà periodum nondum probe notam evaneſcit, id tamen ut plurimum contingit dum ſatelles in orbitæ ſuæ orientali parte reſpectu Saturni verſatur, rursùs deinde in conſpectum redit. Cauſa hæc eſſe videtur quod ſcilicet hemiſphærii ſatellitis pars quæ ad nos converſa eſt, maculis obſcurata præ luminis tenuitate cerni non poſſit, revolvente autem circà axem ſatellite, ad hemiſphærium oppoſitum tranſeunt maculæ, iterumque ſatelles fit conſpicuus. Cumque in eâ orbis ſui parte quæ orientem ſpectat obſcuratus ſatelles ſemper obſervetur, in alterâ verò parte nunquam, valdè proba-

DE MUNDI SYSTEMATE.

do, quoties ad orbis ſui partem orientalem accedit, ægerrimè videtur, & plerumque videri ceſſat: id quod evenire poteſt per maculas quaſdam in eâ corporis parte quæ terræ tunc obvertitur, ut *Caſſinus* notavit. Simili etiam motu ſatelles extimus jovialis circa axem ſuum revolvi videtur, propterea quod in parte corporis jovi aversâ maculam habeat quæ tanquam in corpore jovis cernitur ubicunque ſatelles inter jovem & oculos noſtros tranſit.

## PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

*Axes planetarum diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores eſſe.*

(i) Planetæ ſublato omni motu circulari diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. (k) Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem aſcendere conentur. Ideoque materia ſi fluida ſit aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò deſcenſu ſuo ad polos diminuet. Sic jovis diameter (conſentientibus aſtronomorum obſervationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem

78. bile eſt eandem hujus ſatellitis faciem planetæ primario ſemper obverti. Idem quoque ſimili argumento patet in extimo jovis ſatellite, niſi dicatur illas ſatellitum maculas fuliginum inſtar modò naſci, modò diſſipari, ſed ubi apparentiæ aliquæ ex duplici causâ ortum habere poſſunt, anteponendæ ſunt explicationes quæ à motu locali repetuntur. Alios Saturni Joviſque Satellites, Lunæ inſtar, Planetis primariis invariatam manifeſtarem facie ex analogiæ lege colligunt multi. Rem aliter ſe habere cenſet Clariſſ. Daniel Bernoullius in diſquiſitionibus Phyſico-Aſtronomicis an. 1734. ab Academiâ Regiâ Scientiarum præmio condecoratis. Has conſulat Lector.

(i) * *Planetæ ſublato omni motu circulari.* Patet (per not. 172. lib. 2.), Si planetarum materia ponatur fluida, viſque gravitatis ad unum centrum dirigatur.

(k) * *Per motum illum circularem.* Quoniam planetæ circà axem ſuum revolvuntur, planetarum partes à centris circulorum in quibus moventur, recedere conantur eóque major eſt vis illa centrifuga quo majores ſunt circulorum quas deſcribunt peripheriæ (cor. 3. prop. 4. lib. 1.). Sed æquator eſt circulus maximus, circuli autem versùs polos continuò decreſcunt, quarè planetarum partes magis à centro æquatoris quam à centris parallellorum recedere conantur, ideóque ſi fluida ſit planetarum materia aſcenſu ſuo ad æquatorem diametros adaugebit, axem verò deſcenſu ſuo ad polos diminuet.

dem argumento, nisi terra nostra paulo altior esset sub æquatore quam ad polos, maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

## PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

*Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.*

*Norwoodus* noster circa annum 1635 mensurando distantiam pedum Londinensium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, ac observando differentiam latitudinem 2 *gr.* 28′ collegit mensuram gradus unius esse pedum Londinensium 367196, id est hexapedarum Parisiensium 57300.

(†) *Picartus* mensurando arcum gradus unius & 22′. 55″ in

(†) * *Picartus mensurando arcum ... invenit arcum gradus unius esse Hexap.* 57060. * Circa hanc Picarti mensuram observandum Ill. Cassinum juniorem distantiam terrestrem inter Parallelos Malvoisinæ & Ambiani 42 hex. imminuendam statuisse, ipsum verò arcum cælestem propter refractiones $1\frac{1}{2}''$ esse augendum, unde arcus gradus unius evadit hexap. 57010. Novissimè verò D. de Maupertuis arcum cælestem inter Lutetias & Ambianum metitus, multo minorem eum deprehendit quam esse debuisset secundum observationes Picarti, quare servatis mensuris terrestribus Picarti arcum unius gradus 57183 hex. determinavit: Hæc paulo fusiùs sunt diducenda.

I. Cum mensura Picarti à Malvoisina ad Sourdonem procedat, & hinc ad Ambianum; Picartus distantiam à Malvoisina ad Sourdonem per duas Triangulorum series determinat, unam præcipuam vocat quoniam ea ipsa erat quâ uti primùm constituerat, sed cum aliquid dubii in eâ observasset alteram instituit, quam priori antepositit quia observationum in eâ factarum certior sibi videbatur, & accurate consentiebat cum basi proximâ actu mensuratâ: Ill. verò Cassinus distantiam inter Parallelos, Malvoisinæ & Sourdonis ex priori serie determinat $68325\frac{2}{3}$ hex. dum eamdem distantiam Picartus, cui Ill. de Maupertuis suffragatur, facit hex. 68347.

Differunt iterum Picartus & Illustrissimus Cassinus in distantiâ inter Sourdonem & Ambianum, eam enim distantiam Picartus ex suis mensuris hex. $11161\frac{2}{3}$ invenit, Cassinus verò hex. $11135\frac{1}{2}$: discriminis autem hujus ratio duplex est; nam cum uterque Triangulos formare incipiat in lineâ quæ intercipitur inter Sourdonem & Montemdesiderium, Ill. Cassinus eam lineam assumit hex. $7116\frac{1}{2}$ juxta priorem seriem Triangulorum Picarti, & Picartus alteram seriem verificatam per Basim proximam actu mensuratam antecedens eam lineam $7122\frac{1}{2}$ Hex. facit: Cum verò diversis Triangulis inde ad Ambianum usi sint, in iis Triangulis occurrit sensibilis differentia quæ sese prodit in Angulo Sourdoni facto inter lineas inde ad Ambianum & Montemdesiderium protensas, nam is Picarto est 137°. 56′. 10″ angulus autem idem à Cassino determinatur 137° 53′. 30″, ex quâ differentiâ 2′. 40″. & ex Baseos inter Sourdonem & Montemdesiderium diversitate, oriri potuit discrimen

in meridiano inter *Ambianum* & *Malvoiſinam*, invenit arcum gradus

78. illud in diſtantiâ inter Sourdonem & Ambianum.

In arcu autem Cæleſti à Picarto menſurato refractionis correctionem adhibet Caſſinus quam neglexerat Picartus; cum ergo inveniſſet diſtantiam genu Caſſiopeæ à Zenith loci in quo obſervabat, & qui erat 18 Hex. Malvoiſinâ meridionalior 9° 59′ 5″ verſus ſeptentrionem, & cum ejus ſtellæ diſtantiam à Zenith loci 75 hex. meridionaliori quam ædes Ambiani 8° 36′ 10″ inveniſſet, arcum inter Zenith eorum locorum juxta Malvoiſinam & Ambianum interceptum fecit Picartus 1°. 22′ 55″ ut refert Newtonus.

Verum propter refractionem augendas eſſe has diſtantias à Zenith ſtatuit Caſſinus ita ut prima diſtantia 10″, altera $8\frac{3}{5}$″ fiat, cum ergo prior fiat 9° - 59 - 15

Altera - - - 8 - 36 - $18\frac{3}{5}$

Arcus interceptus inter Zenith locorum obſervationis fit - - - - 1 - 22 - $56\frac{2}{5}$

Ex his ergo correctionibus tam in arcu Cæleſti quam in menſuris terreſtribus, à Picarto obſervatis deducit Ill. Caſſinus arcum unius gradus eſſe 57010 hex.

II. Ill. de Maupertuis menſuras terreſtres quas Picartus adoptavit admittens arcum cæleſtem menſuravit Inſtrumento, à ſolertiſſimo Graham accuratiſſimè conſtructo, cum autem priores ſectores circa axem immotum ex quo filum verticale pendet revolverentur, & diviſiones ſubtiliores in ſectoris limbo per lineas tranſverſas ſignarentur, in hoc Inſtrumento Teleſcopium in ſua ſummitate duos cylindros adjunctos habet circa quos cum ſectore inferius adfixo revolvitur & ex quorum centro pendet filum verticale quo notentur gradus in limbo ſectoris; Diviſiones in eo limbo gradus & eorum partes octavas tenuiſſimis punctis indicant nihilque præterea, & ad obſervationem faciendam ita conſtituitur inſtrumentum, ut filum pendulum alicui è diviſionibus accurate applicetur, idque Microſcopio cum lumine juxta limbum collocato agnoſcitur, tum cochleâ pellitur inſtrumentum donec objectum in axe Teleſcopii cernatur & numerus gyrorum cochleæ, parteſque ſinguli gyri numerantur in limbo circuli horologii inſtar cochleæ adnexi, ita ut minimi cochleæ progreſſus maximè ſenſibiles fiant. Tali itaque inſtrumento cujus radius eſt octo pedum una unciâ demptâ obſervationes inſtituit Ill. de Maupertuis Lutetiæ in loco 1105 Hex. magis ſeptentrionali quam ædes B. Virginis, & Ambiani in loco $98\frac{1}{2}$ meridionaliori æde ejus urbis. Inde ex ſtellis & Perſei, & Draconis, arcum cæleſtem inter Zenith eorum locorum interceptum 1° 1′ 12″ determinavit, correctionibus præceſſionis Æquinoxiorum & aberrationis lucis adhibitis. Hinc cum juxta Parallelos Malvoiſinæ & Ambiani ſint 78907. hex. inter Malvoiſinam & ædes B. Virginis Lutetiis ſint $19376\frac{1}{2}$ hex. manent inter utramque ædem $59530\frac{1}{2}$ hex. ex quibus detractis $1203\frac{1}{2}$ hex. propter obſervationum loca. Invenitur arcum 1°. 1′. 12″ reſpondere menſuræ 58327. hex. ideóque arcum unius gradus Hexapedas 57183. in eâ latitudine continere.

Verum hic non diſſimulandum qualis quantuſque error obſervationi Picarti adſcribatur, ex hac noviſſimâ Ill. de Maupertuis obſervatione, & ut ille error rectè æſtimetur corrigendæ ſunt ejus obſervationes cæleſtes non tantùm per refractionem ſed etiam per Æquinoctiorum præceſſionem & aberrationem lucis, etenim cum eodem tempore factæ non fuerint obſervationes à Picarto Malvoiſinæ & Ambiano, ſed inter eas menſis intervallum effluxerit, interea per præceſſionem Æquinoctiorum augebatur ſtellæ genu Caſſiopeæ declinatio $1\frac{1}{2}$″ ut ipſe Picartus obſervat, ſimulque propter aberrationem lucis 8″ circiter augeri eam declinationem nunc conſtat, quare ſtella quæ Ambiani obſervabatur non erat in eodem cæli puncto quo fuerat cum Malvoiſinæ obſervaretur, ſed erat 10 ſe-

gradus unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. (‡) *Cassinus* senior mensuravit distantiam in meridiano à villâ *Collioure* in *Roussillon* ad observatorium Parisiense; & filius ejus addidit distan-

re secundis ad septentrionem provectior, dum ergo observabatur eam stellam distare à Zenith Ambiani 8°. 36'. $18\frac{3}{5}$ (adhibita refractionis correctione) Punctum fixum quod fuerat Malvoisinæ observatum 8°. 36' $8\frac{3}{5}$ à Zenith duntaxat distabat, & cum id Punctum Malvoisinæ 9° 59' 15" à Zenith distasset arcus inter duo Zenith interceptus erat 1°. 23' $6\frac{2}{5}$ (non 1°. 23' $56\frac{2}{5}$) qui respondet 78850. hex. unde gradus unius mensura fiet duntaxat $5692\frac{5}{6}$ hexapedarum; sive ut conferatur hæc observatione cum observat. Il. de Maupert. fiatque si $58315\frac{1}{6}$ hex. respondeant 1° 1' 12" Quot gradibus respondebunt 78850. Invenietur 1°. 22' $45\frac{1}{3}$'. loco 1°. 23' $6\frac{2}{5}$" ita ut error in observatione Cælesti Picarti. sit 20".

Singulare quid occurrit in ipsa Picarti narratione; Postquam enim differentias inter Zenith Malvoisinæ & Sourdonis, Malvoisinæ & Ambiani dedit, addit; «Differentia temporis quod efluxit inter observationes requireret ut ex priori differentia 1" *demeretur* ex posteriori $1''\frac{1}{2}$ (propter æquinoctiorum præcessionem) sed «hanc correctionem ne minutias sectari, «videamur omisimus» si mutatio declinationis per præcessionem æquinoctiorum orta ex iis differentiis *demenda* foret, mutatio declinationis propter aberrationem pariter foret demenda siquidem fit in eamdem partem, itaque cum arcus inter Malvoisinam & Ambianum adhibitâ correctione refractionis, sit 1°. 22. $56\frac{2}{5}$ dempta præcessionis & aberrationis variatione 10" circiter, maneret is arcus 1°. 22. $46\frac{2}{5}$ ad unam secundam qualis secundum Dni. De Maupertuis observationem inveniri debuisset.

Verum ut correctio præcessionis & aberrationis *demenda* foret, ut vult Picartus, oporteret ut observationes primum Ambiano postea Malvoisinæ fuissent factæ, sed ita notantur illæ observationes, *Septembri Malvoisinæ* & *Octobri Ambiano*, si itaque recte ratiocinatus sit sed male tempora notaverit elegantissimè consentient ejus observationes cum accuratissimis postea factis; sin bene tempora notaverit, sed male fuerit ratiocinatus, fatendum erit errorem circiter 10" inter duas ejus observationes esse distribuendum, stantibus observationibus Ill. De Maupertuis: 6" aut 7" secundis propiùs accederent ad has observationes illæ quas instituit Picartus à Malvoisinâ ad Sourdonem, ita ut error 12" duntaxat, inter duas observationes distribuendus supereresset. 78.

(‡) * *Cassinus senior mensuravit distantiam in meridiano à villâ Collioure ad observatorium Parisiense & filius addidit distantiam ab observatorio ad turrim Urbis Dunkirk.*

* Has duas mensuras in unam summam conjicit Newtonus, quia cum Cassinus senior gradum majorem quam Picartus invenerit; Cassinus filius minorem, conjunctis mensuris obtinetur gradus mediocris proximè æqualis mensuræ gradus à Picarto assignatæ, quem ut gradum telluris ut sphæricæ consideratæ assumit Newtonus; verum hic duo sunt notanda, 1°. utitur Newtonus isto gradu mediocri quasi foret Æquatoris gradus, qui quidem isto major est, sed inde parum mutatur sequens calculus ut liquebit si eumdem instituamus assumpto gradu æquatoris isto majore, v. gr. 57216 hex. ut deduceretur ex Theoriâ ipsius Newtoni, & gradum in 45. gradu faciendo 57100. hex.

2°. Distinguendæ sunt observationes Cassini senioris & filii, hæc enim propter aberrationem lucis correctione indiget, mensura vero Ill. Cassini Patris à villâ Collioure ad observatorium arcum Cælestem 6°. 18' 57". continet & respondet hexapedis 360614. (ad maris libellam reductis mensuris) unde gradus fit 57097 hex.

distantiam ab obſervatorio ad turrem urbis *Dunkirk*. Diſtantia tota erat hexapedarum 486156½ & differentia latitudinum villæ *Collioure* & urbis *Dunkirk* erat graduum octo & 31′. 12⅝″. Unde arcus gradus unius prodit hexapedarum Pariſienſium 57061.

78. hex. verificatæ ſunt menſuræ in utroque extremo, nec in iis gravis error eſt metuendus cum aptè conſenſerint Triangulorum calculi cum ultimis lineis ſeu Baſibus actu menſuratis; Error verò qui in obſervatione Cæleſti occurrere poteſt ſinguli gradûs menſuram parùm immutat quia in ſex gradûs & ultra diſtribuitur, cum verò iiſdem anni temporibus tàm Lutetiæ quàm in villâ Collioure obſervationes inſtitutæ fuerint aberratio lucis calculum arcûs Cæleſtis non immutavit; Hinc in numeris proximis rotundis gradus in latitudine graduum 45. 57100. Hexapedarum aſſumi poteſt ſatis tutò.

3°. Quoad obſervationes Ill. Caſſini filii, cum inter 15. Julii & 4. Sept. factæ fuerint obſervationes Cæleſtes quibus determinaretur arcus inter Zenith urbis Dunkirk & Obſervatorii interceptus, aberrationis correctio illis eſt adhibenda quæ tunc temporis nondum erat cognita; verum illam correctionem neceſſariam eſſe tantò minus dubium eſt, quod cum is arcus per obſervationes ſtellæ γ Draconis fuerit determinatus, ejus ipſius ſtellæ aberratio ab Ill. Bradleio fuerit obſervata (vid. Tranſ. Phil. Vol. XXXV. pag. 637.) & nuperrimè à D. Le Monnier; immediatis ergo experimentis conſtat ejus ſtellæ dcelinationem augeri à menſe Julio ad Septembrem, ita ut cum Lutetiæ ſerius obſervata ſit, 11½ ſecundis Polo tunc vicinior eſſe potuit quam cum in urbe Dunkirk obſervata fuerat, ideoque totidem ſecundis Zenith remotior apparebat, quam punctum fixum quod in urbe Dunkirk fuerat obſervatum; unde cum ex diſtantiâ à Zenith Lutetiæ detrahatur diſtantia ejuſdem ſtellæ à Zenith urbis Dunkirk, arcus reſiduus illis 11½ ſec. eſt multandus, & cum reſiduum invenerit Ill. Caſſinus 2°. 12′. 9½″ eſt reducendus ad 2°. 11′. 58″, & cum is arcus 125454 Hexapedis reſpondere ab Ill. Autore ſtatuatur, arcus unius gradus fiet Hex. 57038. 5ped.

Verum minor diſſenſus inter obſervationes Ill. Caſſini filii & Dni. de Maupertuis apparebit ſi attendatur, partem illius diſſenſus oriri ex eo quod, dum menſuris Picarti uterentur diverſas ejus Triangulorum ſeries adoptaverint, quare ut conferantur eorum inventa, reducendæ ſunt eorum ſupputationes quaſi eâdem ſerie Triangulorum Picarti uterentur ambo: v. gr. ſupponatur utrumque aſſumpſiſſe eam ſeriem Triangulorum quam ipſe Picartus admiſit, ſed ad Sourdonem uſque, & inde (quia Ill. Caſſinus propriis ſuis Triangulis diſtantiam à Sourdone ad Ambianum determinavit) aſſumatur ea diſtantia qualis ex Triangulis Ill. Caſſini deduceretur ſi modo priori ſerie uſus fuiſſet, & reliqua ejus Triangula uſque ad urbem Dunkirk in eadem proportione augeantur; hinc iſte emerget calculus.

| | |
|---|---|
| Primo tota diſtantia inter Parallelos Obſervatorii & Sourdonis erit ex Picarto - - - | 49926hex. 3ped. |
| Secundo; Diſtantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani eſt ex Caſſino 10539½ hex. aſſumpta Baſi 7116½; ſed in alterâ ſerie Triangulorum eadem Baſis erat 7122⅓ hinc aſſumptâ hac menſura, diſtantia Parall. inter Sourdonem & Ambianum ex Triangulis Ill. Caſſini erit - | 10547hex. 4ped. |
| Tota ergo diſtantia inter Parallelos Sourdonis & Ambiani erit - - | 60474 - 1 |

Ter-

57061. Et ex his mensuris colligitur ambitus terræ pedum Parisiensium 123249600, & semidiameter ejus pedum 19615800, ex hypothesi quod terra sit sphærica.

In latitudine *Lutetiæ Parisiorum* corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describit pedes Parisienses 15. dig. 1. lin. $1\frac{7}{9}$ ut supra, id est, (††) lineas $2173\frac{7}{9}$. Pondus corporis

Tertio distantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk est ex Cassino 65109hex. 1ped., suppositâ Basi $7116\frac{1}{2}$, si ergo supponatur ea linea $7122\frac{1}{2}$ fiet distantia inter Parallelos Ambiani & urbis Dunkirk ex Triangulis Ill. Cassini. - - - 65162hex. 3ped.

Tota ergo distantia inter observatorium & Parallel. urbis Dunkirk fiet 125636 - 4 & detractis 98. hex. pro locis observationum Cælestium & $2\frac{1}{2}$hex. pro libellâ supersunt 125536hex. $\frac{1}{2}$, quæ respondent 2°. 11'. 58", unde arcus unius gradus invenitur 57076 : 2.

Pariter in Observatione Dni. de Maupertuis cum sint inter Parallelum Observatorii & ædis Ambiani 60474 : 1. & propter observationum Cælestium loca 2159hex. sint detrahendæ, arcus inter observationes Dni. de Maupertuis observatus, qui est 1°. 1'. 12". respondebit hex. 58315:1. Unde gradus erit $57171\frac{2}{3}$.

Ut itaque verus dissensus inter observationem Ill. Cassini & Dni. de Maupertuis habeatur, fiat sicut $57171\frac{2}{3}$ ad $125536\frac{1}{6}$ ita unus gradus ad quartum, invenietur arcus 2°. 11". 45", qui 13" duntaxat differt ab arcu 2°. 11" 58" quem Ill. Cassinus observavit; Quæ differentia inter quatuor observationes Cælestes & mensuras terrestres distributa, efficeret conclusiones uniformes: Ergo illæ observationes nedum inter se pugnent, iis differentiolis tantùm discrepant, quæ inevitabilibus accidentibus debentur.

Interea satis liquet quod si in unam summam conjicerentur mensuræ Ill. Cassini Patris & Filii, diminuendus esset arcus totalis 12" propter correctionem aberrationis Lucis, cui obnoxia est observatio Ill. Cassini filii, & mensuræ terrestres forent augendæ, quia ex observatione Dni. de Maupertuis additur pondus rationibus quibus inter duas series Triangulorum Dni. Picarti ea præponenda censeatur quam Picartus prætulerat & quam Ill. Cassinus neglexerat, imo & probabile fit errores minimos inevitabiles, eam in partem conspiraſſe ut arcus Cælestis major vero videretur Ill. Cassino & mensuræ terrestres vero minores; Quibus omnibus perpensis, magnitudinem unius gradus in 45°. lat. gradu, circa medium mensuræ à Cassino Patre institutæ rotundis numeris satis tuto 27100. hex. assumi posse liquet. 78

(††) *Id est, lineas* $2173\frac{7}{9}$. Ex accuratissimis observationibus Dni. de Mayran (cap. 6. lib. 3. fig. terræ deter. à D. de Maupertuis) longitudo penduli ad singulas secundas vibrans est linearum 440.57. hinc, cum juxta Prop. 26. Horol. Oscill. Hugh. sit circuli circumferentia ad Diametrum ut 1". ad tempus descensus per dimidiam altitudinem penduli, sive per lineas 220. $28\frac{1}{2}$, sint verò quadrata temporum ut spatia descensu verticali iis temporibus descripta erit 9.8696 ad 1. (Quadratum circumferentiæ ad quadratum Diametri 1.) sicut spatium uno secundo descriptum ad $220.28\frac{1}{2}$ lin. Ergo corpus grave in latitudine Lutetiæ tempore minuti unius secundi describit lineas 2173. 631356. paulò minus quam Newtonus assignat, ejus undecima millesima pars foret .197602. Quare id grave in vacuo cadendo describeret altitudinem 2173. 828958.

DE MUNDI SYSTEMATE.

poris diminuitur per pondus aëris ambientis. (l) Ponamus pondus amissum esse partem undecimam millesimam ponderis totius, & corpus illud grave cadendo in vacuo describet altitudinem linearum 2174 tempore minuti unius secundi.

Corpus in circulo ad distantiam pedum 19615800 à centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens tempore minuti unius secundi (m) describet arcum pedum 1433,46, cujus sinus versus est pedum 0,0523656, seu linearum 7,54064. (n) Ideoque vis, quâ gravia descendunt in latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centrifugam corporum in æquatore à terræ motu diurno oriundam, ut 2174 ad 7,54064.

Vis centrifuga corporum in æquatore terræ est ad vim centrifugam, quâ corpora directè tendunt à terrâ in latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′. 10″, in (o) duplicatâ ratione radii ad sinum

78. (l) * *Ponamus pondus amissum.* Quoniam corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris, & plumbum est ad aquæ gravitatem specificam ut 11,345 ad 1000, aqua verò ad aërem paulo minus quam 1000 ad 1, hinc gravitas plumbi est ad gravitatem aëris fere ut 11000 ad 1, hinc ergo plumbum amittit in aëre ponderis sui partem undecimam millesimam, itaque in vacuo augetur pondus plumbi parte undecimâ millesimâ ponderis totius, hoc est spatia eodem tempore descripta undecimâ millesimâ totius spatii descripti parte augeri debent, fiat ergo 11000 ad 11001 ut $2173\frac{7}{9}$ ad quartum, illud quartum erit 2173.966 ergo poni potest quam proximè spatium tempore minuti unius secundi descriptum in vacuo à plumbo, ideoque à quovis alio corpore gravi (nam omnia gravia æquali celeritate in vacuo cadunt) linearum 2174.

(m) * *Describet arcum ped.* Computum initur eodem plane modo ac not. 63.

(n) * *Ideóque vis.* Vires uniformes sunt ut spatia dato tempore descripta, sed est spatium vi gravitatis tempore unius minuti secundi descriptum 2174 lin. spatium autem vi centrifugâ descriptum ut sinus versus, hoc est, lin. 7, 54064.

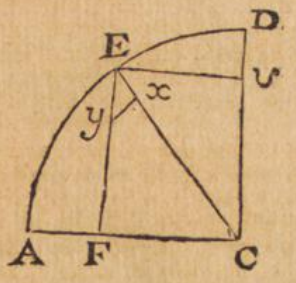
* Si gradus Æquatoris sit major 57061$^{hex.}$, v. gr. si 57226 hex. sumatur, erit iste sinus versus linearum 7. 56244, ideoque vis quâ gravia descendunt in latitudine Lutetiæ est ad vim centrifugam corporum in Æquatore ut 2173. 828958 ad 7. 56244.

(o) 81. * *In duplicatâ ratione radii.* Quadrans circuli A E D revolvatur circà radium A C, ducatur radius C D ad A C normalis, ipsique parallela agatur ordinata E F, erit vis centrifuga in D secundum directionem D C sive E F, ad vim centrifugam in E secundum directionem C E, in ratione duplicatâ radii C D ad ordinatam E F quæ est sinus complementi arcûs seu altitudinem E D. Exprimat enim D *v* vim centrifugam in D secundum directionem D C, & recta E *y*, exprimat vim centrifugam in E secundum directionem E F, ductâ perpendiculari *y x* ad rectam E C, exprimet E *x*, vim centrifugam in E, secundum directionem E *x*; sed est D *v* : E *y* = D C : E F (cor. 3. prop. 4. lib. 1.) & ob triangula rectangula E *x y* E F C similia, E *y* : E *x* = E C vel

ſinum complementi latitudinis illius, id eſt, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim quâ gravia deſcendunt in latitudine illa *Lutetiæ*, & corpus in latitudine illâ vi totâ gravitatis cadendo, tempore minuti unius ſecundi deſcribet lineas 2177,267, ſeu pedes Pariſienſes 15 dig. 1 & lin. 5.267. Et vis tota gravitatis in latitudine illâ erit ad vim centrifugam corporum in æquatore terræ ut 2177,267 ad 7,54064 ſeu 289 ad 1.

Unde

vel DC:EF. Quarè, componendo $Dv:Ex = DC^2:EF^2$. Q. E. D.

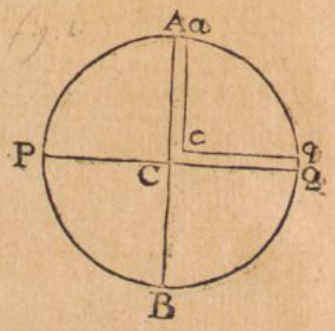



* Verum ſi Meridianus terræ ſit alia curva quam circulus v. gr. ſit Ellipſis, vis centrifuga corporum in æquatore terræ eſt ad vim centrifugam qua corpora perpendiculariter à terra recedunt in latitudine datâ, in ratione compoſitâ ex ratione radii ad ſinum complementi latitudinis illius, & ex ratione radii Æquatoris, ad ordinatam ejus Ellipſeos in eâ latitudine datâ; hinc pro Ellipſi ratio vis centrifugæ in Æquatore ad vim centrifugam in latitudine data exprimetur hoc modo, ſit $m$ axis major, $n$ axis minor, $r$ Radius, $c$ ſinus complementi latitudinis quæſitæ, erit vis in Æquatore ad vim in eâ latitudine, ut $mr\sqrt{m^2 \times r^2 - c^2} + n^2c^2$ ad $n^2c^2$.

Ut facile deducetur ex Ellipſeos naturâ; Quare ſi fingatur $m = 230$ & $n = 229$ juxta Newtonum invenietur calculo eas vires eſſe inter ſe ut 7.56244 ad 3.09660, addatur hæc vis ad vim quâ gravia deſcendunt in latitudine Lutetiæ, & vis tota gravitatis (in hyp. aſſumptis) efficeret ut gravia cadendo deſcriberent lineas 2176. 92558. Unde vis tota gravitatis in latitudine lutetiæ erit ad vim Centrifugam corporum Æquatore terræ ut 2176. 92558 ad 7.56244 ſive ut 287. 86 ad 1. 78.

Hæc autem vis gravitatis in latitudine Lutetiæ non eſt vis ipſa gravitatis in Æquatore, de quâ agitur in reliquâ hâc propoſitione, ſed parum ab ea differt, ita ut calculo quodam inito inveniatur quod hæc vis gravitatis in latitudine Lutetiæ ſit ad vim gravitatis in Æquatore (terrâ uniformiter denſa ſuppoſitâ), ut 1532 ad 1531 ideóque ſit vis gravitatis in Æquatore ad vim ejus Centrifugam ut 287.67 ad 1. Quas quidem varias correctiones, Newtonianis numeris adplicamus, ut inde liqueat, quod quamvis numeris ut ita dicam mediocribus ſit uſus Newtonus & ſæpe ex Hypotheſi terræ ſphæricæ ductis, parùm mutationis tamen adfuturum ſit, etſi aſſumantur alii numeri qui ex veriori terræ figurâ deducerentur.

DE MUNDI SYSTEMATE.




Unde si *APBQ* figuram terræ designet (p) jam non amplius sphæricam sed revolutione ellipseos circum axem minorem *PQ* genitam, sitque *ACQqca* canalis aquæ plena, à polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad æquatorem *Aa* pergens: (q) debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, esse ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex propositionis XCI. corol. 2. lib. 1.) computationem ineundo, invenio quod si terra constaret ex uniformi materiâ, motuque omni privaretur, (r) & esset ejus axis *PQ* ad diametrum *AB* ut 100 ad 101: gravitas in loco *Q* in terram foret ad gravitatem in eodem loco *Q* in sphæram centro *C* radio *PC* vel *QC* descriptam, ut

78.

(p) * *Jam non amplius sphæricam sed revolutione Ellipseos circum axem minorem PQ genitam.* * Terram non multum à figurâ sphæricâ discedere ex Eclipsibus Lunæ patet; magis adhuc ad formam ejus Ellipseos accedere cujus axes forent æquales Diametro Æquatoris, & distantiæ Polorum terræ respective, satis liquet; utrum verò curva illa quæ singulum Meridianum terræ constituit & quæ convolutione arcus PAQ circa axem minorem PQ generatur sit Ellipsis Apolloniana, utrum tantùm curva ad eam accedens non determinat Newtonus; Paulò fusius de hujus curvæ Naturâ inferius disseremus, hic enim ad calculum Newtonianum intelligendum, sufficit assumere eam curvam ad Ellipsim satis accedere, ut Ellipsis pro eâ assumi possit.

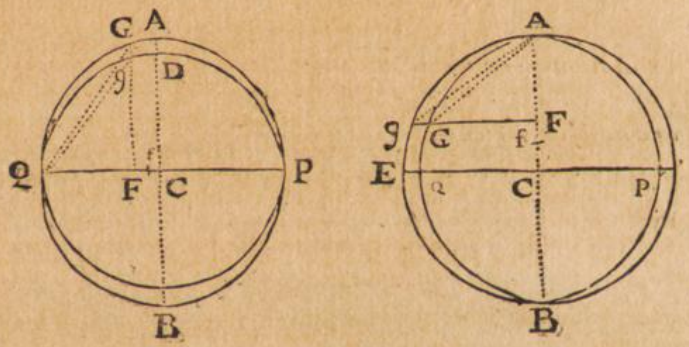
(q) * *Debebit pondus aquæ.* Si fluidum in canale contentum quiescere supponatur, fluidi partes in canalis crure AC debent esse in æquilibrio cum partibus fluidi in ejusdem canalis crure QC. Cum itaque vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam ponderis detrahat e ponderis partibus 289, oportet ut pondus in altero crure sit 288 (sive ex inventis ut 288.67 ad 287.67), sic enim pondera in utroque canalis crure erunt æqualia.

(r) * *Et esset ejus axis PQ ad Diametrum AB ut 100 ad 101, gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in Sphæram centro C radio QC descriptam, ut 126 ad 125 & eodem argumento gravitas in loco A in sphæroidem circa axem AB descriptam est ad gravitatem in sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126.*

* Utrumque simul probari potest: Sit PAQB, in utrâque figurâ, terræ Meridianus; in primâ figurâ sit QDPQ sphæra Centro C radio QC descripta & in secundâ figura PAQB repræsentat sphæroidem quam revolutione meridiani terræ circa Æquatorem describi fingit Newtonus & AED sphæram radio AC descriptam. Constat Corollario 2. Prop. XC. lib. 1. quod si ducantur circuli ad axes revolutionum perpendiculares quorum radii sunt FG, fg (in utrâque figurâ) attractio punctorum Q & A ab illis circulis erit $1-\frac{QF}{QG}$, $1-\frac{QF}{Qg}$, $1-\frac{AF}{AG}$, $1-\frac{AF}{Ag}$ respective;

Qua-

126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco $A$ in sphæroidem, convolutione ellipseos $APBQ$ circa axem $AB$ descriptam, est ad gravitatem in eodem loco $A$ in sphæram centro $C$ radio $AC$ descriptam, ut 125 ad 126. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.




Quare si dicatur CQ sive CD, $b$, & AC sive CE, $r$, dicaturque abscissa QF, AF; 782
in utrâque figurâ, $x$, erit in primâ figurâ $\overline{FG}^2 = \frac{r^2}{b^2} \times 2bx - xx$; $\overline{Fg}^2 = 2bx - xx$; & in secundâ figurâ est $\overline{FG}^2 = \frac{b^2}{r^2} \times 2rx - xx$ & $\overline{Fg}^2 = 2rx - xx$, quibus quadratis si addatur quadratum $\overline{QF}^2$ vel $\overline{AF}^2$ sive $xx$, habebuntur quadrata linearum $\overline{QG}^2$, $\overline{Qg}^2$, $\overline{AG}^2$, $\overline{Ag}^2$, respectivè, quæ erunt $\frac{r^2}{b^2} \times 2bx - \frac{r^2-b^2}{b^2} x^2$; $2bx$; $\frac{b^2}{r^2} \times 2rx + \frac{r^2-b^2}{r^2} x^2$; & $2rx$; Unde (si compendii gratia loco $r^2 - b^2$ scribatur $m$) attractiones istorum circulorum evadent

$$1 - \frac{bx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}; \quad 1 - \frac{x}{\sqrt{2bx}}; \quad 1 - \frac{rx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}, \quad 1 - \frac{x}{\sqrt{2rx}}.$$

Sit verò $Ff = dx$ & multiplicetur attractio singuli circuli per $dx$ habebuntur elementa attractionis sphæroidem & sphærarum, quæ elementa erunt

$$dx - \frac{bx\,dx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}; \quad dx - \frac{x\,dx}{\sqrt{2bx}}; \quad dx - \frac{rx\,dx}{\sqrt{2b^2rx + mx^2}}; \quad dx - \frac{x\,dx}{\sqrt{2rx}}.$$

Facile revocabuntur ad fluentes suas ea elementa attractionis sphærarum quippe fluentes quantitatum $dx - \frac{x\,dx}{\sqrt{2bx}}$ & $dx - \frac{x\,dx}{\sqrt{2rx}}$ sunt $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ & ubi QF vel AF diametros QP vel AB æquant, ideòque $x$ fit æqualis $2b$, vel $2r$, evadunt illæ fluentes $2b - \frac{2b\sqrt{2b}}{\frac{3}{2}\sqrt{2b}}$ & $2r - \frac{2r\sqrt{2r}}{\frac{3}{2}\sqrt{2r}}$ sive $\frac{2}{3}b$ & $\frac{2}{3}r$.

Ut obtineatur fluens quantitatis $dx - \frac{bx\,dx}{\sqrt{2r^2bx - m^2}}$, quantitas $\frac{bx\,dx}{\sqrt{2r^2bx - mx^2}}$ resolvatur in seriem (eam considerando ut $bx\,dx \times \overline{2r^2bx - mx^2}^{-\frac{1}{2}}$) sumatur juxta

DE MUNDI SYSTEMATE.

formulam Newtonianam quotiens ſecundi termini $-mx^2$ per primum $2r^2bx$ diviſi, qui quotiens erit $-\frac{mx}{2b\times r^2}$; Primi termini $2r^2bx$ ſumatur dignitas $-\frac{1}{2}$, quæ eſt $\frac{1}{rx^{\frac{1}{2}}\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}$; tum adhibitis coefficientibus ſecundum formulam, tota quantitas evadet

78.

$$dx-\frac{bx^{\frac{1}{2}}dx}{r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}-\frac{1\times bmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3bm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}}-\frac{1\times 3\times 5bm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 6r^7\times\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$$

& Integrando habebitur $x-\frac{2bx^{\frac{3}{2}}}{3r\times\overline{2b}^{\frac{1}{2}}}-\frac{2bmx^{\frac{5}{2}}}{10r^3\times\overline{2b}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3\times 2bm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 7r^5\times\overline{2b}^{\frac{5}{2}}}-\frac{1.3.5.2bm^3x^{\frac{3}{2}}}{2.4.6.9r^7.\overline{2b}^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$

Quando vero $x=2b$, ſeries fit $2b-\frac{2b^2}{3r}-\frac{2b^2m}{10r^3}-\frac{1\times 3\times 2b^2m^2}{2\times 4\times 7r^5}-\frac{1\times 3\times 5\times 2b^2m^3}{2\times 4\times 6\times 9r^7}$.

Sive dividendo per $2b$ & ad terminos præcedentes revocando; attractio terræ, in corpuſculum Q in extremitate minoris axis poſiti circa quem revolvi cenſetur, exprimitur per hanc ſeriem

$$2b\times 1-\frac{2b}{3r}-\frac{1\times 3m}{2.5r^2}B-\frac{3\times 5m}{4\times 7r^2}C-\frac{5\times 7m}{6\times 9r^2}D-\frac{7\times 9m}{8\times 11r^2}E\ \&c.$$

Simili modo obtinebitur fluens quantitatis $dx-\frac{rxdx}{\sqrt{2b^2rx+mx^2}}$ nempe ſecundam partem conſiderando ut $rxdx\times\overline{2b^2rx+mx^2}^{-\frac{1}{2}}$, quæ in ſerie reſolvatur, quotiens ſecundi termini per primum diviſi erit $+\frac{mx}{2rb^2}$; Primi termini dignitas $-\frac{1}{2}$ erit $\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}$ & calculando ſecundum formulam tota quantitas

evadet $dx-\frac{rx^{\frac{1}{2}}dx}{b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}+\frac{1\times rmx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3rm^2x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}}+\frac{1\times 3\times 5rm^3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 6b^7\times 2r^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$

Integrando habetur $x-\frac{2rx^{\frac{3}{2}}}{3b\times\overline{2r}^{\frac{1}{2}}}+\frac{1\times 2rmx^{\frac{5}{2}}}{2\times 5b^3\times\overline{2r}^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\times 3\times 2rm^2x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 7b^5\times\overline{2r}^{\frac{5}{2}}}+\frac{1\times 3\times 5\times 2rm^3x^{\frac{9}{2}}}{2\times 4\times 6\times 9b^7\times\overline{2r}^{\frac{7}{2}}}\ \&c.$

Quando $x=2r$ ſeries fit, $2r-\frac{\overline{2r^2}}{3b}+\frac{\overline{2r^2}\times m}{2\times 5b^3}-\frac{1\times 3\times\overline{2r^2}\times m^2}{2\times 4\times 7b^5}+\frac{1\times 3\times 5\times\overline{2r^2}m^3}{2\times 4\times 6\times 9b^7}\ \&c.$

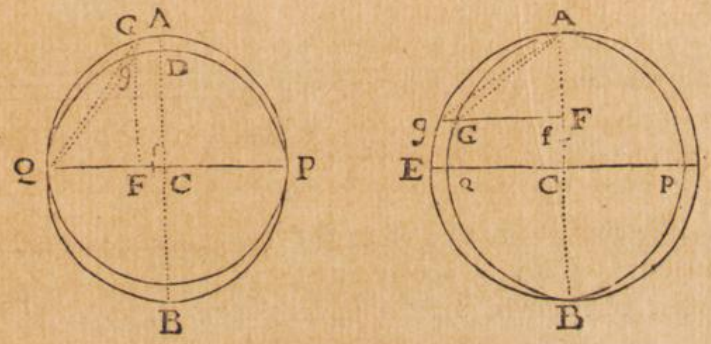
Sive $2r\times 1-\frac{2r}{3b}+\frac{3m}{2\times 5b^2}B-\frac{3\times 5m}{4\times 7b^2}C+\frac{5\times 7m}{6\times 9b^2}D-\frac{7\times 9m}{8\times 11b^2}E\ \&c.$

Cum ergo ſit $r=101$, & $b=100$ eſt $r^2-b^2=r+b\times r-b=201=m$, eſt $r^2=10201$. Hinc ſubſtitutionibus factis prima ſeries evadit

$$\begin{array}{l} 2b\times 1-.66006600\\ \quad -.00390177\\ \quad -.00004118\\ \quad -.00000052\\ \quad -.00000001.\end{array}$$

hoc eſt, $2b\times 1-.66400948$, ſive $2b\times .33599052$; Sed ſphæræ attractio erat $\frac{2b}{3}$; Ergo gravitas in loco Q in terram foret ad gravitatem in ſphæram centro C radio QC deſcriptam ut 1.00797156 ad 1 (multiplicando utrumque terminum per 3 & dividendo per $2b$) ſive ut 1008 fere ad 1000, qui numeri ſunt accurate ut 126 ad 125, ut liquet utrumque per 8. dividendo. Q. E. 1°. D.

Pars



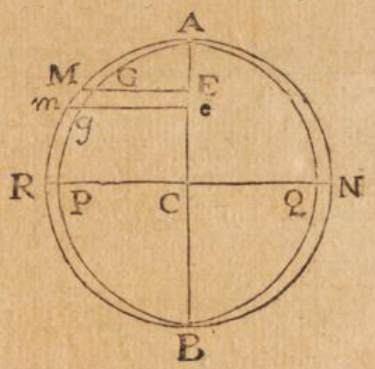

78.

Pariter ſubſtitutionibus factis in ſerie ſecundâ, evadit

$$2r \times 1 - .67333333 + .00406020 - .00004372 + .00000057 - .00000001.$$

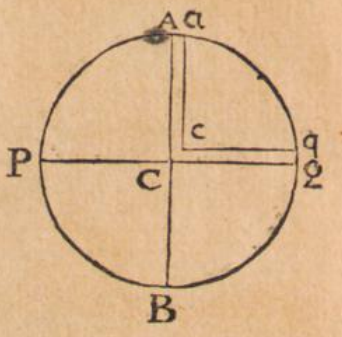
Sive $2r \times 1 - .67337706 + .00406077$ hoc eſt $2r \times 33068371$, ſed ſphæræ attractio erat $\frac{2r}{3}$, ergo utrumque terminum multiplicando per 3 & dividendo per $2r$; gravitas in loco A in Ellipſoidem, convolutione circa majorem axem genitum, erit ad gravitatem in ſphæram radio AC deſcriptam ut 99205113 ad 1; Multiplicetur uterque terminus per 1008, & evadent 999.987589 & 1008; proximè 1000 & 1008 qui numeri ſunt ut 125 ad 126. Q. E. 2°. D.

79. Lemma. Sphærois compreſſa convolutione Ellipſeos APBQ circà axem minorem PC genita, eſt media proportionalis inter ſphæram circumſcriptam cujus radius eſt AC, & ſphæroidem oblongatam convolutione ellipſeos circà axem AC genitam. Nam ductis ordinatis ME, me, infinitè propinquis, tum ſphæra circumſcripta tum ſphærois oblongata dividi intelligantur in cylindrulos ordinatarum ME & me, GE & ge convolutione deſcriptos, erit cylindrulus EGge in ſphæroide ad cylindrulum EMme in ſphærâ, ut altitudo Ee ducta in circulum radio GE rotando deſcriptum, ad altitudinem Ee, ductam in circulum cujus eſt radius ME, ſivè quia circuli ſunt ut quadrata radiorum & utriuſque cylindruli communis eſt altitudo, erit cylindrulus EGge, ad cylindrulum EMme, ut $GE^2$ ad $ME^2$. Sed $GE^2$ ad $ME^2$ ſemper eſt ut $PC^2$ ad $RC^2$ vel $AC^2$, ideóque in datâ ratione, erit itaque ſumma tota cylindrulorum in ſphæroide ad ſummam totam cylin-

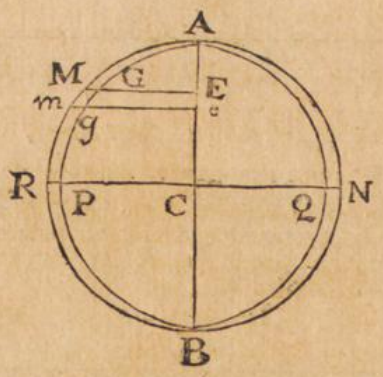


DE MUNDI SYSTEMATE.

(f) Eſt autem gravitas in loco *A* in terram media proportionalis inter gravitates in dictam ſphæroidem & ſphæram: propterea quod ſphæra, diminuendo diametrum *PQ* in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram terræ; & hæc figura diminuendo in eâdem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus *AB*, *PQ* perpendicularis eſt, vertitur in dictam ſphæroidem; & gravitas in *A*, in




79




lindrulorum in ſphærâ, hoc eſt, ſphæroïs ipſa ad ſphæram ut $PC^2$ ad $AC^2$. Jam verò ſphæra radio RC deſcripta & ſphæroïs compreſſa ellipſeos AGP circà axem PC convolutione genita, ſimili modo dividi intelligantur in tubulos innumeros ordinatarum ME & me, GE & ge, circà axem PC convolutione genitos, ob radiorum CE & rectarum Ee æqualitatem, erunt tubuli illi ut ME, GE, ſive ut AC ad PC, hoc eſt, in datâ ratione, ideóque ſphæra eſt ad ſphæroidem compreſſam ut AC ad PC. Quare ſi ſphæra dicatur *S* ſphæroïs compreſſa *s*, & ſphæroïs oblongata $\sigma$, ſitque $AC = b$, $PC = a$ erit $S^2 : s^2 = b^2 : a^2$, ac proindè $S : \sigma = S^2 : s^2$ undè $s = \sqrt{S \times \sigma}$. Q. E. D.

(f) 80. *Eſt autem gravitas.* Diameter PQ, in figurâ Newtoni reſpondeat diametro RN minuatur diameter illa RN in ratione 101 ad 100 ut fiat PQ = 100, tunc ſphæra quæ centro C radio AC deſcripta erat vertetur in figuram terræ. Jam verò concipiatur tertia diameter quæ in revolutione ſpheræ duabus diametris AB, PQ, fit perpendicularis, hæcque diameter diminuatur in eâdem ratione 101 ad 100, patet figuram terræ verti in ſphæroidem oblongatam. Quia verò utraque ſphæroïs ſivè compreſſa ſivè oblongata ad ſphæram quam proximè accedit, ſphæroides illæ pro ſphæris quæ eandem reſpectivè contineant materiæ quantitatem quam proximè haberi poſſunt. Sunt autem attractiones ſphærarum in diſtantiis æqualibus ut quantitates materiæ (cor. 1. prop. 74. lib. 1.) ideóque gravitas in utroque caſu prædicto diminuitur in eâdem ratione materiæ detractæ quam proximè, ac proindè attractiones ſphæræ ſphæroidis compreſſæ & ſphæroidis oblongatæ ſunt reſpectivè ut quantitates materiæ in illis corporibus contentæ quàm proximè. Sed ſphæroïs compreſſa convolutione ellipſeos ABPQ, circà axem PCQ genita eſt media proportionalis inter ſphæram circumſcriptam cujus radius eſt AC, & ſphæroidem oblongatam convolutione ellipſeos circà axem ACQ geni-

in casu utroque, diminuitur in eâdem ratione quam proximè. (t) Est igitur gravitas in $A$ in sphæram centro $C$ radio $AC$ descriptam, ad gravitatem in $A$ in terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco $Q$ in sphæram centro $C$ radio $QC$ descriptam, est ad gravitatem in loco $A$ in sphæram centro $C$ radio $AC$ descriptam, in ratione diametrorum (per prop. LXXII. lib. I.) id est, ut 100 ad 101. (u) Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101 : & fiet gravitas in loco $Q$ in terram ad gravitatem in loco $A$ in terram, ut $126\times126\times100$ ad $125\times125\frac{1}{2}\times101$, seu ut 501 ad 500.

Jam cum (per corol. 3. prop. XCI. lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum à centro terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, (x) ut magnitudines & gravitates accelera-

genitam (82). Quarè gravitas in loco A, in terram est media proportionalis inter gravitates in dictam sphæroidem, oblongatam scilicet, & sphæram.

(t) * *Est igitur gravitas.* Gravitas in loco A in terram dicatur G, gravitas in loco Q, in terram sit g, gravitas in loco Q, in sphæram radio PC, descriptam dicatur $\gamma$, gravitas in loco A, in sphæroidem convolutione ellipseos ABPQ, circà axem AB genitam dicatur V, ac tandem gravitas in loco A in sphæram radio AC descriptam sit $\Gamma$, erit (ex dem.).

$g : \gamma = 126 : 125$

$V : \Gamma = 125 : 126$ præterea

$V : G = G : \Gamma$, ideóque inter V & $\Gamma$, hoc est, inter 125 & 126 sumpto medio termino proportionali erit

$V : G = G : \Gamma = 125 : 125\frac{1}{2} = 125\frac{1}{2} : 126.$

(u) * *Conjungantur jam hæ tres rationes*, scilicet

$g : \gamma = 126 : 125$

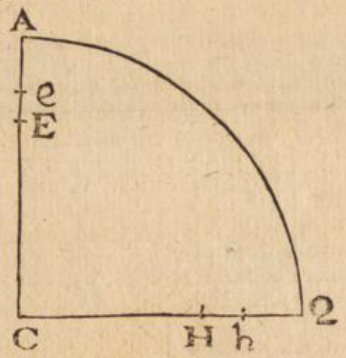
$\Gamma : G = 126 : 125\frac{1}{2}$

$\gamma : \Gamma = 100 : 101$ erit per compositionem rationum & ex æquo.

$g : G = 126\times126\times100 : 125\times125\frac{1}{2}\times101$ 81.

vel $g : G = 1587600 : 1584437\frac{1}{2} = 501 : 500$

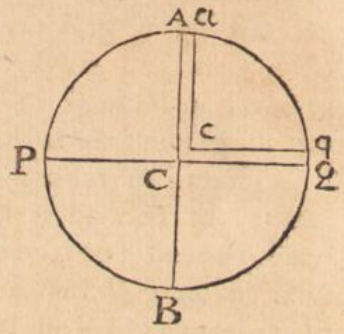
ideóque gravitas in loco Q, in terram fiet ad gravitatem in loco A, in terram ut 501 ad 500.




(x) 81. * *Ut magnitudines & gravitates.* Crura AC, QC ità distinguantur superficiebus transversis & æquidistantibus ut crura illa æqualem contineant particularum Ee, Hh numerum, sintque singulæ particulæ in crure AC ad singulas particulas in crure CQ ut crus AC ad crus alte-

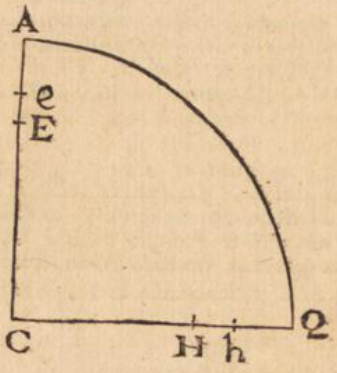
DE MUNDI SYSTEMATE.

celeratrices conjunctim; id est, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. (y) Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure *ACca* ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujusque, in partes 505 divisо, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 289, hoc est, vis centrifuga quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$ est tantum pars $\frac{1}{289}$.




§ 2. alterum CQ, sive ut 101 ad 100; Quoniam gravitas in loco A est 500 & gravitas in loco Q, est 501 propter figuram sphæroidis & omnium particularum in cruribus AC & CQ similium & similiter positarum, gravitates acceleratrices erunt in eadem ratione, earum itaque Pondera, (sive facta gravitatis acceleratricis per Quantitatem materiæ erunt in ratione composita 101 ad 100 & 500 ad 501 sive 505 ad 501, & totorum crurum AC & CQ gravitates erunt in eâ ratione 505 ad 501.

(y) 82. * *Ac proindè si vis centrifuga.* Ex motu diurno circà axem QC, oritur vis centrifuga quâ fit ut partes quæ sunt in crure AC, versùs C, vi gravitatis attractæ, simul etiam vi centrifugâ repellantur, * illa autem vis Centrifuga in singulis punctis cruris AC est in ratione distantiæ eorum punctorum à Centro CE per (cor. 3. prop. 4. lib. 1.) sed est etiam gravitas acceleratrix in ratione distantiæ à Centro per (cor. 3. Prop. XCI. lib. 1.) ergo si alicubi data sit ratio vis gravitatis ad vim centrifugam eadem erit in omnibus punctis, sit ergo alicubi ut 505 ad 4 gravitas acceleratrix tota singularum & omnium partium cruris AC erit ad gravitatem residuam in singulis & omnibus partibus ejusdem cruris ut 505 ad 501, sed in eâdem ratione erat tota




gravitas cruris AC (absque detractione vis centrifugæ ad gravitatem cruris CQ quod cum sit axis vim centrifugam nullam habet) ergo residuum vis gravitatis in crure AC sublatâ vi Centrifugâ in æquilibrio est cum gravitate cruris CQ.

$\frac{1}{289}$. (z) Et propterea dico, ſecundum regulam auream, quod ſi vis centrifuga $\frac{4}{1681}$ faciat ut altitudo aquæ in crure $ACca$ ſuperet altitudinem aquæ in crure $QCcq$ parte centeſimâ totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut exceſſus altitudinis in crure $ACca$ ſit altitudinis in crure altero $QCcq$ pars tantum $\frac{1}{229}$. Eſt igitur diameter terræ ſecundum æquatorem ad ipſius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum terræ

LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

(z) * *Et propterea dico ſecundum regulam auream* * Vix crediderim Newtonum ad applicandam regulam auream hic loci, alio nixum non fuiſſe fundamento quam iſtâ confusâ notione, quod cum exceſſus ponderum in longioribus cruribus ſphæroideæn pendeant ex inæqualitate crurum, ſive ab exceſſu unius cruris ſupra alterum, ideo rationes exceſſuum crurum majorum ad minora crura eædem eſſe debeant ac rationes exceſſuum ponderum ad pondera minorum crurum quæ quidem ultimæ rationes (ſive ipſis proximæ rationes exceſſuum ponderum ad pondera majorum crurum) æquantur rationibus virium centrifugarum ad gravitatem totam, quia illæ vires centrifugæ ex gravitate detractæ eos exceſſus ponderum accurate compenſant. Sed mihi videtur ipſum deduxiſſe hanc proportionem ex ipſâ ſerie ab ipſo adhibitâ, & quam aſſequi ſumus conati in Notâ (r) proximâ; quod ut concipiatur reſumantur quæ in ea Notâ dicta ſunt & ad ratiocinium Newtonianum applicentur, ſupponendo Quæſtionem eſſe de duobus ſphæroidibus, quorum unus ſit aſſumptitius ille cujus Axes ſunt ut 101 ad 100 alterum verò ipſa terra, ita ut ſemi Diameter Æquatoris quæ in Sphæroide fictitio in Notâ prædictâ per $r$ deſignabatur, terræ reſpectu deſignetur per $\varrho$, ſemiaxis verò PQ qui in ſerie aſſumptâ dictus fuerat $b$ & applicatus fictitio ſphæroidi, ubi verò ipſum ſemi-axem terræ deſignat dicatur $B$. Aſſumptis ergo duobus primis terminis ſerierum ſed mutatis $r$ in $\varrho$ & $b$ in $B$, ubi agetur de terrâ, 1°. Gravitas in loco Q in ſphæroidem erit ad Gravitatem eodem loco in ſphæram radio $b$ deſcriptam erit ut $\frac{6br-4b^2}{3r}$ ad $\frac{2b}{3}$ & ſi agatur de terrâ, Gravitas in loco Q in terram erit ad Gravitatem in eodem loco in Sphæram quæ radio B deſcribetur ut $\frac{6B\varrho-4B^2}{3\varrho}$ ad $\frac{2B}{3}$; ideóque Rationes gravitatis in loco Q in Sphæroidem vel terram ad gravitatem in Sphæras radiis $b$ & $B$ deſcriptas erunt ut $\frac{3r-2b}{r}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho}$. 82.

2°. Gravitas in Sphæras quarum ſunt radii $b$ & $B$ eſt ad gravitatem in Sphæras radiis AC deſcriptas ut radius $b$ ad $r$, & $B$ ad $\varrho$, ideóque rationes gravitatis in ſphæras radiis PQ deſcriptas ad gravitates in ſphæras radiis AC deſcriptas erunt ut $\frac{b}{r}$ ad $\frac{B}{\varrho}$.

3°. Gravitas in ſphæras radiis AC deſcriptas eſt ad Gravitatem in Ellipſoides convolutione Ellipſium APBQ circa AC deſcriptas ut $\frac{2r}{3}$ ad $\frac{6rb-4rr}{3b}$, ſi agatur de fictitio Sphæroide, aut ut $\frac{2\varrho}{3}$ ad $\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}$ ubi agitur de terrâ; Et quoniam attractio ſphæroidis fictitii aut terræ eſt media proportionalis inter has attractiones, erit gravitas in ſphæram ad Gravitatem in A in ſphæroidem, ut $\frac{\sqrt{2r}}{3}$ ad $\sqrt{\frac{6rb-4}{3b}}$ & gravitas in ſphæram ad Gravitatem quæ eſt in A in terram ipſam ut $\sqrt{\frac{2\varrho}{3}}$ ad $\sqrt{\frac{6\varrho B-4\varrho\varrho}{3B}}$, ideóque rationes gravitatum in ſphæras ad gravitates in ſphæroidem & in terram erunt ut

DE MUNDI SYSTEMATE.

ræ ſemidiameter mediocris, juxta menſuram *Picarti*, fit pedum Pariſienſium 19615800, ſeu milliarium 3923,16 (poſito quod milliare ſit menſura pedum 5000) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu pedum 85472, ſeu milliarum $17\frac{1}{10}$. Et altitudo ejus ad æquatorem erit 19658600 pedum circiter, & ad polos 19573000 pedum.

Si

82. $\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$ reductis fractionibus ad minimos terminos.

Hinc tandem compoſitis omnibus rationibus, Rationes gravitatum in punctis Q tam ſphæroideos fictitii quam terræ, ad gravitates in punctis A eorum erunt ut $\frac{3r-2b}{\varrho} \times \frac{b}{r} \times \sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho} \times \frac{B}{\varrho}\sqrt{\frac{B}{3b-2\varrho}}$.

Rurſus in fictitio ſphæroide ratio magnitudinis crurum exprimitur per $\frac{b}{r}$ & in terrâ per $\frac{B}{\varrho}$; per quas quantitates ducantur rationes gravitatis & habebuntur rationes ponderum quæ ideo erunt ut $\frac{3r-2b}{r} \times \frac{b^2}{r^2}\sqrt{\frac{b}{3b-2r}}$ ad $\frac{3\varrho-2B}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2}\sqrt{\frac{B}{3B-2\varrho}}$; Inde cum differentia quantitatum $r$ & $b$, $\varrho$ & $B$ non ſit magna, numeratores $3r-2b$ aut $3\varrho-2B$; pro $r$ ac $\varrho$ ſumi poſſunt & denominatores $3b-2r$, $3B-2\varrho$ pro $b$ & $B$, ideóque rationes ponderum fiunt ut $\frac{r}{r} \times \frac{b^2}{r^2} \times \sqrt{\frac{b}{b}}$, ad $\frac{\varrho}{\varrho} \times \frac{B^2}{\varrho^2} \times \sqrt{\frac{B}{B}}$ ſive ut $\frac{b^2}{r^2}$ ad $\frac{B^2}{\varrho^2}$. Vel, invertendo, rationes ponderum in crure CA ad pondus in crure CQ ſunt in ſphæroide fictitio & in terrâ ut $\frac{r^2}{b^2}$ ad $\frac{\varrho^2}{B^2}$ quod ſi differentia Diametri $r$ & axis fictitii $b$ dicatur $f$; differentia Diametri $\varrho$ & axis terræ $B$ dicatur $g$ hoc modo exprimentur rationes ponderum crurum CA & CQ. $\frac{b^2+2bf+ff}{bb}$ & $\frac{B^2+2Bg+gg}{B^2}$ erunt ergo rationes exceſſus ponderis in crure AC ad pondus totum cruris CQ ut $\frac{+2bf+ff}{bb}$ ad $\frac{+2Bg+gg}{B^2}$ ſive deletis $ff$ & $gg$ quæ evaneſcunt reſpectu $2rf$ & $2\varrho g$, cùm differentiæ inter diametros & axes minimæ ſupponantur reſpectu earum diametrorum; erunt illæ rationes ut $\frac{2bf}{b^2}$ ad $\frac{2Bg}{B^2}$, ſive ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, ſed rationes exceſſus ponderum ad pondus cruris CQ ſive ad pondus cruris AC (quod perinde eſt ob magnitudinem crurum & parvitatem exceſſus) æquales eſſe debent (ut jam dictum eſt) rationibus virium Centrifugarum ad gravitatem ipſam, quare, rationes illæ virium Centrifugarum ad gravitatem debent eſſe ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$, ſive ut rationes exceſſuum diametri Æquatoris ſupra Axes ad Axes, quæ quidem eſt proportio quam Newtonus aſſumit, cujus fundamentum ita deprehenſum eſt: hinc Vis Centrifuga quæ eſt $\frac{4}{505}$ ponderis totius eſt ad Vim Centrifugam quæ eſt $\frac{1}{289}$ ponderis totius ut $\frac{2f}{b}$ ad $\frac{2g}{B}$ ſivè ut $\frac{f}{b}$ ad $\frac{g}{B}$, ſed dum $b$ eſt 100 eſt $f=1$, ergo eſt $\frac{g}{B} = \frac{\frac{1}{100} \times \frac{1}{289}}{\frac{4}{505}}$ ſive $\frac{505}{115600} = \frac{1}{229}$.

(a) Si planeta major sit vel minor quam terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quâcunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicatâ illâ ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eâdem duplicatâ ratione quamproximè. Et si densitas planetæ augeatur vel minuatur in ratione quâvis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eâdem ratione, & differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, jupiter autem horis 9 56′, sintque temporum quadrata

(a) 86. *Si planeta major sit vel minor quam terrâ manente ejus densitate ac tempore Periodico revolutionis diurnæ, manet proportio vis Centrifugæ ad gravitatem.* * Manere Rationem vis Centrifugæ ad gravitatem liquet ex nota 85. sive ex Cor. 3. Prop. IV. Lib. I.; nam manente tempore Periodico crescit Vis Centrifuga in ratione distantiarum, sed crescit etiam gravitas acceleratrix in ratione distantiarum (Cor. 3. Prop. XCI. lib 1.) ergo in eadem ratione crescunt vis Centrifuga & gravitas ideóque in eâdem ratione manent ac prius.

*Propterea manebit proportio diametri inter Polos ad diametrum secundum Æquatorem*, quippe, per notam præcedentem z, Ratio vis Centrifugæ ad gravitatem est ut ratio excessus Diametri Æquatoris super longitudinem Axeos; manente ergo priori ratione per hypothesim manebit & ista.

*Si acceleretur vel retardetur motus diurnus* ut tempus Periodicum fit majus vel minus, vis centrifuga crescit reciprocè ut quadrata temporum Periodicorum manentibus radiis (Cor. 2. Prop. IV. lib. 1.) inde manentibus gravitatibus & Diametris majoribus vel minoribus, liquet (ex notâ illâ z.) numeratores, fractionum $\frac{f}{b}$ & $\frac{g}{B}$, 83.

nempe excessus Diametrorum, crescere secundum rationem virium centrifugarum, hoc est, ut quadrata temporum Periodicorum inversè, aut ut quadrata Celeritatum directè, hinc ait Newtonus *differentia diametrorum* (quæ differentiæ exprimuntur per $f$ & $g$) *augebitur vel minuetur in ea ratione duplicata celeritatum quamproximè.*

*Et si densitas planetæ augeatur, gravitas augebitur in eâdem ratione* hinc ratio vis Centrifugæ manente radio & celeritate manentis, ad gravitatem minuetur; ideóque minueter ratio differentiæ Diametrorum ad ipsas Diametros.

Et in genere dicatur Radius terræ $R$, ejus densitas $D$, tempus Periodicum $T$, in altero Planeta litteris iisdem sed minoribus eadem exprimantur erit $\frac{R}{TT}$ ad $\frac{r}{tt}$ sicut $\frac{1}{229}$ ad differentiam inter Diametros Æquatoris & Axis Planetæ quæ itaque erit $\frac{1}{229} \times \frac{D \times TT}{d \times tt}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

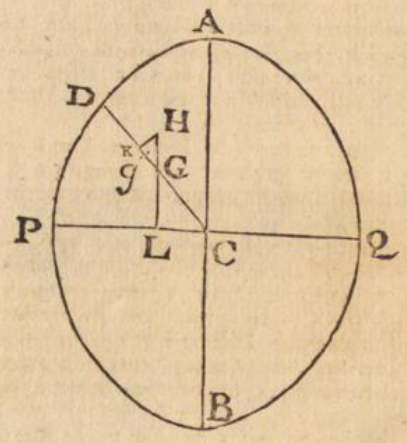
drata ut 29 ad 5, & (b) revolventium denſitates ut 400 ad $94\frac{1}{2}$: differentia diametrorum jovis erit ad ipſius diametrum minorem ut $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ ad 1, ſeu 1 ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Eſt igitur diameter jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut $10\frac{1}{3}$ ad $9\frac{1}{3}$ quamproximè. Unde cum ejus diameter major ſit $37''$, ejus diameter minor quæ polis interjacet, erit $33''.25'''$. (c) Pro luce erraticâ addantur $3''$ circiter, & hujus planetæ diametri apparentes evadent $40''$ & $36''.25'''$: quæ ſunt ad invicem ut $11\frac{1}{5}$ ad $10\frac{1}{5}$ quamproximè. Hoc ita ſe habet ex hypotheſi quod corpus jovis ſit uniformiter denſum. (d) At ſi corpus ejus ſit denſius verſus planum æquatoris quam verſus polos, diametri ejus poſſunt

83. (b) * *Et revolventium denſitates.* (prop. 8. lib. hujus.).

(c) * *Pro luce erraticâ.* (53).

(d) * *At ſi corpus ejus.* Ille enim exceſſus denſitatis in plano æquatoris facit ut ibi major ſit gravitas ac proindè ibi minor requiratur altitudo ad compenſandam vim Centrifugam unde minuitur diametrorum differentia (ut patet ex notis præced.).

84. Lubet hic referre formulam quâ, in hypotheſi gravitatis proportionalis cuilibet dignitati diſtantiarum à centro, ſimulque quod ejus actio ad id centrum dirigatur, diametrorum proportio inveniri poteſt: Sit ſemidiameter ſecundum æquatorem $AC = a$, radius variabilis $CD = r$ ſinus anguli $DCP = h$, poſito ſinu toto $= 1$. Sit gravitas in loco $A = p$ vis centrifuga in eodem loco $= f$, ponaturque gravitas verſùs centrum C tendens dignitati cuilibet $n$ diſtantiarum à centro proportionalis, erit gravitas in A ad gravitatem in D ut $a^n$ ad $r^n$, ideóque gravitas in $D = \frac{pr^n}{a^n}$. Quoniam vires centrifugæ in locis A & G, ſunt in ratione diſtantiarum CA, LG, erit vis centrifuga in $G = \frac{f \times LG}{CA}$; ſed $LG : CG = h : 1$ ideóque $LG = CG \times h$, undè vis centrifuga in G, fit $= \frac{fh \times CG}{CA}$; ſit autem vis illa $= GH$. Quoniam vis centrifuga quæ agit ſecundum directionem GH, non minuit gravitatem verſùs centrum C, niſi in quantùm agit ſecundum directionem DC, reſolvatur vis centrifuga GH in vires laterales KH, GH; eſt



sunt esse ad invicem ut 12 ad 11, vel 13 ad 12, vel forte 14 ad 13. Et *Cassinus* quidem anno 1691 observavit, quod jovis diameter ab oriente in occidentem porrecta diametrum alteram superaret parte sui circiter decimâ quintâ: *Poundus* autem noster telescopio pedum 123 longitudinis & optimo micrometro, diametros jovis anno 1719, mensuravit ut sequitur. *Tem-*

est autem $GH : GK$ vel $1 : h = \frac{fh \times CG}{CA} : GK$, quare $GK = \frac{fhh \times r}{a}$, ideóque pondus cylindruli $Gg = \frac{p r^n dr}{a^n} - \frac{fhh r dr}{a}$ Sumptisque fluentibus, pondus totum fluidi in crure $DC = \frac{p r^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhh \times rr}{2a}$. Simili argumento, quia gravitas in $A = p$, erit gravitas in alio quolibet loco cruris $CA = \frac{p x^n}{a^n}$, si nempè distantia à centro dicatur $x$; vis autem centrifuga $= \frac{fx}{a}$, & pondus Cylindruli manebit $\frac{p x^n dx}{a^n} - \frac{fx dx}{a}$ cujus fluens $\frac{p x^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{f x^2}{2a}$ undè pondus totum fluidi in crure CA, est $\frac{p a^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa^2}{2a}$ jam verò quia fluidum in utroque crure CA, CD consistere debet in æquilibrio, oportet ut pondera sint æqualia ac proinde, $\frac{p a^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fa}{2} = \frac{p r^{n+1}}{(n+1)a^n} - \frac{fhh rr}{2a}$, undè eruitur $2 p r^{n+1} - (n+1) fhh a^{n-1} rr = (2p - nf - f) a^{n+1}$. Ope hujus æquationis facilè invenitur diametrorum proportio, si enim fiat $h = 0$, radius $r$ abit in CP, habeturque $2 p r^{n+1} = (2p - nf - f) a^{n+1}$, hoc est, $CA : CP = (2p)^{\frac{1}{n+1}} : (2p - nf - f)^{\frac{1}{n+1}}$.

In hypothesi gravitatis uniformis, fit $n = 0$, ideóque $CA : CP = 2p : 2p - f$. Quoniam verò in terrâ gravitas est ad vim centrifugam ut 289 ad 1, erit $CA : CP = 578 : 577$, prout Hugenius invenit. At in hypothesi gravitatis in ratione duplicatâ distantiarum à centro decrescentis, erit $n = -2$, ideóque $CA : CP = 2f + f : 2p = 579 : 578$. 85.

* 85. Verum duæ Hypotheses in hâc formulâ invenienda assumptæ cum rei natura & Newtoniano systemate neutiquam quadrant, ideóque locum habere nequeunt: Primùm enim Gravitatem ad Centrum terræ dirigi verum non est si terra sit sphærois qualiscumque quippe ex ipso facto constat gravitatis directionem esse perpendicularem superficiei aquarum, sive esse perpendicularem curvæ quam meridianus quilibet affectat; sed perpendiculares ad curvam à circulo diversam ad ejus curvæ centrum neutiquam tendunt nisi in solâ axium extremitate.

2°. Gravitatis quantitas in variis punctis superficiei solidi ratione curvæ alicujus geniti non sequitur rationem ullius dignitatis distantiarum à centro, sed aliam omnino Legem juxta formam solidi, hoc est, juxta naturam curvæ illius quam meridianus affectat & locum in quo corpusculum attrahendum locatur, ut satis liquet ex eo artificio quo Newtonus usus est ad determinandam rationem gravitatis in puncto A ad gravitatem in puncto Q, unde gravitatis in variis locis proportio non per dignitatem aliquam distantiarum, sed per rationes serierum quales eas in Nota (r) invenimus sunt exhibendæ; quamvis ergo verum sit in systemate Newtoniano gravitatem decrescere ut quadrata distantiarum à quocumque corpore collecto in centro suæ gravitatis quasi in uno puncto, idem verum non erit si id corpus figurâ sphærica non donetur, & corpusculum attrahendum juxta diversas partes ejus solidi collocetur, hinc ubi in formandâ generali formulâ assumitur quod gravitas in A sit ad gravitatem in D ut $a^n$ ad $r^n$ ideóque gravitatem in D esse

$p r^n$

DE MUNDI SYSTEMATE.

| *Tempora.* | *Diam. max.* | *Diam. min.* | *Diametri ad invicem.* | |
|---|---|---|---|---|
| *dies hor.* | *part.* | *part.* | | |
| Jan 28 6 | 13,40 | 12,28 | *ut* 12 | *ad* 11 |
| Mar. 6 7 | 13,12 | 12,20 | $13\frac{3}{4}$ | $12\frac{3}{4}$ |
| Mar. 9 7 | 13,12 | 12,08 | $12\frac{2}{3}$ | $11\frac{2}{3}$ |
| Apr. 9 0 | 12,32 | 11,48 | $14\frac{1}{2}$ | $13\frac{1}{2}$ |

Congruit igitur theoria cum phænomenis. Nam planetæ magis incalescunt ad lucem solis versus æquatores suos, & propterea paulo magis ibi decoquuntur quam versus polos.

Quin-

86. $\frac{pr^n}{a^n}$, id omninò adversus Theoriam gravitatis Newtonianam deducitur; quod autem hæc formula non multum à vero aberret, oritur ex eo quod reverâ figura terræ à sphærâ per parùm discrepet.

85. Vis centripeta vel centrifuga corporis circulum describentis est in ratione directâ radii & duplicatâ inversâ temporis periodici (cor. 2. prop. 4. lib. 1.). Quare si distantia planetæ à centro Solis vel distantia satellitis à centro planetæ primarii dicatur $D$ tempus periodicum $T$ radius ipsius Planetæ circà quem motu diurno revolvitur $R$, gravitas versùs centrum revolutionis erit $\frac{D}{TT}$; Si autem hæc gravitas crescat in ratione duplicatâ inversâ distantiarum, erit gravitas planetæ in eo in quo nunc versari supponitur loco, ad illius gravitatem, si positus fingeretur in superficie corporis centralis circà quod revolvitur ut $RR$ ad $DD$, ideóque foret gravitas planetæ in superficie hujus corporis ut $\frac{D^3}{RRTT}$. Jam verò cum vis centrifuga planetæ positi in æquatore corporis circà quod revolvitur sit in ratione directâ radii hujus planetæ & inversâ duplicatâ temporis revolutionis circà axem, si tempus periodicum circà axem dicatur $t$ vis centrifuga $F$, erit $F = \frac{R}{tt}$ undè si vis gravitatis in superficie corporis centralis dicatur $P$, erit $P : F = \frac{D^3}{RRTT} : \frac{R}{tt} = D^3 \times tt : R^3 \times TT$.

90. Distantia $D$, quarti satellitis jovialis à centro planetæ primarii sit 26.63 semid. jovis, prout à Newtono in fine Phænomeni II determinantur & tempus periodicum $T = 16$ dieb. $18^h$. $5' 7''$ prout à Cassino in novis Elementis Astron. traduntur. Semidiameter jovis $R = 1$, tempus periodicum jovis circà axem $t = 9^h$. $55' 52''$ posito in formulâ generali (87) $n = -2$, habetur $CA : CP = 2p + f : 2p$, vel $CA - CP : CP = f : 2p$, aut $CA - CP : CP = R^3 TT : 2D^3 tt$, erit itaque in hâc hypothesi gravitatis pro jove $CA - CP : CP = 1 : \frac{2D^3 \times tt}{TT} = 1 : 11\frac{1}{2}$, quæ differentia inter semidiametrum secundum æquatorem jovis & semidiametrum inter polos quamproxime æqualis est differentiæ quam Newtonus ex suâ methodo derivavit.

Sit mediocris distantia Lunæ à terrâ $D = 60$ semid. terrestr. tempus periodicum Lunæ $= 27$ dieb. $7^{hor}$. $43'$, semid. terræ $= 1$, tempus revolutionis terræ circà axem $= 23^{hor}$. $56' 4''$. erit gravitas ad vim centrifugam ut 288 ad 1. Unde pro terrâ foret $CA - CP : CP = 1 : 576$: terra itaque minùs compressa foret quam à

New-

Quinetiam gravitatem per rotationem diurnam terræ noſtræ minui ſub æquatore, atque ideo terram ibi altius ſurgere quam ad polos (ſi materia ejus uniformiter denſa ſit) patebit per experimenta pendulorum quæ recenſentur in propoſitione ſequente. LIBER TERTIUS. PROP. XIX. PROBL. III.

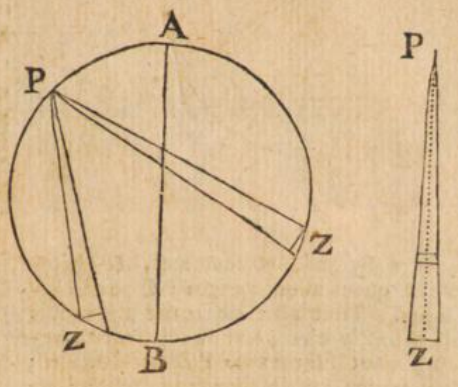
Newtono definitum eſt, magis tamen quam determinatum eſt ab Hugenio, verum ob actionem Solis in Lunam, tempus ejus Periodicum non reſpondet accuratè vi centrifugæ terræ; alias correctiones hujus calculi invenies Tranſ. Philoſ. N°. 438 quibus ad Newtonianam proportionem magis accurate revocatur. De hâc Quæſtione nobiliſſimâ procul dubio legantur quæ de telluris figurâ dederunt Clariſſimi Viri D. De Mairan in monumentis Pariſ. an. 1720. D. De Maupertuis ibidem an. 1733. 1734. 1735. 1736. & in duobus opuſculis quorum unum de figuris corporum cæleſtium, alterum de figurâ telluris inſcribitur. Præclara quoque de eodem argumento ediderunt D. Clairaut in monumentis Pariſienſibus an. 1735. & in Tranſactionibus Philoſophicis num. 445. & 449. D. Bouguer ibid. an. 1736. D. Euſtachius Manfredius ibid. an. 1734. & D. Stirling in tranſactionibus Anglicis an. 1735.

* Viam ſternet ad determinandam figuram terræ ortam ex neceſſitate æquilibrii vis centrifugæ & vis gravitatis ſingularum ejus partium, ſi generaliſſime ſolvatur Probl. XLV. (Prop. XCI. Lib. I.) Newtoni, nempe, ſi inveniatur attractio corpuſculi non ſolùm *ſiti in axe* ſolidi rotundi, ſed ſiti ubivis in ejus ſuperficie, cujus Problematis Analyſim hic in compendium trademus.

## PROBLEMA.

Datâ Æquatione curvæ cujuſcumque quæ circa axim revolvendo ſolidum deſcribat invenire attractionem corpuſculi ſiti in quocumque puncto ſuperficiei ejus ſolidi.

*Conſtructio.* Fingatur Planum tangens id ſolidum in P, & ſuper eo plano, è puncto P ut centro deſcripta intelligatur ſphæra radio infinitè parvo, dividatur tota ſuperficies hemiſphærii verſus ſolidum converſi in portiunculas æquales, & concipiantur Pyramides (quarum vertices ſint in centro ſphæræ) illis portiunculis inſiſtentes & inde ad ſolidi ipſius oppoſitam ſuperficiem continuatæ, puta in Z, Z, terminentur illæ Pyramides in eo ſolido per Baſes parallelas Baſibus ipſarum ſphæræ circumſcriptis; Corpuſculi in puncto P ſiti attractio ab omnibus illis Pyramidibus, concipi poterit ut attractio à toto ſolido, exiguæ enim ejus ſolidi portiones quæ in extremitate unius cujuſque Pyramidis negliguntur ſunt ubique totius Pyramidis reſpectu infinitè parvæ.

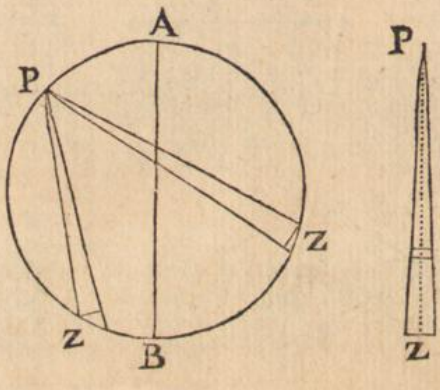



90.

Attractio autem corpuſculi P à ſingulâ Pyramide erit ubique ut axis PZ ejus Pyramidis; Nam ducantur ubivis in axe, duo puncta infinitè proxima, ducanturque per ea ſuperficies duæ, parallelæ Baſi Pyramidis, ſive, quod idem eſt, parallelæ ſuperficiei ſphæræ circa P deſcriptæ, exiguum ſolidum inter eas ſuperficies contentum creſcet ut illæ ſuperficies ſive ut quadratum portionis axeos abſciſſæ, ſed cum attractio ſingulæ particulæ decreſcat ut quadratum diſtantiæ à puncto P, ſive decreſcat ut quadratum abſciſſæ; ideóque creſcat particularum quantitas ut decreſcit ſingulæ particulæ vis, evenit ut attractio ejus ſolidi ubivis in axe PZ ſumpti eadem ſemper ſit; æqualis, erit v. gr. attractioni ſolidi cujus baſis foret portio ſuperficiei ſphæ-

De Mundi Systemate.

90.

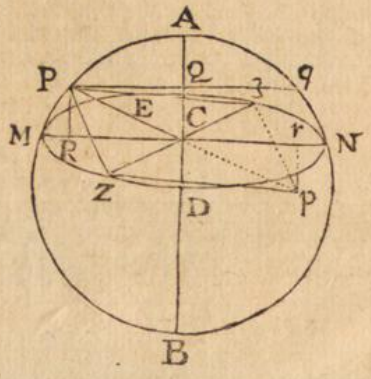



ræ intra Pyramidem contentæ, & altitudo illa quam minima axeos P Z portio aſſumpta. Hinc attractio totius Pyramidis erit attractio ejus parvi ſolidi, toties repetita quot ſunt axeos P Z portiunculæ; Cum itaque portio ſuperficiei ſphæræ intra Pyramides contenta, ſit ubivis eadem, ex Conſt., attractiones ſingularum Pyramidum erunt ut numerus particularum æqualium in ſingulo axe P Z aſſumendarum, ſive quod idem eſt, ut ſinguli axes P Z.

His poſitis: ſit M D N E unus è circulis genitis in ſolido propoſito per revolutionem ordinatæ C M circa axim A B. Dico quod attractio puncti P ab omnibus Pyramidibus quarum axes in circumferentia circuli M D N E terminantur, (quæ eſt ut ſumma omnium axium P Z ad eam circumferentiam terminatorum) eſt ut linea P C à puncto P ad centrum ejus circuli C ductæ, multiplicata per numerum axium P Z ad circumferentiam M D N E pervenientium: (miſſis nempe ſingularum P Z longitudinibus).

Aſſumatur enim in circumferentia M D N E punctum quodlibet Z, & ducta per centrum C linea Z C ϛ, ducatur P ϛ, ex demonſtratis attractiones Pyramidum ad Z & ϛ pervenientium erunt ut P Z ad P ϛ; Ducatur ex P in circulum M D N E perpendiculum P R & per R & centrum C ducatur Diameter M R N, ſumptaque N r = M R demittatur perpendiculum r p, ſitque r p = R P, linea M N, P R & r p ſunt in eodem plano (per 6. XI. Elem.) ideoque linea P p ſecabit lineam M N, & cum Triangula P R C, p r C ſint æqualia propter r p = R P, angulos rectos, & angulos per verticem oppoſitos, ſitque N r = M R linea P p tranſibit per centrum C; erit etiam linea P p in plano Trianguli Z P ϛ cum habeat puncta P & C in eo plano; inde ſi jungantur lineæ Z p, ϛ p, tota figura P Z p ϛ erit in eodem Plano, & propter æquales P C, p C; Z C, C ϛ & angulos interceptos per verticem oppoſitos lineæ P Z, p ϛ erunt æquales, ut & lineæ P ϛ, p Z, hinc figura P Z p ϛ eſt Parallelogramma cujus P p ſive 2 P C eſt Diagonalis; Quare cum Pyramides trahant ſecundum directiones P Z, P ϛ, viribus quæ ſunt ut P Z ad P ϛ, vis inde reſultans, dirigetur ſecundum Diagonalem P p, ſive 2 P C, eique erit proportionalis.

Quod cum ita ſit de omnibus punctis Z in circumferentiâ M D N E ſumendis, attractio puncti P ab omnibus paribus Pyramidum in circumferentiâ ejus circuli terminatarum, erit ut 2 P C multiplicata per numerum parium earum Pyramidum;




ſive erit ut P C ipſa multiplicata per numerum omnium P Z ad circumferentiam M D N E terminatarum.

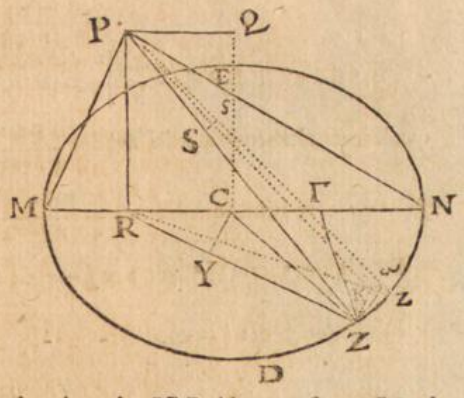
Denique ut obtineatur numerus earum linearum P Z ad circumferentiam quamlibet M D N E terminatarum, obſervandum eſt, eas lineas egredientes ab Hemiſphærio circa P deſcripto, in ejus ſuperficie ſignare lineam curvam (duplicis quidem curvaturæ quando P non imminet perpendicula-

diculariter centro C, isto enim in casu signarent circulum) & propter æqualitatem distantiæ concursus eorum axium cum superficie Hemisphærii (ex constructione) numerus earum linearum erit ut longitudo ejus lineæ curvæ in superficie Hemisphærii signatæ; huc ergo redit tota quæstio, ut, Dato puncto P ejusque ordinata PQ ad axem solidi rotundi, sumptáque ut libet abscissâ AC, ejus ordinata CM, & circulo MDNE ejus ordinatæ convolutione descripto, inveniatur longitudo curvæ descriptæ in superficie sphæræ (cujus radius P S ad lubitum assumitur) per intersectionem Coni inclinati cujus vertex est P, basis vero MDNE.

Ut longitudo seu rectificatio ejus curvæ obtineatur, Ducantur à puncto P ad duo puncta proxima peripheriæ MDNE, lineæ PZ, Pz; Abscissa circuli secundum Diametrum à puncto N remotiori à puncto P sumatur, sintque NΓ & ΓZ abscissa & ordinata circuli respondentes puncto Z, dicatur NΓ, $x$, ΓZ, $y$; Zz, $dv$; tota Diameter MN, $f$, duplum ordinatæ PQ sit $g$, denique si centro P Radio PS describatur arcus Ss ille arcus Ss erit elementum curvæ quæsitæ respondens Elemento circuli $dv$. Ex P, ut prius, demittatur in circulum MDNE perpendiculum PR, erit $RC = PQ = \frac{g}{2}$, ex R ducantur lineæ RZ & Rz, & centro C radio RZ describatur arcus ZK ut sit RK = RZ, ex centro C ducatur ad Z Radius CZ, & perpendiculum CY in lineam RZ, Dico 1°. quod Triangulus RCY est similis Triangulo RZΓ, ob angulum in R communem, & rectos Γ & Y, unde est RZ ad ZΓ ($y$) sicut RC ($\frac{g}{2}$) ad CY quod erit ergo $\frac{gy}{2RZ}$; 2°. Triangulus CZY est similis Triangulo ZKz; Nam angulus RZK est rectus per Constr. quoniam Triangulus RZK est Isosceles, Angulus vero CZz est etiam rectus per naturam circuli, unde dempto communi CZK manent æquales anguli CZY & KZz, præterea anguli in Y & K sunt recti: erit ergo Radius CZ ($\frac{f}{2}$) ad CY ($\frac{gy}{2KZ}$) sicut Zz ($dv$) ad KZ quod erit ergo $\frac{gy}{RZ \times f} dv$.

3°. Ducatur ex P linea PK ea erit æqualis lineæ PZ nam Trianguli PRZ, PRK erunt æquales ob communem PR, æquales per Const. RZ & RK, & angulos in R rectos (per 4. XI. Elem.); hinc si radio PK, centro P describatur arcus Kω, erit Pω = PZ & arcus Zω similis erit elemento quæsito Ss, & Triangulus Zzω Rectangulus erit in ω. 90.

Porro, Triangulus Kωz erit similis triangulo PRz ob angulum communem in z, & Rectos in R & ω, sive similis



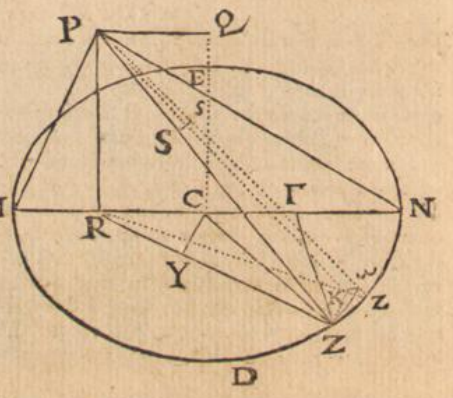

erit triangulo PRZ, ideoque fiat ut PZ ad RZ ita KZ sive $\frac{gy}{RZ \times f} dv$ ad ωz quod erit itaque $\frac{gy}{PZ \times f} dv$.

4°. In Triangulo Zzω, Rectangulo in ω cum Zz sit $dv$ & ωZ sit $\frac{gy}{PZ \times f} dv$ erit quadratum $\overline{Z\omega}^2 = dv^2 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2} dv^2$ & cum sit PZ ad PS sicut Zω ad Ss erit $PZ^2$ ad $PS^2$ sicut $\overline{Z\omega}^2$ sive $1 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2} dv^2$ ad $Ss^2$ ergo quadratum Elementi curvæ quæsitæ est $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{1 - \frac{g^2y^2}{PZ^2 \times f^2}} dv^2$: Quod erat Inveniendum.

DE MUNDI SYSTEMATE.

90.

Ut autem Integretur, primò notandum quod ex Natura circuli Elementum $dv$ ſit æquale Elemento $dx \times \frac{f}{2y}$, ideoque quadratum Elementi inventum evadet $\frac{PS^2}{PZ^2} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g^2}{4PZ^2}} \times dx^2$: Præterea eſt $PZ^2 = PR^2 + RZ^2$, & eſt $RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2$ eſt autem, ex conſtructione, $R\Gamma = RN - N\Gamma = \frac{g+f}{2} - x$ ideoque $R\Gamma^2 = \overline{\frac{g+f}{2}}^2 - gx - fx + xx$ eſtque $\Gamma Z^2 = fx - xx$, ideo $(RZ^2 = R\Gamma^2 + \Gamma Z^2) = \overline{\frac{g+f}{2}}^2 - gx$ & $PZ^2 = PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}^2 - gx$; ſed eſt $PR^2 + \overline{\frac{g+f}{2}}^2 = PR^2 + RN^2 = PN^2$, ergo $PZ^2 = PN^2 - gx$, & ſi ad compendium tertia proportionalis ad 2 PQ (ſive $g$) & PN dicatur $l$ ut ſit $PN^2 = gl$ fiet $PZ^2 = gl - gx$ ſicque, quadratum elementi quæſiti evadet $\frac{PS^2}{gl-gx} \times \overline{\frac{f^2}{4y^2} - \frac{g}{4 \times l-x}} \times dx^2$, ſive cum $y^2$ ſit $fx - xx$ erit illud quadratum $\frac{PS^2}{4g \times l-x} dx^2 \times \frac{f^2}{x \times f-x} - \frac{g}{l-x}$.




Dividatur autem $f^2$ per $x \times f-x$ fit $\frac{f}{x} + 1 + \frac{x}{f} + \frac{x^2}{f^2} + \frac{x^3}{f^3}$ &c.

Dividatur $g$ per $l-x$ fit $\frac{g}{l} + \frac{gx}{l^2} + \frac{gx^2}{l^3} + \frac{gx^3}{l^4}$ &c.

Differentia ſerierum fiet $\frac{f}{x} + \frac{l-g}{l} + \frac{l^2-fg}{l^2 f} x + \frac{l^3-f^2 g}{l^3 f^2} x^2 + \frac{l^4-f^3 g}{l^4 f^3} x^3$ &c.

Divid. ea differ. per $l-x$ fit $\frac{f}{lx} + \frac{l+f-g}{l^2} + \frac{l^2+lf+f^2-2fg}{l^3 f} x + \frac{l^3+l^2 f+lf^2+f^3-3fg}{l^4 f^2} x^2$ &c.

Unde quadratum elementi Ss eſt $dx^2 \times \frac{PS^2 \times f}{4gl} \times \frac{1}{x} + \frac{l+f-g}{lf} + \frac{l^2+lf+f^2-2fg}{l^2 f^2} x + \frac{l^3+l^2 f+lf^2+f^3-3fg}{l^3 f^3} x^2$ &c. quæ ſeries ad lubitum continuari poteſt.

Exprimatur autem curvæ quæſitæ longitudo per hanc ſeriem cujus coefficientes ſunt indeterminati $Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} + Dx^{\frac{7}{2}} + Ex^{\frac{9}{2}} +$ &c.

ejus fluxio erit $dx \times \frac{1}{2} Ax^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} Bx^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} Cx^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2} Dx^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2} Ex^{\frac{7}{2}} +$ &c. cujus quadratum erit $dx^2 \times \frac{1}{4} A^2 x^{-1} + \frac{3}{2} AB + \frac{5}{2} ACx + \frac{7}{2} ADx^2 + \frac{9}{2} AEx^3 + \frac{11}{12} AFx^4 + \frac{9}{4} B^2 x + \frac{15}{2} BCx^2 + \frac{21}{2} BDx^3 + \frac{27}{2} BEx^4$ &c. $+ \frac{25}{4} C^2 x^3 + \frac{35}{3} CDx^4$

Col-

Collatis verò terminis ſeriei inventæ cum terminis correſpondentibus hujus ſeriei fictitiæ invenietur $A = \frac{PS\sqrt{f}}{\sqrt{gl}}$

$$B = A \times \frac{l+f-g}{6lf}$$

$$C = A \times \frac{3l^2+2lf+3f^2+2lg-6fg-g^2}{2.4.5\,l^2f^2.}$$

$$D = A \times \frac{10l^3+6fl^2+6f^2l+10f^3+2gl^2+12fgl-30f^2g+6g^2l-10fg^2-2g^3}{2.4.4.7\,l^3f^3}$$

$$E = A \times \frac{35l^4+20fl^3+18f^2l^2+20f^3l+35f^4+4gl^3+12fgl^2+60f^2gl-140f^3g-6g^2l^2+60fg^2l-70f^2g^2+20g^3l-28fg^3-5g^4}{2.4.4.4.9\,l^4f^4.}$$ &c.

90.

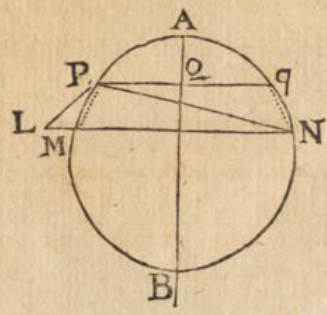
Hinc ſeries quæ exprimit longitudinem curvæ quæſitæ fit

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}}\sqrt{f}\times x^{\frac{1}{2}}+\frac{l+f-g}{2.3lf}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3l^2+2lf+3f^2+2lg-6fg-gg}{2.4.5\,l^2f^2}x^{\frac{5}{2}}+\text{&c.}$$

Si autem talis ſit curva; ut PN ſit ubique major quam $g$ ſcribatur loco $x$ longitudo $f$, ſive Diameter circuli, & habebitur valor dimidii curvæ quæſitæ, quod reſpondet ſemicirculo M D N: eſt ergo ea ſemi-curva,

$$\frac{PS}{\sqrt{gl}}\times f\times 1+\frac{l+f-g}{2.3l}+\frac{3l^2+2lf+3f^2+2lg-6fg-gg}{2.4.5\,l^2}\ \text{&c.}$$

In hoc autem caſu quantitas $l$ ſive $\frac{PN^2}{g}$ eſt major quam $f$, majorem eſſe quam $g$ ex hypotheſi; majorem autem eſſe $l$ quam PN fiat in P ſuper PN à par-




hujus caſus ſequitur, cum PN ſupponatur major quam $f$ hinc liquet, ductâ in Trapezio P q N M diagonali te lineæ PM angulus NPL æqualis angulo q, ita ut occurrat PL lineæ NM, dico lineam NL eſſe longiorem quam NM, nam anguli MPq & q ſunt æquales, ſed angulus NPL eſt æqualis angulo q ergo angulus NPL cum angulo NPq major eſt angulo q PM, cadit ergo L ultrà M; ſive NL eſt major NM; eſt autem NL æquale $l$ nam Trianguli Pq N & PNL ſunt ſimiles ob angulos q & NPL æquales per conſt., anguloſque NPq & PNL æquales ob parallelas Pq, MN, hinc ergo eſt Pq ad PN ut PN ad NL, ſed eſt Pq ſive $g$ ad PN ut PN ad $l$, ergo eſt NL æqualis $l$ & major quam $f$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Hinc, ut iſta ſeries convergat debent ita diſponi termini hujus ſeriei ut remotiores à primo ponantur ii in quibus creſcunt in Numeratore dimenſiones quantitatum $f$ aut $g$, & in Denominatore dimenſiones quantitatis $l$, ideóque hanc habet formam.

90. $$\frac{PSf}{PN}\times 1$$
$$+\frac{1}{2.3\,l}\times 1+\overline{f-g}$$
$$+\frac{1}{2.4.5\,l^2}\times 3l^2+\overline{2fl+2gl}+\overline{3f^2-6fg-g^2}$$
$$+\frac{1}{2.4.4.7\,l^3}\times 10l^3+\overline{6fl^2+2gl^2}+\overline{6f^2.+12fgl+6g^2l}+\overline{10f^3-30f^2g-10fg^2-2g^3}$$
$$+\frac{1}{2.4.4.4.9.4}\times 35l^4+\overline{20fl^3+4gl^3}+\overline{18f^2l^2+12fgl^2-6g^2l^2}+\overline{20f^3l+60f^2gl+60fg^2l+20g^3l}+\&c.$$
$$+\frac{1}{2.4.4.4.4.11\,l^5}\times 126l^5+\overline{70fl^4+10gl^4}+\overline{60f^2l^3+24fgl^3-4g^2l^3}\ \&c.$$
$$+\frac{1}{2.4.4.4.4.4.13\,l^6}\times 462l^6+\overline{252fl^5+28gl^5}\ \&c.$$
$$+\frac{1}{2.4.4.4.4.4.4.15\,l^7}\times 1716l^7+\&c.$$
$$\&c.$$

Ut autem hæc forma ad ſimpliciorem revocetur, notandum quod ubi eſt $g=0$ tunc $l=\infty$, ideóque omnes termini hujus ſeriei præter primam columnam evaneſcunt, quoniam continet altiſſimam dignitatem quantitatis $l$; ſed ubi $g=0$ tunc Conus PMDNE fit rectus, & curva inſcripta ſphæræ cujus radius eſt PS, eſt circulus cujus Diameter eſt ad $f$ ſicut PS ad PN, unde is Diameter eſt $\frac{PS\times f}{PN}$; ideóque prima columna ſeriei quæ eo in caſu dimidium curvæ exprimit, continet rationem ſemi-circuli ad Diametrum 1. Ideo ſumma tota ejus columnæ $1+\frac{1}{2.3}+\frac{3}{2.4.5}+\frac{10}{2.4.4.7}$ &c. eſt 1.57079 &c. idque in quocumque valore quantitatis $g$, ſiquidem ea quantitas in eâ columnâ eliminatur.

Ad inveniendam ſummam ſecundæ columna, ea in duas dividatur partes quarum prior multiplicet $\frac{f}{l}$, altera $\frac{g}{l}$ ut habeatur ſummæ columnæ multiplicatæ per $\frac{f}{l}$ obſervandum quod ſinguli coefficientes primæ columnæ (primo termino 1 ſecluſo) ſunt ad coefficientes ſingulos ſecundæ columnæ ut numeri 1 ad 1, 3 ad 2, 5 ad 3, 7 ad 4, 9 ad 5, 11 ad 6, 13 ad 7 &c. quæ ratio tandem abit in rationem duplam, itaque M coefficientes ſecundæ columnæ ſimul ſumpti dimidium efficiunt quantitatis .57079 additâ inſuper eâ quantitate quâ primi coefficientes ſecundæ columnæ excedunt dimidium coefficientium primæ, qui exceſſus celerrime convergunt ſuntque

$$\frac{\frac{1}{2}}{2.3}+\frac{\frac{1}{2}}{2.4.5}+\frac{1}{2.4.4.7}+\frac{\frac{5}{2}}{2.4.4.4.9}+\frac{7}{2.4.4.4.4.11}+\frac{21}{2.4.4.4.4.4.13}+\frac{66}{2.4.4.4.4.4.4.15}\ \&c.$$

qui

qui termini sunt .08333
.01250
.00446
.00217
.00124
.00078
.00053

.10613
summa reliquorum .00112
dimidium .57079 .28539

.39152

Ut termini reliqui habeantur, fingi potest sequentes terminos decrescere in ratione duorum ultimò inventorum, unde summa omnium terminorum adjiciendorum erit .00112 proximè, hinc ea pars secundæ columnæ est .39152 $\frac{f}{l}$ proximè.

Hujus autem primæ partis secundæ columnæ coefficientes sunt ad coefficientes alterius partis ut −1 ad 1, +1 ad 1, 3 ad 1, 5 ad 1, 7 ad 1, 9 ad 1 &c., singuli autem erant ad suos excessus supra dimidium termini columnæ primæ ut 2 ad 1, 4 ad 1, 6 ad 1, 8 ad 1, 10 ad 1, 12 ad 1 &c., ergo coefficientes alterius partes istius columnæ sunt ad eos excessus ut 2 ad −1, 4 ad 1, 6 ad 3, 8 ad 5, 10 ad 7, quæ ratio tandem ad æqualitatem desinit; Ergo summa istius columnæ sumatur æqualis differentiolis supra inventis .10613, & insuper quantitatibus quibus inventi termini hujus columnæ excedunt eas differentiolas, quæ sunt

$$\frac{-1\frac{1}{2}}{2.3} + \frac{1\frac{1}{2}}{2.4.5} + \frac{1}{2.4.4.7} + \frac{\frac{3}{2}}{2.4.4.4.9} + \frac{3}{2.4.4.4.4.11} + \frac{7}{2.4.4.4.4.4.13} + \frac{18}{2.4.4.4.4.4.4.15}$$

sive
− .25
+ .03750
+ .00446
+ .00130
+ .00053
+ .00026
+ .00014

− .20581
sum. reliq. 16
sum. differ. + .10613

$-.09952\ \frac{g}{l}$

Unde summâ terminorum ejus columnæ est $-.09952\frac{g}{l}$ proximè

Termini tertiæ columnæ summati evadunt $+0.1379\frac{f^2}{l^2} - 0.0621\frac{fg}{l^2} + 0.0057\frac{g^2}{l^2}$

Termini quartæ sunt $+0.07265\frac{f^3}{l^3} - 0.07119\frac{f^2g}{l^3} - 0.0032\frac{fg^2}{l^3} + 0.03353\frac{g^3}{l^3}$

Term. quintæ sunt $+0.04965\frac{f^4}{l^4} - 0.00444\frac{f^3g}{l^4} - 0.05586\frac{f^2g^2}{l^4} + 0.06380\frac{fg^3}{l^4} + 0.015\frac{g^4}{l^4}$

T. sextæ sunt $+0.07469\frac{f^5}{l^5} - 0.14589\frac{f^4g}{l^5} - 0.11563\frac{f^3g^2}{l^5} - 0.06938\frac{f^2g^3}{l^5} - 0.01376\frac{fg^4}{l^5} - 0.00385\frac{g^5}{l^5}$

In hoc casu ubi $l$ est major quam $g$ aut $f$, ex istis terminis sufficiens convergentia obtinetur, ut pro vero valore curvæ, hi termini imo & pauciores assumi possint reliquis omissis; Quoniam ergo invenimus attractionem puncti P à circulo MDNE esse ut PC ductum in numerum linearum PZ in circumferentia MDNE terminatarum, sive ut PC ductum in curvam quæ in superficie sphæræ intercipitur inter lineas PZ, si in singulo puncto C, axeos AB erigatur ordinata quæ sit ut

PC

DE MUNDI SYSTEMATE.

90.

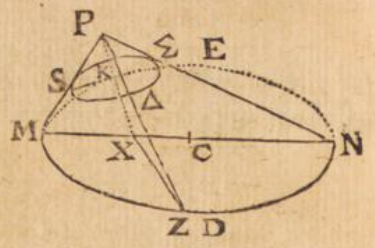
$$\frac{PC}{PN}\times MN\times 1.57079+0.39125\frac{f}{l}+0.1379\frac{f^2}{l^2}+0.0726\frac{f^3}{l^3}$$
$$-0.09952\frac{g}{l}-0.0621\frac{fg}{l^2}-0.0722\frac{f^2g}{l^3}\ \&c.$$
$$+0.0057-\frac{g^2}{l^3}-0.0032\frac{fg^2}{l^3}$$
$$+0.03353\frac{g^3}{l^3}$$

& per vertices earum ordinatarum curva ducta intelligatur, exprimet ejus area attractionem puncti P, si modo in hoc valore inserantur quantitates ad curvam revolventem pertinentes; abscissa constans AQ dicatur $a$, ejus ordinata $PQ=\frac{g}{2}$ sit $c$, abscissa AC sit $x$, ordinata CM sit $y$, erit $PN^2=\overline{x-a}^2+\overline{y+c}^2$, ideóque $l=\frac{\overline{x-a}^2+\overline{y+c}^2}{2c}$, & $PC=\sqrt{\overline{x-a}^2+c^2}$.

Ex his & æquatione curvæ, determinari poterit punctum axeos in quo transibit circulus talis ut attractio eis eum circulum æqualis sit attractioni ultra eum circulum, sive punctum axeos ad quod tendit media directio gravitatis hinc ejus obliquitas ad perpendiculum in curvam obtinebitur.

Sed cum hæc duntaxat valeant cum $g$ sive PQq numquam major est quam PN, generalior alia est solutio, sed cujus calculus paulo prolixior videbitur.

2dus. Casus, si talis sit curva ut incertum sit utrum PN numquam sit minor quam PQq sive $g$.




Ducatur per punctum P linea quæ angulum NPM in duos angulos æquales dividat, & occurrat lineæ MN in puncto X, erit (per 3 VI. Elem.) PN+PM ad NM ut PN ad NX quod erit ergo $\frac{PN\times f}{PN+PM}$; scribatur is valor loco $x$ in serie quæ exprimit longitudinem curvæ propositæ ea evadet

$$\frac{PS\times f}{\sqrt{PN\times PN+PM}}\times 1+\frac{l+f-g}{2.3.l\times PN+PM}PN+\frac{\begin{matrix}3l^2+2lf+3f^2\\+2lg-6fg\\-gg\end{matrix}}{2.4.5l^2\times PN+PM^2}PN^2\ \&c.$$

quæ series in omni casu convergit propter quantitatis PN+PM dignitates in denominatore positas quæ quantitas semper major est quam PN, $f$ & $g$ in numeratore positas (per 20. 1i. Elem.), imo si loco $l$ ponatur ejus valor $\frac{PN^2}{g}$ fiatque reductio series evadet

$$\frac{PS\times f}{\sqrt{PN\times PN+PM}}\times 1+\frac{PN^2+fg-g^2}{2.3.PN\times PN+PM}+\frac{\begin{matrix}3PN^4+2PN^2gf+3f^2g^2\\+2PN^2gg-6fg^3\ \&c.\\-g^4\end{matrix}}{2.4.5.PN^2\times PN+PM^2}$$

Cum

Cum autem in Triangulo PNq, vel in Triangulo PMN, PN+MN ſit ſumma laterum & PN numquam ſit minimum latus, demonſtrabitur facile quod Rectangulum PN per PM+PN, eſt majus Rectangulis aut quadratis factis ex reliquis lateribus PN, Pq vel MN, unde in quocumque caſu hæc ſeries tam reſpectu litteralium quantitatum quàm reſpectu numerorum coefficientium erit convergens, idque ſatis promptè, ſiquidem duobus gradibus creſcunt dimenſiones ab uno termino ad alterum.

Portio autem curvæ quæſitæ reſpondens tali abſciſſæ, eſt accurate quarta pars totius curvæ quæſitæ, ſumptis enim à puncto P ſecundum lineas PM, PN longitudinibus PS, PZ æqualibus radio ſphæræ, ductâque SΣ; & ſecto Cono PMDNE ſecundum lineam SΣ per planum perpendiculare Plano PNM ſectio erit Ellipſis & SΣ unus ejus Ellipſeos axibus; quia verò Triangulus PSΣ eſt Iſoſceles & linea PX angulum SPΣ bifariam dividit, ea linea PX ſecabit axem Ellipſeos SΣ in ipſo centro K Ellipſeos, quoniam autem alter axis KΔ eſt perpendicularis in axem SΣ, & eſt in plano ad Planum PNM perpendiculari, erit axis Δ K perpendicularis in lineam PKX ideoque erit Parallelus ordinatæ XZ, & linea PZ tranſibit per punctum Δ; Ergo unus Ellipſeos quadrans intercipietur inter lineas PN, PZ, hoc eſt reſpondebit portioni NDZ ſemicirculi NZDN, alter verò quadrans Ellipſeos reſpondebit reliquæ portioni MZ ſemi-circuli ejuſdem; Jam verò evidens eſt quod ſi habeatur Conus rectus cujus baſis ſit Ellipſis quævis, & ab ejus Vertice ut Centro, radio quovis deſcribatur curva in ejus Coni ſuperficie, portiones ejus curvæ ſingulis quadrantibus Ellipſeos reſpondentes erunt inter ſe æquales; Ergo portio curvæ reſpondens abſciſſæ $x = \frac{PN}{PN+PM} f$ eſt accuratè quarta pars totius curvæ quæſitæ. 90

Ergo ex prius inventis, cum attractio Puncti P à Pyramidibus in peripheriam MDNE deſinentibus, exprimi debeat per PC ductum in numerum linearum PZ, quæ à puncto P æqualibus angulis procedentes ad peripheriam MDNE deſinunt, is verò numerus linearum PZ ſit ut curva quæ intercipitur in ſuperficie ſphæræ deſcriptæ radio quocumque PS inter eas lineas PZ, eaque curva in quatuor æquales quadrantes dividatur, erit etiam is numerus linearum PZ ut unus ex eis quadrantibus, exprimitur verò is quadrans per ſeriem ſuprà inventam ergo (poſito PS=1) attractio Puncti P à ſolido

$$\text{eſt ut } \frac{PC \times f}{\sqrt{PN \times FN + PM}} \times 1 + \frac{PN^2 + ff - gg}{2.3.PN \times PN + PM} + \frac{3PN^4 + 2PN^2 gf + 3f^2 g^2 + 2PN^2 gg - 6fg^3 - g^4 \&c.}{2.4.5.PN^2 \times \overline{PN+PM}^2}$$

Hæc ſeries tunc minimùm convergit eum ex ſolis coefficientibus numericis convergit cum nempe punctum M coincidit cum puncto P, tunc enim quantitates omnes NM, ſive $f$; Pq ſive $g$, PN & PN+PM ſunt inter ſe æquales & $PC = \frac{g}{2}$ tunc ergo ſeries redit ad $PC \times 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.4.5} + \frac{10}{2.4.4.7} + \frac{35}{2.4.4.4.9}$ &c.

Eo autem in caſu, ex ipsâ conſtructione liquet, portionem curvæ ſphæræ inſcriptæ eſſe quadrantem circuli cujus radius eſt 1, eumque quadrantem exprimi iſtâ ſerie; hinc totam hanc ſeriem æquipollere quantitati $1.57079 \times PC$.

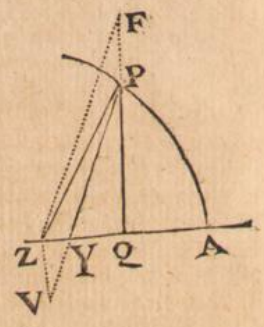
Facilior paulo evadet calculus, ſi loco ſummæ laterum PM+PN, adhibeatur quantitas $\frac{fg}{PN-PM}$ ipſi æquipollens, Prolixior tamen eſt, quàm ut illum applicare ſuſtinuerimus ad ulteriores conſequentias.

Dixi ex his viam ſterni ad determinationem curvæ quam affectat Meridianus Telluris nam ſi ex Æquatione generali $y = Ax^n + Bx^{2n} + Cx^{3n}$ &c. & ex ſerie inventâ determinetur attractio puncti P à quovis circulo, & erigatur in puncto axis quod ejus circuli eſt centrum ordinata quæ ejus circuli attractionem repræſentet, &

DE MUNDI SYSTEMATE.

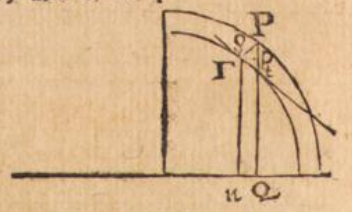
intelligatur curva per earum ordinatarum vertices tranſiens, quæratur ejus curvæ area per vulgatas methodos, habebiturque gravitas puncti P in ſolidum; quæratur præterea punctum axeos Y in quo ſi erigeretur ordinata illi curvæ quæ gravitatem puncti P exprimit, ejus curvæ area bifariam divideretur, erit Y punctum axeos ad quod attractio puncti P dirigetur.

90.




Pariter ex Æquatione generali curvæ habebitur punctum axeos Z ad quod pertinget perpendiculum in curvæ punctum P, habebuntur ergo intervalla ZY & YQ, ex Z ducatur ZV Parallela PQ quæ concurrat cum PY productâ in V, producatur PQ in F ut fiat PF = ZV, ducaturque FZ, quoniam curva circa axem revolvitur, PF erit directio vis centifugæ agentis in puncto P, PV directio gravitatis, PZ verò curvæ perpendicularis erit directio mediata ex utriuſque vis compoſitione (ut conſtat facto cum agatur de tellure ipſâ); ſed quia habentur ZY, YQ, PQ & PY habebuntur ZV & VY, ideóque habebitur VP, ergo habebuntur latera & Diagonalis Parallelogrammi FPVZ ſive habebuntur rationes vis centrifugæ puncti P, vis ejus gravitatis & vis mediæ PZ ex utrâque reſultantis, fiat ergo ut PV ad PZ ita gravitas puncti P ex attractione ſolidi nata & per aream curvæ inventa ad reſiduum ejus gravitatis demptâ vi Centrifugâ.

Tandem inſcripta intelligatur in curva quæ quæritur, alia curva ipſi omninò ſimilis ita ut earum ſit idem centrum, & axes ſupra ſe mutuò jaceant, Æquatoris prioris curvæ ſemi-Diameter dicatur $m$, & differentia ejus à ſemi-Diametro alterius, quæ quamminima aſſumi poteſt, dicatur $dm$, abſciſſa CQ prioris curvæ ſit $z$, erit ejus differentia ab



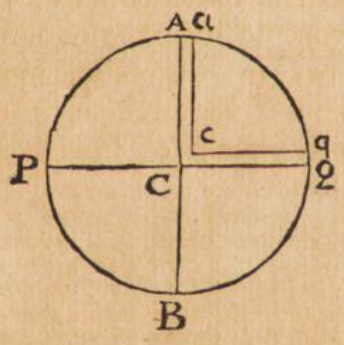

abſciſſâ correſpondenti alterius curvæ $\frac{z\,dm}{m} = Q\pi = \Gamma p$; ordinata PQ ſit $y$ ejus differentia ab ordinatâ correſpondenti erit $\frac{y\,dm}{m} = Pp$; quoniam Γt poteſt ſumi ut portio tangentis curvæ, triangulum Γpt erit ſimile Triangulo fluxionali in puncto Γ ſive etiam in Puncto P ob ſimilitudinem curvarum & abſciſſarum erit ergo: $dz : dy = \Gamma P \left(\frac{z\,dm}{m}\right) : pt = \frac{z\,dy}{dz} \times \frac{dm}{m}$ ergo $Pt = Pp + pt = \overline{y + \frac{z\,dy}{dz} \times \frac{dm}{m}}$ ſed ſi ducatur $P\varrho$ perpendicularis ad curvam in P erit etiam Triang. $P\varrho t$ ſimile Triang. Γpt ideoque Triang. fluxionali; nam ob ſimilitudinem curvarum, tangens Γt eſt parallela curvæ in P, ideóque angulus $\varrho$ eſt rectus, eſt ergo $dv$ ad $dz$ ut Pt ſive $\overline{y + \frac{z\,dy}{dz} \times \frac{dm}{m}}$ ad $P\varrho$ quod erit ergo $\frac{ydz + zdy}{dv} \times \frac{dm}{m}$ ſive deletâ ratione $\frac{dm}{m}$ quæ data eſt, perpendiculi portio inter duas curvas ſimiles intercepti erit ut $\frac{ydz + z\,dy}{dv}$, multiplicetur id perpendiculum per $ydv$, factum erit ut annulus ſolidus inter curvas interceptus tandem ergo multiplicetur $y^2\,dz + zy\,dy$ per valorem gravitatis acceleratrici ſecundum PZ quæ prius inventa fuit, factum erit ut Pondus fluidi inter curvas ſimiles intercepti in puncto P, ſumantur ejus facti fluxiones facta $dz$ conſtanti, & nihilo æquentur illæ fluxiones, ſic pondera omnium partium inter duas curvas contentarum fient æqualia, & habebitur æquatio fluxionalis curvæ quam Meridianus terræ affectat.

Alia etiam eſt in hoc Problemate conditio quæ brevius æquationem ſuppeditare poſſet, nem-

## PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

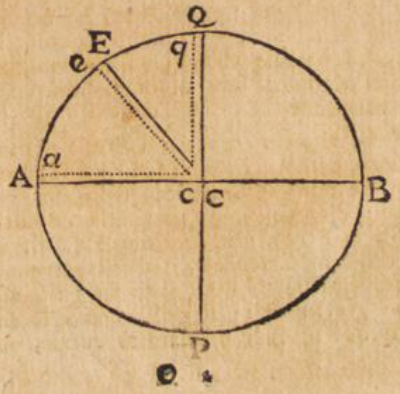
*Invenire & inter ſe comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diverſis.*

(a) Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ




*ACQqca* æqualia ſunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & ſimiliter in totis ſitarum, ſunt ad invicem nempe (fig. præced.) cum ſit PQ ad ZV ut ZY ad YQ, & ZV ſit ubique ut vis centrifuga puncti P quæ eſt ſemper proportionalis ordinatæ PQ, ratio ZY ad YQ conſtans eſſe debet. Bene ergo res ſe habet ſi utroque modo eadem obtineatur curva, ſin minus, oportet ut inter has hypotheſes aliqua ſit repugnantia, nempe dari ſolidum, uniformiter denſum, rotans circa axim & in æquilibrio conſtitutum, in quo media actio inter gravitatem & vim Centrifugam ſit perpendicularis ad curvam; Quæ quidem dicta non putentur ut præripiam palmam & laudem illi qui majori patientiâ aut induſtriâ, determinabit generaliſſime Meridiani figuram ex genuinis Newtonianis principiis, nullâ præſuppoſitâ ad circulum, Ellipſim, aliamve curvam affinitate, ſive his calculis ipſi felicius tractatis ſive aliis. 19.

(a) * *Quoniam pondera.* Concipiatur (ut ſuprà prop. 19.) canalis aquæ plena a polo Q q ad centrum C c & inde ad æquatorem A a pergens. Quia oportet fluidum quieſcere (ex hyp.) erit fluidum in canalis crure A C in æquilibrio cum fluido in ejuſdem canalis crure Q C, & portio quælibet fluidi in crure C A conſiſtet in æquilibrio cum ſimili & ſimiliter poſitâ fluidi portione in crure CQ (ex demonſtratis (in prop. præc.) idem quoque ſimili argumento colligitur de corporibus quibuſvis homogeneis etiamſi fluida non ſint. Quarè corpora homogenea quæ



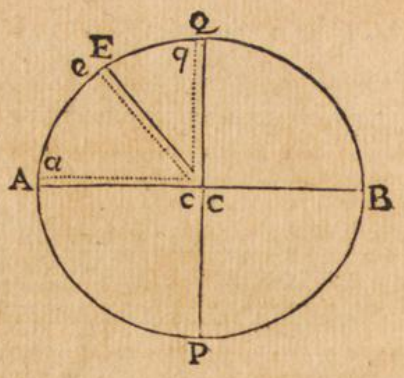
DE MUNDI SYSTEMATE.

ut pondera totorum, ideóque etiam æquantur inter ſe; erunt pondera æqualium & in eruribus ſimiliter ſitarum partium reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut 230 ad 229. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciprocè ut crura, id eſt, reciprocè ut diſtantiæ corporum à centro terræ. Proindè ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie terræ conſiſtant; erunt pondera eorum ad invicem reciprocè ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuſcunque per totam terræ ſuperficiem regionibus, ſunt reciprocè ut diſtantiæ locorum à centro: & (b) propterea, ex hypotheſi quod terra ſphærois ſit, dantur proportione.

Un-

90. ſunt ut A C, Q C in locis A & Q conſtituta æquè gravia ſunt versùs centrum C. Sed gravitas corporis in A poſiti quod eſt ut Q C eſt ad gravitatem alteriùs corporis homogenei ibidem conſtituti quod eſt ut A C ſicut Q C ad A C. Sunt enim corporum homogeneorum in eodem loco conſiſtentium pondera ut ipſamet corpora, ergò corporum homogeneorum in A & Q poſitorum gravitates ſunt ut Q C ad A C. Eodem modo oſtendetur gravitatem corporis in loco E, in altera quâcumque canali C E, eſſe ad gravitatem corporis æqualis & homogenei in loco Q, ut C Q ad C E; fluidum enim in canali A C E quieſcere debet ſicut in priori canali A C Q (per hyp.) undè, ex æquo, æqualium & homogeneorum corporum in telluris ſuperficie ubivis conſiſtentium gravitates abſolutæ ſunt ut diſtantiæ à centro reciprocè.

* Gravitatem corporis in E eſſe ad gravitatem corporis in Q ut C Q ad C E verum eſt non Mathematicè, ſed quam proximè; directio enim gravitatis corporis poſiti in E non eſt ſecundum E C, ita ut ad centrum C tendat, ſed eſt perpendicularis ſuperficiei Q E A (ut ex facto liquet) hinc gravitates in ſingulis punctis forent reciprocè ut radii oſculatores curvæ, ve-



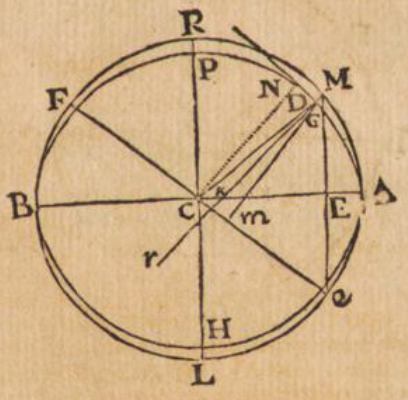

rùm ob figuram terræ prope ſphæricam id ſubtilius ſectari videtur ſuperfluum, tanto magis quod calculorum conſequentiæ, cum experimentis ſint conferendæ in quibus ſemper deficiet Mathematica ἀκριβεία.

91. (b) * *Et propterea.* Ex hypotheſi enim quod terra ſit ſphærois qualem vult Newtonus, hoc conſit theorema; quod ſcilicet *incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos ſit quamproximè ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, vel quod perindè eſt, ut quadratum ſinûs rectilatitu-*

Unde tale confit theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos, ſit quam proximè ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, vel quod perinde eſt, ut quadratum ſinus recti latitudinis. Et (c) in eâdem circiter ratione augen-

*latitudinis.* Sit enim APBA, ellipſis quæ referat meridianum terræ & ARBLA, circulus radio CA, deſcriptus ad quem Ellipſis APBA proxime accedit, ſitque radius CA ſemidiameter æquatoris terreſtris, erit (ex naturâ ellipſis 247 lib. 1.) $RP : MG = CR : EM$, ideóque $MG = \frac{RP \times EM}{CR}$. Sed propter triangula DMG, EMC, ſimilia, ubi ellipſis ad circulum proximè accedit (tunc enim DG, ſumi poteſt pro rectâ tangente Ellipſim in puncto D, & ea tangens eſt quam proxime perpendicularis radio DC) eſt $MG : MD = MC : ME$ ac proindè $MG = \frac{MD \times MC}{ME}$, erit ergò $\frac{RP \times ME}{CR} = \frac{MD \times MC}{ME}$, undè fit $MD = \frac{RP \times ME^2}{CR^2}$. Jam verò ex puncto M, ducatur perpendicularis Mm ad rectam Fe, erit em ſinus verſus arcûs duplicati AM, hoc eſt, arcûs Me, ſivè quia AM exhibet latitudinem (10) erit em, ſinus verſus latitudinis duplicatæ; ſed eſt $em \times eF = M^2$ (ex proprietate circuli). Quarè ob datam eF, eſt em ut $eM^2$, vel etiam ut $ME^2$ ideóque MD, eſt ut $\frac{RP \times em}{CR^2}$, vel ob datas $\frac{RP}{CR^2}$, fit MD, ut em, ſivè ut $ME^2$. Quia verò pondera in locis A & D ſunt ut diſtantiæ locorum à centro reciprocè (ex dem.) erit incrementum ponderis in D, ut $\frac{1}{CD} - \frac{1}{CA}$, hoc eſt, ut CA − CD, vel ut CM − CD ideóque ut MD. Quarè *incrementum ponderis* &c.

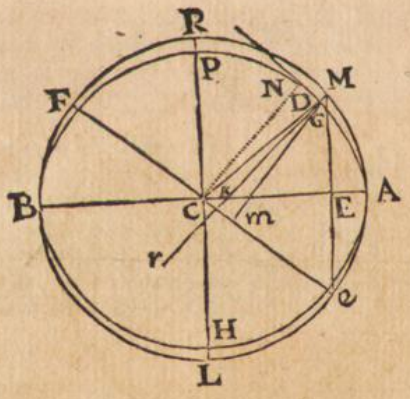
(c) 92. * *Et in eâdem circiter ratione.* Minimus arcus circuli curvam aliquam




in dato puncto oſculantis pro arcu infinitesimo curvæ in hoc puncto uſurpari poteſt (121. lib. 1.). Sed integri gradus ſunt ut minimi arcus ſimiles, arcus autem illi ſunt ut radii circulorum curvam oſculantium; quarè gradus integri erunt ut iidem radii. Erit itaque gradus in loco D, ut radius circuli ellipſim ibidem oſculantis, & gradus in loco A, itidem ut radius circuli ellipſim oſculantis in eodem puncto A. Jam verò ductâ perpendiculari CN, ad tangentem DN, ſumptoque Dr, pro radio oſculatore in D, erit Dr ut $Dk^3$, ſive quia eſt $CP^2 = CN \times DK$ (ibid.) ob datam $CP^2$ erit Dk ut $\frac{1}{CN}$, ideóque radius circuli qui eſt ut $Dk^3$, erit ut $\frac{1}{CN^3}$, hoc eſt, radius circuli ellipſim oſculantis eſt

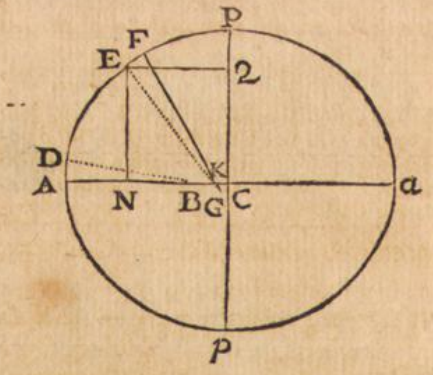
DE MUNDI SYSTEMATE.

augentur arcus graduum latitudinis in meridiano. Ideóque cum latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit 48gr. 50′, ea locorum sub æquatore 00 gr. 00′, & ea locorum ad polos 90 gr. & duplorum tore




reciprocè ut cubus perpendiculi ex centro C in tangentem D N demissi. Quarè incrementa graduum in D, pergendo ab æquatore ad polos erunt ut $\frac{1}{CN^3} - \frac{1}{CA^3}$ hoc est, ut $CA^3 - CN^3$, sivè ut $CM^3 - CN^3$, vel etiam ut $CM^3 - CD^3$ quoniam differentia rectarum CN, CD admodùm exigua est. Sed est $CM^3 = (CD + DM)^3 = CD^3 + 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3$, ideóque $CM^3 - CD^3 = 3CD^2 \times DM + 3DM^2 \times CD + DM^3 = 3CD^2 \times DM$, ob quantitates $DM^2$, $DM^3$, fere evanescentes respectu $3CD^2 \times DM$, sunt igitur incrementa graduum ut $3CD^2 \times DM$, sivè ut DM, ob rectam CD proximè constantem. Quarè incrementa graduum sunt ut ponderum incrementa.

93. Idem analyticè præstari potest quemadmodum elegantissimè, pro more suo, fecit Clariss. D. De Maupertuis in monumentis Paris. an. 1734. & in libro de figurâ terræ. Semiellipsis P A p, referat meridianum sphæroidis cujus est axis Pp, diameter verò secundum æquatorem A a. Ponatur CA = 1, CP = *m*, CN = *x*, EN = *y* erit (ex naturâ ellipseos per lem.




4. de Conicis) $EN^2 : CP^2 = AN \times Na : AC^2$, ideóque $y^2 = m^2 \times (1 - xx)$ & $y = m\sqrt{1 - xx}$. Sit GE, radius circuli ellipsim osculantis in E, is erit (214. lib. 1.) $= \frac{1}{m}(1 - xx + mmxx)^{\frac{3}{2}}$. Quia verò $EK^3 = \frac{EG \times PC^4}{AC^2}$ (239. lib. 1.) erit $EK = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2}$. Jam sinus anguli latitudinis AKE, dicatur *s*, posito sinu toto = 1, erit $1 : s = m\sqrt{1 - x^2 + m^2x^2} : m\sqrt{1 - xx}$, ac proindè $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$ quo valore substituto, loco *xx* in expressione radii osculatoris, fiet $EG = \left(\frac{mm}{1 - ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}}$. Nunc conferantur simul duo gradus meridiani AD, EF, quorum unus incipiat ab æquatore, alter verò

sinus versi sint 1134, 00000 & 20000, existente radio 10000, & gravitas ad polum sit ad gravitatem sub æquatore ut 230 ad 229. & excessus gravitatis ad polum ad gravitatem sub æsinus

verò sumatur ubivis in arcu AP, sumpto AB, pro radio circuli ellipsim osculantis in A, erit (92) AD:EF=AB:EG, sed est $AB=\frac{PC^2}{AC}$ (241. lib. 1.)$=mm$, quarè si gradus AD dicatur $A$ & gradus EF, dicatur $E$ fiet $A:E=mm:\frac{mm}{(1-ss+mmss)^{\frac{3}{2}}}$ ac proindè $E=A\times(1-ss+mmss)^{-\frac{3}{2}}$. Hæc formula exprimit relationem inter primum gradum latitudinis & alium quemlibet gradum, atque inter diametrum & axem.

94. Si quantitas $1+mm-ss$, evehatur ad dignitatem cujus exponens est $-\frac{3}{2}$ (550. lib. 1.) erit $E=A\times(1-\frac{3}{2}(mm-1)ss+\frac{15}{8}\times(mm-1)ss^2-$&c.) vel $A-E=\frac{3}{2}(mm-1)AS^2-\frac{15}{8}(mm-1)^2AS4+$&c. Quia verò sphærois terræ ad sphæram proximè accedit, erit ferè $m=1$, ideóque in superiori formulâ negligi poterunt termini in quibus quantitas $mm-1$, ad altiorem potestatem evecta occurrit, undè fit pro tellure $2A-2E=3(mm-1)\times ASS$. Si terra ponatur versùs polos compressa erit $1>m$ & $E>A$, hinc que prodit $E-A:ASS=3\times(1-mm):2$. Quare iterum patet id quod jam demonstravimus (92) arcus scilicet graduum latitudinis in meridiano augeri in duplicatâ ratione sinûs recti latitudinis.

95. Si gradus AD, non computetur ab ipso æquatore, sed ubivis inter A & E sumatur, sitque $S$ sinus anguli latitudinis, patet (94) fore $BD=\frac{mm}{(1-SS+mmSS)^{\frac{3}{2}}}$ ideóque $A:E=\frac{mm}{(1-SS+mmSS)^{\frac{3}{2}}}:\frac{mm}{(1-ss+mmss)^{\frac{3}{2}}}$, ac proindè $E\times(1-ss+mmss)^{\frac{3}{2}}=A\times(1-SS+mmSS)^{\frac{3}{2}}$. 96

Jam verò evectis terminis ut suprà ad dignitatem cujus exponens $\frac{3}{2}$, neglectisque quantitatibus evanescentibus (95), fiet $1-mm=\frac{2(E-A)}{3E\times(ss-SS)}$.

Si gradus unus ab æquatore, alter à polo numeretur, erit $s=1$, & $S=0$, ideóque formula præcedens abit in hanc $1-mm=\frac{2(E-A)}{3E}$.

96. Si loco semidiametrorum CA, CP, & sinus latitudinis $ss$, in æquatione $xx=\frac{1-ss}{1-ss+mmss}$, (93) substituantur expressiones quælibet indeterminatæ, æquatio præcedens quatuor continebit variabiles, quarum tribus cognitis quarta innotescet. Quare datis semidiametro æquatoris CA, semidiametro paralleli NC vel EQ, $x$, aut quod idem est, datis gradu æquatoris & gradu paralleli (sunt enim gradus illi ut ipsimet circuli, ideóque ut radii) & simul cognitâ latitudine, cujus sinus $s$, dabitur axis ellipsoidis. Simili prorsus modo ductâ quâlibet aliâ ordinatâ EQ, quæ sit alterius paralleli Semidiameter & mutatâ utcumque latitudine, instituì poterit alia æquatio quatuor variabiles continens ac proindè duplex obtinebitur æquatio. Jam verò quia hæc utraque æquatio duas continet indeterminatas communes, nempè semidiametros ellipsis, patet datis duorum parallelorum gradibus, datisque latitudinibus, per vulgares algebræ regulas collatâ simul utrâque æquatione, determinari posse semidiametrorum rationem. Cæterum hæc omnia constructionibus geometricis facilè absolvi possunt, verùm in præsenti materiâ præstat calculum adhibere.

DE MUNDI SYSTEMATE.

quatore ut 1 ad 229: (d) erit exceſſus gravitatis in latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem ſub æquatore, ut $1\frac{11334}{20000}$ ad 229, ſeu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. (e) Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, & in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* longitudo penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis ſit pedum trium Pariſienſium & linearum $8\frac{1}{2}$, vel potius (f) ob pondus aëris $8\frac{5}{9}$: longitudo penduli ſub æquatore ſuperabitur à longitudine ſynchroni penduli Pariſienſis, (g) exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ. Et ſimili computo conſit tabula ſequens.

§ 6.

(d) * *Erit exceſſus gravitatis.* Exceſſus gravitatis ad polum dicatur $E$, exceſſus gravitatis in latitudine Lutetiæ dicatur $e$, ſitque $G$, gravitas ſub æquatore, erit.

$E : G = 1 : 229$

$e : E = 11334 : 20000$, ideóque per compoſitionem rationum & ex æquo $e : G = 1 \times 11334 : 229 \times 20000 = \frac{1 \times 11334}{20000} : 229$, hoc eſt, exceſſus gravitatis in latitudine Lutetiæ eſt ad gravitatem ſub æquatore $= \frac{1 \times 11334}{20000} : 229 = 5667 : 2290000$, & propterea addendo 5667 numero 2290000, gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000.

(e) * *Quarè cum longitudines pendulorum.* (Cor. 4. Prop. 24. Lib. 2.).

(f) * *Ob pondus aeris.* Corpus oſcillans in aere ponderis ſui partem amittit æqualem ponderis paris voluminis aeris, quare ſi idem corpus ponatur moveri in vacuo, paululum augeri debet illius pondus ideoque celeriùs vibrabit & ut ad Iſochroneitatem reducatur augeri debebit longitudo penduli eâdem ratione quâ augetur gravitas hinc cum $\frac{1}{11000}$ parte plumbi pondus in vacuo augeatur tantumdem augeri debet penduli longitudo quæ erit ergo ad $440\frac{1}{2}$ l. ut 11001 ad 11000 invenieturque 440 $\frac{5}{9}$ (289. lib. 2.). Hinc in latitudine Lutetiæ Pariſiorum longitudo penduli ad minuta ſecunda oſcillantis in vacuo hic ponitur pedum trium Pariſ. & lin. 8 $\frac{5}{9}$ proximè.

(g) * *Exceſſu lineæ unius & 87 partium milleſimarum.* Cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oſcillantium ſint ut gravitates, erit 2295667 ad 2290000 ut longitudo penduli in latitudine Lutetiæ, hoc eſt, ut 3 ped. 8 $\frac{5}{9}$ lin. vel ut $\frac{3965}{9}$ lin. ad quartum proportionalem $\frac{9079850000}{20661003} = 439.468$, qui eſt penduli longitudo ſub æquatore. Hâc autem demptâ ex longitudine penduli in latitudine Lutetiæ ped. 3. & 8 $\frac{5}{9}$ lin., ſeu lin. 440.555, remanet exceſſus lineæ unius & 87 partium milleſimarum lineæ.

Lati-

| *Latitudo loci.* | *Longitudo penduli.* | | *Mensura gradus unius in meridiano.* |
|---|---|---|---|
| *grad.* | *ped.* | *lin.* | *hexapedæ.* |
| 0 | 3 | 7,468 | 56637 |
| 5 | 3 | 7,482 | 56642 |
| 10 | 3 | 7,526 | 56659 |
| 15 | 3 | 7,596 | 56687 |
| 20 | 3 | 7,692 | 56724 |
| 25 | 3 | 7,812 | 56769 |
| 30 | 3 | 7,948 | 56823 |
| 35 | 3 | 8,099 | 56882 |
| 40 | 3 | 8,261 | 56945 |
| 1 | 3 | 8,294 | 56958 |
| 2 | 3 | 8,327 | 56971 |
| 3 | 3 | 8,361 | 56984 |
| 4 | 3 | 8,394 | 56997 |
| 45 | 3 | 8,428 | 57010 |
| 6 | 3 | 8,461 | 57022 |
| 7 | 3 | 8,494 | 57035 |
| 8 | 3 | 8,528 | 57048 |
| 9 | 3 | 8,561 | 57061 |
| 50 | 3 | 8,594 | 57074 |
| 55 | 3 | 8,756 | 57137 |
| 60 | 3 | 8,907 | 57196 |
| 65 | 3 | 9 044 | 57250 |
| 70 | 3 | 9,162 | 57295 |
| 75 | 3 | 9,258 | 57332 |
| 80 | 3 | 9,329 | 57360 |
| 85 | 3 | 9,372 | 57377 |
| 90 | 3 | 9,387 | 59382 |

Constat autem per hanc tabulam quod graduum inæqualitas tam parva sit, ut in rebus geographicis figura terræ pro sphæ-

DE MUNDI SYSTEMATE.

rica haberi poſſit: (h) præſertim ſi terra paulo denſior ſit verſus planum æquatoris quam verſus polos.

Jam vero aſtronomi aliqui in longinquas regiones ad obſervationes aſtronomicas faciendas miſſi, obſervarunt quod horologia oſcillatoria tardiùs moverentur prope æquatorem quàm in regionibus noſtris. Et primo quidem D. *Richer* hoc obſervavit anno 1672. in inſulâ *Cayennæ*. Nam dum obſervaret tranſitum fixarum per meridianum menſe *Anguſto*, reperit horologium ſuum tardius moveri quam pro medio motu ſolis, exiſtente differentiâ $2'.\ 28''$ ſingulis diebus. Deinde faciendo ut pendulum ſimplex ad minuta ſingula ſecunda per horologium optimum menſurata oſcillaret, notavit longitudinem penduli ſimplicis, & hoc fecit ſæpius ſingulis ſeptimanis per menſes decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus penduli cum longitudine penduli Pariſienſis (quæ erat trium pedum Pariſienſium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem eſſe, exiſtente differentiâ lineæ unius cum quadrante.

Poſtea *Halleius* noſter circa annum 1677 ad inſulam *Sanctæ Helenæ* navigans, reperit horologium ſuum oſcillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, ſed differentiam non notavit. Pendulum verò brevius reddidit pluſquam octavâ parte digiti, ſeu lineâ unâ cum ſemiſſe. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in imâ parte penduli non ſufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interpoſuit.

Deinde anno 1682. D. *Varin* & D. *Des Hayes* invenerunt longitudinem penduli ſingulis minutis ſecundis oſcillantis in obſervatorio regio Pariſienſi eſſe ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in inſulâ *Goreâ* eâdem methodo longitudinem penduli ſynchroni invenerunt eſſe ped. 3. lin. $6\frac{1}{9}$, exiſtente longitudinum differentiâ lin. 2. Et eodem anno ad inſulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem penduli ſynchroni in his inſulis eſſe ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Poſthac

(h) * *Præſertim ſi terra.* In eo ſiquidem caſu minui diametrorum differentiam oſtendimus (in prop. præc.).

Posthac D. *Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum solis medium in observatorio regio Parisiensi sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit quod mense *Novembri* proximo horologium tardiùs iret quàm priùs, existente differentiâ $2'.\ 13''$ in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardiùs ire quam *Parisiis*, existente differentiâ $4'.\ 12''$ in horis 24. Et affirmat pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Parisiis*. (i) Rectius posuisset differentias esse $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{9}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum $2'.\ 13''$, & $4'.\ 12''$ respondent. Crassioribus hujus observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 & 1700) D. *Des Hayes* ad *Americam* denuò navigans determinavit quod in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{1}{4}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuilleus* invenit in *Porto-belo* in *Americâ* longitudinem penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est, tribus ferè

(i) * *Rectiùs posuisset.* Horologium tardiùs ibat Ulyssiponi quam Parisiis, existente differentiâ $2'\ 13''$, seu $133''$, ideóque horologium illud Parisiis conficiens 24. hor. spatio $86400''$, Ulyssiponi conficiebat tantùm $86400'' - 133''$, hoc est, $86267''$. Sed est longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$. Quarè si longitudo penduli ad minuta secunda Ulyssipone oscillantis dicatur L, erit (cor. 4. prop. 24. lib. 2.) $(86400)^2 : (86267)^2 = \frac{3965}{9} : L$, seu $67184640000 : 2950749131288\overline{5} = 3965 : L$ ac proindè $L = \frac{2950749131288\overline{5}}{67184640000} = 439\frac{13434352885}{67184640000} = 439\frac{5}{8}$ lin. circiter. Est autem longitudo penduli Parisiis ad minuta secunda oscillantis lin. $\frac{3965}{9}$ seu $440.555$, vel $440\frac{1}{2}$, quarè differentia pendulorum Parisiis & Ulyssipone ad minuta secunda oscillantium debet esse $440\frac{1}{2} - 439\frac{1}{8} = 1\frac{1}{3}$. Rectius itaque posuisset D. Couplet differentiam esse $1\frac{1}{3}$. Simili computo patet differentiam pendulorum Parisiis & Paraibæ esse $2\frac{5}{9}$. 96.

De Mundi Systemate.

rè lineis breviorem quàm *Lutetiæ Parisiorum*, sed (k) errante observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem penduli isochroni esse pedum tantum trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est $6^{gr}.\ 38'$ ad austrum, & ea *Porto-beli* $9^{gr}.\ 33'$ ad boream, & latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, *Sancti Christophori*, & *Sancti Dominici* sunt respectivè $4^{gr}.\ 55'$, $14^{gr}.\ 40'$, $14^{gr}.\ 00'$, $14^{gr}.\ 44'$, $12^{gr}.\ 6'$, $17^{gr}.\ 19'$, & $19^{gr}.\ 48'$ ad boream. Et excessus longitudinis penduli Parisiensis supra longitudines pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas sunt paulo majores quam pro tabulâ longitudinum penduli superius computatâ. Et propterea (l) terra aliquanto altior est sub æquatore quam pro superiore calculo, & densior ad centrum quam in fodinis prope superficiem, nisi forte calores in zonâ torridâ longitudinem pendulorum aliquantulum auxerint.

Ob-

9 6.

(k) * *Sed errante observatione.* Latitudo Portobeli est 9°. 33′ ad boream, & latitudo Martinicæ est 14°. 44′. Hinc differentia latitudinum est 5°. 11′. Est autem latitudo Lutetiæ 48°. 50′, quare differentia latitudinum Lutetiæ & Portobeli est 39°. 17′. Sed præterquam quod observationes Feuillæi à tabulâ Newtonianâ maximè discrepant, secum invicem non satis consentire videntur. Cum enim differentia latitudinum 39°. 17′, ex iisdem observationibus, præbuerit longitudinem penduli minorem Portobeli quam Parisiis tribus ferè lineis, differentia latitudinum Martinicæ & Portobeli quæ est 5°. 11′ majorem in hisce latitudinibus præbere debuisset penduli differentiam quam $\frac{3}{12}$ lin. qualem invenit Feuillæus. Hunc cæteroquin diligentissimum observatorem non satis hâc in re accuratum fuisse confirmant observationes an. 1735. Portobeli habitæ à Clariss. Viris DD. Godin & Bouguer, quorum prior pendulii longitudinem Portobeli invenit 36 poll. 7 lin. $\frac{7}{89}$, posterior verò eandem longitudinem summo consensu determinavit 36 poll. 7 lin. $\frac{7}{99}$.

(l) 97. *Terra aliquantò altior est.* Materia ad centrum redundans quâ densitas ibi major fit, seorsim à reliquâ tellure uniformiter densâ spectetur, gravitas in terram uniformiter densam erit reciprocè ut distantia à centro (ex demonstratis in prop. 19.). Gravitas autem in materiam redundantem erit reciprocè ut quadratum distantiæ à materiâ illâ quam proximè (prop. 76. lib. 1.) cum igitur in casu terræ uniformiter densæ, illius superficies versùs æquatorem elevetur, versùs polum verò deprimatur, gravitasque ad æquatorem minor sit quam ad polum in ratione distantiæ poli à centro ad æquatoris semidiametrum, ad prædictam autem materiam redundantem circà centrum gravitas ad æquatorem minor fit quam ad polum in ratione duplicatâ distantiæ poli à centro ad æquatoris semidiametrum, quæ ratio priori ratione simplici minor est, patet in casu telluris versùs centrum densioris ex utráque simul causâ fieri ut gravitas ad æquatorem ex binis prioribus composita minor sit gravitate ad polum in ratione minore quam est ratio distantiæ poli à

centro

Obſervavit utique D. *Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evaſit pedis unius cum quartâ parte lineæ. (m) Deinde D. *De la Hire* obſervavit quod virga ferrea quæ tempore conſimili hyberno ſex erat pedum longitudinis, ubi ſoli æſtivo exponebatur evaſit ſex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore caſu calor major fuit quam in poſteriore, in hoc verò major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad ſolem æſtivum valde incaleſcunt. At virga penduli in horologio oſcillatorio nunquam exponi ſolet calori ſolis æſtivi, nunquam calorem concipit calori externæ ſuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æſtivo quam hyberno, ſed exceſſu quartam partem lineæ unius vix ſuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverſis regionibus iſochrona ſunt diverſo calori attribui non poteſt. Sed neque erroribus aſtronomorum è *Galliâ* miſſorum tribuenda eſt hæc differentia. Nam quamvis eorum obſervationes non perfectè congruant inter ſe, tamen errores ſunt adeo parvi ut contemni poſſint.

98.

centro ad æquatoris ſemidiametrum, & ideò ob minorem hanc gravitatem in æquatore reſpectu gravitatis ad polos, tellus magis ad æquatorem elevabitur quam pro ſuperiori calculo, ac proindè longitudo pendulorum quæ gravitati acceleratrici proportionalis eſt (cor. 4. prop. 24. lib. 2.) paulo major eſſe debet quam pro tabulâ longitudinum computatâ in caſu terræ uniformiter denſæ.

(m) 9. * *Deindè D. Delahire.* Hiſce obſervationibus adjungi debent inſtituta à Clariſſ. Viro D. De Mairan experimenta quæ in monum. Pariſ. an. 1735. leguntur. Ut caloris Solaris vim exploraret, laminas ferri & cupri à loco clauſo ac temperato vel etiam frigeſcente, ad locum Solaribus radiis apertum transferebat, ibique plurium horarum ſpatio relinquebat. Deindè laminarum dilatationem circino accuratè capiebat, menſurato priùs caloris Solaris incremento ope thermometri Reaumuriani. Obſervavit ob majorem Solis calorem reſpectu loci clauſi in quo anteà ſuſpenſum erat thermometrum, ad 15 vel 20 gradus liquorem perveniſſe & ferri laminam 3. ped. $8\frac{1}{2}$ lin. longam dilatari invenit $\frac{1}{30}$ vel $\frac{1}{22}$ lin. cuprum flavi coloris majorem quam ferrum à radiis Solaribus patiebatur dilatationem. Experimentum quoque tentavit in aquâ ebulliente; immerſit nempe in eâ cuprum flavi coloris & ferrum, eandem plane in utroque metallo dilatationem fieri obſervavit; cæterum lamina cuprea tres pedes 8. lin $\frac{1}{2}$ longa, menſe Julio, aſcendente thermometro ad altitudinem 22. grad. ſuprà congelationem, ob aquæ ebullientis calorem dilatabatur $\frac{1}{3}$ lin. circiter.

DE MUNDI SYSTEMATE.

possint. Et in hoc concordant omnes, quod isochrona pendula sunt breviora sub æquatore quam in observatorio regio Parisiensi, existente differentiâ non minore quam lineæ unius cum quadrante, non majore quam linearum $2\frac{3}{4}$. Per observationes D. *Richeri* in *Cayenna* factas differentia fuit lineæ unius cum quadrante. Per eas D. *Des Hayes* differentia illa correcta prodiit lineæ unius cum semisse vel unius cum tribus quartis partibus lineæ. Per eas aliorum minus accuratas prodiit eâdem quasi duarum linearum. Et hæc discrepantia partim ab erroribus observationum, (n) partim à dissimilitudine partium internarum terræ & altitudine montium, & partim à diversis aëris caloribus, oriri potuit.

Virga ferrea pedes tres longa, tempore hyberno in *Angliâ*, brevior est quam tempore æstivo, sextâ parte lineæ unius, quantum sentio. Ob calores sub æquatore auferatur hæc quantitas de differentiâ lineæ unius cum quadrante à *Richero* observatâ, & manebit linea $1\frac{1}{12}$: quæ cum linea $1\frac{87}{1000}$ per theoriam jam ante collecta probe congruit. *Richerus* autem observationes in *Cayennâ* factas, singulis septimanis per menses decem iteravit, & longitudines penduli in virgâ ferreâ ibi notatas cum longitudinibus ejus in *Gallia* similiter notatis contulit. Quæ diligentia & cautela in aliis observatoribus defuisse videtur. Si hujus observationibus fidendum est, (o) terra altior erit ad æquatorem quam ad polos excessu milliarium septendecim circiter, ut supra per theoriam prodiit.

98. (n) * *Partim à dissimilitudine.* Quæ de pendulorum longitudinibus dicta sunt in hâc propositione, supponunt homogeneam esse telluris materiam; si verò homogenea non sit ubique, sed aliqua sit in partibus internis terræ dissimilitudo patet (96) hinc quasdam oriri posse in pendulorum longitudinibus irregularitates. Similem ob causam, ex montium altitudine, vallium cavitate inæqualitates aliquæ nasci poterunt, pro excessu enim vel defectu materiæ augebitur vel minuetur gravitas. Observationum discrepantiam repeti etiam posse à diversis aëris caloribus manifestum est ex observationibus Picarti, La Hirii & ex notâ præcedenti.

(o) * *Terra altior erit.* Si hujus observationibus fidendum est, longitudo penduli sub æquatore superabitur à longitudine penduli synchroni Parisiensis excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ, ideóque longitudo penduli sub æquatore erit 3. ped. 7. $\frac{4217}{9000}$ lin. seu 3. ped. 7. 468. lin. proximè, est enim longitudo per-

penduli Pariſ. 3. ped. $8\frac{5}{9}$ lin. ſed eſt incrementum ponderis ſivè incrementum longitudinis penduli pergendo ab æquatore ad polos ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ, ac proindè $\frac{1087}{1000}$ ſeu 1 lin. $\frac{87}{1000}$ erit ad incrementum longitudinis ſub polo ut 11334 ad 20000. Quare incrementum illud eſt $1\frac{10406}{11334}$, ſeu $1\frac{919}{1000}$ proximè. Erunt ergò pondera ſeu pendulorum longitudines ſub æquatore & ſub polo reſpectivè 3. ped. 7.468 lin. & 3. ped. 9.387 lin. hoc eſt proximè ut in tabulâ Newtonianâ. Sed pondera ſunt reciprocè ut diſtantiæ à centro (ex demonſtratis in Prop. 19.) ideóque 439468 eſt ad 441387 ut diameter versùs polos eſt ad diametrum ſecundum æquatorem, ſivè ut 229 ad 230 proximè, ideóque poſitâ ſemidiametro terræ (ut in Prop. præced.) patet (per notas in eandem Prop.) terram altiorem eſſe ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium ſeptemdecim circiter.

99. Clariſſ. D. Campbell Londini in latitudine 51° $\frac{1}{2}$ & in Jamaicâ in latitudine 18°. accuratiſſimis obſervationibus inſtitutis, invenit longitudinem penduli ſimplicis ad minuta ſecundæ Londini oſcillantis eſſe 39.129. poll. angl. idemque pendulum tardius ire in Jamaicâ quam Londini deprehendit, exiſtente differentiâ 1′ 58″ ſpatio 24. hor. Ex his obſervationibus, eodem quo hactenus uſi ſumus computo determinavit longitudinem penduli ſub æquatore eſſe ad longitudinem pendu li ſub polis ut 39000 ad 39206, unde prodit diameter æquatoris ad diametrum versùs polos in ratione 39206 ad 39000 ſivè ut 190 ad 189 ferè; ideóque poſitâ ſemidiametro terræ ut in prop. præced. terra altior erit ad æquatorem quam ad polos exceſſu milliarium 41 circiter. Doctiſſimi Viri DD. Godin, Bouguer, De la Condamine ſummâ diligentiâ in latitudine 18° 27′ obſervationes habuerunt quæ cum obſervationibus D. Campbell probè congruunt. In id quoque conſpirant obſervationes versùs polum inſtitutæ à Celeberrimo D. De Maupertuis Clariſſimiſque Sociis ut terram versùs æquatorem magis elatam conſtituant quam pro theoriâ Newtoni. Idem confirmat accurata graduum terreſtrium menſura. Longitudo gradus meridiani qui circulum polarem ſecat à D. De Maupertuis inventa eſt 57437,9 hexaped. & longitudinem gradûs in galliâ in 45°. 57100. hexaped. probabiliter aſſùmi poſſe oſtendimus. Hinc gradûs utriuſque differentia eſt 337 hexaped. aut ad minimum 300 hex. ſed ex tabulâ Newtonianâ differentia inter 45 gr. & 65. eſt 240. hexapedarum, creſcunt itaque gradus latitudinis pergendo ab æquatore ad polos magis quam juxtà tabulam Newtonianam ac proindè non ſolum terra eſt elata ſub æquatore (94), ſed etiam diametrorum differentia ex obſervationibus major quam ex ipsâ theoriâ colligitur. Conſulatur obſervationum ſeries quam tranſactionibus Anglicanis an. 1734. inſeruit Autor verſionis gallicæ.

LIBER TERTIUS. PROP. XX. PROBL. IV. 99.

100. Scholium. Penduli longitudinem Romæ determinare pluribus experimentis tentavimus cum Doctiſſimis & in obſervando verſatiſſimis PP. Boſcovik & Maire S. J. Mathematicis. Uſi ſumus methodo illâ accuratiſſimâ quam ſagaciſſimus naturæ indagator ſummuſque Geometra D. De Mairan tradit in Monum. Acad. Reg. Pariſ. ad an. 1735., ubi experimenta recenſet quæ cum incredibili curâ adversùs omne errorum genus peregit. Paravimus itaquè horologium oſcillatorium à Celeber. Graham Londini conſtructum, nobiſque ab Illuſtriſſimo D. Leprotti humaniſſimè commodatum, quod per appulſum fixæ ad teleſcopium immotum ſingulis obſervationum diebus dirigebamus ut tempus Solis medium indicaret. In machinâ quâdam immotâ conſtituimus plana duo horizontalia, e quorum altero filum pendebat laminis metallicis aptè inter ſe congruentibus compreſſum cochlearum ope, alterum ità ſenſim elevabatur per cochleas ut horizontalem ſitum ſervaret, & globum e filo ſuſpenſum inferius contingeret. Diſtantiam puncti ſuſpenſionis à puncto illo infimo globi, quo planum horizontale ſubjectum contingebat, inveſtigabamus ope menſuræ Londinenſis bipedalis accuratiſſimæ, quam cum pluribus aliis conſentientem P. Abbas Revillas Clariſſ. Vir, publicus Profeſſ. Math. & Acad. Londin. Socius exhibuit nobis. Huic menſuræ inſerta eſt altera regula mobilis quam pro arbitrio educere ad altitudinem 4. pedum conficiendam. Hanc igitur inter punctum ſuſ-

DE MUNDI SYSTEMATE.

100.

ſuſpenſionis & punctum globi infimum interponebamus perpendiculariter ad plana horizontalia, maxime que cavebamus ne in hâc menſurâ error aliqualis irreperet. Plura idcirco negleximus experimenta in quibus filum extendebatur obſervationis tempore, aliaque rejecimus facta cum filo ſerico vel cum globo eburneo qui nimiam in aëre reſiſtentiam patiebatur. Sex igitur tantum quæ nobis tutiſſima viſa ſunt deſcribemus, facta ſunt cum globo cupreo cujus quælibet ſemidiameter inventa eſt partium digiti Londinenſis milleſimarum 603, pondus verò unciarum $4\frac{1}{8}$ ſeu granorum 2520. Illum ſuſpendebamus e filo ex foliis aloës parato quod gallice dicitur: *fil de pite*, hujuſmodi filum $21\frac{1}{2}$ ped. Londin. longum, æquiponderabat granis 5, & propterea pondus fili 44 digit. erat ad pondus globi ut 1 ad 2955, pondus verò 35. digit. ad pondus ejuſdem globi ut 1 ad 3715. Hinc per ea quæ D. De Mairan loco citato demonſtravit, ſi diſtantia puncti ſuſpenſionis à centro globi ſit 44 digit. Lond. circiter, ex longitudine obſervatâ ſeu interceptâ inter punctum ſuſpenſionis & punctum infimum globi ſubtrahenda erit longitudo 0,6023 digit. ut habeatur vera longitudo penduli ſimplicis pendulo obſervationis iſochroni. Si verò diſtantia puncti ſuſpenſionis à centro globi ſit 35 digit. circiter, auferenda erit longitudo 0,6004 digit.

1. Experimentum 13ª. Julii manè.

| | |
|---|---|
| Longitudo obſervata | 45.145 dig. Lond. |
| Longit. ſubtrahenda. | 0.6023 |
| Longitudo vera | 44.5427. |

Numeravimus oſcillationes globi 3261 eo tempore quo horologium oſcillatorium 3479 abſolvit, hoc eſt, interuallo 3480.69 ſecundorum temporis medii. Horologium enim tardius movebatur quam pro medio motu Solis & differentia erat 42 ſecundorum pro horis 24. eſt igitur $3480.69^2$ ad $3261^2$ ut 44.5427 ad 39.09736 digit. Lond. quæ eſt longitudo penduli ſimplicis ad ſingula minuta temporis medii oſcillantis.

2. Experimentum eâdem die veſpere. Longitudo obſervata 45. 18. digit. Lond. longitudo vera 44.5777. Numerus oſcillationum globi 3387, tempore medio 3616.75. ſecund. unde habetur longitudo penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda oſcillantis 39.0941 digit. Lond.

3. Experimentum 14ª. Julii. Longitudo obſervata 36.26. longitudo vera 35 6596 digit. Lond. numerus oſcillationum globi 3740 tempore medio 3571.75 ſecund. longitudo penduli quæſita 39.09827. digit. Lond.

4. Experimentum 16ª. Julii. Longitudo obſervata 36 97. longitudo vera 36.3696. numerus oſcillationum globi 3832 tempore medio 3695.88 ſecund. longitudo penduli quæſita 39.09703 digit. Lond.

5. Experimentum 19ª. Julii. Longitudo obſervata 35.185. longitudo vera 34.5846. digit. numerus oſcillationum globi 3870 tempore medio 3639.85. ſecund. penduli quæſita 39.096485.

6. Experimentum 5ª. Auguſti. Longitudo obſervata 45. 427. longitudo vera 44.8247 digit Lond. numerus oſcillationum globi 3563 tempore medio 3815.03 ſecund. longitudo quæſita 39.097872.

Ex his omnibus experimentis invenitur media longitudo penduli 39.09686 digit. Lond. verum ſi rejiciatur ſecundum experimentum quod ab aliis quinque inter ſe probè conſentientibus nimis diſſert; media longitudo prodit 39.0974 digit. Lond. Hoc autem experimentum ſecundum rejici debere inde etiam concludimus quod ſextum maximè accuratum nobis viſum ſit, nam omninò invariata fuit fili longitudo toto obſervationis tempore & omnes concurſus diligentiſſimè notati inter ſe congruebant.

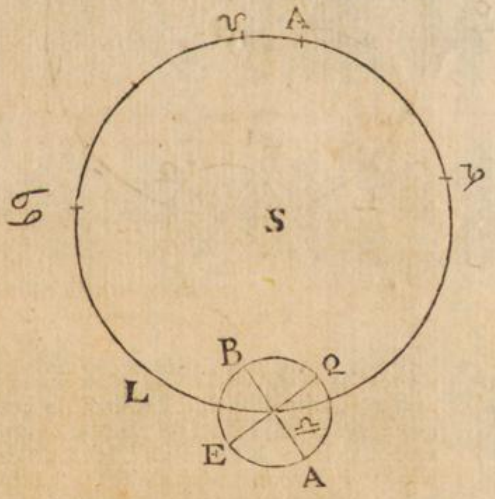
Pes Londinenſis vulgò ſupponitur eſſe ad ped. Pariſ. ut 135 ad 144 vel etiam ut 1000 ad 1068, quâ ratione cum primum uſi eſſemus, longe minorem, quam par eſt, penduli longitudinem inveniebamus. Sed ratio illa in re adeò ſubtili ſatis accurata non eſt. Nam D. Godin. monum. Acad. Reg. Scientiarum ad an. 1735 pag. 508, ſcribit ſe cum D. Bouguer obſervaſſe pedem Lond. ſe habere ad ped. Pariſ. ut $1351\frac{1}{3}$ ad 1440. ſi hanc adhibeamus rationem, longitudo penduli Romæ erit 3. ped. Pariſ. 8. lin. $\frac{28}{100}$. Tandem ſi ratio illa ſit numeri 1351 ad 1440 ut quibuſdam Mathematicis menſurarum peritiſſimis videtur, major prodit penduli longitudo nimirum ped. Pariſ. 3. lin. 8. 3888.

Hæc

## PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

(P) *Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis* (9) *inclinari in eclipticam & bis redire ad positionem priorem.*

Patet per corol. 20 prop. LXVI. lib. 1. Motus tamen iste nutandi



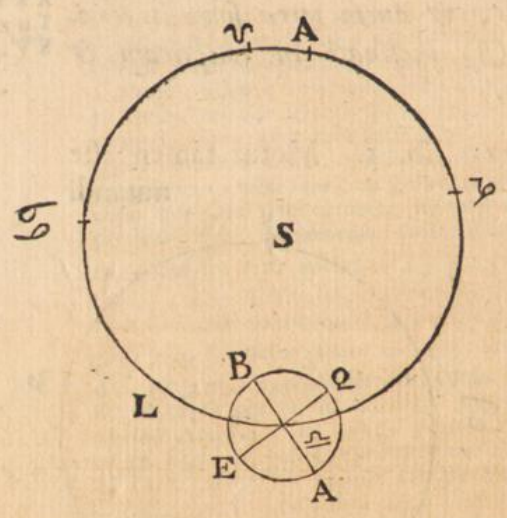

num productum, per solem priùs transibit quam telluris centrum ad ♎ pervenerit, sed tunc contingit æquinoctium dum nempè sol in plano æquatoris terrestris versatur (4) illaque puncta pro æquinoctialibus habentur in quibus sol videtur tempore æquinoctiorum. Quarè patet, stellis fixis quiescentibus, puncta æquinoctialia omniaque Ecliptícæ puncta quæ à punctis æquinoctialibus numerantur regredi seu in antecedentia moveri. Hic punctorum æquinoctialium regressus pendet ab actione Solis in materiam ad partes æquatoris redundantem, sed & Lunæ etiam non leves vires esse possunt; cum enim Luna in Ecliptícæ plano aut non procul ab eo jaceat, ad eundem cum Sole effectum concurret. Sed infrà computabitur motus æquinoctiorum ab utrâque vi, Solis scilicet & Lunæ oriundus. 101.

(9) 102. *Bis inclinari in eclipticam.* In semirevolutione telluris circà solem à

Hæc sunt quæ ad telluris figuram spectant. Hâc de re nova quamplurima an. 1740. & 1741. duplici Dissertatione edidit P. Boscowick S. J. insignis matheseos Professor: maximè autem exoptandum ut ad hujusce quæstionis totiusque matheseos utilitatem salvi & incolumes redeant Clariss. Academici qui ad definiendam telluris figuram nobili ardore laborioſum iter versus æquatorem susceperunt. Simul enim collatis versùs polum & versùs æquatorem institutis observationibus, à Doctissimis Viris pro bono Scientiarum in unum conspirantibus certissima de telluris magnitudine & figurâ, gravitatis decremento, aliisque ad Astronomiam, Geographiam & Physicam maximè momentosis speranda sunt.

(p) 101. *Puncta æquinoctialia.* Si terra nullo alio motu præter motum progressivum in suâ orbitâ motumque vertiginis circa axem agitaretur axem suum sibi semper parallelum retineret (cor. 22. prop. 66. lib. 1.) sed ob telluris figuram versus polos depressam & versùs æquatorem oblongatam fit ut axis situs perturbetur. Referat ♈ ♋ ♎ ♑, orbitam telluris circà solem S, sitque A E B Q, ipsa tellus cujus poli A & B æquator E Q. Quoniam (ex prop. præc.) terra est sphærois ad polos A & B, depressa & versùs æquatorem E Q, elata, instar globi annulo inhærentis spectari poterit, annulo enim æquivalet materia redundans in regionibus æquatoris. Quarè (per cor. 20. prop. 66.) annuli hujus nodi regredientur, hoc est, tellus digressa à libra ♎, ubi communis sectio Ecliptícæ & æquatoris versùs Solem S, dirigitur, & per ♑ versùs ♈ pergens, ad nodum *A* priùs pertinget quam ad ♈ pervenerit, & tellus ab ♈ per ♋ versùs ♎ progrediens priùs alterum nodum *L* attinget quam ♎ ubi in priori revolutione erat nodus, id est, æquatoris pla-

nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.




102. ♎ per ♃ ad ♈, actio solis inclinationem æquatoris in eclipticam minuere conatur cum illa actio eam inclinationem augere conetur à ♋ ad ♎, hinc maxima fit inclinatio inter ♎ & ♃ postea minuitur ex Solis actione oriunda (cor. 10. & 18. prop. 66. lib. 1.) fitque inclinatio illa minima, cum terra est inter ♃ & ♈, cum verò tellus inter ♈ & ♋ pervenit, rursus restituitur præcedens inclinatio (ibid.) sicque deinceps simulque cum æquatore telluris axis oscillatur. Axis igitur terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinatur in eclipticam & bis redit ad positionem priorem: Hæc omnia facilè intelliget qui in mentem revocaverit prop. 66. lib. 1. ultimaque ejusdem corollaria.

103. In singulis octantibus inter æquinoctia & solstitia sequentia, inclinatio axis terræ ad ecliptiçam redit ad priorem magnitudinem pluriumque annorum decursu sensibilior non evadit, at regressus punctorum Eclipticæ continuo fit in antecedentia, nec ad pristinum locum redeunt puncta æquinoctialia, nisi post integrum circulum. Hinc mutatio quæ unius anni spatio insensibilis est, post plurium annorum intervalla notabilis evadit.

104. Cum stellæ fixæ quiescant & retrocedat communis sectio æquatoris & Eclipticæ, necesse est ut mutabilis sit fixarum à punctis æquinoctialibus distantia & stellæ ab iisdem punctis versus orientem quotidiè progredi videantur, undè ipsarum longitudines quæ in ecliptică ab initio arietis sive intersectione vernali eclipticæ & æquatoris computari solent, continuò crescunt & fixæ omnes videntur moveri in consequentia signorum. Hinc fit quod constellationes omnes antiquam sedem mutaverint. Sic constellatio arietis quæ tempore Hipparchi prope intersectionem vernalem Eclipticæ & æquatoris visa fuit, nunc ab eâdem digressa in signo Tauri moratur, sicut & Tauri constellatio in geminorum locum transivit geminique in cancrum promoti sunt ità ut unaquæque constellatio è suo in proximum locum successerit. * Cum autem hîc, dum de inclinatione egimus, nec ad motum ipsum nodorum, nec ad Excentricitatem orbitarum quas terra aut Luna describunt nec ad Apsidum motus, nec ad irregularitatem molis terræ attenderimus nec denique ad aliorum Planetarum actiones, quædam etiam Eclipticæ inclinationi mutatio afferri potest, quæ forte per severabit satis ut sensibilis evadat, inclinationis angulum 1′ centum annis decrescere volebat Louvillæus, cui non repugnant quæ Cassinus in Astronomiæ Elementis, ex variâ Astronomorum æstimatione inclinationis Eclipticæ retulit. Sed de iis plura in posterum erunt dicenda.

PRO-

## PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

*Motus omnes lunares, omneſque motuum inæqualitates ex allatis principiis conſequi.*

Planetas majores, interea dum circa ſolem feruntur, poſſe alios minores circum ſe revolventes planetas deferre, & minores illos in ellipſibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per prop. LXV. lib. I. Actione autem ſolis perturbabuntur eorum motus multimodè, iiſque adficientur inæqualitatibus quæ in lunâ noſtrâ notantur. Hæc utique (per corol. 2, 3, 4, & 5. prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad terram ducto deſcribit aream pro tempore majorem, orbemque habet minus curvum, atque ideo propius accedit ad terram, in ſyzygiis quam in quadraturis, niſi quâtenus impedit motus eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima eſt (per corol. 9. prop. LXVI.) ubi apogæum lunæ in ſyzygiis verſatur, & minima ubi idem in quadraturis conſiſtit; & inde luna in perigæo velocior eſt & nobis propior, in apogæo autem tardior, & remotior in ſyzygiis quam in quadraturis. Progreditur inſuper apogæum, & regrediuntur nodi, ſed motu inæquabili. Et apogæum quidem (per corol. 7. & 8. prop. LXVI.) velocius progreditur in ſyzygiis ſuis, tardius regreditur in quadraturis, & exceſſu progreſſus ſupra regreſſum annuatim fertur in conſequentia. Nodi autem (per corol. 2. prop. LXVI.) quieſcunt in ſyzygiis ſuis & velociſſimè regrediuntur in quadraturis. Sed & major eſt lunæ latitudo maxima in ipſius quadraturis (per corol. 10. prop LXVI.) quam in ſyzygiis: & motus medius tardior in perihelio terræ (per corol. 6. prop. LXVI.) quam in ipſius aphelio. Atque hæ ſunt inæqualitates inſigniores ab aſtronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam à (a) prioribus aſtronomis non obſervatæ

(a) * *A prioribus Aſtronomis non obſervatæ.* Inæqualitates illæ quas hic per tranſennam enumerat Newtonus, æquationeſque omnes ſeu correctiones deinceps 104.

DE MUNDI SYSTEMATE.

servatæ inæqualitates, quibus motus lunares adeo perturbantur, ut nullâ hactenus lege ad regulam aliquam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii apogæi & nodorum lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter eccentricitatem maximam in syzygiis & minimam in quadraturis, & inæqualitas quæ variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per corol. 14. prop. LXVI.) in triplicatâ ratione diametri apparentis solaris. Et variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicatâ ratione temporis inter quadraturas quam proximè (per corol. 1, & 2. lem. x. & corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) sed hæc inæqualitas in calculo astronomico ad prosthaphæresin lunæ referri solet, & cum eâ confundi.

## PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

*Motus inæquales satellitum jovis & saturni à motibus lunaribus derivare.*

Ex motibus lunæ nostræ motus analogi lunarum seu satellitum jovis sic derivantur. Motus medius nodorum satellitis extimi jovialis, est ad motum medium nodorum lunæ nostræ, in ratione compositâ ex ratione duplicatâ temporis periodici terræ circa solem ad tempus periodicum jovis circa solem, & ratione simplici temporis periodici satellitis circa jovem ad tempus periodicum lunæ circa terram (per corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) ideoque (b) annis centum conficit nodus iste 8 gr. 24′. in antecedentia. Motus medii nodorum satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus (per idem corollarium) & inde dantur. Motus au-

204. commodius explicabuntur, & quomodò variatio Lunæ ad prosthaphæresim in calculo Astronomico referri soleat exponetur. Variatio autem dicitur inæqualitas illa quâ fit ut motus Lunæ in primo mensis quadrante, sive pergente Lunâ à conjunctione ad quadraturam proximam retardetur, in secundo accelereţur dum tendit à quadraturâ ad oppositionem, in tertio retardetur rursus & in quarto iterum accelereţur.

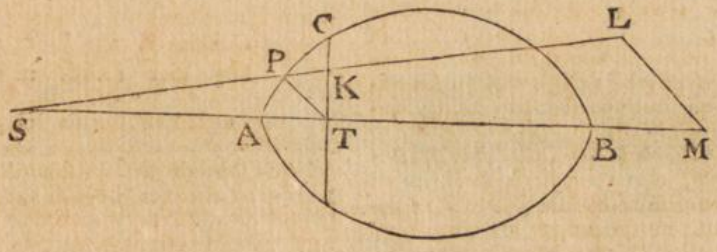
(b) * *Ideóque annis centum.* Tempus periodicum terræ circà solem est dierum 365.2565; tempus periodicum jovis circà solem est dierum 4332.514 (per phæn. 4.) tempus periodicum satellitis circà jovem est

autem augis ſatellitis cujuſque in conſequentia eſt ad motum nodorum ipſius in antecedentia, ut motus apogæi lunæ noſtræ ad hujus motum nodorum, (per idem corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus augis ſic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob (c) cauſam quam hic exponere non vacat.

eſt dierum 16.6880 (per phæn. 2.) & tempus periodicum Lunæ circà terram dierum 27.321. (prop. 17.). Sumptiſque Logarithmis, erit

| | | |
|---|---|---|
| L. | (365.2565)$^2$ | = 5.1251956 |
| L. | 16.6880 | = 1.2224043 |
| utriuſque ſumma | | = 6.3475999 |
| Deindè L. | (4332.514)$^2$ | = 7.2734600 |
| L. | 27.321 | = 1.4364966 |
| utriuſque ſumma | | = 8.7099566 |
| Ab hâc ultimâ ſubtrahatur ſumma ſuperior - - | | 6.3475999 |
| reſiduum erit | L. | 2.3623567 |

Cui reſpondet numerus 230.38. Quarè ex hoc calculo & Analogia Newtoni patet motum nodorum ſatellitis extimi jovis eſſe partem circiter 230$^{am}$. motûs nodorum Lunæ, ſed eſt motus annuus nodorum Lunæ 19°. 21′ 21″, ut dicetur poſtea. Hiſce ſi multiplicetur motus ille annuus per 100 factumque dividatur per 230, prodibit motus nodorum ſatellitis intervallo annorum centum 8°. 24′. Ab hujus ſæculi initio nullum in nodis ſatellitum jovialium ſenſibilem motum fuiſſe obſervatum teſtatur Clariſſ. Caſſinus in elem. Aſtr. 105.




(c) 105. *Ob cauſam quam hic exponere non vacat.* Referat S Solem, ſitque P ſatelles, putà Luna revolvens circà Planetam primarium T, ſcilicet terram, in ellipſeos umbilico poſitum; erit B apſis ſumma, A apſis ima, eritque T B, diſtantia maxima & A T diſtantia minima. Jam verò quò minor eſt diſtantia A T, reſpectu diſtantiæ T B, eò celerius apſides progrediuntur, (per not in cor. 8. prop. 66. lib. 1) Ea eſt correctionis cauſa quam Autor noſter non exponit. Cum enim ſatellites Jovis & Saturni circà ſuos Planetas primarios deſcribant circulos ferè concentricos (phæn. 1. & 2.) Luna verò circà terram in orbitâ elliptica revolvatur, & major ſit motus nodorum in orbita elliptica quam in circulari, cæteris omnibus manentibus, hinc motus augis cujuſcumque ſatellitis per Analogiam ex motu Augis Lunaris inventus, diminui debet in ratione paulò minore quam 1 ad 2, calculo non abſimili illi qui 31$^a$. prop. inſtituetur.

vacat. (d) Æquationes maximæ nodorum & augis ſatellitis cujuſque ferè ſunt ad æquationes maximas nodorum & augis lunæ reſpectivè, ut motus nodorum & augis ſatellitum tempore unius revolutionis æquationum priorum, ad motus nodorum & apogæi lunæ tempore unius revolutionis æquationum poſteriorum. (e) Variatio ſatellitis è jove ſpectati, eſt ad variationem lunæ, ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & luna ad ſolem revolvuntur, per idem corollarium; ideóque in ſatellite extimo non ſuperat $5^{II}.\ 12^{III}$.

## PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

*Fluxum & refluxum maris ab actionibus ſolis ac lunæ oriri.*

Mare ſingulis diebus tam lunaribus quam ſolaribus bis intumeſcere debere ac bis defluere, patet (f) per corol. 19. & 20. prop.

105. (d) * *Æquationes maximæ.* Nam errores angulares in ſingulis revolutionibus geniti, ideóque eorumdem errorum correctiones ſeu æquationes maximæ ſunt ut ſatellitum tempora periodica reſpectivè (per cor. 16. prop. 66. lib. 1.). Sed tempora periodica ſunt ut motus ipſi angulares reſpective (ibid.). Quare in eâdem quoque ratione ſunt æquationes maximæ.

(e) * *Variatio Satellitis è jove ſpectati*, hoc eſt, motus angularis ſatellitis eſt ad motum angularem Lunæ ut ſunt ad invicem toti motus nodorum temporibus quibus ſatelles & Luna ad Solem revolvuntur, ſive clariùs in ratione nodorum Lunæ ad motum nodorum annuum & temporis periodici Lunæ ad tempus periodicum ſatellitis (per cor. 16. prop. 66. lib. 1. & not. in idem coroll.). Jam verò motus nodorum Lunæ annuus eſt 69681″, ut poſteà ſtatuitur à Newtono, nodus autem ſatellitis extimi jovialis annis centum conficit 8°. 24′ ideóque motus ejuſdem annuus eſt $302\frac{2}{5}$, tempus periodicum Lunæ eſt dierum 27.321 & ſatellitis extimi dierum 16.688. Sumptis Logarithmis erit

| | | |
|---|---|---|
| L. - | 69.681 | = 4.8431144 |
| L. dierum | 27.321 | = 1.4364966 |
| utriuſque Log. ſumma | | = 6.2796110 |
| Deindè L. | $302\frac{2}{5}$ | = 2.4805818 |
| Lòg. dier. | 16.688 | = 1.2224043 |
| utriuſque ſumma | | = 3.7029861 |

Hæc ſubtrahatur à ſummâ ſuperiori 6.2796110 remanet Log. 2.5766249, cui reſpondet numerus 378. ferè. Quare ex Analogiâ Newtoni & calculo colligitur variationem ſatellitis eſſe partem $378^{am}$. variationis Lunæ circiter. Sed variationem Lunæ maximam in apogæo Solis deinceps determinat Newtonus 33′ 14″ ſive 1994″. Quare pars $378^{a}$. eſt 5″ 15‴ ut Newtonus invenit, quamproximè.

(f) * *Per Cor.* 19. & 20. Si fluidum in alveo per ſuperficiem cujuſvis Planetæ excavato contineatur, ſimulque cum Planetâ motu diurno periodico uniformiter revolvatur, partes ſingulæ hujus fluidi per vices acceleratæ & retardatæ in ſyzigiis ſuis, hoc eſt, in meridie & mediâ nocte velo-

prop. LXVI. lib. I. ut (g) & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulſum luminarium ad meridianum loci minori quam ſex horarum ſpatio ſequi, uti fit in maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Gallıam* & promontorium *Bonæ Spei* ut & in maris *Pacifici* littore *Chilenſi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æſtus in horam circiter ſecundam, tertiam vel quartam, incidit, niſi ubi motus ab Oceano profundo per loca vadoſa propagatus uſque ad horam quintam ſextam ſeptimam aut ultra retardatur. Horas numero ab appulſu luminaris utriuſque ad meridianum loci, tam infra horizontem quam ſupra, & per horas diei lunaris intelligo vigeſimas quartas partes temporis quo luna motu apparente diurno ad meridianum loci revertitur. Vis ſolis vel lunæ ad mare elevandum maxima eſt in ipſo appulſu luminaris ad meridianum loci. Sed vis eo tempore in mare impreſſa manet aliquamdiu & per vim novam ſubinde impreſſam augetur, donec mare ad altitudinem maximam aſcenderit, id quod fiet ſpatio horæ unius duarumve ſed ſæpius ad littora ſpatio horarum trium circiter, vel etiam plurium ſi mare ſit vadoſum.

(h) Motus autem bini, quos luminaria duo excitant, non cernen-

velociores erunt; in quadraturis ſivè horâ ſextâ matutinâ, & veſpertinâ tardiores quam ſuperficies globi contigua, quare fluet in alveo refluetque per vices perpetuò (per cor. 19. & 20.) idem poſteà iterum demonſtrabitur vireſque Solis & Lunæ ſeorſim computabuntur.

(g) * *Aqua maximam altitudinem.* Rem ità ſe habere patet ex obſervatis æſtibus marinis, ratio autem hæc eſt. Vis Solis vel Lunæ ad mare elevandum maxima eſt in ipſo appulſu luminaris ad meridianum & poſteà decreſcit, attamen hujus vis effectus nondum eſt maximus. Omnis enim motus ſemel impreſſus perſeverat uniformiter, donec motu contrario deſtruatur vel ſaltem retardetur. Hinc fit ut fluxus maris per ſex circiter horas antemeridianas auctus & cum motu diurno conſpirans acceleratus, majori celeritate ulterius pergere debeat & aquas magis magiſque attollet, uſquè dum eadem vis motui diurno contraria fluidi curſum paulatim ſiſtat & aquas cogat refluere. Hæc motûs retardatio maxime circà octantes ſive horam tertiam notabilis eſt. Alia non deſunt exempla maximorum effectuum qui poſt cauſas maximas contingunt. Non in ipſis ſolſtitiis æſtivis maximè fervet æſtas, ſicut neque in ipſis ſolſtitiis Hybernis maxime friget hiems; ſed integro circiter menſe poſt ſolſtitia maximus deprehenditur æſtatis Hyemiſque effectus. Indubitatâ quoque conſtat experientiâ ſummum calorem ſecundâ aut tertiâ poſt meridiem horâ fieri. 105.

(h) * *Motus autem bini.* Quemadmodum corpus quodvis duplici vi ſollicitatum in lineis duabus progredi nequit, ſed conjunctis viribus parallelogrammi diagonalem eodem modo deſcribit ac ſi unicâ vi juxtà diagonalis directionem urgeretur

(41.

DE MUNDI SYSTEMATE.

cernentur distinctè, sed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione vel oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur (i) fluxus & refluxus maximus. In quaduraturis sol attollet aquam ubi luna deprimit, deprimetque ubi luna attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientiâ teste, major est effectus lunæ quam solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam lunarem circiter. Extra syzygias & quadraturas, æstus maximus qui solâ vi lunari incideré semper deberet in horam tertiam lunarem, & solâ solari in tertiam solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ lunari propinquius est; ideóque in transitu lunæ à syzygiis ad quadraturas, ubi hora tertia solaris præcedit tertiam lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam lunarem, idque maximo intervallo paulo post octantes lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam lunarem in transitu lunæ à quadraturis ad syzygias. Hæc ita sunt in mari aperto. Nam in ostiis fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀνώλια venient.

Pendent autem effectus luminarium ex eorum distantiis à terrâ. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in (k) triplicatâ ratione diametrorum apparentium. Igitur sol tempore hyberno, in perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in syzygiis (l) paulò majores sint, & in quadraturis paulò minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo; & luna in perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam antè vel post dies quindecim, ubi in apogæo versatur. (m) Unde fit ut æstus duos omnino maximi in syzygiis continuis se mutuò non sequantur. Pen-

105. (41. lib. 1) ità motus bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur distincte sed motum quemdam mixtum efficient.

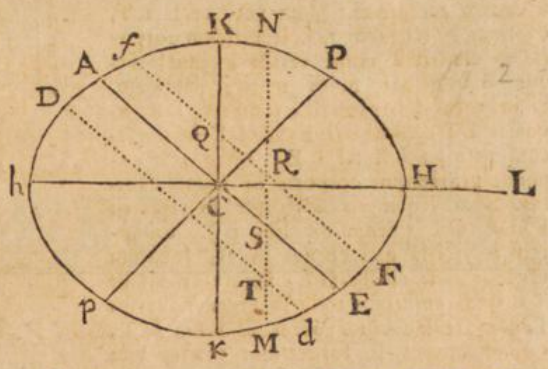
(i) * *Fluxus & refluxus maximus*, utpotè è virium summâ tum temporis oriundus.

(k) * *In triplicatâ ratione diametrorum* (cor. 14. prop. 66. lib. 1.).

(l) * *Paulò majores sint*, ob majorem virium summam & in quadraturis paulò minores ob minorem virium differentiam quam tempore æstivo.

(m) * *Undè fit ut æstus.* Si enim Luna in syzigiarum altera sit circà perigæum, æstumque maximum conjunctis cum sole viribus tunc temporis excitet, necesse est ut in alterâ syzygia versetur circà apogæum minoresque vires obtineat.

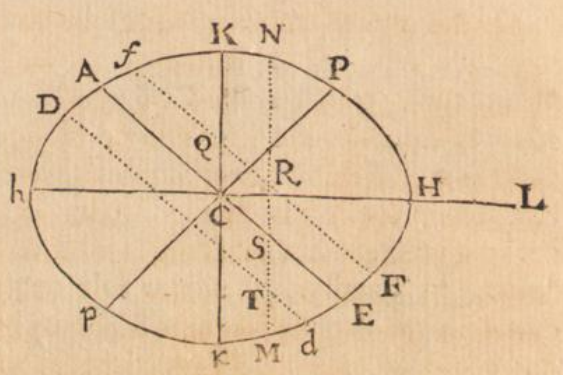
Pendet etiam effectus utriuſque luminaris ex ipſius declinatione ſeu diſtantiâ ab æquatore. Nam ſi luminare in polo conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, ſine actionis intenſione & remiſſione ideóque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur luminaria recedendo ab æquatore polum verſus, effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus in ſyzygiis ſolſtitialibus quam in æquinoctialibus. In quadraturis autem ſolſtitialibus majores ciebunt æſtus quam in quadraturis æquinoctialibus; eo quod lunæ jam in æquatore conſtitutæ effectus maximè ſuperat effectum ſolis. Incidunt igitur æſtus maximi in ſyzygias & minimi in quadraturas luminarium, circa tempora æquinoctii utriuſque. Et æſtum maximum in ſyzygiis comitatur ſemper minimus in quadraturis, ut experientia compertum eſt. Per minorem autem diſtantiam ſolis à terrâ, tempore hyberno quam tempore æſtivo, fit ut æſtus maximi & minimi ſæpiùs præcedant æquinoctium vernum quam ſequantur, & ſæpius ſequantur autumnale quam præcedant.



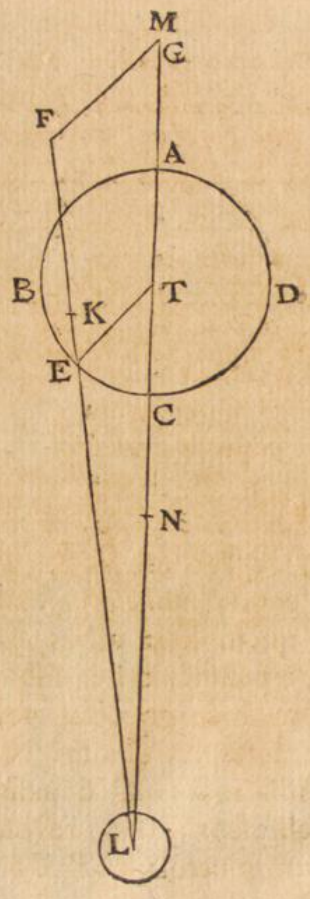

Pendent etiam effectus luminarium ex locorum latitudine. Deſignet *A p E P* tellurem aquis profundis undique coopertam; *C* centrum ejus; *P*, *p* polos; *AE* æquatorem; *F* locum quemvis extra æquatorem; *Ff* parallelum loci; *Dd* parallelum ei reſpondentem ex alterâ parte æquatoris; *L* locum quem luna tribus ante horis occupabat; *H* locum telluris ei perpendiculariter ſubjectum; *h* locum huic oppoſitum; *K*, *k* loca inde gradibus 90 diſtantia, *CH*, *Ch* maris altitudines maximas menſuratas à centro telluris; & *CK*, *Ck* altitudines minimas: & ſi axibus *Hh*, *Kk* deſcribatur ellipſis, deinde ellipſeos hujus revolutione circa axem majorem *Hh* deſcribatur ſphærois *HPKhpk*; deſignabit hæc figuram ma-

DE MUNDI SYSTEMATE.

ris (n) quam proximè, & erunt $CF$, $Cf$, $CD$, $Cd$ altitudines maris in locis $F$, $f$, $D$, $d$. Quinetiam si in præfatâ ellipseos revolutione punctum quodvis $N$ describat circulum $NM$, secantem parallelos $Ff$, $Dd$ in locis quibusvis $R$, $T$, & æquatorem $AE$ in $S$; erit $CN$ altitudo maris in locis omni-




106. (n) 106. * *Figuram maris quam proximè.* Circulus centro T descriptus tellurem referat, circulus autem centro L, descriptus exhibeat Lunam. Si nullâ esset in tellurem actio, tellus profundis aquis undiquè cooperta & quiescens (per hyp.) in sphæram sese componeret. At singulæ telluris partes gravitant in Lunam estque gravitas in Lunam in ratione duplicatâ distantiarum à centro reciprocè. Jam verò recta LT, exponat gravitatem acceleratricem corporis in centro T positi versùs Lunam, sitque E quælibet fluidi marini particula. Si in rectâ LE productâ sumatur LK æqualis LT, sitque LF ad LK in duplicatâ ratione LK ad LE, recta LF exponet gravitatem corporis in loco E versus Lunam, quæ vis dividitur in vires ut FG & GL (prop. 66. lib. 1.). Si autem à vi illâ quâ corpus in E, locatum urgetur quæ est ut GL, auferatur vis ut TL quâ centrum telluris urgetur versus Lunam relinquentur vires ut FG, GT, quibus corpus E sollicitatur præter vim propriæ gravitatis quâ tendit versus centrum terræ & vim ipsi communem cum centro ipsius terræ. Jam sit C punctum telluris cujus zenith Luna immineat, A verò punctum oppositum, sintque B & D puncta circumposita, sive potius exhibeant circulum horizontis in quo Luna versatur, liquet punctum G à T maximè distare, ubi punctum E est aut in C, aut in A; in priori casu G, transeat in M, in posteriori in N; dum verò punctum E versatur in circulo BD, punctum G ferè coincidit cum T, nullaque partibus in




circulo

bus *R*, *S*, *T*, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurnâ loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F*, horâ tertiâ post appulsum lunæ ad meridianum supra horizontem; postea defluxus maximus in *Q* horâ tertiâ post occasum lunæ; dein affluxus maximus in *f* horâ tertiâ post appulsum lunæ ad meridianum infra horizontem; ultimo defluxus maximus in *Q* horâ tertiâ post ortum lunæ; & affluxus posterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Distinguitur enim mare totum in duos omnino fluctus hemisphæricos, unum hemisphærio *KHk* ad boream vergentem, alterum in hemisphærio opposito *Khk*; quos igitur fluctum borealem & fluctum australem nominare licet.

circulo B D locatis relinquitur vis præter vim gravitatis propriæ atque vim F G; ipsa verò F G, sit B T aut D T, coeuntibus punctis F & K; quare fluidi particulæ in locis B & D, præter vim gravitatis propriæ urgentur etiam versus centrum T vi ex Lunâ procedente; Particulæ in loco C, versus Lunam magis attrahuntur quam terra integra quæ in centro T, locata fingi potest, particulæ autem in loco A, versus Lunam minus attrahuntur quam terra integra in T, ideóque eodem modo afficiuntur ac si ad partes contrarias urgerentur. At particulæ in circulo B D, magis gravitant versus T; in locis inter A, vel C, & B vel D, intermediis fluidi particulæ utramque conditionem participant; quo viciniores sunt fluidi terrestris partes punctis C & A, eò minùs graves sunt, nam actio Lunæ sivè vis ut G T, vim propriæ gravitatis versus T, minuit, & quo propiores sunt punctis B & D, eò graviores fiunt, eadem enim actio Lunaris sivè vis ut F G, gravitatem propriam auget. Quia verò globus A B C D, fluido satis profundo undiquè coopertus ponitur fluidi autem partes cedunt vi cuicumque illatæ & cedendo facilè moventur inter se, fluidum illud versus A & C positum à fluido versus B & D, posito expelletur, levius scilicet à graviore, attolletur ergò fluidum versus A & C, deprimeturque versus B & D, donec scilicet major fluidi moles & altitudo majorem gravitatem compenset, & ubique constituatur æquilibrium. Quapropter superficies maris sese componet in figuram sphæroidem cujus axis est recta A C, quæ producta per Lunam transibit. Hinc patet figuram maris in sphæroidem oblongam formari debere. 107.

107. Simili argumento patet considerată Solis actione fluidum terrestre componi in sphæroidem oblongam cujus axis productus per Solem transit. Si enim (in figur. præc.) globus L non Lunam sed Solem designet, cætera se habent ut suprà. At in hoc casu minor erit quam in altero axium differentia. Nam fluidi tumor in C hinc oritur quod fluidum magis gravitet versus Lunam quam telluris centrum T, tumor autem fluidi in A, inde provenit quod terræ centrum magis quam fluidum versus Lunam gravitet; quare, si hæc elevatio Solis actioni tribuatur, minor erit effectus quamvis actio Solis in terram major sit quam actio Lunæ in eamdem, telluris enim semidiameter T C vel T A ferè evanescit respectu immensæ Solis à terrâ distantiæ, ideóque fluidi in C locati gravitas versus solem erit insensibiliter major gravitate telluris versus eundem, & fluidi in A positi gravitas versus solem erit insensibiliter minor gravitate telluris versus eundem, quarè figura sphæroidea indè genita parum intumescet ad vertices C & A, parumque in circulo B D deprimetur, attamen propter immensas Solis licet remotissimi vires, aliquis erit actionis Solaris effectus.

De Mundi Systemate.

licet. Hi fluctus ſemper ſibi mutuò oppoſiti veniunt per vices ad meridianos locorum ſingulorum, interpoſito intervallo horarum lunarium duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & auſtrales magis auſtralem, inde oriuntur æſtus alternis vicibus majores & minores, in locis ſingulis extra æquatorem, in quibus luminaria oriuntur & occidunt. Æſtus autem major, lunâ in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam poſt appulſum lunæ ad meridianum ſupra horizontem, & lunâ declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in (°) tempora ſolſtitiorum; præſertim ſi lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis. Sic experientiâ compertum eſt, quod æſtus matutini tempore hyberno ſuperant veſpertinos & veſpertini tempore æſtivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quaſi pedis unius, ad *Briſtoliam* verò altitudine quindecim digitorum: obſervantibus *Colepreſſio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, quâ maris æſtus, etiam ceſſantibus luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæcce motus impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum; & æſtus proximè poſt ſyzygias majores reddit, eoſque proximè poſt quadraturas minuit. Unde fit ut æſtus alterni ad *Plymuthum* & *Briſtoliam* non multò magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus, non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximi, in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis, ſint (P) quarti vel etiam quinti à ſyzygiis.

Porro

¥07. (o) * *In tempora ſolſtitiorum.* Tunc enim in ſyzygiis utrumque luminare ab æquatore maximè declinat, atque fluxuum differentia adhuc augebitur, ſi Lunæ nodus aſcendens verſatur in principio arietis; nam præter declinationis Solis maximam, Luna quoque Soli conjuncta quantitate latitudinis maximæ in Boream aut auſtrum magis declinat. Hinc fit fluctus Borealis nobis viciniſſimus & fluctus auſtralis remotiſſimus in eâdem revolutione diurnâ.

(p) * *Sint quarti vel etiam quinti.* In opuſculo de mundi ſyſtemate quædam occur-

Porro fieri potest ut æstus propagetur ob oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quam per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successivè advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales à diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu lunæ ad meridianum portus. Si luna in hocce suo ad meridianum appulsu versabatur in æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquillè stagnet. Si luna tunc declinabat ab æquatore, fient æstus in oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini

occurrunt observationes quæ ad hunc locum pertinent, eas itaque exscribemus. Fieri etiam potest, inquit Autor, ut æstus omnium maximus fit quartus vel quintus à syzygiis vel tardius adveniat, eò quod retardantur motus marium in transitu per loca vadosa ad littora. Sic enim æstus accedit ad littus occidentale Hiberniæ horâ tertiâ Lunari, & post horam unam & alteram ad portus in littore australi ejusdem insulæ ut & ad insulas Cassiterides vulgò Sorling dictas. Dein successivè ad Falmuthum, Plimuthum Portlandiam insulam Vectam, Winchelseiam, Doveriam, ostium Tamesis & Pontem Londinensem, consumptis horis duodecim in hoc itinere. Sed & Oceani ipsius alveis haud satis profundis impeditur æstuum propagatio, incidit enim æstus ad insulas fortunatas & ad Occidentalia marique atlantico exposita littora Hiberniæ, Galliæ, Hispaniæ & Africæ totius usque ad caput bonæ spei in horam tertiam Lunarem, præterquam in locis nonnullis vadosis ubi æstus impeditus tardiùs advenit inque freto Gaditano quod motu ex mari mediterraneo propagato citiùs æstuat; pergendo verò de his littoribus per Oceani latitudinem ad oras Americæ, accedit æstus primò ad Brasiliæ littora maximè Orientalia circà horam Lunarem quartam vel quintam; deindè ad ostium fluvii Amazonum horâ sextâ, ad insulas verò adjacentes horâ quartâ, posteà ad insulas Bermudas horâ septimâ & ad Floridæ portum S. Augustini horâ $7\frac{1}{2}$. Tardius igitur progreditur æstus per Oceanum quam pro ratione motûs Lunæ; & perneccessaria est hæcce retardatio ut mare eodem tempore descendat inter Brasiliam & novam Franciam, ascendatque ad insulas fortunatas & littora Europæ & Africæ & viceversâ. Namque mare ascendere nequit in uno loco quin simul descendat in altero. Lege jam descriptâ agitari quoque mare pacificum verisimile est. Namque æstus altissimi in littore Chiliensi & Peruviano incidere dicuntur in horam tertiam Lunarem, sed quâ velocitate propagantur inde ad littus Orientale Japoniæ & ad insulas Philippinas cæteraque regno Sinarum adjacentes nondum reperi.

108

108. In alveis fluminum pendet influxus & refluxus à fluminum cursu. Nam cursus ille facit aquam tardiùs influere ex mari & in mare citius & velocius refluere

DE MUNDI SYSTEMATE.

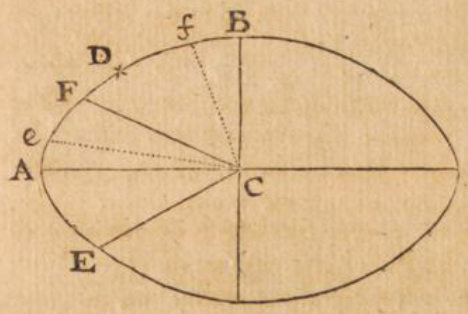
bini majores component aquam altiſſimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem in medio ipſorum, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ſi luna declinat in polum ſupra horizontem loci, incidet in horam vel ſextam vel triceſimam ab appulſu lunæ ad meridianum, atque lunæ declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* ſub latitudine boreali 20gr. 50′. *Halleius* ex nautarum obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum lunæ per æquatorem ſequente ſtagnat, dein lunâ ad boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus; & æſtus incidit in occaſum lunæ, defluxus maximus in ortum. Cum lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimam vel octavam, dein

109. fluere atquè adeò diutius refluere quam influere, præſertim ſi longè in flumen aſcenditur ubi minor eſt vis maris. Sic in fluvio Avonæ ad tertium lapidem infrà Briſtoliam refert Sturmius aquam horis quinis influere, ſeptenis refluere ſuprà Briſtoliam ut ad Canesham vel Bathoniam differentia procul dubio major eſt. Pendet etiam hæc differentia à magnitudine fluxûs & refluxûs. Nam prope Luminarium ſyzigias, vehementior maris motus facilius ſuperando reſiſtentiam fluminum faciet aquam citius ac diutius influere, adeóque minuet hanc differentiam: intereà verò dum Luna ad ſyzigias properat, neceſſe eſt ut flumina ob curſus ſuos per magnitudinem æſtuum impeditos magis impleantuur & propterea maris refluxum paulò magis impediant proximè poſt ſyzigias quam proximè antè. Eâ de cauſa æſtus omnium tardiſſimi non incident in ipſas ſyzigias, ſed paulò præcedent. Dixi æſtus etiam antè ſyzigias retardari vi Solis. Conjungatur cauſa utraque & æſtuum retardatio & major erit & ſyzigias magis præcedet. Quæ omnia ità ſe habere colligo ex tabulis æſtuum quas Flamſteedius ex obſervationibus quamplurimis conſtruxit.

109. Æſtuum magnitudo non parum etiam pendet à magnitudine marium, ut in opuſculo citato obſervat Clariſſ. Autor. Sit C centrum terræ, EADB oblonga maris figura, CA ſemiaxis major, GB ſemiaxis minor priori inſiſtens ad angulos rectos. Sumatur D punctum medium inter A & B, ſitque ECF, vel ipſi æqualis eCf angulus ad centrum terræ quem ſubtendit latitudo maris littoribus E, F, vel e, f, terminati; verſetur autem punctum A, in medio inter puncta E, T, & punctum D in medio inter puncta e, f. Si per differentiam altitudinum CA, CB, exponatur quantitas æſtus in mari ſatis profundo terram totam cingente, exceſſus altitudinis CA ſuper altitudinem CE vel CF deſignabit maximam quantitatem æſtus in medio maris EF littoribus E, F terminati, & exceſſus altitudinis Ce ſuper altitudinem Cf.

dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & lunâ declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum lunæ & affluxus in ortum, donec luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano *Sinenſi* inter continentem & inſulam *Luconiam*, alter à mari *Indico* inter continentem & inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim à mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex à mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum lunæ & marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.




C f, exponet maximam quantitatem æſtûs ad littora ejuſdem maris. (Nam, differentia inter Diametrum biſecantem angulum datum quem faciunt duæ Diametri Ellipſeos & alterutram ex illis Diametris major eſſe non poteſt ex naturâ Ellipſeos quam ſi illa Diameter biſecans ſit ſemi axis major, & differentia inter illas duas ipſas Diametros angulum datum conſtituentes major eſſe nequit quàm ſi Diameter angulum biſecans faciat angulum cum axe ſemi-rectum). Unde patet æſtus ad littora eſſe propemodum ut maris latitudo E F, arcu quadrantali non major. Hinc fit ut nullus aut fere nullus obſervetur aquarum motus in maribus non ſatis late patentibus, niſi cum Oceano ipſo libere communicent. Si enim nihil aut parum cum Oceano communicent, ut accidit in mari mediterraneo, æſtus quoquè eam ob cauſam minor deprehenditur. Hinc eſt etiam quod propè æquatorem ubi mare inter Africam & Americam anguſtum eſt, æſtus ſint multò minores quam hinc inde in zonis temperatis ubi maria latè patent, & in maris pacifici littoribus fere ſingulis tam Americanis quam Sinicis & intrà tropicos & extrà. Contingere tamen poteſt ut æſtus qui in Oceano mediocris eſt in fluviis evadat maximus propter tranſitûs anguſtias littorumque ſeorſim coeuntium convergentiam. Hæc de maris æſtu pro præſenti dicta ſint, de hâc Nobiliſſimâ inter Phyſicos quæſtione plurima in decurſu ubi recurret occaſio, adjungemus. Prolixius foret proſequi factas à diligentiſſimis Philoſophis æſtuum obſervationes; legantur quæ huc & illuc tum in tranſact. Angl. tum in Mon. Pariſ. diſperſa inveniuntur, ſed ea præſertim quæ Clariſſ. Viri Halleius num. 226. tranſact & Caſſinus in Mon. Pariſ. an. 1712, 1713, ſcripta reliquerunt. 109.

EDITOR

# EDITOR LECTORI.

FElicius commentari non possumus ea quæ tradit Autor noster de Maris æstu, quam huic Propositioni subjungendo eas Dissertationes quæ Præmio fuère condecoratæ à Celebri Parisiensi Scientiarum Academiâ: Id quidem primum nobis fuerat propositum, ut ea quæ in illis Dissertationibus momentosiora viderentur & ad Newtonianæ Philosophiæ illustrationem pertinerent, brevi compendio comprehensa Notis adjiceremus; verùm trunca ac ingenii nostri vitio detrita exhibere hæc Illustrissimorum Virorum scripta meritò piguit, & non dubitavimus nos meliùs consulturos tùm Lectoribus nostris tùm ipsis eorum scriptorum Authoribus, si qualia sunt edita hìc illa insereremus: cumque Authorum à typothetis absentiâ factum sit ut in Editione Parisinâ plurima irrepserint menda nullo Errorum catalogo correcta, ea, demonstrationibus ac calculis accuratè repetitis, emendavimus, figurasque ad loca quibus respondent aptari curavimus.

Quatuor quidem Dissertationes Parisinis typis fuerunt evulgatæ, quarum prior à Patre Cavallieri Jesuitâ, secunda à Daniele Bernoullio, tertia à . . . Mac-Laurino, quarta à Leonardo Eulero fuere ad Academiam missæ; Prior in eo occupatur ut Carteſianæ hypotheseos circa causam æstus marini vitia & hiatus corrigat & resarciat, quod quidem ingeniosè admodum præstat; tres reliquæ ex Legibus gravitatis aquarum Maris in Solem Lunam & Terram omnes Phænomeni propositi circumstantias explicant & calculis determinant, has ergo tres, omissâ priore, hujus esse loci credidimus.

In Dissertatione Mac-Laurini occurrit solutio synthetica Problematis de Figurâ Terræ, quale illud proposueramus in Notis nostris ad Prop. XIX. quodque parum felici successu Analyticè solvere tentaveramus, ex ejus solutione patet Meridianum esse veram Ellipsim in Hypothesi quod terra sit homogenea, cum autem hæc in manus nostras non devenerint nisi cum notæ ad eam Propositionem XIX prælum subiissent, inde factum est ut in iis Notis de illo Problemate ut nondum soluto egerimus: Quæ in his tribus Dissertationibus ingeniosa sunt enumerare longiùs foret, intelligit Lector quæ sint ipsi speranda à tantis Viris & quam facilis, his intellectis & perlectis, futurus sit transitus ad ea quæ sequuntur de Lunæ motu, de præcessione Æquinoctiorum, aliisque; Lectorem itaque rogamus ut nobis vitio non vertat, quod Typographo indulserimus hæc qualia sunt edere, nc, & ipse Lector & Typographus, eam paterentur moram quæ ad condendam Epitomem istarum Dissertationum necessaria fuisset.

TRAI-

# TRAITÉ
## SUR
# LE FLUX ET REFLUX DE LA MER.

Par Mr. DANIEL BERNOULLY Professeur d'Anatomie & de Botanique à Basle.

Devise, *Deus nobis hæc otia fecit.*

Pour concourir au Prix de 1740.

---

## CHAPITRE PREMIER.

*Contenant une Introduction à la Question proposée.*

I.

DANS le grand nombre des Systêmes sur le Flux & Reflux de la Mer, qui sont parvenus à notre connoissance depuis l'antiquité la plus reculée, il n'y a plus que ceux des Tourbillons & de l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps célestes & de la Terre, qui partagent encore les Philosophes de notre tems: l'un & l'autre de ces Systêmes ont eu les plus grands Hommes pour Défenseurs, & ont entraîné des Nations entieres dans leur parti. Il semble donc que tout le mérite qui nous reste à espérer sur cette grande Question, est de bien opter entre ces deux Systêmes, & de bien manier celui qu'on aura choisi pour expliquer tous les Phénomenes qu'on a observés jusqu'ici sur le Flux & Reflux de la Mer, pour en tirer de nouvelles propriétés, & pour donner des uns & des autres les Calculs & les Mesures.

II.

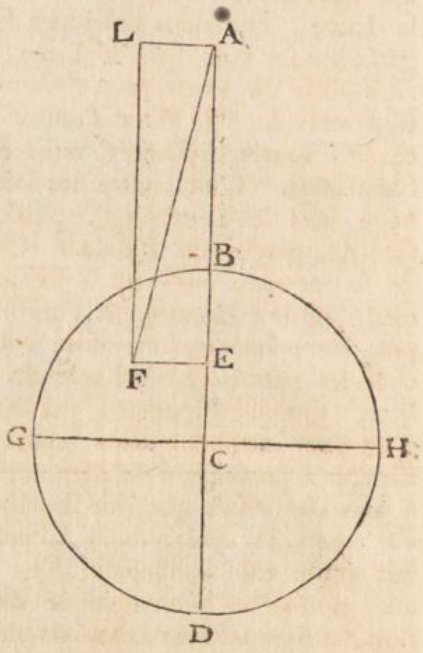
J'ai commencé d'abord par l'idée de Kepler, qu'on nomme avec juſtice le Pere de la vraie Philoſophie. Elle eſt fondée ſur l'Attraction ou Gravitation mutuelle des Corps céleſtes & de la Terre : cet incompréhenſible & inconteſtable Principe, que le grand Newton a ſi bien établi, & qu'on ne ſçauroit plus revoquer en doute, ſans faire tort aux ſublimes connoiſſances & aux heureuſes découvertes de notre ſiécle. Après un examen fort ſcrupuleux, j'ai vû que cette Gravitation mutuelle, conſidérée dans les Globes de la Terre, de la Lune & du Soleil, non-ſeulement pouvoit produire tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, mais même qu'elle le devoit neceſſairement, & qu'elle le devoit, ſuivant toutes les loix qu'on a obſervées juſqu'ici. Avec ces heureux ſuccès, j'ai pouſſé mes recherches auſſi loin qu'il m'a été poſſible de les porter. En chemin faiſant, je ſuis tombé ſur les Théoremes de M. Newton, dont je n'avois pû gueres voir la ſource auparavant; mais en même tems j'ai remarqué le peu de chemin qu'on a encore fait dans cette matiere, & même l'inſuffiſance de la Méthode uſitée, lorſqu'elle eſt appliquée à des Queſtions un peu détaillées. J'ai ſuivi une toute autre route; j'ai pouſſé mes recherches bien plus loin, & je ſuis entré dans un détail tel que l'ACADEMIE m'a paru le demander; & je dois dire à l'avantage des Principes que nous adopterons, que j'ai trouvé par-tout un accord merveilleux entre la Théorie & les Obſervations, accord qui doit être d'autant moins ſuſpect, que je n'ai conſulté les Obſervations, qu'après avoir achevé tous mes Calculs, de maniere que je puis dire de bonne foi, d'avoir deviné la pluſpart des Obſervations, ſur leſquelles je n'étois pas trop bien informé, lorſque j'ai entrepris cet Ouvrage.

III.

Quant aux Tourbillons, j'avouë qu'il eſt bien difficile d'en demontrer le faux à ceux qui veulent s'obſtiner à les défendre : mais auſſi il n'en eſt pas de la Phyſique, comme de la Géometrie. Dans celle-ci on n'admet, ni ne rejette rien, que ce dont on peut abſolument démontrer la vérité ou la fauſſeté, pendant que dans la Phyſique il faut ſe rapporter ſouvent à un certain inſtinct naturel de ſentir le faux & le vrai, après avoir bien péſé toutes les raiſons de part & d'autre. Quant à moi, je ne trouve point ce caractere de vérité, ni dans l'hypotheſe des Tourbillons, ni dans les conſéquences que l'on en tire. Si nous diſons que le Tourbillon a la même denſité, la même direction & la même viteſſe que la Lune, ce Tourbillon ne ſçauroit faire aucun effet; & ſi au contraire

traire nous ſuppoſons ces trois choſes n'être pas les mêmes de part & d'autre, il me paroît bien clair & bien certain, que l'effet du Tourbillon devroit ſe manifeſter infiniment davantage dans le mouvement de la Lune, que dans celui des Eaux de la Terre. Cependant on ſçait parfaitement bien que la Lune, quoique ſujette à beaucoup d'irrégularités dans ſes mouvemens, n'en a aucune qui puiſſe être attribuée à l'action auſſi ſenſible d'un Tourbillon. Si nous paſſons par deſſus toutes ces différentes difficultés, nous en rencontrerons d'autres également embaraſſantes. C'eſt contre les loix de l'Hydroſtatique, que la Lune, qui nage dans le Tourbillon, puiſſe cauſer des variations dans la compreſſion des parties du Fluide. C'eſt une propriété eſſentielle des Fluides de ſe remettre auſſi-tôt à l'Equilibre, lorſque ſes Parties en ſont ſorties. Si une colonne de Tourbillon, entre la Lune & la Terre, étoit plus comprimée qu'une autre colonne ſemblable, rien ne ſçauroit empêcher ſes parties de s'échaper de côté juſqu'au retabliſſement de l'Equilibre. Qu'on s'imagine, par exemple, l'air de notre Atmoſphere tout d'un coup extrêmement échauffé; ce changement feroit en même tems hauſſer à proportion le Mercure dans le Barometre, puiſque l'air chaud a plus de reſſort que l'air froid; mais comme rien n'empêche l'air de s'échaper de côté juſqu'à la parfaite conſervation de l'Equilibre, cela fait qu'un tel changement n'en ſçauroit faire aucun ſur le Barometre; auſſi n'obſerve-t-on dans le Barometre aucune variation du jour à la nuit, qui cependant, par un raiſonnement tout-à-fait ſemblable à celui des Tourbillonnaires pour expliquer les Marées, devroit être très-ſenſible. Pareillement ſi les eaux d'une Riviere donnent contre un pieu, on ne remarquera aucune différence dans la ſurface des eaux, que bien près du pieu, & le fond du lit de la Riviere ſera toujours également preſſé. En voilà aſſez & trop ſur cette matiere; car ce ſera toujours aux Sectateurs de Deſcartes de montrer l'effet des Tourbillons ſur l'Océan, avec la même clarté qu'on peut le faire, moyennant le principe de Kepler, principe d'ailleurs qui n'eſt plus conteſté; ſçavoir, que la Terre & tous les Corps céleſtes ont une tendance mutuelle à s'approcher les uns des autres. Ce principe poſé, il eſt facile de faire voir, que la Terre que nous ſuppoſerons devoir être ſans cette tendance parfaitement ronde, en changera continuellement ſa figure, & que c'eſt ce changement de figure qui eſt la cauſe du Flux & Reflux de la Mer: Comme ce changement dans la Figure de la ſurface de la Terre eſt produit de differentes façons, j'en ferai ici un dénombrement, & je tâcherai dans la ſuite d'en donner la meſure.

## IV.




Si *A* eſt le centre de la Lune, ou du Soleil: *B G D H* la Terre; ſi l'on tire par les centres de la Lune ou du Soleil & de la Terre la droite *A D*, & qu'on prenne au dedans de la Terre un Point quelconque *F*, on tirera *F E* perpendiculaire à *B D*, avec la droite *F A*, & on achevera le Rectangle *F L A E*. Chaque point *F* eſt tiré ou pouſſé vers *A*, & cette force étant repreſentée par *F A*, elle ſera considérée comme compoſée des deux Laterales *F L* & *F E*: cela étant, on voit que la force *F E* étant appliquée dans chaque point de la Terre, ne ſçauroit que l'allonger au tour de *B D*: Et comme c'eſt une même raiſon pour tous les Plans qui paſſent par *B D*, il eſt clair que la Terre formera ainſi un Sphéroïde produit par la rotation d'une Courbe *B G D* autour de *B D*.

On remarquera, que cet allongement ne ſçauroit être qu'extrêmement petit. *Premierement*, à cauſe de la petiteſſe des Lignes, *F E* par rapport à *F A*. *En ſecond lieu*, à cauſe du peu de rapport qu'il y a entre la péſanteur du Point *F* vers *A*, à la péſanteur du même Point vers le centre de la Terre *C*. Nous verrons dans la ſuite que cet allongement ne peut aller qu'à un petit nombre de pieds, ce qui eſt fort peu conſidérable, par rapport au Diametre de la Terre.

On remarquera encore, que l'allongement total étant imperceptible par rapport au Diametre de la Terre, la différence des allongemens pour l'Hemiſphere ſupérieur *G B H*, & pour l'inférieur *G D H*, doit être inſenſible par rapport à l'allongement total; à la rigueur, il faudroit dire, que les forces exprimées par *F E*, ſont tant ſoit peu plus grandes dans l'Hemiſphere *G B H*; que dans l'Hemiſphere oppoſé, dont les parties ſont plus éloignées du point *A*, & qu'ainſi ledit Hemiſphere *GBH* ſera un peu plus allongé que l'autre Hemiſphere: mais on ſent bien que la différence doit être inſenſible. On peut donc prévoir que les Poles *B* & *D* reſteront également éloignés du Point *C*, & que la Courbe *G B H* pourra être cenſée la même que *G D H*. Nous donnerons un Calcul juſte & détaillé de tout cela dans la ſuite de ce Traité. Ve-

Venons à une ſeconde conſidération, qui produira le même reſultat, que celle dont nous venons de parler.

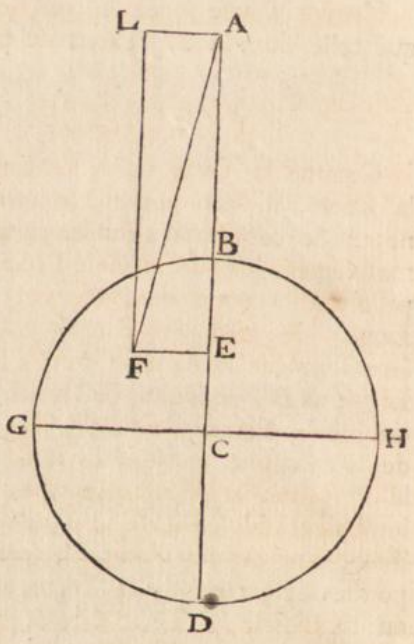
## V.

Comme la Terre tâche continuellement à s'approcher du Soleil & de la Lune, il faut qu'il y ait en même tems d'autres forces qui la retiennent; & ce ſont les forces centrifuges de la Terre, qu'elle a par ſon mouvement autour du Soleil, & autour du centre de Gravité (je l'appelle ainſi, pour me conformer à l'uſage) qui eſt entre la Terre & la Lune. Je démontrerai auſſi ci-deſſous, que cette force centrifuge doit être ſuppoſée égale dans toutes les parties de la Terre, & parallele à la Ligne *AD*, pendant que l'autre force ſe répand inégalement ſur les parties de la Terre. Elle eſt plus grande dans les parties les plus proches de *A*, & plus petite dans les parties qui en ſont plus éloignées, & cela en raiſon quarrée reciproque des Diſtances. Cette raiſon ſuppoſée, le Calcul fait voir, que pourvû que les Couches concentriques de la Terre autour du Point *C*, ſoient homogenes, la force moyenne, qui pouſſe les parties de la Terre vers *A*, eſt préciſément celle qui répond au centre de la Terre *C*; & que c'eſt dans ce centre *C*, où la force centrifuge eſt préciſément égale à la force centripete. Ainſi chaque partie qui eſt entre *C* & *B*, eſt plus pouſſée vers *A*, qu'elle n'eſt repouſſée; & au contraire chaque partie ſituée entre *C* & *D*, eſt moins pouſſée vers *A*, qu'elle n'eſt repouſſée; de ſorte qu'en s'imaginant deux Canaux communiquans entre eux *GH* & *BD*, on voit que chaque goute dans la partie *CB*, eſt tirée vers *A*, & que chaque goute dans la partie *CD*, eſt pouſſée dans un ſens contraire. Cela diminue l'action de la péſanteur vers le centre de la Terre dans le Canal *BD*, pendant que cette même péſanteur n'eſt pas diminuée dans le Canal *GH*, d'où il arrivera encore un allongement autour de l'Axe *BD*, ce que je m'étois propoſé de faire voir.

Le Calcul montre que cette raiſon eſt en ſoi-même de fort peu d'importance; qu'elle ne ſçauroit allonger l'Axe *BD* conſidérablement. Mais ſon reſultat eſt aſſez comparable avec celui de l'allongement expoſé auparavant. On prévoit d'ailleurs encore que l'allongement produit par cette raiſon, doit être égal dans les Canaux *BC* & *CD*, la différence ne pouvant être ſenſible; & ainſi les Points *B* & *D* reſteront encore également éloignés du centre *C*.

## VI.

Une troiſiéme raiſon, qui peut allonger davantage l'Axe *BD*, eſt que par l'allongement même, produit par les deux cauſes précedentes,




la pésanteur terreſtre qui fait deſcendre tous les Corps vers le centre *C*, eſt changée. Cette pésanteur peut être conſidérée comme égale dans les Canaux *GC* & *BC*, ou *DC* à des Diſtances égales du centre *C*, tant que la Terre eſt ſuppoſée Sphérique ; mais cette Sphéricité ôtée, il eſt naturel que cette égalité ne pourra plus ſubſiſter. Il eſt auſſi vraiſemblable que la pésanteur eſt diminuée dans les Canaux *CB* & *CD*, & qu'ainſi l'Axe doit encore être prolongé. Pour calculer cet allongement, nous aurons recours au Syſtême de M. Newton, qui ſuppoſe la pésanteur produite par l'Attraction commune de la matiere en raiſon quarrée reciproque des Diſtances. Ce n'eſt pas que je croye cette hypotheſe bien démontrée ; car la concluſion de la Gravitation mutuelle des Corps du Syſtême du Monde en raiſon quarrée reciproque des Diſtances, qu'on ne ſçauroit plus nier, à une ſemblable attraction univerſelle de la matiere, de laquelle M. Newton déduit la pésanteur ; cette conſéquence, dis-je, demande beaucoup d'indulgence. Mais je l'adopterai pour ce ſujet, parce que tous les autres Syſtêmes ſur la pésanteur me ſeroient inutiles : c'eſt le ſeul, qui étant du reſſort de la Géometrie, donne des meſures aſſurées & fixes ; & il eſt d'ailleurs digne de l'attention de tous les Géometres & Phyſiciens.

## VII.

Les trois cauſes que je viens d'expoſer, comme pouvant & devant allonger la Terre autour de la Ligne qui paſſeroit par le centre du Soleil & de la Lune, ſont d'une force aſſez égale ; de ſorte qu'il faudra tenir compte de toutes, quoique chacune ſoit ſi petite, qu'elle ne ſçauroit allonger la Terre au delà d'un petit nombre de pieds, & peut-être moins d'un pied. Il ſera bon de remarquer ici que ce qui, après le Calcul, exprime leſdits allongemens, eſt toujours un certain multiple, ou ſous-multiple de $\frac{bg}{aG} \times b$, entendant par $b$ le rayon de la Terre, par

$a$ ſa

$a$ la distance du luminaire en question & par $\frac{g}{G}$ la raison qui est entre la pésanteur d'un Corps placé en $B$ vers $A$, & sa pésanteur vers $C$, laquelle raison est extrêmement petite.

J'ai jugé à propos d'alleguer ici cette Formule, que le Calcul m'a enseigné, afin que ceux qui voudroient le faire après moi, sçachent d'abord quels termes on peut rejetter, comme inutiles, qui rendent les Calculs extrêmement pénibles, & qui se trouvent au bout du Calcul, n'être d'aucune importance. Ce seroit une chose ridicule, de vouloir faire ici attention à des parties d'une Ligne qui proviendroient, si ladite quantité $\frac{b\,g}{a\,G} \times b$ étoit encore multipliée par $\frac{b}{a}$, ou par $\frac{g}{G}$.

## VIII.

Notre dessein est d'abord de chercher & d'exprimer analytiquement les allongemens dont nous venons de parler. On peut les trouver par rapport aux deux premieres causes, indépendamment de la Figure de la Terre; mais par rapport à la troisiéme cause exposée au sixiéme Article, il faut supposer la Terre, c'est-à-dire, le Méridien $BGDH$ d'une Figure donnée; & c'est l'hypothese la plus naturelle, de la supposer elliptique, ayant pour Axes les Lignes $BD$ & $GH$; quelle qu'elle soit, elle n'en sçauroit être sensiblement différente, & si elle l'étoit, cela ne sçauroit produire un changement bien considérable sur le rapport des deux Axes $BD$ & $GH$, que nous cherchons. Outre cela nous verrons que c'est ici un Problême, qui dépend encore de la loi des changemens dans les Densités des couches de la Terre. M. Newton suppose la Terre par-tout homogene. Il ne l'a fait apparemment, que pour faciliter le Problême, qui est assez difficile dans toute autre hypothese. Mais cette supposition de M. Newton n'a aucune vraisemblance; je dirai même, qu'elle seroit fort peu favorable à notre Systême, comme nous le verrons dans la suite. C'est pourquoi je n'ai pas voulu restreindre si fort la Solution du Problême en question. J'ai cru que je payerois trop cher l'avantage d'applanir les difficultés du Problême, & les peines du Calcul. J'ai donc rendu notre Question infiniment plus générale, pour en tirer tous les Corollaires, & pour choisir ceux qui conviennent le plus à notre sujet, & qui rendront par-là même plus vraisemblables les hypotheses, auxquelles ils appartiennent.

## IX.

Voici à present nos hypotheses. Nous considererons la Terre, comme

me naturellement ſphérique, & compoſée de couches concentriques: Nous ſuppoſerons ces couches homogenes, chacune dans toute ſon étendue; mais qu'elles ſont de différentes Denſités entre elles, & que la loi des variations de leur Denſité ſoit donnée. Quant à la Sphericité de la Terre, que nous ſuppoſerons, on voit bien qu'il ſeroit ridicule de s'y arrêter, puiſque l'élevation des eaux de l'Océan, cauſée par les deux Luminaires, ne ſçauroit différer ſenſiblement, que la Terre ſoit un peu applanie, ou un peu allongée. La ſuppoſition de l'Homogénéité des couches concentriques, ne doit pas non plus nous faire de la peine, puiſqu'on ne ſçauroit donner aucune raiſon, pourquoi elles devroient être hétérogenes.

## CHAPITRE II.

*Contenant quelques Lemmes ſur l'Attraction des Corps.*

### I.

JE prie encore une fois le Lecteur, de ne conſidérer ce Chapitre, que comme hypothétique. Je ne ſuppoſe l'Attraction univerſelle de la matiere, que parce que c'eſt la ſeule hypotheſe, qui admette des Calculs, & qu'elle eſt d'ailleurs aſſez bien fondée, pour mériter l'attention de tous les Philoſophes du monde.

On appelle au reſte Attraction qu'exerce un Corps *A* ſur un Corps *B*, la force accéleratrice, que le Corps *B* acquiert à chaque inſtant, en tombant vers *A*. On voit donc que l'effet de l'Attraction du Corps *A* ſur le Corps *B*, eſt de communiquer à celui-ci une péſanteur, qu'on ſuppoſe proportionnelle à la maſſe du Corps *A* diviſée par le quarré de la Diſtance; & cette péſanteur doit encore être multipliée par la maſſe du Corps *B*, pour avoir la force que ce Corps exerce s'il eſt empêché de s'approcher du Corps *A*.

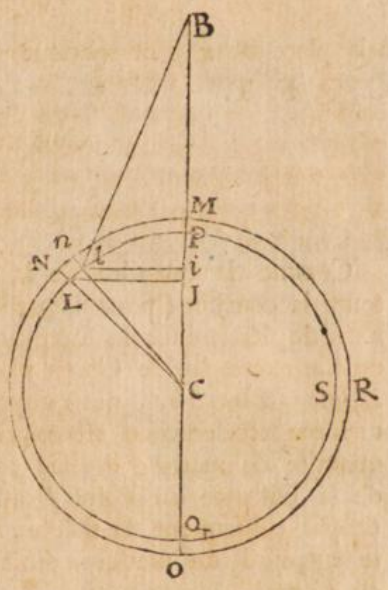
### PROBLEME

### II.

Soit une couche ſphérique homogene, infiniment mince; & d'une épaiſſeur égale, compriſe entre les ſurfaces ſphériques *MNOR* & *PQLS*, trouver l'Attraction, ou la force accéleratrice, que cette couche exercera ſur un Corps placé au point *B*, pris hors de la ſurface extérieure.

SOLU-

## SOLUTION.




Qu'on tire la droite $BO$ par le Point $B$ & le Centre $C$, dans laquelle on prendra deux Points infiniment proches $J$ & $i$: on tirera ennſuite les deux Perpendiculaires $JL$ & $il$, & par les Points $L$ & $l$, on tirera du centre les droites $CN$ & $Cn$. Soit à préſent $CB = a$; $CJ = x$; $Ji = dx$; $CP = b$; $PM$ ou $LN$ (que nous regardons comme infiniment petite) $= \ell$: la Denſité de la matiere de la couche $= m$.

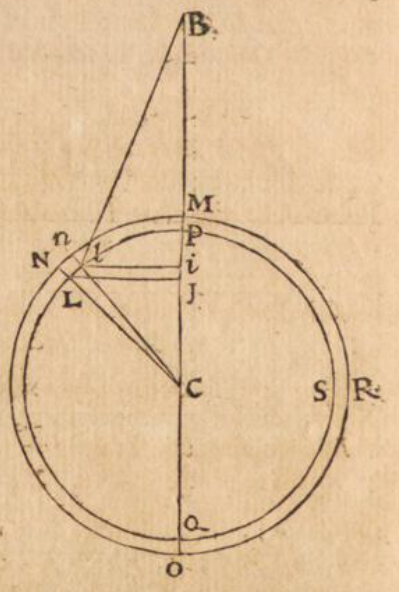
On voit que pendant la revolution autour de l'Axe $MO$, la petite partie $NLln$ garde toujours une même Diſtance du Point $B$, & que cette Diſtance ſera $= \sqrt{(aa - 2ax + bb)}$: or, comme il faut toujours diviſer par le Quarré des Diſtances, il faudra pour trouver la force accélératrice en queſtion d'abord prendre $\frac{1}{aa-2ax+bb}$, & cette quantité doit être multipliée par la raiſon de $Bi$ à $Bl$, & on aura $\frac{a-x}{(aa-2ax+bb)^{\frac{3}{2}}}$: & cette quantité doit encore être multipliée par la Maſſe de l'Anneau, que la partie $NLnl$ forme par ſa revolution, & la Maſſe doit être exprimée par la Denſité $m$ & la capacité de l'Anneau, c'eſt-à-dire (en nommant $n$ la raiſon de la circonférence d'un Cercle à ſon rayon) par $m \times NL \times Ll \times n \times LJ$: ou par $m \times \ell \times \frac{b\,dx}{\sqrt{(bb-xx)}} \times n \times \sqrt{(bb-xx)}$ ou enfin par $nmb\ell dx$; de ſorte qu'on a la force accéleratrice abſoluë produite par ledit Anneau $= \frac{nmb\ell(a-x)\,dx}{(aa-2ax+bb)^{\frac{3}{2}}}$, dont l'Intégrale exprimera l'Attraction cherchée de toute la couche. Pour trouver cette Intégrale, nous ſuppoſerons $aa - 2ax + bb = yy$, & nous aurons $\int \frac{nmb\ell(a-x)\,dx}{(aa-2ax+bb)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{-nmb\ell(aa-bb+yy)\,dy}{2aayy}$ $= \frac{nmb\ell}{2aa} \times \left(\frac{aa-bb-yy}{y} + C\right) = \frac{nmb\ell}{2aa} \times \left(\frac{2ax-2bb}{\sqrt{aa-2ax+bb}} + C\right)$, entendant par $C$ une Conſtante convenable: pour la trouver il faut remarquer, que l'Intégrale doit être $= o$, lorſque $x = -b$, d'où l'on tire

$C = \frac{2ab+2bb}{a+b} = 2b$: ſubſtituant cette valeur, on obtient pour l'Intégrale en queſtion $\frac{nmb\zeta}{aa}\left(\frac{ax-bb}{\sqrt{aa-2ax+bb}}+b\right)$, & mettant enfin $b$ à la place de $x$, on obtient la force accéleratrice cherchée $= \frac{2nmbb\zeta}{aa}$. C. Q. F. T.

## COROLLAIRE.

### III.

Comme la quantité de la matiere de toute la couche (pour laquelle nous venons de déterminer la force accéleratrice, qu'elle exerce ſur le Corps placé au point $B$) eſt $= 2nmbb\zeta$, nous voyons que cette force accéleratrice eſt exprimée par la quantité de matiere diviſée par le quarré de la Diſtance du Point $B$ au Centre $C$, & par conſéquent la même, que ſi cette quantité de matiere étoit concentrée au Centre.




## SCHOLIE.

### IV.

On remarquera que cette Solution n'a lieu, que lorſque le Point $B$ eſt placé hors de la couche, parce que dans notre Calcul nous avons ſuppoſé, que chaque Anneau formé par la revolûtion de la partie $NLln$ produit une force accéleratrice du même côté, ce qui n'a plus lieu, lorſque le Point $B$ eſt placé entre les deux ſurfaces, ou au-dedans de la ſurface intérieure. Je ne dirai rien de ces deux cas, dont chacun demande une Solution particuliere, parce que nous n'en aurons pas beſoin, & qu'ils ont déja été reſolus par l'Auteur de ces Problêmes. Je n'aurois même rien dit du cas que nous venons de réſoudre, comme pareillement réſolu par M. Newton, ſi je n'avois pas crû, qu'il étoit convenable de ſuivre toutes les traces qui nous menent à l'intelligence de notre Queſtion principale: auſſi ces précautions ſont-elles néceſſaires, pour pouvoir toujours exprimer d'une même façon les Quantités conſtantes; & ainſi nous nous ſouviendrons toûjours dans

dans la ſuite d'exprimer la force accéleratrice d'un Corps infiniment petit, par la Maſſe diviſée par le quarré de la Diſtance, & de dénoter la Maſſe par le produit de ſon étenduë, & de ſa Denſité.

### PROBLEME.

### V.

Trouver l'Attraction pour un Corps placé en $B$, cauſée par une Sphere ſolide, compoſée de couches homogenes; mais de différentes Denſités entre elles.

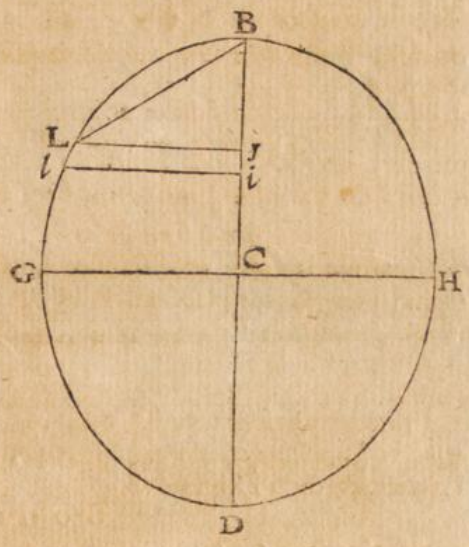
### SOLUTION.

Il paroît par le troiſiéme Article, qu'on n'a qu'à concevoir la Maſſe de toute la Sphere ramaſſée au Centre $C$, & qu'elle cauſera la même Attraction, tant que le Point $B$ eſt hors de la Sphere: nommant donc $M$ la Maſſe du Globe, ou la ſomme des Maſſes de toutes les couches, l'Attraction cherchée ſera $= \frac{M}{aa}$. C. Q. F. T.

### PROBLEME.

### VI.

Soit $BGDH$ une Ellipſe preſque circulaire, c'eſt-à-dire, dont la différence des Axes $BD$ & $GH$ ſoit regardée comme infiniment petite; & qu'on conçoive cette Ellipſe former par ſa rotation autour de l'Axe $BD$, un Sphéroïde homogene. On demande la force accéleratrice, ou l'attraction que ce Sphéroïde produira ſur un Corps placé au Pole $B$.




### SOLUTION.

Soit la Denſité de la matiere exprimée par $\mu$; le petit demi Axe $GC = b$; le grand demi Axe $BC = b + f$; $BJ = x$; $Ji = dx$; on aura la perpendiculaire $LJ = \frac{b+f}{b} \times \sqrt{2(b+f)x - xx}$. On voit facile-

 ment

ment * que l'Attraction cauſée par la couche, qui répond au Rectangle $LJil$, eſt $= n\mu dx - n\mu dx \times \frac{BJ}{BL}$, c'eſt-à-dire, par $n_\mu dx - n\mu dx$: $\sqrt{xx + \frac{bb}{(b+\ell)^2} \times (2bx + 2\ell x - xx)}$ ou par $n\mu dx - (b+\ell)\, n\mu x dx$: $\sqrt{(2b\ell x x + \ell\ell xx + 2b^3 x + 2bb\ell x)}$: Dans cette derniere quantité, nous rejettons le Terme $\ell\ell xx$, comme devant être comparé aux infiniment petits du ſecond ordre, & nous changerons le Signe radical du Dénominateur en Signe exponentiel de Numerateur; & de cette maniere nous aurons $n\mu dx - (b+\ell)\, n\mu x dx \times (2b^3 x + 2b\ell xx + 2bb\ell x)^{-\frac{1}{2}}$: or on ſçait par la formation des ſuites de M. Newton, que $(2b^3 x + 2b\ell xx + 2bb\ell x)^{-\frac{1}{2}}$ eſt $= (2b^3 x)^{-\frac{1}{2}} - (2b^3 x)^{-\frac{3}{2}} \times (b\ell xx + bb\ell x)$: ſubſtituant donc cette valeur, on obtient $n\mu dx - \frac{(b+\ell)\, n\mu x dx}{\sqrt{2b^3 x}} + \frac{(b+\ell)\, n\mu x dx\, (b\ell xx + bb\ell x)}{2b^3 x \sqrt{2b^3 x}}$, qui marque l'action de la couche formée par la rotation du Rectangle $LJil$: à la place de cette quantité, on peut encore, en multipliant les quantités à multiplier, & rejettant les termes affectés de la ſeconde Dimenſion de $\ell$, poſer $n\mu dx - \frac{n\mu dx\sqrt{x}}{\sqrt{2b}} - \frac{\ell n\mu dx\sqrt{x}}{2b\sqrt{b}} + \frac{\ell n\mu x dx\sqrt{x}}{2bb\sqrt{b}}$, & l'Intégrale de cette quantité (qui doit être $= o$, lorſque $x = o$) eſt $= n\mu x - \frac{2n\mu x\sqrt{x}}{3\sqrt{2b}} - \frac{\ell n\mu x\sqrt{x}}{3b\sqrt{2b}} + \frac{\ell n\mu xx\sqrt{x}}{5bb\sqrt{2b}}$; & faiſant enfin $x = 2b + 2\ell$, on trouve, en rejettant toujours les infiniment petits du ſecond ordre $2n\mu b + 3n\mu\ell - 2n\mu b - 2n\mu\ell = \frac{2}{5} n\mu\ell + \frac{4}{5} n\mu\ell$, ou bien enfin

$$\tfrac{2}{5} n\mu b + \tfrac{2}{15} n\mu\ell;$$

qui marque la force accéleratrice cauſée par l'action de tout l'Ellipſoïde ſur un petit Corps placé au Pole $B$. C. Q. F. T.

## PROBLEME.

## VII.

Les hypotheſes étant les mêmes, que dans la propoſition précedente, trouver la même choſe pour un petit Corps placé en $G$, qui eſt ſous l'Equateur de l'Ellipſoïde.

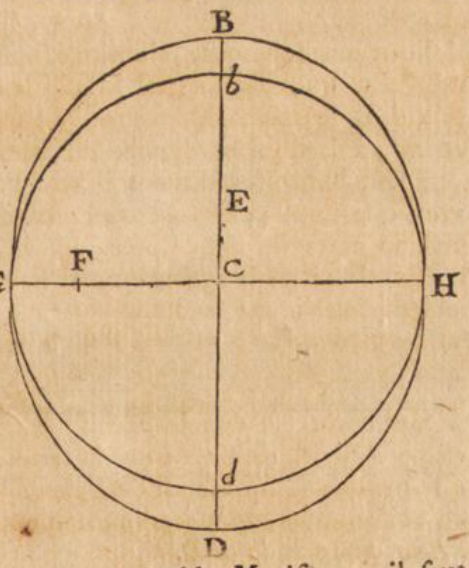
## SOLUTION.

Il eſt facile de démontrer par la Géometrie, que toute Section de l'Ellipſoïde parallele à l'Axe de Rotation $BD$, fait une Ellipſe ſembla-

* Ceci ſe trouve demontré par le Cor. 1. de la Prop. XC. du 1er. Livre de Mr. Newton; on y voit que l'Attraction du point $B$ par le Cercle dont $LJ$ eſt le Rayon, eſt $1 - \frac{BJ}{BL}$ qu'il faut multiplier par la Maſſe du petit Cylindre dont ce Cercle eſt la Baſe & dont $Ji$ eſt la hauteur pour avoir l'Attraction cauſée par la Couche qui répond au Rectangle $LJil$.

ble à l'Ellipſe génératrice *B G D H*. Conſidérons l'Ellipſoïde comme compoſée de la Sphere inſcrite, ayant pour Diametre le petit Axe *G H*, & de l'écorce formant un double Meniſque: l'action de la Sphere doit être exprimée par $\frac{2}{3} n \mu b$, comme nous avons démontré au 5. §. Car la maſſe de cette Sphere eſt $\frac{2}{3} n \mu b^3$, & la diſtance du Point *G* au centre eſt $= b$. Il nous reſte donc à chercher quelle action reſulte du double Meniſque.

Concevons pour cet effet tout l'Ellipſoïde partagé en couches paralleles & perpendiculaires à *G H*. Soit la diſtance du centre d'une de ces couches au Point $G = x$; ſon épaiſſeur $= dx$; il n'eſt pas difficile de voir * que la capacité du bord de cette couche (qui fait partie du double Meniſque en queſtion) eſt $= \frac{n \ell}{2b} \times (2bx - xx)\, dx$, & que ce bord étant multiplié par la Denſité $\mu$, en donne la quantité de matiere $= \frac{n \mu \ell}{2b} \times (2bx - xx)\, dx$. Or toutes les parties de ce bord infiniment mince, peuvent être cenſées agir également, & avec une même obliquité ſur le Corps placé au point *G*: on n'a donc qu'à multiplier cette quantité de matiere par la raiſon de la diſtance du centre de la couche au Point *G* à la diſtance du bord de la couche au même Point *G*, & diviſer par le quarré de cette Diſtance, pour avoir l'attraction du bord de la couche, qui ſera donc $\frac{n \mu \ell}{2b} \times (2bx - xx)\, dx \times \frac{x}{\sqrt{2bx}} \times \frac{1}{2bx}$, ou bien $\frac{n \mu \ell\, dx}{4b\sqrt{2b}} \times (2b\sqrt{x} - x\sqrt{x})$ dont l'Intégrale eſt $= \frac{n \mu \ell}{4bb\sqrt{2b}} \times (\frac{4}{3} bx\sqrt{x} - \frac{1}{5} xx\sqrt{x})$ puiſqu'il ne faut point ajoûter ici de conſtante;




& pour avoir enfin l'Attraction de tout le double Meniſque, il faut mettre $x = 2b$, après quoi on aura ſimplement $\frac{4}{15} n \mu \ell$. Si on ajoûte

* Car l'aire de l'Ellipſe éloignée de G de la quantité $x$ eſt $\frac{n}{2b} \times b + \ell (2bx - xx)$ & l'aire du Cercle inſcrit eſt $\frac{n}{2}(2bx - xx)$. Donc otant cette aire du Cercle de celle de l'Ellipſe reſte $\frac{n \ell}{2b}(2bx - xx)$ pour l'aire de Meniſque.

à cette quantité l'action de la Sphere inscrite, on aura l'attraction cherchée de tout l'Ellipsoïde sur un Corps placé au Point $G = \frac{2}{5} n\mu b + \frac{4}{15} n\mu 6$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

VIII.

On voit par ces deux dernieres Propositions, que les forces accéleratrices au Pole, & sous l'Equateur dans un Ellipsoïde homogene, sont comme $\frac{2}{5} n\mu b + \frac{2}{15} n\mu 6$ à $\frac{2}{5} n\mu 6 + \frac{4}{15} n\mu 6$, ou comme $5b + 6$ à $5b + 26$, laquelle raison peut passer pour celle de 1 à $1 + \frac{6}{5b}$. Je vois que cela est conforme à ce que M. Newton dit à la page 380. * des *Princip. Math. Phil. Nat. Edit.* 2. pour déterminer la Proportion de l'Axe de la Terre au rayon de son Equateur. Quant à son raisonnement, il n'y a peut-être que lui, qui pût y voir clair; car ce grand Homme voyoit à travers d'un voile, ce qu'un autre ne distingue qu'à peine avec un Microscope.

LEMME.

Dans un Sphéroïde elliptique homogene, la force accéleratrice pour un Point quelconque, est à la force accéleratrice pour un autre Point pris dans le même Diametre, comme la distance du premier Point au centre, à la distance pareille du second Point.

† M. Newton a démontré cette Proposition à la 199. page de son Livre, que nous venons de citer: & comme il ne s'agit ici que de la proportion entre les deux forces accéleratrices, sans qu'il soit question de les exprimer analytiquement, il seroit superflu, pour mon dessein, de la démontrer à ma façon.

PROBLEME.

X.

Soit encore le double Menisque, tel que nous l'avons décrit au septieme Article, compris entre la surface de l'Ellipsoïde *G B D H*, & *Gb Hd*, qui marque la surface de la Sphere inscrite; il s'agit de trouver la force accéleratrice, que ce double Menisque produira au point *E*, pris dans l'Axe de rotation *B D*.

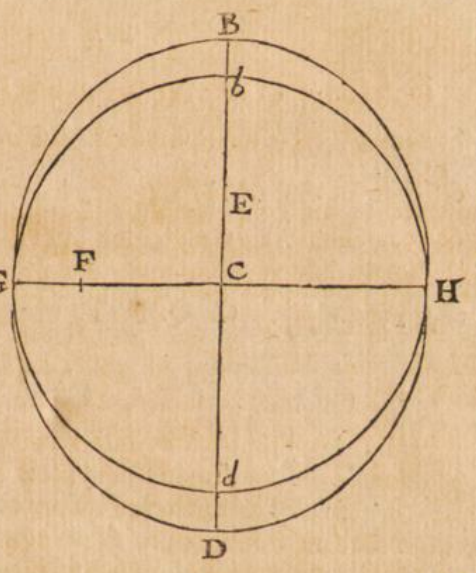
SOLUTION.

Nous garderons les dénominations de ci-dessus: or on voit qu'on trouvera l'action du double Menisque, en prenant celle de tout l'Ellipsoïde considéré comme homogene avec les Menisques, & en retranchant celle de la Sphere inscrite. L'action de tout le Sphéroïde est en vertu

* Ceci se raporte à la page 80. & suiv. de ce Volume, & nous avons essayé d'éclaircir cet endroit de M. Newton dans la la Notte (r) & suivantes.

† C'est le Cor. 3. de la Prop. XCI. du Livre 1^er^. vol. 1^er^. pag. 519.

des 6 & 9 Articles $=(\frac{2}{3}n\mu b+\frac{2}{15}n\mu\beta)\times\frac{CE}{CB}$, & celle de la Sphere $=\frac{2}{3}n\mu b\times\frac{CE}{Cb}$: de là on tire la force accéleratrice, qui convient aux Menisques $=\frac{2}{3}n\mu b+\frac{2}{15}n\mu\beta)\times\frac{CE}{CB}-\frac{2}{3}n\mu b\times\frac{CE}{Cb}$. Substituons à la place de $\frac{CE}{Cb}$ cette quantité $\frac{CE}{CB-Bb}$, qui peut être censée égale à $\frac{CE}{CB}+\frac{Bb\times CE}{CB^2}$ (à cause que nous traitons la petite $Bb$, comme infiniment petite, par rapport à $CB$) & nous trouverons la force accéleratrice pour les Ménisques




$=\frac{2}{15}n\mu\beta\times\frac{CE}{CE}-\frac{2}{3}n\mu b\times\frac{Bb\times CE}{CE^2}=\frac{2}{15}n\mu\beta\times\frac{CE}{CB}-\frac{2}{3}n\mu\beta\times\frac{CE}{CB}$

$\left(\text{puisque }\frac{Bb}{CB}=\frac{\beta}{b+\beta}=\frac{\beta}{b}\right)=-\frac{8}{15}n\mu\beta\times\frac{CE}{CB}$. C. Q. F. T.

## COROLLAIRE.

## XI.

Le Signe négatif fait voir, que la Gravitation au Point $E$, causée par l'action des deux Ménisques, se fait vers le Pole $B$, & non vers le Centre $C$. Au reste on remarquera, que cette Proposition n'est vraie que pour les Points compris entre $C$ & $b$, en excluant tous les Points, qui sont au-delà de $b$; & cela à cause que le Lemme du 9. §. ne sçauroit être appliqué à trouver la force accéleratrice causée par l'action de la Sphere pour le Point $E$, si ce Point est pris hors de la Sphere inscrite au Sphéroïde. Ainsi par exemple, au point $B$, la Gravitation causée par les Ménisques, se feroit vers le Centre avec une force accéleratrice $\frac{22}{15}n\mu\beta$. Je restreins ces Propositions, quoique ma Méthode suffise pour des solutions beaucoup plus générales; & cela pour ne me point engager dans des longueurs qui nous meneroient au-delà de notre sujet.

## PROBLEME.

## XII.

Trouver la même chose que dans l'Art. X. pour un Point quelconque $F$, pris dans une Ligne $GH$ perpendiculaire à $BD$.

SO-

SOLUTION.

On obtient encore l'action des Ménisques, en retranchant celle de la Sphere de celle du Sphéroïde. Or celle de la Sphere est $= \frac{2}{5} n \mu b \times \frac{CF}{CG}$, & celle du Sphéroïde $= \left( \frac{2}{5} n \mu b + \frac{4}{15} n \mu \ell \right) \times \frac{CF}{CG}$, en vertu des § § 7. & 9. Donc la Gravitation au Point $F$ se fait vers le centre $C$ par la simple action du double Ménisque, & la force accélératrice y sera $= \frac{4}{15} n \mu \ell \times \frac{CF}{CG}$. C. Q. F. T.

## XIII.

Voilà les Propositions qui nous seront nécessaires, pour mesurer les haussemens & baissemens des eaux dans la Mer libre par l'action de l'un des deux Luminaires, entant que ces variations répondent à la relation qui se trouve entre la pésanteur & la figure de la Terre. Ceux qui voudront employer l'analyse pure pour la Solution de nos deux derniers Problêmes, se plongeront dans des Calculs extrêmement pénibles, & verront par là l'avantage de notre Méthode.

---

# CHAPITRE III.

*Contenant quelques Considérations Astronomiques & Physiques, préliminaires pour la Détermination du Flux & Reflux de la Mer.*

COmme le Flux & Reflux de la Mer dépendent de la Lune & du Soleil, on voit bien que notre sujet demande une exacte Théorie du mouvement de ces deux Luminaires. Quant au mouvement apparent du Soleil, on le connoit avec toute l'exactitude requise ici. Mais on est encore bien éloigné de sçavoir avec la même précision la Théorie de la Lune, qui est cependant d'une plus grande importance. Une idée qui m'est venuë là-dessus, d'employer le principe de la conservation de ce que l'on appelle communément *Forces vives* (principe déja employé sous un autre nom par le grand & incomparable M. Huguens, pour trouver les Loix du choc des Corps parfaitement élastiques, & auquel on est redevable d'une grande partie des connoissances nouvelles dans la Dynamique, tant des Fluides, que des Solides:) Cette idée, dis-je, m'a conduit par un chemin fort abregé, à déterminer beaucoup plus

plus exactement, que l'on n'a fait jusqu'ici, les mouvemens de la Lune, que l'on appelle communément irréguliers, mais qui sont tous sujets aux loix Méchaniques. Je m'étois proposé d'inserer ici ma nouvelle Théorie sur la Lune; mais, comme notre sujet n'est déja que trop étendu, & qu'il demande des discussions assez pénibles, je la différerai à une autre occasion, où je la donnerai en forme d'Addition, si l'Académie trouve ce Traité digne de son attention. Je ne ferai donc ici qu'indiquer en gros les connoissances tirées du Systême du Monde, qui servent à donner un Systême général du Flux & Reflux de la Mer; & quand nous viendrons au détail, nous supposerons les mouvemens de la Lune parfaitement connus.

## II.

On sçait que la Lune & la Terre font un Systême à part: l'un & l'autre de ces Corps tournent autour d'un Point, & font leur revolution dans un même tems, décrivant chacun une Ellipse: l'action du Soleil sur l'un & l'autre Corps, change un peu ces Ellipses, & fait même que la proportion des distances dudit Point aux Centres de la Lune & de la Terre, ne demeure pas exactement la même: mais, comme nous ne prétendons jusqu'ici que d'exposer en gros les choses nécessaires à notre Question, nous ne ferons point d'attention à ces inégalités, & considérerons la Terre & la Lune, comme faisant des Ellipses parfaites & semblables entre elles autour d'un même Point.

## III.

Par ladite Revolution, les deux Corps tâchent à s'éloigner l'un de l'autre; & cet effort est contrebalancé par leur Gravitation mutuelle: & comme la Terre fait autant d'effort pour s'approcher de la Lune, que celle-ci en fait pour s'approcher de la Terre, il faut que les forces centrifuges soient aussi égales: d'où il suit que le Point autour duquel ces deux Corps tournent, doit être placé, en sorte que les forces centrifuges soient égales: c'est là la premiere idée. Il vaudroit donc mieux appeller ce Point, *Centre de Forces centrifuges*, ou bien, puisque les viteſſes gardent dans notre hypotheſe une proportion constante, *Centre de Masſes*, que *Centre de Gravité*. Il est vrai que ces mots reviennent au même, à prendre celui du Centre de Gravité dans le sens commun: Mais quelle idée y peut-on attacher, lorsque la pésanteur est inégale dans les différentes parties du Corps? Il n'y a aucun Point alors, qu'on puisse nommer tel, quelque définition qu'on donne à ce mot. Quoi qu'il en soit, il est certain que les distances du Point en question aux Centres de la

Terre & de la Lune, ſont en raiſon reciproque des Maſſes ou Quantités de matiere de ces Corps.

IV.

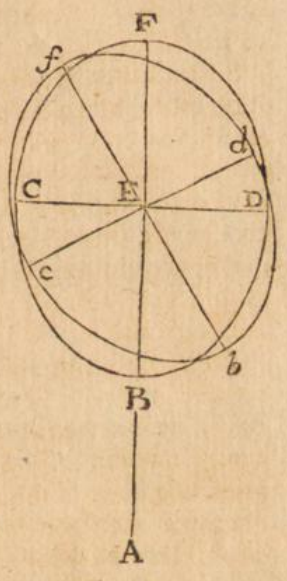
Si la Lune & la Terre étoient des Corps parfaitement homogenes dans toute leur étenduë, ou du moins chacun compoſé de Couches concentriques parfaitement homogenes, & qu'ils fuſſent parfaitement ſphériques, ſans avoir aucun mouvement, imprimé originairement, ou produit par une Cauſe Phyſique, autour d'un Axe paſſant par leur propre Centre de Gravité, il eſt clair, que toutes les parties des Corps garderoient pendant leur Revolution un Paralléliſme; de ſorte que les deux Corps vûs du Centre de Gravité commun, paroîtroient faire préciſément le tour en ſens contraire autour d'un Axe perpendiculaire au plan des Orbites, pendant chaque Revolution des Corps. Cependant cela ne ſe fait point dans la Lune: car nous ſçavons qu'elle nous montre conſtamment une même face (je ne fais pas encore attention à quelques legers changemens;) & cela eſt contraire au Paralléliſme, que nous venons d'alléguer: quoique ce ne ſoit pas ici proprement l'endroit pour expliquer ce Phénomene de la Lune, je ne laiſſerai pas de le faire, pour nous préparer à ce que nous aurons à dire ſur la Terre, comme eſſentiel à notre matiere.

V.

Conſidérons donc, que la parfaite Homogénéité dans les Couches concentriques de la Lune, auſſi bien que ſa parfaite Sphéricité, ſont moralement impoſſibles: mais il n'eſt pas encore expliqué, comment on peut déduire de là, pourquoi la Lune nous montre toujours une même face. Il ne ſuffit pas de dire que le Centre de Gravité de la Lune pris dans le ſens commun, tâche toûjours à s'éloigner, le plus qu'il eſt poſſible, du Centre de Revolution. Quelques inégales que fuſſent les Couches, & quelque irréguliere que fut la Figure, la Lune garderoit toujours le Paralléliſme des Faces, s'il n'y avoit pas une autre raiſon; ſçavoir, celle de l'inégalité de péſanteur de ſes Parties vers la Terre: les parties ayant d'autant plus de péſanteur, qu'elles ſont plus près de la Terre: c'eſt cette raiſon, qu'il faut joindre à l'une des deux autres, ou à toutes les deux enſemble; de ſorte que quand même la Lune ſeroit parfaitement homogene, ſa ſeule Figure, jointe à l'inégalité de péſanteur de ſes parties vers le Centre de la Terre, pourroit même produire le Phénomene en queſtion.

Soit *A* le Centre de la Terre: *BCFD*, par exemple, une Ellipſe; dont l'Axe *BF* ſoit le plus grand, & *CD* le plus petit: que cette Ellipſe forme par ſa Revolution autour de l'Axe *BF*, le Corps de la Lune,

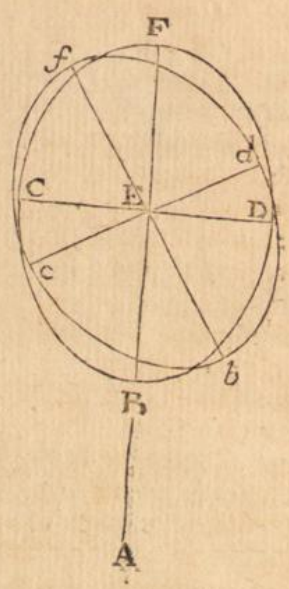
ne. Suppoſons après cela la Lune homogene & mobile autour de ſon Centre *E*, & ſervons-nous de l'hypotheſe ordinaire, que la péſanteur de chaque partie de la Lune vers *A*, ſoit en raiſon quarrée reciproque des diſtances au Point *A*. Cela étant, je dis, que la Lune montrera conſtamment au Point *A* la Face *CBD*, & que l'Axe *FB* paſſera toujours par le Point *A*, & que la Lune reprendroit cette ſituation, dès qu'elle en ſeroit détournée. Comme cette matiere eſt aſſez intéreſſante, tant pour l'Aſtronomie, que pour la Phyſique, je l'expliquerai par un exemple, qui rendra fort ſenſible, tout ce que nous venons de dire. Je dis donc qu'on doit regarder, à cet égard, la Lune, comme un Corps flottant dans un Fluide; car les parties d'un tel Corps, ſont pareillement animées de différentes péſanteurs: or on ſçait qu'un Corps flottant, qui n'eſt pas Sphérique, ou qui étant tel, n'eſt pas homogene, n'eſt pas indifférent à chaque ſituation; mais qu'il affecte conſtamment de certaines ſituations, qu'il reprend auſſi-tôt qu'il en a été détourné. Quelquefois le Corps n'a qu'une ſeule ſituation d'Equilibre; d'autres fois pluſieurs, ſuivant la ſtructure du Corps: Mais on ſe tromperoit toujours, ſi l'on croyoit, que le Centre de Gravité du Corps tâche à ſe mettre dans l'endroit le plus bas qu'il eſt poſſible; de même qu'on ſe trompe, en diſant, que le Centre de Gravité de la Lune, tâche à s'éloigner, le plus qu'il eſt poſſible, du Centre de la Terre. On voit donc aſſez, que la cauſe principale de ce que la Lune nous préſente toujours une même face, eſt l'inégalité de péſanteur; & à cette cauſe, il faudra joindre, ou la non-parfaite Sphéricité, ou la non-parfaite Homogénéïté des Couches de la Lune, ou les deux cauſes à la fois.




## V I.

Comme la Queſtion que nous venons d'expliquer, entraîne celle d'une legere nutation de la Lune en Longitude, que les Aſtronomes ont obſervée, il ne ſera pas hors de propos de faire voir comment cette nutation découle de notre Théorie. Nous avons vû que le Sphéroïde *CBDF* mobile autour d'un Point *E*, doit toujours montrer au Point *A* la Face *CBD* tant que le Point *E* reſte dans ſa place. Suppoſons à préſent, que ce Corps s'éloigne un peu de cette ſituation, en faiſant une rotation infiniment petite autour du Point *E*, la force qui tend à la remettre dans ſa ſituation naturelle, eſt de même infiniment petite; ce qui fait voir,

que le Point *E* faiſant ſa revolution autour du Point *A*, ce ne ſçauroit plus être exactement la Face *CBD*, qui regarde vers *A*, parce qu'à chaque petit mouvement du Point *E*, la Lune fait une petite rotation autour de ce Point, pour garder le Paralléliſme, & la force qui tâche à tourner vers le Point *A* la Face *CBD*, étant encore infiniment petite, ne ſçauroit s'en acquitter aſſez-tôt : & ce ſera la même choſe pendant que le Point *E* parcourt un ſecond Elément, & ainſi de ſuite, juſqu'à-ce qu'à la fin la Lune ſe place aſſez obliquement, pour que la force, qui tâche à mettre la Lune dans ſa ſituation naturelle, ſoit aſſez grande, pour réparer, à chaque moment, une nouvelle petite inclinaiſon, qui ſurvient par la rotation du Point *E* autour du Point *A*. [ Cette explication pourra nous ſervir dans la ſuite, pour démontrer un des principaux Phénomenes des Marées. ] La Lune prendra donc la ſituation oblique *cbdf*, ſi ſa Revolution autour du Point *A* eſt ſuppoſée ſe faire de *E* vers *D*. Mais cette ſituation oblique demeureroit encore la même à l'égard de la Ligne *FA*, ſans que la Lune eût aucune nutation, ſi le Point *E* faiſoit ſa Revolution autour du Point *A* dans un Cercle parfait, & avec une viteſſe conſtante : c'eſt donc l'inégalité des diſtances *AE*, & des viteſſes du Point *E*, qui fait que l'obliquité de la ſituation *fcbd* varie ; & c'eſt cette variation qui fait la nutation de la Lune en Longitude.




## VII.

Venons maintenant à la Terre, & examinons quel mouvement elle doit avoir autour du Centre de Gravité, qui eſt entre elle & la Lune : cette recherche eſt néceſſaire pour notre Queſtion, & elle ne ſera plus difficile, après ce que nous avons dit de la Lune dans cette vûë. Nous remarquerons donc, que ſi la Terre eſt parfaitement homogene, ſoit dans toute ſon étendue, ſoit ſeulement dans chacune de ſes Couches concentriques ; & ſi elle eſt en même tems parfaitement ſphérique, elle doit conſerver parfaitement un Paralléliſme dans la ſituation de ſes parties, pendant ſa Révolution. Cependant cette parfaite Homogénéité, eſt moralement impoſſible ; & la parfaite Sphéricité a été refutée par les Obſervations les plus exactes. Ce Paralléliſme ſeroit donc alteré, de même qu'il l'eſt dans la Lune, & la Terre ne manqueroit pas de preſenter

ſenter à la Lune une même face, ſans le mouvement journalier de la Terre. Ce mouvement empêche l'action de la Lune; & l'effet de cette action étant, à cauſe dudit mouvement journalier, tantôt d'un côté de la Terre, tantôt de l'autre, il ne pourroit plus produire qu'une legere nutation journaliere dans l'Axe de la Terre, & quelque petite inégalité dans le mouvement journalier de la Terre. Mais l'une & l'autre doivent être tout-à-fait inſenſibles, à cauſe de la grandeur de la Maſſe de la Terre, de l'extrême petiteſſe de l'action de la Lune, & de la rapidité du mouvement journalier.

## VIII.

On voit donc que la Terre fera ſa revolution autour du Centre de Gravité, qui lui eſt commun avec la Lune, de telle maniere que ſon Axe gardera conſtamment une ſituation parallele. Si nous conſidérons donc le mouvement journalier de la Terre à part, il eſt clair que l'autre mouvement doit être ſuppoſé ſe faire d'une maniere à garder un Paralléliſme dans toutes les Sections de la Terre. Cela étant, il s'enſuit que chaque point de la Terre fait, à l'égard de cet autre mouvement, une même Ellipſe; que chaque partie a une même force centrifuge, & que les Directions des forces centrifuges ſont par-tout paralleles entre elles. Et c'eſt ici le point principal, que je me ſuis propoſé d'établir, & de bien démontrer dans ce Chapitre.

## IX.

Ce que nous venons de démontrer du mouvement de la Terre à l'égard de la Lune, doit auſſi s'entendre à l'égard du Soleil; en ſorte que la force centrifuge des parties de la Terre, par rapport à ſon Orbite annuelle, doit être cenſée la même, & leurs directions paralleles entre elles. Mais cette Propoſition n'eſt pas ſi eſſentielle à l'égard de l'Orbite annuelle, comme à l'égard de l'Orbite, qui ſe fait autour du Centre de Gravité, qui eſt commun à la Terre & à la Lune, à cauſe de l'extrême petiteſſe de cette derniere Orbite.

## CHAPITRE IV.

### *Qui expoſe en gros la Cauſe des Marées.*

I.

APrès avoir expliqué au premier Chapitre trois différentes raiſons, qui peuvent allonger la Terre autour des deux Axes, qui paſſent par les Centres des deux Luminaires, il n'eſt pas difficile de voir comment on doit déduire de ces allongemens le Flux & Reflux de la Mer, pourvû qu'on ait égard en même tems au mouvement journalier de la Terre. Il eſt clair que ce mouvement journalier doit faire continuellement changer de place les deux Axes d'Allongement. Mais il faut remarquer ici par avance, que l'action compoſée des deux Luminaires, peut toujours être conſiderée comme une action ſimple, quoi-qu'à la vérité fort irréguliere. Cependant cette conſidération ſuffit, pour voir en gros, que la Mer doit en chaque endroit s'élever & ſe baiſſer environ deux fois dans un jour. Mais il s'agit de mettre cette cauſe en tout ſon jour, d'en développer tous les effets, & de les reduire à leur juſte meſure, autant que les circonſtances peuvent le permettre.

II.

La Queſtion qui ſe préſente d'abord, & qui eſt en même tems la plus importante pour notre ſujet, eſt de trouver la quantité de l'allongement cauſé par chacun des deux Luminaires. Nous ne conſidérerons donc qu'un ſeul Luminaire. Voici, avant toutes choſes, les ſuppoſitions dont je me ſervirai dans les Calculs, & que j'ai déja expoſées en partie.

I. Nous ſuppoſerons que la Terre eſt naturellement ſphérique. Cette hypotheſe n'eſt que pour abréger le Calcul, & on voit bien que l'effet des deux Luminaires doit être ſenſiblement le même ſur une Terre ronde, ou un peu applatie, ou un peu allongée.

II. Que les Couches concentriques de la Terre ſont d'une même matiere, ou d'une même denſité. Cette ſuppoſition eſt ſans doute fort naturelle ; car les inégalités ne peuvent qu'être tout-à-fait inſenſibles: mais il me ſemble qu'il n'y a aucune vraiſemblance de ſuppoſer que la Terre eſt homogene dans toute ſon étendue, comme M. Newton l'a fait.

III. Que la Terre, que nous ſuppoſons ſans, l'action des Luminaires, ronde, eſt changée par l'action de l'un des deux Luminaires en Ellipſoïde, dont l'Axe paſſe par le Centre du Luminaire agiſſant. C'eſt l'hy-

l'hypotheſe de M. Newton; & quoi qu'on ne puiſſe pas le démontrer pour le Syſtême des Attractions, elle ne doit pas nous arrêter: car quelle que ſoit la Figure de la Terre après ce petit changement, on voit aſſez qu'elle ne ſçauroit s'éloigner ſenſiblement de l'Ellipſoïde. Auſſi trouvons-nous cette Figure elliptique dans toutes les hypotheſes, qu'on pourroit ſe former ſur la peſanteur, ſuſceptibles d'un Calcul & tant ſoit peu naturelles. D'ailleurs un petit changement dans cette Figure extérieure de la Terre, n'en ſçauroit produire, qui ſoit ſenſible, entre l'Axe du Sphéroïde, & le Diametre qui lui eſt perpendiculaire.

IV. Nous ſuppoſerons, que les Luminaires ne ſçauroient faire changer de figure toutes les Couches qui compoſent la Terre juſqu'au Centre. Car vraiſemblablement la Terre eſt, dans ſa plus grande partie, ſolide; & quand même elle ſeroit toute fluide, ſa Maſſe ſeroit trop grande, pour être miſe toute entiere en mouvement, & pour obéir aſſez vîte à une action auſſi petite. Ces refléxions m'ont engagé à conſidérer la Terre, comme un noyau ſphérique, compoſé de Couches parfaitement ſphériques & inaltérables par l'action des deux Luminaires, & inondé d'un Fluide homogene, tel que ſont les eaux de la Mer; & à ſuppoſer, qu'il n'y a que ce Fluide inondant, qui reçoive des impreſſions des Luminaires, & que ſa profondeur n'eſt pas ſenſible par rapport au rayon de la Terre. Cette hypotheſe eſt ſans contredit la plus naturelle, lorſque la Terre n'eſt pas ſuppoſée homogene dans toute ſon étenduë, mais, ſi on la ſuppoſoit homogene, comme M. Newton l'a fait, contre toutes les apparences de vérité, notre hypotheſe n'entre plus en ligne de compte.

V. Enfin nous ſubſtituerons à la place des Forces centrifuges, qui empêchent la Terre de tomber vers les Luminaires, un autre force qui agiſſe de la même façon, afin que nous puiſſions conſidérer d'abord la Terre, comme dans un parfait repos, & un entier équilibre dans toutes ſes parties. Cette force à ſubſtituer, doit être ſuppoſée égale dans toutes les parties de la Terre (§. *VIII. Chap. III.*) & parallele à la Ligne qui paſſe par les Centres de la Terre & du Luminaire, dont il ſera queſtion.

## III.

La Force centrifuge dont nous venons de parler, doit être priſe pour notre ſujet, préciſément telle, qu'elle ſoit égale à la force totale de l'Attraction du Luminaire, tout comme ſi la Terre ſe ſoutenoit dans ſa diſtance, en décrivant un Cercle parfait; & cela eſt vrai, quelle que ſoit la Force centrifuge réelle de la Terre. C'eſt ici une Propoſition, dont on ne ſent la vérité, qu'après quelque réflexion; & elle eſt fondée ſur ce que la différence entre la Force centrifuge, telle que nous venons de la

la décrire, & la force centrifuge réelle, n'eſt employée qu'à pouſſer ou repouſſer la Terre, & ne ſçauroit lui faire changer ſa figure, puiſque nous avons démontré au VIII. Art. du précedent Chapitre, que chaque partie eſt pouſſée également & parallelement.

## IV.

La Force centrifuge totale devant être parfaitement égale à la Gravitation totale de la Terre vers le Luminaire, & la premiere Force étant la même dans toutes les Parties, on voit bien qu'on pourroit ſuppoſer la Force centrifuge égale à la Gravitation vers le Luminaire, telle qu'elle eſt au Centre de la Terre. Car la Gravitation qui répond au Centre, peut être cenſée la moyenne entre toutes les Gravitations du Globe; & cela, quelque relation qu'on ſuppoſe entre les Diſtances & les Gravitations, puiſque la différence des diſtances eſt inſenſible, par rapport à la Diſtance totale; & que par conſéquent la Gravitation diminue comme également pour des égales augmentations de Diſtances, & qu'il ſe fera ainſi une juſte compenſation pour l'Hemiſphere tourné au Luminaire, & pour l'Hemiſphere oppoſé. Cette Propoſition n'eſt pourtant pas géometriquement vraie; mais la fin du Calcul m'a fait voir, qu'elle peut être cenſée vraie pour notre ſujet: & comme elle abrége fort le Calcul, je l'ai miſe ici, pour en faire uſage dans la ſuite.

### PROBLEME.

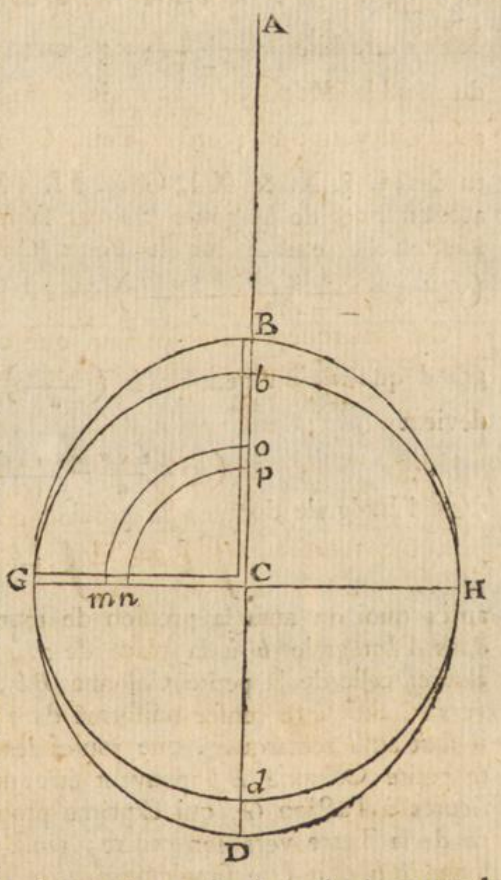
## V.

Soit *A* le Centre du Soleil, *BGDH* la Terre; *AD* une Ligne tirée par les Centres du Soleil & de la Terre: trouver la différence entre *BD* & ſa perpendiculaire *GH*, qui paſſe par le Centre *C*.

### SOLUTION.

Qu'on s'imagine deux Canaux *BC* & *GC*, communiquans entre eux au Centre *C*, rempli d'un Fluide de différentes Denſités, telles qu'on ſuppoſe dans les couches de la Terre. Pour déterminer ces couches, nous conſidererons la Sphere inſcrite *GbHd*, & nous ſuppoſerons tout ce noyau immuable pendant la revolution journaliere de la Terre, fondés, à cet égard, ſur ce que nous avons dit dans la quatriéme hypotheſe du II. §. Quand même on feroit attention aux changemens de figure dans les couches près de *GbHd*, cette conſidération ne ſçauroit changer ſenſiblement le reſultat du Calcul, parce que ces changemens de figure

figure ſont tout-à-fait inſenſibles, & que, ſelon toutes les apparences, ils ne ſçauroient ſe faire au-delà d'une certaine profondeur aſſez petite à l'égard du rayon de la Terre. Après cette remarque, nous déduirons la Solution de notre Problême, de ce que le Fluide doit être en équilibre dans les Canaux $GC$ & $BC$. Pour ſatisfaire à cette loi, & pour obſerver un ordre, nous diviſerons la Solution en trois parties: dans la premiere, nous chercherons la preſſion totale du Fluide $BC$ au Point $C$: dans la ſeconde, nous ferons la même choſe à l'égard du Fluide $GC$; & enfin nous ferons le Calcul, en faiſant les deux preſſions totales égales entre elles.




I. Soit $AC = a$; $GC$, ou $bC = b$; la cherchée $Bb = \zeta$: Qu'on tire du Centre $C$ deux quarts de Cercles infiniment proches $pn$, $om$; ſoit $Cp$ ou $Cn = x$; $po$ ou $nm = dx$; la Denſité variable en $po$ ou $nm = m$, la Denſité uniforme de l'eau (qui couvre le noyau ſphérique, & qui forme le double Méniſque) $= \mu$. Soit la Gravitation au Centre $C$ vers le Centre du Soleil $A = g$, & la force centrifuge, qui agit parallelement à $BD$, ſera par-tout $= g$ (§ *VIII. Chap. III.* & §. *IV. Chap. IV.*) qu'on nomme $G$ la Force accéleratrice en $G$ ou $b$, cauſée par l'action du Globe $GbHd$, & $Q$ la même force accéleratrice pour les Points $p$ & $n$. Après toutes ces préparations, on voit que la goute $po$ (dont la Maſſe doit être exprimée par la Denſité $m$, & par la hauteur $dx$, c'eſt-à-dire $mdx$) eſt animée par pluſieurs Forces accéleratrices: la *premiere* Force accéleratrice eſt celle qui reſulte de l'action du Globe $GbHd$, que nous avons nommé $Q$: la *ſeconde* eſt la Force centrifuge de $A$ vers $C$, provenant par la revolution de la Terre autour du Point $A$: nous avons démontré, que cette Force doit être faite $= g$: la *troiſiéme* ſe fait vers $A$, & provient de la Gravitation vers le Soleil: celle-ci eſt négative à l'égard du Point $C$, &

& doit être faite $= -\frac{aa}{(a-x)^2} \times g$: enfin la *quatriéme* provient de l'action du double Ménisque, compris entre $GBHD$ & $GbHd$, & elle est encore négative à l'égard du Point $C$; elle est $= -\frac{8}{15} n\mu\ell \times \frac{x}{b}$, en vertu des §. §. X. & XI. Chap. II. En multipliant toutes ces pressions accéleratrices de la goute $po$ par sa Masse, on obtient la pression absolue qu'elle exerce sur le Point $C$; & cette pression absolue sera $\left(Q+g-\frac{aag}{(a-x)^2}-\frac{8n\mu\ell x}{15b}\right) \times m\,dx$.

On remarquera ici en passant, que comme $a$ est sensé infiniment plus grand que $x$, on peut poser $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 = 1+\frac{a}{2x}$, & ainsi cette pression devient

$$\left(Q-\frac{2xg}{a}-\frac{8n\mu\ell x}{15b}\right) \times m\,dx.$$

dont l'Intégrale donnera la pression de la Colonne $pC$; sçavoir;

$$\int Q\,m\,dx-\int\frac{2g\,m\,dx}{a}-\int\frac{8n\mu\ell m x\,dx}{15b},$$

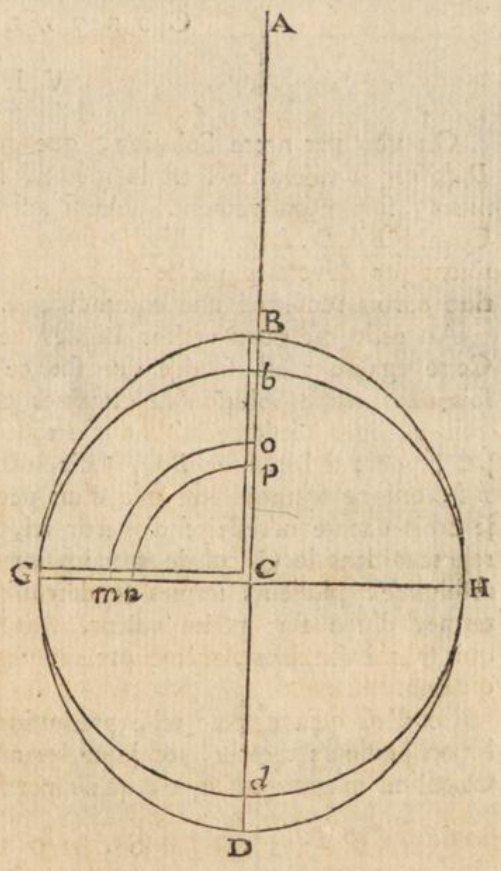
après quoi on aura la pression de toute la Colonne $bC$, en substituant dans l'Intégrale $b$ à la place de $x$. A cette pression, il faut encore ajoûter celle de la petite Colonne $Bb$, dont la gravitation ou pésanteur vers $C$ doit être censée uniforme dans toute sa hauteur, & égale à $G$: il faut aussi remarquer, que toutes les autres forces qui agissent sur cette petite Colonne $Bb$ peuvent être négligées, comme infiniment inférieures à l'action $G$, qui exprime proprement la pésanteur près la surface de la Terre vers son centre; ainsi donc la pression de la petite Colonne $Bb$ doit être simplement estimée par sa hauteur $\ell$, sa densité $\mu$ & sa pésanteur $G$, ce qui fait $\mu\ell G$. Il resulte enfin de tout cela, que la pression totale de toute la Colonne $BC$ sur le Point $C$ est

$$\mu\ell G+\int Q\,m\,dx-\int\frac{2g\,m\,x\,dx}{a}-\int\frac{8n\mu\ell m x\,dx}{15b},$$

en prenant après l'intégration $x = b$.

II. Pour trouver à présent la pression de la Colonne $GC$, il faut chercher toutes les Forces qui animent la goute $mn$, dont la Masse est encore $m\,dx$. La *premiere* de ces Forces provient de l'Attraction du Globe $GbHd$, & est encore $= Q$, puisque cette Force est la même en $n$ & en $p$: la *seconde* Force, provenant de la Force centrifuge des parties de la Terre, entant qu'elle se tourne autour du Point $A$, est $= 0$, cette Force étant par-tout perpendiculaire à $GC$ (§. *VIII. Chap. III.*) La *troisiéme* Force provient de la Gravitation des Parties de la Terre vers $A$, cette Gravitation est au Point $n$ vers le Point $A = \frac{aag}{aa+xx}$, & étant

étant décomposée, la Gravitation resultante vers $C$ doit être exprimée par $\frac{aagx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$ : dans cette derniere expression on peut rejetter au Dénominateur le terme $xx$, comme le Calcul me l'a fait voir; ainsi il provient $\frac{gx}{a}$, qui marque la troisiéme force vers $C$ resultante de la Gravitation vers $A$. La *quatriéme* Force accéleratrice, qui anime la goute $mn$ à descendre vers le centre, provient de l'action du double Ménisque, qui en vertu du XII. §. Ch. II. est $= \frac{4}{15}\ n\mu\beta \times \frac{x}{b}$. En prenant la somme de toutes ces Forces accéleratrices, la Force totale sera $Q + \frac{gx}{a} + \frac{4n\mu\beta x}{15b}$; cette Force accéleratrice totale doit être multipliée par la petite Masse $mdx$; & du produit il faut prendre l'Intégrale, qui marquera la pression qu'exerce la Colonne $mC$ sur le centre $C$: Cette pression est donc




$$\int Q m dx + \int \frac{gmxdx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mxdx}{15b};$$

& pour avoir la pression, qui réponde à toute la Colonne $GC$, il faut encore après l'intégration faire $x = b$.

III. Après avoir exprimé analytiquement les valeurs des pressions des Colonnes $BC$ & $GC$, il ne reste plus pour achever la Solution de notre Problême, qu'à faire une équation entre les deux dites valeurs trouvées dans la premiere & seconde partie. On aura donc $\mu G \beta + \int Q m dx - \int \frac{2gmxdx}{a} - \int \frac{8n\mu\beta mxdx}{15b} = \int Q m dx + \int \frac{gmxdx}{a} + \int \frac{4n\mu\beta mxdx}{15b}$, & cette équation arrangée donne

$$5\mu G a b \beta - \int 4n\mu a \beta m x dx = \int 15 g b m x dx;$$

& de là on tire la valeur cherchée de $\beta$, qui est constante; savoir,

$$\beta = \frac{\int 15 g b m x dx}{5\mu G a b - \int 4n\mu a m x dx}.$$ C. Q. F. T.

COR.

## COROLLAIRE.

### VI.

On voit par notre Solution, que généralement $Bb$ doit être égale à $Dd$; car la valeur de $\ell$ eſt la même, ſoit que l'on prenne $x$ affirmativement, ſoit négativement. Auſſi auroit-il été ridicule de ſuppoſer la Courbe $BGDH$ une Ellipſe, ſi les deux parties $GBH$ & $GDH$ n'étoient pas devenues par le Calcul également allongées, & la ſuppoſition auroit renfermé une contradiction.

Au reſte ces deux petites Lignes ne ſeroient pas égales à la rigueur. Cette égalité n'eſt fondée que ſur ce que nous avons rejetté pluſieurs fois dans notre Solution de certaines petites quantités; mais qu'on pouvoit négliger réellement, comme tout-à-fait inſenſibles, non-ſeulement par rapport à la Ligne $BC$, mais même par rapport à la petite Ligne $Bb$, qui ne ſçauroit être que d'un petit nombre de pieds. Cependant je crois encore néceſſaire d'avertir ici, qu'il faut être ſur ſes gardes, en rejettant dans le Calcul de certains termes; car, comme dans l'équation reſultante, pluſieurs termes ſe détruiſent, & qu'il n'en reſte que des termes d'une fort petite valeur, on ne doit rejetter que des quantités qui ſont inſenſibles, même par rapport aux quantités reſtantes dans l'équation.

Ce n'eſt qu'avec une telle précaution, que j'ai négligé dans ma Solution pluſieurs termes, & je ne les aurois point négligées, ſi la fin du Calcul ne m'avoit enſeigné, qu'ils peuvent & doivent être négligés.

## SCHOLIE.

### VII.

Pour avoir une juſte idée de notre équation, remarquons que $\mu$ ſignifie la denſité de l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, & $m$ la denſité quelconque de la couche, dont la diſtance au centre eſt égale à $x : n$ exprime la circonference du Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité: $b$ eſt le rayon de la Terre: $a$ la diſtance entre les centres du Soleil & de la Terre: $g$ exprime la force accéleratrice vers le Soleil, d'un Corps placé au centre de la Terre; & enfin $G$ exprime la force accéleratrice, ou la péſanteur des Corps à la ſurface de la Terre vers ſon centre.

Or, pour voir que tous les termes de notre équation ſont homogenes & comparables entre eux, & en même tems de quelle maniere il faut faire uſage de notre équation, il faut remarquer qu'en vertu du III. §. Chap. II. $G$ doit être exprimée par la Maſſe de toute la Terre, diviſée par le quarré de ſon rayon; c'eſt-à-dire, qu'il faut ſuppo-

ſer

ser $G = \frac{\int 2nmxxdx}{bb}$, & comme on connoît pour le Soleil le rapport entre $g$ & $G$, aussi-bien que celui d'entre $a$ & $b$, on voit qu'on peut enfin exprimer $\ell$ simplement par $b$: mais il faut pour cet effet intégrer auparavant les quantités $mxxdx$ & $mxdx$: c'est ce que nous allons faire dans quelques hypotheses particulieres.

## VIII.

Soit d'abord la densité de la Terre uniforme, & nommément celle de l'eau de la Mer: c'est ici l'hypothese de M. Newton.

En ce cas $m$ est une constante & égale à $\mu$, & ainsi notre équation finale du V. §. est $\ell = \frac{15gbb}{2a(5G-2n\mu b)}$;

Mais par le VII. §. on obtient $G = \frac{2}{3} n \mu b$, ou bien $2n\mu b = 3G$, & substituant cette valeur pour le second terme du Dénominateur, il provient $\ell = \frac{15gb}{4Ga} \times b$.

Nous verrons dans la suite, que cette expression analytique donne précisément la hauteur indiquée par M. Newton (†) simplement en pieds, pouces & lignes, sans en donner le Calcul, ou du moins sans le mettre à la portée, je ne dirai pas de tout le monde, mais uniquement de ceux qui voudroient bien prendre la peine nécessaire pour l'approfondir. Notre Methode comprend donc le cas tout particulier de M. Newton. Mais ce cas donne une si petite quantité, qu'il ne me paroît pas possible



(†) C'est dans le Corollaire de la Prop. XXXVI. du Liv. III.; M. Newton dit que la hauteur de l'eau de la Mer sous le Soleil ou au point opposé au Soleil, surpasse la hauteur de l'eau de la Mer à 90$^d$ de ces points de 1 pied 11$\frac{1}{8}$ pouc., & c'est à peu près à cela que revient l'expression $\frac{15gb}{4Ga} b$, car (par Cor. 1. Prop. 8. de ce Livre) la gravité à la surface du Soleil est à la gravité à la surface de la Terre comme 10000 à 435. Le Demi-Diamêtre du Soleil etant vû de la Terre sous l'Angle de 16′. 4″ ce Diametre est à sa distance du centre de la Terre comme 1 à 214, ainsi la gravité de la Terre sur le Soleil (qui est $g$) est à la gravité à la surface de la Terre (qui est G) comme $\frac{10000}{\frac{1}{214^2}}$ à 435; D'où l'on trouve le Log. de $\frac{g}{G} = -4.7002107$. Le Diametre du Soleil étant à celui de la Terre comme 10000 à 109, on aura que le Rayon de la Terre $= b$ est à la distance du Soleil $= a$ comme 1 à $214 \times \frac{10000}{109}$, ainsi le Log. de $\frac{b}{a} = -5.7070265$, & L. $\frac{gb}{Ga} = -8.4072372$ Enfin, reduisant le Rayon de la Terre $b$ en pouces à raison de 1145 $\frac{1}{2}$ lieuës de 2855 Toises chacune pour le Rayon, son Log. est 8.3718709. Ainsi le Log. de $\frac{gb}{Ga} b = 0.7791081$ dont le nombre est 6.014 dont les $\frac{15}{4}$ sont 22$\frac{1}{3}$ pouces, à peu près comme M. Newton a trouvé.

d'en déduire les Phénomenes des Marées, tels que les obſervations les donnent. C'eſt ce que je ferai voir plus au long dans la ſuite. Je n'ai donc jamais pû comprendre, comment M. Newton, & tous ceux de ſa Nation, qui ont écrit ſur cette matiere, ont pû s'y attacher. On voit par là, combien il eſt eſſentiel d'étendre les hypotheſes des denſités des couches de la Terre. J'ai remarqué que la loi de ces denſités contribue beaucoup au hauſſement & baiſſement des eaux dans les Marées; qu'on en peut déduire tel effet, qu'on trouvera néceſſaire pour l'explication des Phénomenes indiqués par l'expérience; je ferai même voir que cet effet pourroit être infini dans de certaines hypotheſes. Mais ce que je ſouhaite ſur-tout que l'on remarque, c'eſt que les mêmes hypotheſes qui donnent plus d'effet aux Luminaires, pour hauſſer & baiſſer les eaux dans les Marées, ſont d'ailleurs extrêmement vrai-ſemblables par pluſieurs raiſons Phyſiques, toutes très-fortes. Mais venons à d'autres exemples.

## IX.

Suppoſons la Terre creuſe en dedans, juſqu'à une diſtance donnée $c$ depuis le centre, & que la croute (dont l'épaiſſeur ſera $= b - c$, ſoit encore par-tout d'une denſité égale à celle de l'eau de la Mer.

Nous avons en ce cas encore $m$ égale à la conſtante $\mu$, & ainſi le Calcul ſe fera comme dans le précedent Article, avec cette reſtriction, que les intégrales des quantités $mxxdx$, & $mxdx$ doivent être $= o$, lorſque $x = c$: de cette maniere on obtient $\int mxdx = \frac{1}{2}\mu xx - \frac{1}{2}\mu cc$, ou (en faiſant $x = b$) $= \frac{1}{2}\mu bb - \frac{1}{2}\mu cc$; ſubſtituant cette valeur dans l'équation finale du V §. il vient

$$\ell = \frac{15gb(bb-cc)}{10Gab - 4n\mu a(bb-cc)};$$

& (*par le VII.* §.) $G$ eſt $= \frac{\int 2nmxxdx}{bb} = \frac{2n\mu}{3bb} \times (x^3 - c^3) =$ (puiſqu'il faut poſer $x = b$) $\frac{2n\mu}{3bb} \times (b^3 - c^3)$: de cette derniere équation, on peut tirer celle-ci $\mu = \frac{3bbG}{2n \times (b^3 - c^3)}$, & enfin $4n\mu a(bb-cc) = \frac{6abbG(bb-cc)}{b^3 - c^3}$ & ſubſtituant cette valeur dans le ſecond terme du Dénominateur de notre équation, on a $\ell = \frac{15g}{2G} \times \frac{b+x}{a} \times \frac{b^3 - c^3}{2bb + 2bc + 5cc}$.

Cette quantité eſt la même, que celle du précedent Article, lorſque $c = o$; mais elle devient plus petite, à meſure qu'on ſuppoſe la Terre plus creuſée, & elle deviendroit tout-à-fait nulle, ſi on ſuppoſoit la Terre preſque entierement creuſe en forme d'une voute ſphérique, dont l'épaiſſeur fût peu conſidérable, par rapport au rayon de la Terre. Cette remarque ſuffit ſeule, pour refuter le ſentiment de ceux qui croyent que la Terre pourroit bien n'être qu'une croute voutée; car il ne pourroit

roit y avoir en ce cas aucun Flux & Reflux de la Mer, au moins dans notre Syſtême.

## X.

Si l'on ſuppoſoit la loi des denſités des couches de la Terre exprimée par cette équation $m = \frac{x}{b}\mu$, c'eſt-à-dire, que les denſités fuſſent proportionnelles aux diſtances des couches au centre, on trouveroit la hauteur

$$\ell = \frac{15gb}{7Ga} \times b,$$

& par conſéquent beaucoup plus petite, que ſi la Terre étoit par-tout d'une même denſité, ſçavoir en raiſon de 7. à 4. Auſſi cette hypotheſe n'eſt-elle aucunement vraiſemblable, y ayant apparence que les couches plus denſes ſont plus bas que les couches plus legeres.

## XI.

Si la loi des denſités eſt exprimée par $m = \frac{b\mu}{x}$, c'eſt-à-dire, ſi l'on ſuppoſe les denſités, ſuivre la raiſon inverſe des diſtances des couches au centre, on trouveroit

$$\ell = \frac{15gb}{Ga} \times b,$$

ce qui fait la valeur de $\ell$ quatre fois plus grande, que dans la ſuppoſition de M. Newton, de la parfaite homogenéité de la Terre.

## XII.

Suppoſons enfin la loi des denſités exprimée par $m = \left(\frac{b}{x}\right)^{\frac{4}{3}}\mu$, il faudra mettre $\frac{1}{2}\mu bb$ pour $\int m x\,dx$, & l'équation du VI. §. diviſée par $\mu$ ſera

$$\ell = \frac{45gb}{10Ga - 12n\mu ab} \times b;$$

mais en vertu du VII. §. on a $G = \int \frac{2nmxx\,dx}{bb} = \int \frac{2n\mu x^{\frac{2}{3}}\,dx}{b^{\frac{2}{3}}} = \frac{6n\mu x^{\frac{5}{3}}}{5b^{\frac{2}{3}}}$ = (en faiſant $x = b$) $\frac{6}{5}n\mu b$. D'où l'on voit que le Dénominateur de notre équation fondamentale devient $= o$, & par conſequent $\ell = \infty$. Ainſi l'élevation des eaux ſeroit infinie.

## XIII.

J'ai mis cette derniere hypotheſe, non qu'elle ſoit poſſible, puiſque la denſité ne ſçauroit être infinie, comme elle devroit être au centre; mais pour faire voir l'avantage & la ſupériorité de notre Théorie, puiſqu'elle ne met point de bornes à l'élevation des eaux: ſi les Marées étoient cent ou mille fois plus grandes qu'on ne les obſerve, nous pourrions

rions lui assigner une cause suffisante. Ayant au reste bien examiné tous les Phénomenes du Flux & Reflux de la Mer, je suis entierement convaincu, que la force assignée par M. Newton ne sçauroit suffire pour les produire : il faut donc dire dans le système même de ce Philosophe, que les densités de la Terre ne sont pas uniformes, mais qu'elles croissent vers le centre. Cette hypothese n'est-elle pas fort probable d'ailleurs d'elle-même ? L'eau est-elle le seul Fluide que nous connoissions ? & ne faut-il pas que les Fluides plus pésants, soient plus proches du centre de la Terre? le Mercure est près de quatorze fois plus pésant que l'eau: la grande compression que souffrent les parties proches du centre de la Terre, ne pourroit-elle pas contribuer à rendre la matiere plus compacte & plus dense ?

Si nous considérons outre cela, combien les Planetes & la Terre, qui nagent sans doute dans un milieu resistant, quoique extrêmement subtil, conservent leur mouvement, sans en perdre la moindre partie considérable pendant une longue suite de siécles, nous pourrions facilement croire, que tous ces Corps ont beaucoup plus de matiere, que M. Newton ne marque. Enfin de quel côté que j'envisage cette Question, tout me fait croire, que les couches de la Terre augmentent de densité vers le centre.

## XIV.

Si, tout le Noyau ou tout le Globe de la Terre restant, l'eau de la Mer, qui inonde la Terre, changeoit de densité, la quantité ℓ suivroit la raison reciproque des densités des eaux de la Mer. Il suit de là que si la Terre étoit inondée de Mercure, les Marées seroient quatorze fois plus petites, qu'elles ne sont actuellement. Et si au contraire l'air étoit un Fluide homogene pesant, mais sans élasticité, sa hauteur seroit environ de 850 ℓ plus grande à ceux qui ont le Soleil au Zenith, qu'à ceux qui l'auroient à l'Horison. Cela feroit 1700 pieds de différence dans la hauteur de l'Atmosphere, à ne donner que deux pieds de valeur à ℓ; & cette différence en produiroit une sur le Barometre de plus de 20 lignes. D'où vient donc, demandera-t-on, qu'on n'observe point à cet égard aucune variation dans le Barometre? C'est l'élasticité de l'air qui en est la cause; cette élasticité fait que la hauteur du Barometre doit être constamment la même dans toute la surface de la Mer, en faisant abstraction seulement des causes accidentelles & passageres, qui peuvent survenir tout d'un coup, & qui n'agissent sur l'air, que parce que celui-ci ne sçauroit obéir assez promptement, ni se mettre dans un instant dans son état naturel d'équilibre. On remarquera ici qu'il est faux, que la pression du Mercure soit égale à la pression, ou plûtôt au poids de la Colonne d'air verticale couchée dessus, ce que l'on affirme ordinairement; mais

mais la preſſion du Mercure eſt égale au poids moyen de toutes les Colonnes d'air verticales, qui environnent la Terre, c'eſt-à-dire, égale au poids de tout l'Atmoſphere (dont la hauteur eſt conſidérée comme infiniment petite, par rapport au rayon de la Terre) multiplié par la raiſon de la baſe de la Colonne du Mercure à toute la ſurface de la Terre. Cette Propoſition fait voir que la hauteur moyenne du Barometre doit être la même ſous l'Equateur & ſous le Cercle Polaire, quoique le poids abſolu de la Colonne d'air verticale ſous l'Equateur pendant les plus grandes chaleurs ne ſoit pas la moitié ſi grand que celui d'une pareille Colonne d'air ſous le Cercle Polaire en Hyver. On voit de tout ce que nous venons de dire, pourquoi, ni le Soleil, ni la Lune ne changent pas ſenſiblement la hauteur du Barometre, quoi qu'ils élevent les eaux conſidérablement. La véritable raiſon n'en eſt que l'élaſticité de l'air, qui doit faire preſſer également tous les endroits de la ſurface de la Terre; & cette ſeule refléxion démontre entierement l'inſuffiſance des inégales compreſſions de la matiere des Tourbillons, pour expliquer les Marées, comme nous avons déja remarqué au III. §. Chap. I.

## XV.

Tous les cas particuliers, que nous venons d'examiner, font voir, & il n'eſt pas difficile de le démontrer généralement par l'équation du V. §. que la quantité $\epsilon$ (qui exprime la différence entre la plus grande hauteur de la Mer, & la plus petite, entant qu'elle eſt produite par la ſeule action du Soleil) eſt toujours $= \frac{n g b}{G a} \times b$: le cofficient $n$ dépend des différentes denſités des couches de la Terre, le rapport $\frac{b}{a}$ eſt connu par les Obſervations aſtronomiques: il ne reſte donc qu'à voir comment on pourra déterminer la quantité $\frac{g}{G}$: c'eſt en comparant les effets que les Forces $g$ & $G$ produiſent; la premiere, en retenant la Terre dans ſon Orbite annuelle; la ſeconde, en retenant la Lune dans celle qu'elle fait autour de la Terre. Si la diſtance moyenne de la Lune au centre de la Terre eſt nommée $\alpha$, la Force centrifuge de la Lune ſera $= \frac{b b}{\alpha \alpha} G$, & la force centrifuge de la Terre eſt $= g$: or la Force centrifuge moyenne de la Terre dans ſon Orbite, eſt à la force centrifuge moyenne de la Lune autour de la Terre, ou plutôt autour du centre de Gravité du ſyſtême de la Terre & de la Lune, comme la diſtance du Soleil diviſée par le Quarré du tems périodique de la Terre autour du Soleil, eſt à la diſtance de la Lune au centre de Gravité commun de la Terre & de la Lune, [M. Newton ſuppoſe cette diſtance $= \frac{39}{40} \alpha$, voyez ſes *Princ. Math. Phil. nat. Edit.* 2. *pag.* 430.; il fonde cette ſuppoſition ſur quelques Phénomenes des Ma-

rées, mais mal choisis à mon avis; elle est donc encore fort douteuse; mais comme elle n'est pas de conséquence pour notre sujet, je ne laisserai pas de l'adopter ici] divisée par le quarré du tems périodique de la Lune: on a donc, en nommant le tems périodique de la Terre $T$, & celui de la Lune $t$, cette Analogie $g : \frac{bb}{\alpha\alpha} G :: \frac{a}{TT} : \frac{39\alpha}{40tt}$;

ce qui donne $\frac{g}{G} = \frac{40abbtt}{39\alpha^3 TT}$, & par conséquent

$$\ell = \frac{ngb}{Ga} \times b = \frac{40nb^3tt}{39\alpha^3 TT} \times b.$$

## REMARQUE.

Pour voir que cette Formule s'accorde avec celle de M. Newton pour la supposition de l'homogenéité de la Terre, nous remarquerons, qu'en ce cas on a $n = \frac{15}{4}$ (§. *VIII.*) & M. Newton suppose $\frac{b}{\alpha} = \frac{1}{60\frac{1}{4}}$ (*Princip. Mat. Phil. nat. Edit. 2. pag.* 430.) $\frac{tt}{TT} = \frac{1000}{178725}$ (*Princip. Math. pag.* 395.) & enfin $b = 19695539$ pieds après la mesure de M. Cassini. De tout cela il resulte

$$\ell = \frac{40.\ 15.\ 1.\ 1000.\ 19695539}{39.\ 4.\ (60\frac{1}{4})^3.\ 178725.} \text{ pieds},$$

cela fait $\ell = 1$ pied 11. pouces & un quart. M. Newton trouve 1 pied 11 pouces & un huitieme. (*Princ. Math. pag.* 429.) La différence me paroît trop petite, pour en rechercher l'origine.

## XVI.

Tout ce que nous venons de dire par rapport à l'action du Soleil, doit être entendu aussi de la Lune, sans y rien changer; de sorte que les équations fondamentales des §. §. V. & VII. servent également pour la Lune, en entendant par $a$ la distance entre les centres de la Terre & de la Lune, & par $g$ la pésanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune. Et comme nous avons dit au XV. §. que quelque hypothese qu'on prenne pour exprimer les différentes densités dans les couches de la Terre, on trouvera toujours

$$\ell = \frac{ngb}{Ga} \times b,$$

nous dirons par rapport à la Lune, qu'on trouvera toujours

$$\ell = \frac{n\gamma b}{G\alpha} \times b,$$

prenant

prenant pour $\delta$ la différence des hauteurs des eaux à ceux qui ont la Lune au Zenith, & à l'Horiſon, pour $\alpha$ la diſtance entre les centres de la Lune & de la Terre, & pour $\gamma$ la péſanteur d'un Corps placé au centre de la Terre vers la Lune.

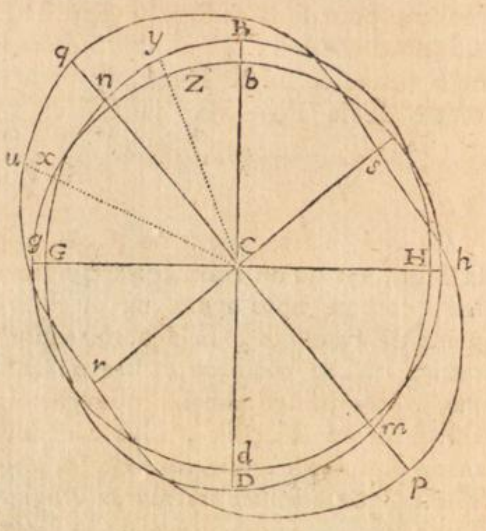
## XVII.

Ce qui m'a engagé à ne parler d'abord que de l'action du Soleil ſur la Mer, eſt qu'on connoît parfaitement bien la valeur de g pour le Soleil, comme nous avons vû au XV. §. au lieu que la Lune, qui n'a point de Satellites, ne ſçauroit donner immédiatement la Force accélératrice qu'elle cauſe au centre de la Terre, & que nous avons nommé $\gamma$. Je trouve par ma nouvelle Théorie de la Lune, dont j'ai déja fait mention ci-deſſus, plus générale, plus exacte, & ſur-tout infiniment plus facile, que celle de M. Newton, qu'on peut déterminer lad. valeur $\gamma$ avec toutes les autres qui en dépendent; ſçavoir la Maſſe de la Lune, comparée avec celle de la Terre, & leur commun centre de Gravité, moyennant quelques irrégularités dans les mouvemens de la Lune, pourvû qu'on puiſſe les obſerver aſſez exactement. M. Newton a tâché de déterminer la Force accéleratrice $\gamma$, en comparant les effets de la Lune ſur la Mer avec ceux du Soleil; cette Methode ſeroit fort bonne, ſi on ſçavoit bien ſéparer les effets des deux Luminaires. Il a prétendu le faire, en comparant les Marées bâtardes, qui ſuivent les Quadratures, avec les plus grandes Marées, qui ſuivent les Syzygies. Nous verrons ci-deſſous ce que l'on peut trouver à redire à cette Methode, & comment on pourra en ſubſtituer d'autres plus exactes.

## XVIII.

Au reſte, il eſt clair que la Lune & le Soleil produiront leurs effets independamment l'une de l'autre: tout ce que le Soleil pourroit contribuer au moins dans la pure Théorie, pour troubler l'action de la Lune, eſt qu'il allonge un peu la Terre: mais il eſt auſſi bien évident, que la Lune changera également la ſurface de la Mer ſur une Terre parfaitement ronde ou allongée d'un petit nombre de pieds: nous avons déja dit la même choſe dans la premiere hypotheſe du ſecond Article.

Voici donc comment il faudroit déterminer la ſurface de la Mer, ſi les deux Luminaires pouvoient produire dans un inſtant tout leur effet, c'eſt-à-dire, ſi l'eau n'avoit point d'inertie, & qu'elle pût prendre incontinent ſa juſte figure; car c'eſt de cette inertie, qu'il faudra tirer dans la ſuite pluſieurs inégalités, & autres Phénomenes, qu'on a obſervés dans les Marées.




Soit $bgdh$ le Globe de la Terre parfaitement ſpherique, & conſidérons d'abord le Soleil, que nous ſuppoſerons placé dans la Ligne prolongé $bd$ paſſant par le centre de la Terre $C$: notre Globe ſe changera en Sphéroïde, tel que $BGDH$, les eaux baiſſant autour de $gh$, & montant autour de $b$ & $d$. Soit enſuite la Lune dans la Ligne prolongée $qp$; il eſt clair qu'elle agira ſur le Sphéroïde de la même façon qu'elle feroit ſur le Globe parfait, duquel le Sphéroïde differe d'une quantité tout-à-fait inſenſible: ainſi donc la Lune fera monter & baiſſer les eaux par deſſus la ſurface du Sphéroïde, tout autant qu'elle feroit à l'égard de la ſurface ſphérique, ſans l'action du Soleil. Il faut donc prendre $nq$, ou $mp$, à $bB$, ou $dD$ en raiſon des Forces lunaire & ſolaire, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{\alpha}$ à $\frac{g}{a}$, tracer enſuite les courbes $qrps$, telles qu'en prenant un Angle quelconque $uCq$, égal à un Angle $yCB$, la perpendiculaire $ux$ interceptée entre les ſurfaces des Sphéroïdes, ait à la perpendiculaire $yz$, interceptée entre le premier Sphéroïde & le Globe, la raiſon de $nq$ à $Bb$. Voilà donc une Conſtruction géometrique générale, qui montre à chaque moment, & à chaque endroit, la hauteur de la Mer, & les variations de cette hauteur. Mais elle demande des Calculs longs & pénibles. Nous verrons dans la ſuite, comment on pourra s'y prendre, pour les faire, en commençant par les circonſtances & les hypotheſes les plus ſimples, & en ajoûtant des corrections & équations à faire pour chaque circonſtance changée.

## XIX.

Voici donc les cas & les hypotheſes, par leſquelles nous commencerons. Nous ſuppoſerons d'abord, que la Lune fait des Cercles parfaits autour de la Terre, & pareillement la Terre autour du Soleil: que ces Orbites ſont dans le plan de l'Equateur de la Terre: que toute la Terre eſt inondée: que la ſurface de la Mer prend dans un inſtant ſa juſte Figure, tout comme ſi l'eau n'avoit point d'inertie, ni reſiſtances; & enfin qu'il ne faille déterminer les loix des Marées, que ſous l'Equateur. Mais avant de faire

les

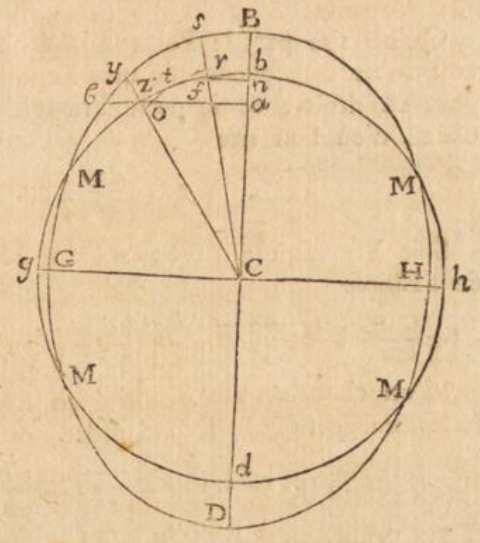
les Calculs, il ſera bon d'expoſer préliminairement quelques Lemmes géometriques.

## CHAPITRE V.

*Contenant quelques Propoſitions de Géometrie préliminaires pour l'Explication & le Calcul des Marées.*

### PROBLEME.

SOit, comme ci-devant, le Cercle *bgdh* & l'Ellipſe preſque circulaire *BGDH*, & ſuppoſons la Sphere & le Sphéroïde, décrits par la rotation du Cercle & de l'Ellipſe autour de l'Axe *BD*, égaux; trouver le rapport entre les petites Lignes *Bb* & *Gg*.




### SOLUTION.

Nous ſuppoſerons pour nous ſervir des mêmes expreſſions, que nous avons employées juſqu'ici, $Bb+Gg=\ell$; $Gg=x$, & $Bb=\ell-x$; $Cb$ ou $Cg=b$; $n$ la circonference du Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité. Ceci poſé, on ſçait que la Sphere ſera $=\frac{2}{3}nb^3$: on ſçait auſſi, qu'un Ellipſoïde (dont le grand Axe eſt $=2A$, & le plus petit Diametre $=2B$) eſt $=\frac{2}{3}nBBA$; cela donne notre Sphéroïde $=\frac{2}{3}n(b-x)^2\times(b+\ell-x)=\frac{2}{3}n(b^3-3bbx+bb\ell)$ ſi l'on néglige les infiniment petits du ſecond ordre. Faiſant à préſent par la condition du Problême la Sphere égale au Sphéroïde, on a $\frac{2}{3}nb^3=\frac{2}{3}n(b^3-3bbx+bb\ell)$ c'eſt-à-dire, $x=\frac{1}{3}\ell$. C. Q. F. T.

### COROLLAIRE.

II.

Si $Gg=\frac{1}{3}\ell$, il faut que $Bb$ ſoit $=\frac{2}{3}\ell$, & par conſéquent double de l'autre.

l'autre. Ainſi donc l'eau monte deux fois plus autour de la Ligne, qui paſſe par le centre de l'un des Luminaires, & celui de la Terre, qu'elle ne deſcend à la diſtance de 90 dégrés.

## PROBLEME.

## III.

Si l'on tire du centre $C$ une droite quelconque $Cy$, trouver la petite Ligne $yz$, qui marque la hauteur verticale du Point $y$ pris dans l'Ellipſe, par deſſus le Pont $Z$ pris dans le Cercle.

## SOLUTION.

Qu'on tire par le Point $z$ la droite $\ell\alpha$ perpendiculaire à l'Axe: on voit qu'en conſéquence de nos hypotheſes, l'Angle $\ell yz$ doit être pris pour un droit, & le petit Triangle $\ell yz$ cenſé ſemblable au Triangle $C\alpha z$, d'où l'on tire

$$yz = \frac{\alpha z}{Cz} \times \ell z.$$

Soit à preſent $C\alpha = s$; $z\alpha = \sqrt{bb - ss}$; on aura par la nature de l'Ellipſe

$$\alpha\ell = \frac{CG}{CB} \times \sqrt{B\alpha \times \alpha D} = \frac{b - \frac{1}{3}\ell}{b + \frac{2}{3}\ell} \times \sqrt{(b + \tfrac{2}{3}\ell - s) \times (b + \tfrac{2}{3}\ell + s)}.$$

Si on change cette quantité en ſuites, & qu'on rejette toujours les infiniment petits du ſecond ordre, on trouvera enfin

$$\alpha\ell = \sqrt{bb - ss} + \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times \ell.$$

De là on tire $\alpha\ell - \alpha z = \ell z = \frac{3ss - bb}{3b\sqrt{bb - ss}} \times \ell$, & par conſequent

$$yz = \frac{3ss - bb}{3bb} \times \ell. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

## COROLLAIRE I.

## IV.

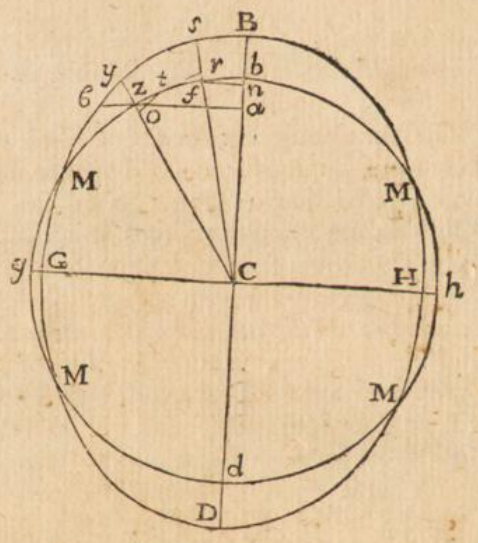
Pour trouver les Points $M$, où l'Ellipſe coupe le Cercle, on n'a qu'à faire $yz = o$, ce qui donne $s = b\sqrt{\frac{1}{3}} = o,5773b$, & l'Arc $bM$ de $54^{\circ}.\ 44'$.

COROL-

## COROLLAIRE II.

### V.

Si la Terre tournoit autour d'un Axe perpendiculaire au plan de notre Figure, & que le Cercle $b\,g\,d\,h$ repréſentât ainſi l'Equateur de la Terre, dans lequel l'un des Luminaires eſt ſuppoſé ſe trouver: ſi par cette rotation de la Terre, le Point $B$ eſt parvenu en $y$, le Luminaire reſtant dans l'Axe $BD$, l'Angle $b\,C\,Z$ ſera l'Angle horaire, dont le Coſinus eſt appellé $s$, le Sinus total $b$; & on voit que la différence des hauteurs de l'eau avant & après ladite rotation ſera repréſentée par $Bb-yz$, c'eſt-à-dire par $\frac{2}{3}\ell+\frac{bb-\frac{3}{2}ss}{3bb}\times\ell$, ou par $\frac{bb-ss}{bb}\times\ell$, ou enfin (en nommant le Sinus de l'Angle horaire $\sigma$) par $\frac{\sigma\sigma}{bb}\ell$. Nous concluerons de là, que les baiſſemens des eaux ſont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute-Mer.




## COROLLAIRE III.

### VI.

Les variations qui répondent à de petits intervalles de tems égaux, ſont pour chaque Point $Z$, proportionelles aux aires du Triangle $C\,\alpha\,z$. Car l'intervalle de tems doit être exprimé ſimplement par un petit Arc de Cercle, qui eſt $=\frac{-b\,ds}{\sqrt{bb-ss}}$, en conſiderant $s$ comme variable; & ſi nous faiſons cette quantité égale à un petit élement de tems $dt$, nous aurons $\frac{-b\,ds}{\sqrt{bb-ss}}=dt$ & $ds=\frac{-dt\sqrt{bb-ss}}{b}$. Or par le V §. tout le baiſſement des eaux étant $=\frac{bb-ss}{bb}\times\ell$, ſa différentielle ſera $=\frac{2\ell s\,dt\sqrt{bb-ss}}{b^3}$; & comme les quantités $\ell$, $b$ & $dt$ ſont conſtantes, nous voyons, que les variations verticales des Marées, qui ſe font en de petits intervalles de tems égaux, ſont proportionnelles aux quantités répondantes $s\sqrt{bb-ss}$, ou aux Aires des Triangles $C\,\alpha\,z$.

SCHO-

SCHOLIE.

## VII.

On voit que ces proprietés tendent à déterminer les hauſſemens & baiſſemens d'une même Marée pour chaque moment, & nous verrons dans la ſuite, combien elles répondent aux Obſervations. Ces Propoſitions ſuffiroient pour ce deſſein, ſi nous ne voulions conſidérer que ce qui arrive aux Conjonctions & Oppoſitions des deux Luminaires: mais comme cette reſtriction ne feroit qu'un cas très-particulier de toute la Théorie des Marées, nous paſſerons plus outre. Remarquons cependant encore une fois, que chaque Luminaire peut être conſideré, comme agiſſant ſur la Mer, indépendamment l'un de l'autre; puiſque les petites variations cauſées par l'un des deux, ne changent pas ſenſiblement toute la figure de la Terre: une quantité de quelques pieds ne ſçauroit être ſenſible par rapport à tout le Diametre de la Terre. Nous allons donc conſidérer les deux Luminaires à la fois, & dans une poſition en longitude quelconque, quoique toujours dans le plan de l'Équateur. Nous conſidérerons auſſi ſur la Terre un Point quelconque dans l'Equateur, pour voir combien la Mer doit être plus haute ou plus baſſe dans ce Point, qu'elle ne ſeroit ſans l'action des Luminaires. C'eſt ici une Queſtion des plus eſſentielles pour notre ſujet. Souvenons-nous cependant, que $\ell$ ſignifie la hauteur de toute la variation des eaux d'une Marée, entant qu'elle eſt produite par la ſeule action du Soleil, & $\delta$ la même choſe pour la Lune.

PROBLEME.

## VIII.

Soit $b\ell d\delta$, l'Equateur de la Terre parfaitement circulaire, tel qu'il ſeroit ſans l'action des deux Luminaires: ſuppoſons le Soleil dans la Ligne prolongée $db$, & la Lune dans la Ligne prolongée $\delta\ell$; & ſoit un point $Z$ donné de poſition: trouver la hauteur $yz$, qui marque l'élevation de la Mer pour ledit point $Z$ produit par les deux Luminaires.

SOLUTION.

Suppoſons que le Soleil éleve les eaux en $b$ de la hauteur $Bb$, & la Lune de la hauteur $B\ell$ au Point $\ell$. On aura par les précedentes Propoſitions $Bb=\frac{2}{3}\ell$, & $B\ell=\frac{2}{3}\delta$: qu'on partage la hauteur cherchée $yz$ en deux parties $yr$, & $rz$, dont la premiere convienne à l'action de la Lune; & l'autre à l'action du Soleil: ſoit le Sinus total $=1$, le Sinus de l'An-

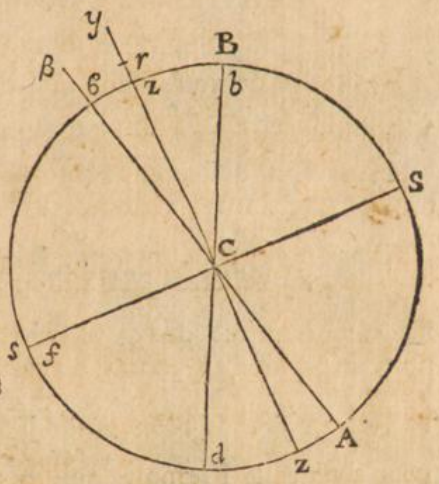
l'Angle donné $b\,Cz = \frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle $\zeta Cz$ pareillement donné $= \frac{\varphi}{b}$: de cette maniere, nous aurons en vertu du III. §. $rz = \frac{3ss-bb}{3bb} \times \zeta = \frac{2bb-3\sigma\sigma}{3bb} \times \zeta$, & pareillement $yr = \frac{2bb-3\varphi\varphi}{3bb} \times \beta$, & par conſéquent

$$yz = \frac{2bb-3\sigma\sigma}{3bb} \times \zeta + \frac{2bb-3\zeta\zeta}{3bb} \times \beta. \quad \text{C. Q. F. T.}$$

COROLLAIRE.

IX.

On voit par cette Solution la loi qu'il faudroit obſerver pour conſtruire une Table, qui marquât pour chaque âge de la Lune, & pour chaque moment, les hauteurs des Marées, en ſuppoſant le Point $z$ changer continuellement de poſition, juſqu'à-ce qu'il ait fait le tour: voyons à préſent quel eſt le Point $Z$, qui marque la plus grande hauteur $yz$, les Poles $b$ & $\zeta$ étant donnés de poſition.




LEMME.

X.

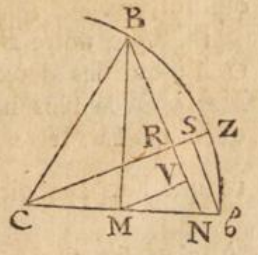
Si le Sinus de l'Angle $b\,Cz$ eſt appellé, comme ci-deſſus, $\frac{\sigma}{b}$; le Sinus de l'Angle $\zeta Cz$, $\frac{\varphi}{b}$; le Sinus de la ſomme de ces deux Angles; c'eſt-à-dire, le Sinus de l'Angle $bC\zeta$, $\frac{m}{b}$; je dis qu'on aura

$$\varphi = \frac{m\sqrt{(bb-\sigma\sigma)} - n\sigma}{b}, \text{ * \&}$$

$$\varphi^2 = \frac{mmbb + nn\sigma\sigma - mm\sigma\sigma - 2mn\sigma\sqrt{(bb-\sigma\sigma)}}{bb}.$$



* La lettre $n$ exprime ici $\sqrt{bb-mm}$. La demonſtration de ce Lemme eſt fort ſimple, le Rayon BC étant $b$, le Sinus de tout l'Angle $BC\zeta$ étant $\frac{m}{b}$, on aura $BM = m$, $CM = \sqrt{bb-mm}$; $\zeta S = \sigma$, $CS = \sqrt{bb-\sigma\sigma}$, $BR = \varphi$. Prolongez BR en N, & menez MV parallèle à CR, les Triangles $C\zeta S$ & BMV ſeront ſemblables à cauſe des Angles droits S & V & des Angles égaux $C\zeta Z$ & MBN; Donc on aura $C\zeta(b) : CS(\sqrt{bb-\sigma\sigma}) = BM(m) : BV = \frac{m\sqrt{bb-\sigma\sigma}}{b}$; On trouvera de même que $C\zeta(b) : \zeta S(\sigma) = CN : NR = CM(n) : RV = \frac{n\sigma}{b}$; Donc $BR(\varphi) = BV - RV = \frac{m\sqrt{bb-\sigma\sigma}}{b} - \frac{n\sigma}{b}$: C. Q. F. T.



Je n'ajoûterai pas la démonſtration de ce Lemme : mais il eſt pourtant bon d'avertir ici, qu'en cherchant la valeur de $\varrho$, qui marque le Sinus de la différence de deux Angles donnés par leurs Sinus; on tombe facilement dans une autre expreſſion beaucoup plus prolixe, & qui rend le Calcul du Problême, que nous allons expoſer, preſque impraticable.

### PROBLEME.

Trouver les Points $Z$, où les hauteurs $y\,z$ ſoient les plus grandes.

### SOLUTION.

La nature de notre Problême demande, que la différentielle de $y\,z$, ſçavoir $\frac{-2\delta\sigma d\sigma - 2\delta\varrho d\varrho}{3bb}$ (§. *VIII.*) ſoit $= o$, ou bien $\varrho\, d\varrho = \frac{-\delta}{\delta}\sigma\, d\sigma$.

Et ſi l'on différentie l'équation ſeconde du précedent Lemme, on trouve, prenant les quantités $m$, $n$ & $b$ pour conſtantes, & $\sigma$ pour variable,

$$\varrho\, d\varrho = \frac{nn\sigma d\sigma - nm\sigma d\sigma}{bb} + \frac{2mn\sigma\sigma - nmbb}{bb\sqrt{(bb-\sigma\sigma)}}\, d\sigma.$$

En comparant ces deux valeurs de $\varrho\, d\varrho$, on trouve une nouvelle équation, à laquelle on pourra donner une telle forme,

$$\left(-\frac{\delta}{\delta}bb\sigma + mm\sigma - nn\sigma\right)\sqrt{bb-\sigma\sigma} = 2mn\sigma\sigma - mnbb:$$

ſi l'on ſuppoſe pour abréger la Formule $\frac{-\delta bb}{\delta mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = A$, on trouve après une reduction entiere de l'équation, le Sinus de l'Angle $b\,C\,z$, ou

$$\frac{\sigma}{b} = \pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{A}{2\sqrt{(4+AA)}}\right)}.$$ C. Q. F. T.

### SCHOLIE.

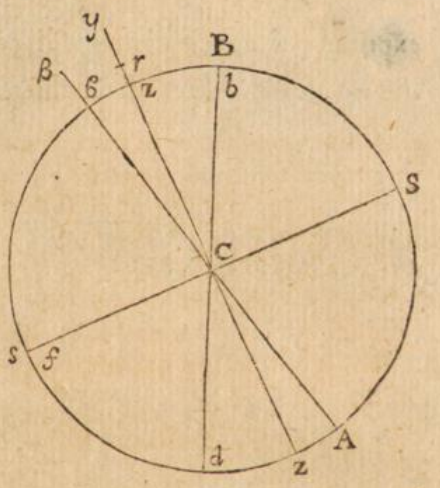
### XII.

Il ne ſera pas difficile de reconnoître dans chaque cas, quel choix on doit faire des Signes ambigus. Mais pour faciliter la choſe, & pour en donner une idée d'autant plus diſtincte, on pourra faire les remarques qui ſuivent.

1°. Que notre Formule marque en même tems quatre Points $z$, $Z$, $s$ & $S$; que les deux premiers diametralement oppoſés, marquent que la Mer $y$ eſt la plus haute, & les deux autres diametralement oppoſés marquent que la Mer $x$ eſt la plus baſſe, & que l'Arc $z\,s$ eſt toujours de 90°, ce que l'on connoit de ce que $\sqrt{\tfrac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}}$, exprimant le Sinus d'un Angle, ſon Coſinus eſt exprimé par $\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}\right)}$.

2°. Que

2°. Que l'Angle $bC\zeta$ étant aigu, le Point $z$ tombe entre les Points $b$ & $\zeta$, que ſi cet Angle eſt droit, le Point $z$ tombe préciſément ſur $\zeta$ (en ſuppoſant la Force lunaire plus grande que la Force ſolaire, comme elle l'eſt ſans doute); & enfin, lorſque l'Angle $bc\zeta$ eſt obtus, que le Point $z$ tombe au-delà du Point $\zeta$, l'Arc $bz$ devenant plus grand que l'Arc $b\zeta$, avec cette loi que le Point $z$ s'approche reciproquement du Point $d$, tout comme il s'étoit éloigné du Point $b$. Enfin, qu'il y a autant de racines inutiles, qu'il faut rejetter, mais qu'il faudroit adopter, ſi la Force ſolaire ſurpaſſoit la Force lunaire.




## COROLLAIRE I.

### XIII.

On trouve le Sinus de l'Angle $\zeta Cz$ exprimé par $\frac{\zeta}{b}$ de la même façon, que nous avons trouvé le Sinus de l'Angle $bCz$. On voit même que ſans faire le Calcul de nouveau, on n'a qu'à renverſer les lettres $\zeta$ & $\delta$ dans la la valeur de $A$, indiquée au §. XI. & ſuppoſer $-\frac{\delta bb}{\zeta mn}+\frac{m}{n}-\frac{n}{m}=B$, & on aura $\frac{\zeta}{b}=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\pm\frac{B}{2\sqrt{(4+BB}}\right)}$.

## COROLLAIRE II.

### XIV.

Conſidérant l'Angle $bC\zeta$ comme variable, on voit que l'Angle $\zeta Cz$, qui marque l'Angle horaire entre le moment de la plus haute Marée, & celui du paſſage de la Lune par le Méridien, peut faire un *maximum*, ou plus grand, puiſqu'il eſt $=o$, tant lorſque l'Angle $bC\zeta$ eſt nul, que lorſqu'il eſt égal à un droit: nous allons déterminer cet Angle dans la Propoſition ſuivante.

## PROBLEME.

### XV.

Déterminer l'Angle $bC\zeta$ tel que ſon Angle $\zeta Cz$ devienne le plus grand qu'il eſt poſſible.

SOLUTION.

Pour déterminer l'Angle en queſtion, il faut faire $d\varrho = 0$; or $\varrho$ étant exprimé par des conſtantes, & par la variable $B$ (§. *XIII.*) il faut ſuppoſer $dB = 0$, c'eſt-à-dire, que la différentielle de la quantité $\frac{-\delta bb}{\epsilon mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$, doit être ſuppoſée égale à zero, en conſidérant les lettres $m$ & $n$ comme variables: ſubſtituons pour $n$ ſa valeur $\sqrt{bb - mm}$ (§. *X.*) nous aurons

$$B = \frac{-\delta bb + 2\epsilon mm - \epsilon bb}{\epsilon m\sqrt{bb - mm}},$$

dont la différentielle devient nulle, en faiſant

$$\frac{m}{b} = \sqrt{\frac{\epsilon + \delta}{2\delta}}.$$

COROLLAIRE.

XVI.

Si $\epsilon$ étoit $= \delta$, c'eſt-à-dire, ſi les deux Luminaires avoient une force égale, pour mettre la Mer en mouvement, on auroit $m = b$. Mais la Force lunaire étant plus grande que la Force ſolaire, $m$ devient plus petit que $b$: cependant l'Angle $bC\epsilon$ ne deviendra jamais moindre que de 45°.

On remarquera auſſi, qu'il y a quatre Points, tels que $\epsilon$, dont deux ſont autant éloignés du Point $b$, que les deux autres le ſont du Point $d$; & que dans ces quatre Points, la haute Marée vient alternativement après & avant le paſſage de la Lune par le Méridien.

Nous allons voir à préſent comme on doit appliquer tout ce que nous venons de dire pour trouver l'heure des Marées, & pour faire voir, combien notre Théorie bien ménagée s'accorde là-deſſus avec les Obſervations.

## CHAPITRE VI.

*Sur l'heure moyenne des Marées pour toutes les Lunaiſons.*

I.

ON a été de tout tems ſoigneux à bien remarquer l'heure des hautes & baſſes Marées, pour établir là-deſſus, autant qu'il eſt poſſible,

ble, des regles pour l'utilité de la Navigation; & quoi qu'il ſoit impoſſible de donner des regles générales & exactes, on n'a pas laiſſé de continuer ces recherches. Mais je ne ſçache pas qu'on ſe ſoit encore aviſé de raiſonner là-deſſus autrement, que par *induction* ſur un grand nombre d'Obſervations, pendant que c'eſt ici une matiere, qui dépend beaucoup de la Géometrie pour l'eſſentiel, & que ce n'eſt que par rapport à quelques circonſtances, qu'on eſt obligé de recourir aux Obſervations, pour établir des regles: & cela eſt ſi vrai, que la ſeule Théorie m'a fait voir pluſieurs Points, dont je n'étois pas encore inſtruit par la lecture. Voyons donc avant toutes choſes, juſqu'où la Théorie peut aller, pour éclaircir notre ſujet: nous nous attacherons encore aux hypotheſes marquées au XIX. §. du Chap. IV. que je prie le Lecteur de relire. Nous irons enſuite plus loin, & nous examinerons, quelle correction il faudra employer à l'égard de chaque hypotheſe; lorſqu'elle eſt en quelque façon changée.

## II.

Il eſt bon d'avertir ici le Lecteur, lorſque je parlerai des deux Marées qui ſe ſuivent, que j'entends deux Marées pareilles, qui ſe ſuivent au bout de 24. heures, en ſautant la Marée intermediaire; nous éviterons par-là de certaines petites inégalités, qu'on a obſervées, lorſqu'on a comparé enſemble les deux Marées, qui ſe font dans un même jour. Si l'on veut comparer enſemble des Marées, qui ont pluſieurs jours d'intervalle, nous choiſirons celles qui ſe font pendant que la Lune eſt au-deſſus de l'Horiſon.

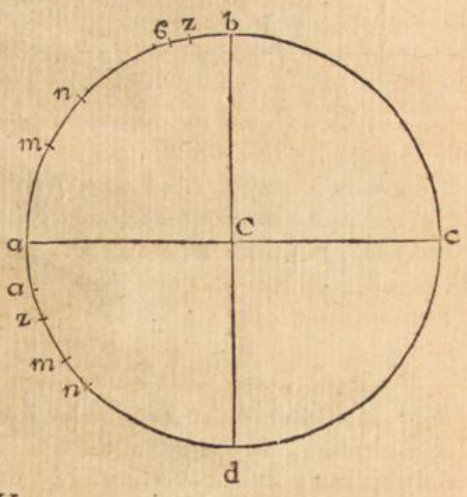
## III.

Il eſt clair, que ſi la Lune avoit infiniment plus de force que le Soleil, la haute Marée répondroit préciſément au paſſage de la Lune par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſeroit d'un jour lunaire précis; & ſi au contraire la Force du Soleil ſurpaſſoit infiniment la Force lunaire, la Marée ſe feroit au moment du paſſage du Soleil par le Méridien, & l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſeroit préciſément d'un jour ſolaire. Mais comme les deux dites Forces ſont, ſuivant toutes les Obſervations, comparables entre elles, on voit que le vrai tems de la haute Marée doit dépendre du paſſage par le Méridien de l'un & de l'autre Luminaire: mais il aura toujours plus de rapport avec la Lune, qu'avec le Soleil, parce que la Force lunaire eſt, ſans contredit, plus grande que la Force ſolaire. Nous verrons dans la ſuite, qu'il y a quatre ſituations de la Lune, dans leſquelles l'intervalle de deux Marées, qui ſe ſuivent, eſt préciſément d'un jour lunaire; & qu'en

deçà, ou en delà de ces quatre Points, les Marées doivent néceſſairement avancer ou retarder ſur le tems du jour lunaire: nous déterminerons ces accélerations & retardemens, qui ſont fort inégaux, & nous ajoûterons pluſieurs autres Remarques ſur cette matiere, qui l'éclairciront plus que toutes les Obſervations, qu'on a faites juſqu'ici. Il eſt vrai que ces déterminations dépendent du rapport qu'il y a entre les Forces des deux Luminaires, que ce rapport eſt encore incertain, & qu'il eſt même variable : mais j'indiquerai quels ſont les moyens les plus ſûrs, pour le déterminer d'abord dans de certaines circonſtances, & enſuite généralement. Avant que de traiter cette Queſtion, qui eſt une des plus utiles, & des plus eſſentielles, nous déterminerons généralement le vrai tems des hautes & baſſes Marées, en ſuppoſant le rapport entre les forces des deux Luminaires connu.

## IV.

Soit *b a d c* l'Equateur, dans le plan duquel les deux Luminaires ſont encore ſuppoſés ſe mouvoir de *b* vers *a*, pendant que l'Equateur de la Terre ſe tourne dans le même ſens autour de ſon Centre *C*. Prenons dans l'Equateur un Point *b*, & conſidérons les Luminaires ſe trouver dans leur Conjonction au Point *b*, c'eſt-à-dire, étant l'un & l'autre dans la Ligne prolongée *d b*; on voit qu'en ce cas la haute Marée doit être dans ce moment-là en *b*, & préciſément à midi.




## V.

Voyons à préſent ce qui doit arriver un, deux, trois, &c. jours après: ſuppoſons pour cet effet, que le Soleil ſe trouvant encore à midi au Point *b*, la Lune réponde au Point *6*: la haute Marée répondra dans ce moment au Point *z*, & les Arcs *b z*, *6 z* ſe déterminent par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. il faut donc que le Point *b* parcoure dans l'Equateur l'Arc *b z*, pour ſe trouver dans l'endroit de la plus haute Marée; car on peut négliger les petits Arcs, que les Luminaires parcourent, dans le tems que le Point *b* de l'Equateur parcourt l'Arc *b z*. On voit donc, que ſi l'on veut regler le tems des hautes Marées

Marées après le tems vrai, on doit prendre l'Arc $b z$ pour l'Arc horaire, qui marque l'heure de la haute Marée de ce jour-là.

Cette regle ſuppoſe le Point $\ell$ en repos, pendant le tems qui convient audit Arc horaire $b z$; mais il eſt facile de corriger cette ſuppoſition: car nous verrons dans la ſuite, que l'Arc $b z$ eſt preſque égal à l'Arc $b \ell$; & cela étant, il eſt clair, qu'on n'a qu'à ſubſtituer des heures lunaires aux heures ſolaires, qui répondent à l'Arc $b z$, pour corriger la dite ſuppoſition.

## VI.

Nous venons de montrer, comment on peut déterminer le vrai tems des hautes Marées, en le rapportant au midi, c'eſt-à-dire, au paſſage du Soleil par le Méridien: voici à préſent, comment on peut déterminer l'heure des hautes Marées, en la rapportant au paſſage de la Lune par le Méridien, qu'on connoît par les Ephémerides: on peut le faire immédiatement par le moyen de l'Arc $\ell z$: nous verrons que le Point $z$ ne ſçauroit s'éloigner du Point $\ell$ au-delà d'environ dix dégrés, qui répond à 40 minutes de tems, pendant lequel cet Arc ne ſçauroit varier ſenſiblement; d'où il ſuit que ce petit Arc $\ell z$ marquera toujours l'Arc horaire entre le moment du paſſage de la Lune par le Méridien & le moment de la haute Marée.

## VII.

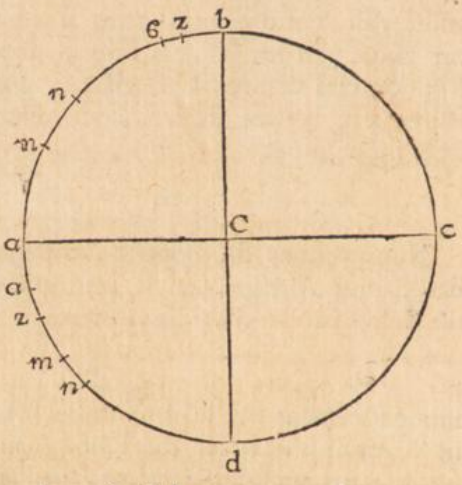
L'Arc $\ell z$ étant tantôt négatif, tantôt affirmatif, comme il paroît par le XIII. Art. du Chap. V. on voit que la haute Marée ſuivra le paſſage de la Lune par le Méridien, depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & qu'elle le précedera depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies: on voit encore par l'Art. XV. du Chap. V. que l'Arc $\ell z$ fait un *maximum*, lorſque le Sinus de l'Arc $b \ell$ eſt $= \sqrt{\frac{\ell + \delta}{2\delta}}$: c'eſt alors que la haute Marée retarde ou avance le plus ſur le paſſage de la Lune par le Méridien: & comme vers ce tems-là les Points $\ell$ & $z$ peuvent être cenſés avoir un mouvement égal, l'intervalle d'une Marée à l'autre, ſera alors préciſément d'un jour lunaire: & cet intervalle peut être appellé intervalle moyen entre deux Marées qui ſe ſuivent: il eſt de 24. heures $50\frac{1}{2}$ minutes, en prenant 29 jours 12 heures 44 minutes, pour le tems moyen d'une Conjonction à l'autre.

On remarquera encore que l'intervalle d'une Marée à l'autre, eſt le plus petit dans les Syzygies, & le plus grand dans les Quadratures.

VIII.

## VIII.

Pour déterminer analytiquement les propriétés, que nous venons d'indiquer en gros, nous ſuppoſerons, que la Lune répondant au Point $m$, & la haute Marée étant dans ce moment là au Point $n$, l'Arc $mn$ ſoit alors le plus grand qu'il eſt poſſible. Soit outre cela encore le Sinus total $= 1$, le Sinus de l'Arc $mb = m$, ſon Coſinus $= n$. Cela étant, nous avons déja dit, & nous le remarquerons encore ici :




1°. Qu'on aura $m = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}}}$.

2°. Qu'on peut déterminer la grandeur de l'Arc $mn$ par le moyen du XIII. §. Chap. V. où nous avons démontré, que généralement le Sinus de cet Arc eſt

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)}$$

en ſuppoſant $B = \frac{-\mathfrak{S}bb}{\mathfrak{C}mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Pour appliquer cette regle générale à notre cas particulier, il faut ſuppoſer $b = 1$ ; $m = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{S}}{2\mathfrak{S}}}$, & $n = \sqrt{\frac{\mathfrak{S}-\mathfrak{C}}{2\mathfrak{S}}}$ : après ces ſubſtitutions, on trouve le Sinus de l'Arc $mn$ $= \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mathfrak{S}\mathfrak{S}-\mathfrak{C}\mathfrak{C}}}{2\mathfrak{S}}\right)}$ ; & commme $\mathfrak{S}$ eſt beaucoup plus grand que $\mathfrak{C}$, on peut cenſer le Sinus de l'Arc $mn$ être ſimplement $= \frac{\mathfrak{C}}{2\mathfrak{S}}$.

3°. Qu'on déterminera la grandeur de l'Arc $nb$, par le moyen du XI. §. du Chap. V. Il eſt remarquable que cet Arc ne dépend point du rapport, qui eſt entre la Force lunaire $\mathfrak{S}$, & la Force ſolaire $\mathfrak{C}$ ; car il eſt toujours de 45 dégrés.

4°. Que ſi la Lune eſt ſuppoſée dans un Point quelconque $\mathfrak{C}$, les Arcs $bz$ & $\mathfrak{C}z$ peuvent ſe déterminer par le moyen des XI. & XIII. §. §. du Chap. V. comme nous avons déja dit : mais ſi l'on ſuppoſe le Point $\mathfrak{C}$ bien près du Point $b$, nos Formules font voir, qu'on peut cenſer alors le Sinus de l'Arc $\mathfrak{C}z = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}+\mathfrak{S}} \times m$, & le Sinus du petit Arc $bz = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}+\mathfrak{S}} \times m$.

Cet-

Cette Formule nous ſervira à déterminer combien les Marées priment vers les Syzygies.

5°. Que ſi la Lune ſe trouve en $\alpha$ bien près de $a$, la haute Marée repondra dans ce moment au Point $z$ au-delà du Point $\alpha$, & on trouvera par le XIII. Art. du Chap. V. ſi l'on traite bien l'équation qui y eſt marquée, le Sinus du petit Arc $\alpha z = \frac{\ell}{\delta - \ell} \times n$, en prenant pour $n$ le Coſinus de l'Arc $b\alpha$, ou ce qui revient au même, le Sinus du petit Arc $a\alpha$. Cette valeur du petit Arc $\alpha z$ nous ſervira à déterminer, combien les Marées retardent vers les Quadratures.

Ces deux dernieres Remarques ſont fondées ſur ce que $m$ ou $n$, étant comme infiniment petits, les quantités $A$ & $B$ deviennent comme infiniment grandes, & alors on peut ſubſtituer ſimplement $\frac{1}{A}$ & $\frac{1}{B}$ à la place des Quantités

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{4+AA}}\right)} \text{ \& } \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{B}{2\sqrt{4+BB}}\right)} :$$

& après ces ſubſtitutions, on trouve les Sinus des petits Arcs, comme nous les avons déterminés.

## IX.

Toutes ces propriétés, que nous venons d'établir, ſont tout-à-fait conformes aux Obſervations. Mais pour en ſentir toute la force, il faudroit toujours ſçavoir le rapport qu'il y a entre les Forces $\delta$ & $\ell$, & c'eſt ce que j'ai déja dit, qu'on ne ſçauroit déterminer immédiatement par les principes d'Aſtronomie, faute d'Obſervations aſſez juſtes ſur la Lune; il faut donc s'en tenir aux effets Phyſiques, que la Lune produit ſur la Terre, pour en déduire ſa force; & je n'en connois point d'autres, que les Marées mêmes: mais il s'en faut ſervir avec beaucoup de circonſpection. Comme c'eſt ici un point très-eſſentiel, je n'ai pas voulu manquer de le conſidérer avec toute l'attention qu'il mérite. Voici mes reflexions là-deſſus.

## X.

On pourroit déduire le rapport moyen entre les Forces $\delta$ & $\ell$ du rapport des plus hautes Marées, qui ſe font près des Syzygies, & des plus petites Marées aux Quadratures. Car on voit par le VIII. §. Chap. V. que la hauteur de la plus grande Marée doit être à celle de la plus petite Marée, comme $\delta + \ell$ eſt à $\delta - \ell$. Mais les hauteurs des Marées dans les Ports, où l'on fait les Obſervations, dépendent de tant de circonſtances, qu'elles ne peuvent être tout-à-fait proportionelles aux hauteurs des Marées dans la Mer libre; & c'eſt ce qui fait, qu'on

trouve le rapport moyen entre les plus grandes & les plus petites Marées, assez différent dans différents Ports.

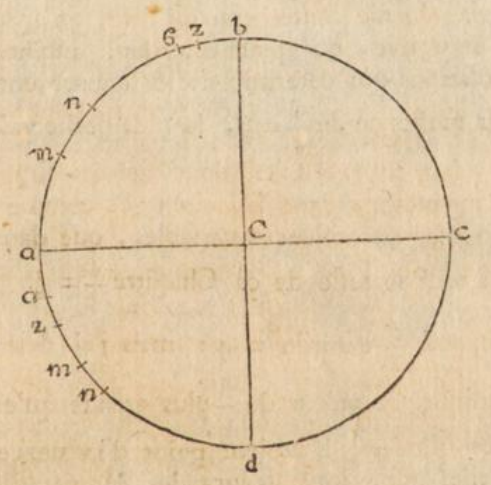
M. Newton, qui a suivi cette Méthode, rapporte une Observation faite par Sturm au-dessous de Bristol, où cet Auteur a trouvé que les hauteurs de la plus grande & de la plus petite Marée, ont été, comme 9 à 5, d'où il faudroit conclure, que $\delta = 3\frac{1}{2} \times \zeta$. Cette Observation est bien éloignée de celle que j'ai reçûe dernierement faite à Saint Malo par M. Thouroud. La voici: «Dans les grandissimes Marées, la Mer «s'éleve de 50 pieds en plomb au-dessus du bas de l'eau: dans les Ma«rées bâtardes, elle ne differe que de quinze pieds.» Si j'ai bien compris cette Observation, la plus grande Marée étoit à la plus petite, comme 50 à 15, ou comme 10 à 3; ce qui donneroit $\delta = \frac{13}{7} \times \zeta$. Ces deux resultans sont bien différens: il est vrai, que le rapport de $\delta$ à $\zeta$ est variable; mais cette variation ne sçauroit aller si loin; si la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\zeta}$ est $= m$, la plus grande valeur de $\frac{\delta}{\zeta}$ sera environ $= \frac{3}{2} m$.

Il y a une autre reflexion à faire sur cette Méthode de trouver le rapport entre les Forces des deux Luminaires: c'est que les Marées sont une espece d'Oscillations, qui se ressentent toujours des Oscillations précedentes: cette raison fait que les variations des Marées, ne sçauroient être aussi grandes qu'elles devroient être, suivant les Loix hydrostatiques. Concevons un pendule attaché à une Horloge animée successivement par des poids différens: On sçait, que plus ces poids sont grands, plus les Oscillations du pendule deviennent grandes: mais en changeant les poids, les premieres Oscillations ne prendront pas d'abord leur grandeur naturelle; elles ne s'en approchent que peu à peu. Il n'en est pas de même des durées des Oscillations, lorsque le pendule est successivement animé par différentes pésanteurs. Considérons d'abord un pendule simple animé par la pésanteur ordinaire, & qui fasse ses Oscillations dans deux secondes de tems, & supposons ensuite la pésanteur devenir tout d'un coup quatre fois plus grande; je dis que la premiere Oscillation, qui suivra ce changement, se fera de même que toutes les autres suivantes dans une seconde de tems.

Cette consideration me porte à croire, que les Observations sur les durées & sur les intervalles des Marées sont plus sûres pour notre dessein, que les hauteurs des Marées: si cette reflexion est bien fondée, on pourroit faire attention aux Méthodes suivantes, pour trouver le rapport moyen entre $\delta$ & $\zeta$.

1°. Il faudroit pendant plusieurs mois observer, quel est le plus petit intervalle de deux Marées. Nous avons dit au VI. §. que l'intervalle moyen est d'un jour moyen lunaire, que je suppose de 24 heures 50 minutes: mais il sera moindre dans les Syzygies; quoique plus grand qu'un

qu'un jour ſolaire, ou de 24 heures: ſuppoſons ce plus petit intervalle de 24 heures, & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités dans $N$; &




il faudra prendre dans la Figure ci-deſſus un Arc horaire $b\ell$ de 50 minutes de tems: De cet Arc $b\ell$, il faut prendre une partie $\ell z$, qui réponde à $(50-N)$ minutes. Or par la IV. Remarque du VII. §. l'Arc $\ell z$ eſt à l'Arc $b\ell$, comme $\frac{\ell+\delta}{\ell} \times m$ eſt à $m$: d'où nous tirons cette analogie,

$$50-N : 50 :: \ell : \ell+\delta;$$

& cette analogie donne

$$\delta = \frac{N}{50-N} \times \ell.$$

Soit $N$ égal à 35 (c'eſt ainſi qu'on l'obſerve à peu près dans les Marées regulieres) & on aura $\delta = \frac{35}{15}\ell$.

2°. On pourroit auſſi faire attention aux plus grands intervalles; ſi ce plus grand intervalle (qui ſe fait ordinairement après les Quadratures) étoit de 24 heures & d'autant de minutes, qu'il y a d'unités en $M$. On trouve par la même Méthode, que nous venons d'indiquer, & par la V. Remarque du VII. §. $\delta = \frac{M}{M-50} \times \ell$.

Soit $M = 85$ minutes (c'eſt à peu près la valeur que l'on obſerve) & on trouvera

$$\delta = \frac{85}{35} \times \ell.$$

Voilà les deux Méthodes, que je crois les plus exactes; & la premiere doit l'emporter ſur la ſeconde, parce que les Marées ſont plus irrégulieres après les Quadratures, qu'après les Syzygies. Il y a encore

pluſieurs autres Méthodes pareilles à celles que je viens d'expoſer, & dont j'ai fait en partie le Calcul; mais comme je ne ſuis pas aſſez content des Obſervations, ſur leſquelles ces Méthodes ſont fondées, je ne les mettrai pas ici. Je me contenterai de dire, qu'après tous les examens que j'ai faits, j'ai trouvé, que pour accorder, autant qu'il eſt poſſible, toutes les Obſervations qui déterminent le rapport entre $\delta$ & $\theta$, il faut ſuppoſer la valeur moyenne de $\frac{\delta}{\theta} = \frac{5}{2}$; la plus petite valeur de $\frac{\delta}{\theta} = 2$, & ſa plus grande valeur = 3. C'eſt donc ſur ces ſuppoſitions que nous raiſonnerons & calculerons dans la ſuite; & comme nous ne conſidérons encore toutes les circonſtances variables, que dans leur état moyen, nous ferons dans tout le reſte de ce Chapitre $\frac{\delta}{\theta} = \frac{5}{2}$.

M. Newton ſuppoſe $\frac{\delta}{\theta}$ environ = 4: mais j'ai déja dit, pourquoi ſa Méthode doit indiquer la valeur de $\frac{\delta}{\theta}$ plus grande qu'elle n'eſt: la raiſon en eſt, que ſi les Marées, n'avoient point d'influence les unes ſur les autres, comme elles ont, les plus grandes Marées différeroient davantage des plus petites, & par là on trouveroit la valeur de $\frac{\delta}{\theta}$ plus petite.

Avant que de finir cette digreſſion ſur le rapport entre la force de la Lune, & celle du Soleil, & d'en faire l'application à notre ſujet, je ferai ici une refléxion ſur les Forces abſolues de la Lune & du Soleil. Nous avons fait voir aux §. §. VIII. & XV. du Ch. IV. que dans l'hypotheſe de l'homogenéité de la Terre adoptée par M. Newton, le Soleil ne ſçauroit faire varier les eaux au-delà de deux pieds, ni par conſéquent la Lune au-delà de cinq pieds. Ces deux Forces combinées enſemble pour les Quadratures feroient une Force abſolue à faire varier les eaux en pleine Mer de trois pieds de hauteur verticale pendant une Marée. Mais peut-on comprendre, que d'une variation de trois pieds en pleine Mer, il puiſſe provenir tous les effets des Marés aux Quadratures? Encore eſt-il très-vraiſemblable, que la variation actuelle des eaux differe beaucoup de la variation entiere, que la Théorie indique comme poſſible: peut-être même, que la variation actuelle eſt à peine ſenſible par rapport à l'autre, & cela non-ſeulement à cauſe des empêchemens accidentels, tel que le frottement, l'imparfaite fluidité, &c.; mais encore à cauſe de l'inertie des eaux & du mouvement journalier de la Terre; car on voit bien, que ſi ce mouvement journalier de la Terre étoit d'une viteſſe infinie, les Luminaires ne pourroient avoir aucun effet pour faire varier la Mer, quelque Force qu'ils euſſent. Je ſuis donc entierement perſuadé, que les Forces abſolues des deux Luminaires ſont beaucoup plus grandes, que M. Newton ne les ſuppoſe, & tous

ſes

ſes Commentateurs après lui, prenant l'homogenéité de la Terre, pour une hypotheſe, ſur laquelle ils bâtiſſent tout leur Syſtême. Ces reflé-xions doivent donner beaucoup de poids à tout ce que nous avons dit au Chap. IV. où nous avons démontré, qu'en ſuppoſant, que les Denſi-ſités des Couches de la Terre augmentent depuis la circonférence vers le centre (ſuppoſition d'ailleurs extrêmement probable par pluſieurs raiſons Phyſiques, dont j'ai expoſé une partie au XIII. §. du Chap. IV.) on peut augmenter, tant qu'on veut, les effets de la Lune & du Soleil ſur la Terre. Après cet examen ſur les Forces, tant relatives, qu'ab-ſolues des deux Luminaires, nous allons en faire uſage, pour conſidé-rer de plus près tout ce qui regarde la durée des Marées, leurs interval-les, & pour faire voir le merveilleux accord entre la Théorie & les Obſervations.

## XI.

Les intervalles de deux Marées qui ſe ſuivent, ſont les plus petits dans le tems des Syzygies: leur intervalle moyen eſt alors de 24 heu-res 35 minutes, & les Marées priment chaque jour de 15 minutes ſur le mouvement de la Lune.

## XII.

Les intervalles de deux Marées qui ſe ſuivent, ſont les plus grands dans le tems des Quadratures: ils ſont alors de 24 heures 85 minutes; c'eſt-à-dire, de 25 heures 25 minutes: les Marées retardent de 35 mi-nutes par jour ſur le mouvement de la Lune. Cette grande inégalité doit rendre l'heure des Marées plus incertaine & plus irréguliere que dans les Syzygies; & c'eſt auſſi ce que l'on obſerve: mais ce n'eſt pas la ſeule raiſon.

## XIII.

Les Marées répondront préciſément au paſſage de la Lune par le Mé-ridien, tant dans les Quadratures, que dans les Syzygies, ſi celles-ci ſe font auſſi au moment du paſſage de la Lune par le Méridien. Mais ſi les Quadratures & les Syzygies ne ſe font pas dans le moment du paſſage de la Lune par le Métidien, il faut des corrections. Dans les Syzygies, il faut une correction de 15 minutes pour un jour entier en vertu du XI. §. & par conſéquent $\frac{1}{8}$ de minutes par heure, que la hau-te Marée avancera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Sy-zygies ſe font avant ce même paſſage; & que la haute Marée retarde-ra ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Syzygies ſe font après ce paſſage. Dans les Quadratures il faut une correction de 35 mi-nutes par jour, en vertu du §. XII. c'eſt-à-dire, environ une minute

& demie par heure, que la haute Marée retardera ſur le paſſage de la Lune par le Méridien, ſi les Quadratures ſe font avant ledit paſſage; & qu'elle avancera, ſi les Quadratures ſe font après le paſſage de la Lune par le Méridien. Car près des points *b* & *a*, les Arcs $\zeta z$ & $\alpha z'$ peuvent être cenſés proportionnels aux Arcs $b\zeta$ & $a\alpha$.

## XIV.

Si au lieu de rapporter les hautes Marées aux jours lunaires, on vouloit conſidérer les jours ſolaires, on voit bien qu'il faut dire, que les hautes Marées, au lieu de primer de 15 minutes dans les Syzygies, retardent de 35. minutes dans un jour, ou d'environ une minute & demie par heure; & qu'elles retardent de 85 minutes par jour dans les Quadratures, ce qui fait environ trois minutes & demie par heure: de là nous tirerons cette regle pour les Syzygies.

*Il faut ajoûter à l'heure moyenne de la Marée dans les Syzygies une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies auront devancé ladite heure moyenne, & en retrancher une minute & demie par chaque heure, que les Syzygies retarderont ſur la même heure moyenne.*

Et pour les Quadratures nous aurons la regle ſuivante:

*Il faut ajoûter, ou retrancher, dans les Quadratures de l'heure moyenne de la Marée, trois minutes & demie par chaque heure, que les Quadratures avanceront ou retarderont ſur la même heure moyenne.*

## XV.

M. Caſſini, dont les remarques ingénieuſes ſur les Marées m'ont ſervi de guide dans mes recherches, a donné par induction des regles pareilles, avec cette différence que dans les Syzygies, il a mis deux minutes par heure, au lieu d'une minute & demie; & deux minutes & demie dans les Quadratures, au lieu de trois minutes & demie.

## XVI.

Enfin nous remarquerons, que l'intervalle moyen de deux Marées qui ſe ſuivent, lequel intervalle eſt de 24 heures lunaires, ou 24 heures 50 minutes, n'eſt pas également éloigné des Syzygies & des Quadratures; mais qu'il eſt beaucoup plus près des Quadratures, que des Syzygies: auſſi pouvoit-on le prévoir facilement; car comme toutes les accélerations depuis le Point *b* juſqu'au Point *m* (qui eſt celui, dont il eſt queſtion ici) doivent compenſer tous les retardemens depuis le Point *m* juſqu'au Point *a*, & que les accélerations ſont beaucoup plus petites

que

que les retardemens, on voit d'abord, que le Point $m$ doit être plus près du Point $a$, que du Point $b$. Mais nous déterminerons exactement ce point $m$ par le moyen de la premiere Remarque du VIII. §. où nous avons démontré que le Sinus de l'Arc $mb$ eſt $= \sqrt{\frac{6+\delta}{2\delta}} = \sqrt{\frac{7}{10}} = 0{,}8366$ lequel Sinus répond à un Arc de $56^{d}.\ 47^{m}.$ L'Arc $mb$ étant donc de $56^{d}.\ 47^{m}.$, l'Arc $ma$ ſera de $33^{d}.\ 13^{m}.$, & les deux Arcs $mb$ & $ma$ ſont comme 3407 à 1993.

L'Arc $nb$ étant toujours de 45 dégrés (*par la III. Remarque du VIII.* §.) nous avons l'Arc $mn = 11^{d}.\ 47^{m}.$; & cet Arc $mn$ marque le plus grand intervalle poſſible entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée. Cet intervalle eſt donc de 47 minutes de tems: le paſſage de la Lune par le Méridien ſuivra la haute Marée depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & la précédera depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies. Mais le plus grand intervalle de l'un à l'autre (qui ſe fait environ 2 $\frac{3}{4}$ jours avant & après les Quadratures) ne ſurpaſſe jamais 47 minutes de tems.

## XVII.

Toutes ces Propoſitions depuis le XI. §. juſqu'ici, nous donnent une idée claire des heures des hautes Marées, & de toutes leurs variations pour chaque âge de la Lune. Car, quoi-que nos démonſtrations ſoyent fort hypothetiques, elles n'en méritent pas moins d'attention; je ferai voir dans le Chapitre ſuivant, comment on peut donner des corrections aſſez juſtes à l'égard de toutes les hypotheſes que j'ai expoſées au XIX. §. du Chap. IV. Mais pour donner toute la perfection qui eſt poſſible, à cette matiere, je montrerai plus préciſément, comment on peut trouver l'intervalle entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Marée, pour tout Arc donné entre les deux Luminaires; après quoi je donnerai une Table, que j'ai pris la peine de calculer de dix en dix dégrés. Il ſera facile après cela moyennant les Ephémerides & des Interpolations, de déterminer l'heure des Marées généralement.

## XVIII.

Soit donc encore le Soleil en $b$; la Lune dans un Point quelconque $m$: la haute Marée en $n$. Soit le Sinus de l'Arc $mb = m$: le Sinus total $= 1$, le Coſinus de l'Arc $mb = n$: qu'on faſſe (§. *XIII. Chap. V.*),

$$B = \frac{-\delta bb}{6mn} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m} = \frac{4mm-7}{2mn};$$

on

on aura le Sinus de l'Arc $mn$ (qui eſt l'Arc horaire entre le paſſage de la Lune par le Méridien & la haute Marée)

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}.$$

Si l'on change cette Quantité radicale en ſuites, en faiſant attention que $B$ eſt toujours un nombre négatif beaucoup plus grand que l'unité, on verra qu'on peut, ſans aucune erreur ſenſible, ſuppoſer le Sinus de l'Arc horaire $mn = \frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$, & même ſimplement $= \frac{1}{B}$ près des Syzygies & des Quadratures. Voici à préſent la Table dont je viens de parler.

La *premiere* Colonne marque de dix en dix Dégrés l'Angle compris entre les deux Luminaires vûs du centre de la Terre environ l'heure de la Marée : la *ſeconde* marque le nombre de minutes, qu'il faut retrancher depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & ajoûter depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies à l'heure du paſſage de la Lune par le Méridien, pour trouver l'heure de la Marée; & la *troiſiéme* marque la vraie heure de la haute Marée.

# TABLE FONDAMENTALE

*pour trouver l'heure moyenne des hautes Marées.*

| *Distances entre les deux Luminaires en Dégrés.* | *Tems de la haute Mer avant & après le passage de la Lune par le Méridien.* | *Heure de la haute Mer.* |
|---|---|---|
| 0 Dégrés. | 0 Minutes. | 0 Heur. 0 Min. |
| 10 | 11½ avant. | 0 28½ |
| 20 | 22 avant. | 0 58 |
| 30 | 31½ avant. | 1 28½ |
| 40 | 40 avant. | 2 0 |
| 50 | 45 avant. | 2 35 |
| 60 | 46½ avant. | 3 13½ |
| 70 | 40½ avant. | 3 59½ |
| 80 | 25 avant. | 4 55 |
| 90 | 0 | 6 0 |
| 100 | 25 après. | 7 5 |
| 110 | 40½ après. | 8 0½ |
| 120 | 46½ après. | 8 46½ |
| 130 | 45 après. | 9 25 |
| 140 | 40 après. | 10 0 |
| 150 | 31½ après. | 10 31½ |
| 160 | 22 après. | 11 2 |
| 170 | 11½ après. | 11 31½ |
| 180 | 0 | 12 0 |

XIX.

La Table que nous venons de donner, détermine généralement l'heure des hautes Mers pour les hypotheſes expoſées au XIX. §. Chap. IV. s'il eſt vrai que la raiſon moyenne entre les Forces de la Lune & du Soleil, ſoit comme 5 à 2. Je la crois à-peu-près telle, après avoir bien examiné toutes les Obſervations qui peuvent la déterminer: cependant, comme ces Obſervations ne ſont ni aſſez juſtes, ni en aſſez grand nombre, pour s'y fier entierement, je ne la donne pas encore pour tout-à-fait exacte: il eſt pourtant certain, que cette Table ne ſçauroit manquer d'avoir toute l'exactitude néceſſaire, les Marées étant ſujettes à pluſieurs irrégularités, dont on ne ſçauroit donner aucune meſure, & qui ſont de beaucoup plus grande conſéquence, que tout ce qu'il y a encore d'incertain dans la Table. Nous allons examiner avec quelles précautions & corrections on doit s'en ſervir.

---

## CHAPITRE VII.

*Qui contient à l'égard de pluſieurs Circonſtances variables, les Corrections néceſſaires pour les Théoremes & pour la Table du Chapitre précedent, & une Explication de pluſieurs Obſervations faites ſur les Marées.*

I.

LEs Vents & les Courants irréguliers contribuent le plus à rendre les Marées incertaines & irrégulieres. Ils accéléreront & augmenteront le Flux, ou le retarderont & le diminueront, ſelon qu'ils ont une direction commune ou contraire avec le Flux naturel des eaux. Mais on voit bien qu'il faut ſe contenter de ces effets, & qu'il eſt difficile & même impoſſible d'en marquer le détail, ou des meſures préciſes.

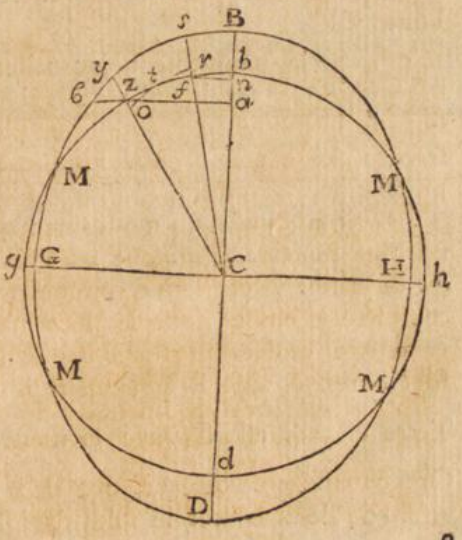
II.

La ſeconde circonſtance qui fait varier les Marées, eſt la ſituation du Port, ſa profondeur, ſa communication avec la Mer libre, la pente de ſon fonds & des environs, &c. Tout cela fait qu'il eſt impoſſible de marquer l'heure abſoluë des Marées dans les Ports, ou Bayes, ou Côtes differemment ſituées. Mais comme toutes circonſtances demeurent toujours les mêmes, on peut ſuppoſer qu'elles font le même effet ſur toutes les Marées; ſçachant donc combien la Marée eſt retardée dans les Syzygies, on la ſçaura auſſi à-peu-près dans toutes les autres ſituations

tuations de la Lune. Cette ſuppoſition eſt la ſeule reſſource qui nous reſte : j'avoue même qu'elle doit être fort peu exacte pour les différentes déclinaiſons des deux Luminaires à l'égard de l'Equateur: il n'eſt pas vraiſemblable non plus, qu'elle ſoit également juſte pour les grandes Marées dans les Syzygies, & pour les Marées bâtardes dans les Quadratures. Mais avec tout cela, on ne doit pas la rejetter, pluſieurs Obſervations m'ayant fait voir, que moyennant cette correction, le cours des Marées répond aſſez bien à la Théorie. Il faut donc ſçavoir par un grand nombre d'Obſervations pour chaque endroit l'heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, & ajoûter cette heure au tems marqué dans la ſeconde & troiſiéme Colonne de notre Table : c'eſt cette heure moyenne des hautes Mers dans les Syzygies, que les Mariniers appellent *heure du Port*: elle varient extrêmement dans les différens Ports, comprenant tout le tems & durée d'une Marée.

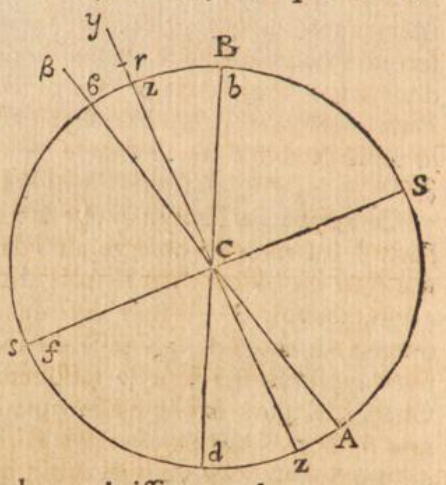
## III.

Ce retard de l'heure moyenne des pleines Mers dans les Syzygies, à l'égard du midi, s'obſerve auſſi dans la Mer libre, ou plutôt dans les Iſles qui ſont en pleine Mer : mais il n'eſt pas ſi grand, & vient d'une autre cauſe, ſçavoir de l'inertie des eaux, qui les empêche d'obéïr aſſez promptement, à cauſe de la viteſſe du mouvement journalier de la Terre. On peut appliquer ici tout le raiſonnement que nous avons fait au VI. §. du Chap. III. pour expliquer la nutation de la Lune en longitude: On pourroit douter, ſi cette raiſon doit faire avancer ou retarder les Marées : Suppoſons donc, pour nous en éclaircir, que, tant les Luminaires, que la haute Marée, répondent à un même Point dans cette Figure : comme le mouvement des Luminaires n'eſt pas ſenſible, par rapport au mouvement journalier de la Terre, nous les conſidérerons comme demeurant dans la ligne *db*: l'Equateur de la Terre changera ſa figure naturelle *bgdh* en *BGDH*; & cette figure *BGDH* tournant autour du Centre *C* de *B* vers *G*, le ſommet *B* viendra quelque tems après en *y*: cela étant, ſi les eaux pouvoient ſe compoſer dans un inſtant dans un état d'équilibre, l'élevation *Bb* devroit ſe changer en *yz*, & la force qui devroit produire ce changement, ſeroit exprimée par *Bb*−*yz*: mais cette force étant infiniment petite, ſi l'Angle *BCy*



eſt infiniment petit, elle ne ſçauroit produire tout ſon effet. On voit par-là, qu'il faut ſuppoſer l'Angle *B C y* d'une grandeur conſidérable, & conſidérer enſuite le ſommet *B* comme tranſporté en *y*, afin que la différence des preſſions ſoit aſſez grande, pour conſerver le ſommet des eaux au Point *y*, malgré la rotation du Globe. Le vrai ſommet étant donc en *y*, l'Angle *B C y* ſera l'Angle horaire, qui marquera les retardemens réels des hautes Marées ſur le paſſage de la Lune par le Méridien. Là-deſſus nous pourrons faire les Remarques qui ſuivent.

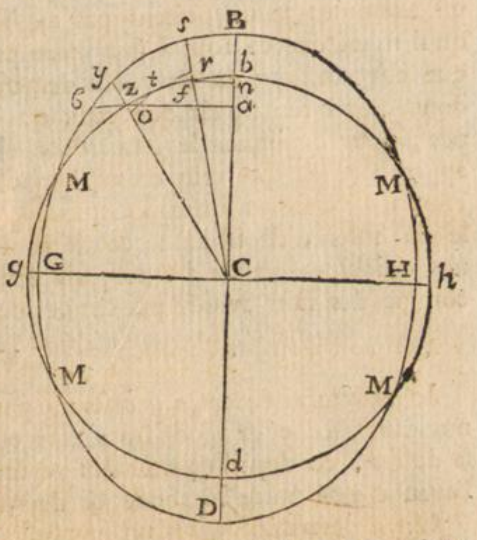
1°. Si les Luminaires ne ſont pas en conjonction, & que le Soleil ſoit en *b*, & la Lune en *ϛ* on pourra conſidérer la choſe, comme ſi les Luminaires étoient en conjonction, mais dans la Ligne *C z*, déterminée de poſition au VIII. §. du Chap. V. & augmenter toujours l'Angle *b C z* de l'Angle *B C y*, dont nous venons de parler : d'où il paroit que l'Angle horaire *B c y* doit toujours être ajoûté au tems marqué dans la troiſiéme Colonne de notre précedente Table : car la hauteur des Marées ne paroît pas devoir changer la choſe, puiſque les changemens de preſſion pour un petit tems donné, ſont proportionnels aux baiſſemens des eaux, qui doivent ſe faire pour conſerver le ſommet des eaux dans un même Point *y*.




2°. Si le mouvement journalier de la Terre étoit infiniment lent; l'Angle *B C y* ſeroit nul : mais il doit être plus grand, d'autant qu'on ſuppoſe le mouvement journalier plus grand & plus prompt ; & la différence des hauteurs entre les hautes & baſſes Marées, doit diminuer à proportion.

3°. Si la viteſſe du mouvement journalier étoit comme infinie, la pleine Mer répondroit preſque au Point *G*; mais auſſi la différence des hautes & baſſes Mers ſeroit comme nulle. Il me ſemble après avoir bien conſidéré la choſe, que les hauteurs des Marées dans les Syzygies doivent être cenſées proportionnelles aux Sinus des Angles *G C y* dans la Mer libre, & que ſi la hauteur *B b* ſans le mouvement journalier de la Terre eſt $= \phi$, elle ſera avec le mouvement journalier de la Terre $= \frac{C\alpha}{C b} \times \phi$. Or, comme on a obſervé, que dans la Mer libre la haute Marée ſuit environ de deux heures le midi dans les Syzygies ; il faut ſuppoſer l'Angle

gle *B Cy* de 30 dégrés, & les forces abſolues des Luminaires doivent être ſuppoſées plus grandes en raiſon de $\sqrt{3}$ à 2 pour élever les eaux, autant qu'elles le ſeroient ſans le mouvement journalier de la Terre.




## I V.

Nous avons encore fait voir, que ſans le concours des cauſes ſecondes, les plus grandes Marées devroient ſe faire dans les Syzygies, & les plus petites dans les Quadratures. Cependant on a obſervé, que les unes & les autres ſe font un ou deux jours plus tard. Ce retardement eſt encore produit, ſinon pour le tout, au moins en partie, par l'inertie des eaux, qui doivent être miſes en mouvement, & qui ne ſçauroient obéir aſſez promptement aux forces qui les ſollicitent, pour leur faire ſuivre les loix que ces forces demanderoient. Il y a peut-être encore une autre cauſe, & M. Caſſini me paroit le ſoupçonner de même, quoi qu'il ne ſe ſerve pas de nos principes, la voici: c'eſt qu'il ſe pourroit bien que cette cauſe, qui nous eſt encore ſi cachée, & qui donne une tendance mutuelle aux Corps flottans & compoſans le ſyſtême du monde, que cette cauſe, dis-je, ne ſe communiquât pas dans un inſtant d'un Corps à l'autre, non plus que la lumiere. S'il y avoit, par exemple, un Torrent central de matiere ſubtile, & d'une étenduë infinie, vers le centre de la Terre, & un ſemblable vers le centre de la Lune, ces deux Torrens pourroient produire la Gravitation mutuelle de ces deux Corps, & la viteſſe du premier pourroit être telle, qu'il fallût un ou deux jours à la matiere, pour parvenir depuis la Lune juſqu'à la Terre: en ce cas on voit bien que l'effet de la force lunaire ſur notre Océan, ſeroit le même, qu'il auroit été un ou deux jours auparavant dans la ſuppoſition que la Gravitation ſe communique dans un inſtant. Quoi qu'il en ſoit, comme ce retardement a été obſervé le même à-peu-près après les Syzygies & après les Quadratures, nous pouvons encore ſuppoſer, qu'il eſt le même, pendant toute la revolution de la Lune, c'eſt-à-dire, que les Marées ſont toujours telles, qu'elles devroient être, ſans leſdites cauſes, un ou deux jours auparavant.

Au reſte je n'ai mis ici ce que je viens de dire ſur la cauſe qui pourroit produire la Gravitation mutuelle des Corps du Syſtême du Monde (Gravitation, qu'il n'eſt plus permis de revoquer en doute) que comme un

un exemple: je ne prétens pas expliquer ce Phénomene, j'avoue même, qu'il m'eſt encore tout-à-fait incompréhenſible: je ne crois pas non plus que l'ACADEMIE en ait voulu demander une explication; je ſouhaiterois donc qu'on remarquât que ceux qui voudroient ſe ſervir d'autres principes, pour expliquer le Flux & Reflux de la Mer, ne le feroient qu'en apparence, & que tout ce qu'ils pourroient alleguer ne ſeroient que des efforts d'expliquer mécaniquement la Gravitation ou l'Attraction mutuelle du Soleil, de la Lune & de la Terre, ſans diſconvenir pour cela de nos principes au fond, leſquels ſont ſûrs, & doivent être conſidérés comme des faits averés par l'expérience.

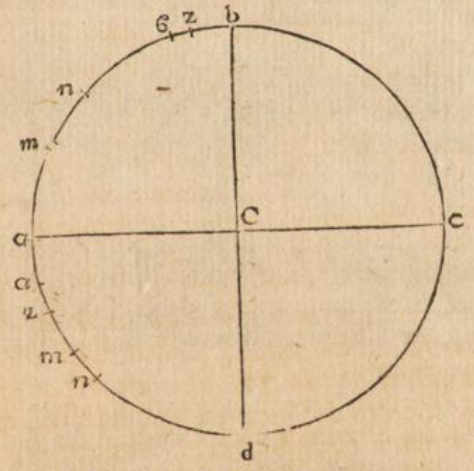
## V.

Je profiterai de cette occaſion, pour parler d'un des principaux Phénomenes, & pour répondre à une objection, qu'on pourroit nous faire là-deſſus, & dont l'éclairciſſement me paroît très-propre pour faire voir l'avantage de notre Méthode & de nos Calculs.

On a déterminé après un nombre infini d'Obſervations, que dans les Syzygies l'heure moyenne de la haute Mer eſt à Breſt à 3 heures 28 minutes, & dans les Quadratures à 8 heures 40 minutes; & que la différence n'eſt que de 5. heures 12. minutes depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures. Cette différence a été obſervée tout-à-fait la même à Dunkerque, & dans d'autres Ports; quoique les heures des Marées ſoient différentes aux divers Ports. C'eſt donc ici une Obſervation qui mérite beaucoup d'attention, comme génerale & bien averée: cependant il eſt certain, que ſans les cauſes ſecondes, que nous avons déja indiquées, la différence entre les heures du Port pour les Syzygies; & pour les Quadratures, devroit être à-peu-près de 6 heures lunaires, c'eſt-à-dire d'environ 6 heures 12 minutes. Voici comment je détermine exactement cet intervalle.

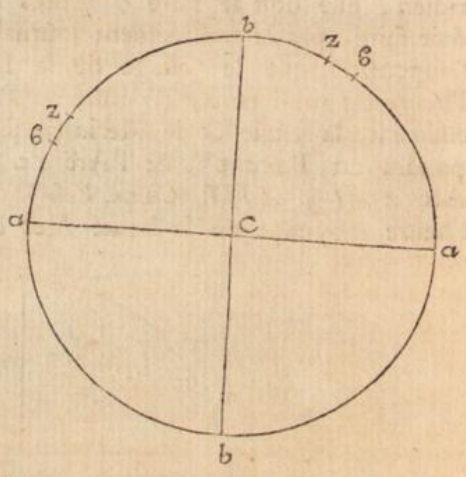
L'heure moyenne de la haute Mer dans les Syzygies, eſt dans la Théorie pure préciſément à midi, puiſqu'il faut conſiderer les Syzygies, comme tombant préciſément ſur l'heure du midi. Si les Syzygies ſe faiſoient plus tard, la haute Mer arriveroit plus tôt & reciproquement; & les accélerations compenſent parfaitement les retardemens après un grand nombre d'obſervations. L'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, doit être de même cenſée celle qui ſe fait, lorſque la Quadrature ſe fait préciſément à midi; car, lorſqu'il eſt queſtion d'un certain jour, il en faut prendre le milieu, c'eſt-à-dire l'heure du midi, afin que les différences ſe détruiſent ou ſe compenſent les unes les autres. Soit donc le Soleil au Zenith *b*, & la Lune en *a* à 90 dégrés du Zenith, ou à l'Horiſon: cela étant, on voit que ſi la haute Mer eſt ſuppoſé ſe faire préciſément au moment du paſſage de la Lune par le Méridien,

ridien, elle doit se faire 6 heures lunaires après midi ; car le Point *b* doit faire, par le mouvement journalier de la Terre, l'Arc horaire *b a α* (supposant que le passage de la Lune par le Méridien, qui a été à l'heure du midi en *b*, réponde au Point *α*) ; mais pour parler plus précisément, la Lune & le Méridien se trouvant en *α*, la haute Marée répondra au Point z', & l'Arc *α z* sera égal aux deux tiers du petit Arc *a α* (§. *XIII. Chap. VI.*) c'est donc l'Arc *b a z'* qui marque l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures : l'Arc *b a* est




de 90 dégrés ; le petit Arc *a α* est d'environ 3. dégrés, & l'Arc *α z'* de 2 dégrés, & par conséquent l'Arc *b a z'* de 95 dégrés, qui donne un tems de 6 heures 20 minutes, qui devroit être *in abstracto* l'heure moyenne de la haute Mer dans les Quadratures, pendant que celle des Syzygies est à midi. D'où vient donc, me demandera-t-on, que, suivant les Observations, on ne trouve que 5. heures 12 minutes à la place de 6 heures 20. minutes. Je répons que c'est cette même anticipation des Syzygies & des Quadratures à l'égard des plus grandes & des plus petites Marées, dont nous avons parlé dans le précedent Article, qui en est la cause. Il est si vrai, que c'est ici la véritable raison, que la quantité de cette anticipation répond parfaitement bien à l'intervalle des heures moyennes des hautes Mers pour les Syzygies & les Quadratures. Nous en pourrons même déterminer plus exactement ladite anticipation, sur laquelle on est encore bien divisé, les uns la faisant d'un jour, d'autres de deux, pendant qu'on a déterminé assez exactement, & d'un commun accord l'autre Point.

Prenons d'abord le terme de deux jours, comme le plus généralement adopté, en considérant que les Marées se reglent après les Luminaires, tels qu'ils ont été deux jours auparavant : imaginons-nous les Syzy-




Syzygies ſe faire en *b* & les Quadratures en *b* & *a*: l'effet des Luminaires ſera, en vertu de notre ſuppoſition, dans le tems des Syzygies, comme ſi le Soleil étoit en *b*, & la Lune en *6*, en prenant l'Arc *b6* d'environ $25\frac{1}{4}$ dégrés; & le même effet dans les Quadratures ſera comme ſi le Soleil étant en *b*, la Lune ſe trouvoit en *6'* environ $64\frac{1}{4}$ dégrés; dans les Syzygies, la haute Mer répond au Point *z*, & dans les Quadratures au Point *z'*. C'eſt donc l'Arc *z b z'* qui exprime l'Arc horaire entre l'heure moyenne de la haute Mer des Syzygies & celle des Quadratures (ſubſtituant toutefois des heures lunaires à la place des heures ordinaires, à cauſe du mouvement de la Lune.) Or la Table miſe à la fin du précedent Chapitre, fait voir par le moyen des interpolations, que la Lune étant avant les Syzygies à $25\frac{1}{4}$ dégrés du Soleil, l'heure de la haute Mer eſt à 10 heures 46. minutes du matin; & que la Lune étant après les Syzygies à $64\frac{1}{4}$ dégrés du Soleil, la haute Mer ſe fait à 3 heures 35 minutes du ſoir: l'intervalle eſt donc de 4 heures 49 min. tems lunaire, ou d'environ 5 heures, tems ordinaire. Ce reſultat répond déja aſſez bien à l'Obſervation, qui le donne de 5. heures 12. minutes.

Mais ſi au lieu de deux jours on prend $\frac{8}{5}$ jours, ou environ 59 heures, qui répond à-peu près à 20 dégrés de diſtance de la Lune depuis les Syzygies & les Quadratures, l'heure moyenne de la haute Mer le jour des Syzygies, ſera en vertu de la Table, à 11 heures 2 minutes du matin, & le jour des Quadratures, à 3 heures $59\frac{1}{2}$ minutes du ſoir; & l'intervalle de l'une à l'autre ſera de 4. heures $57\frac{1}{2}$ minutes tems lunaire, qui fait à-peu-près 5 heures 8 minutes. Et enfin on trouve une conformité exacte entre les deux points en queſtion, en donant un jour & demi au retardement des Marées, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que l'érat des Marées eſt tel qu'il devroit être naturellement, un jour & demi plutôt: c'eſt alors que l'intervalle de l'heure moyenne de la pleine Mer aux Syzygies à heures pareilles aux Quadratures, devient de 5 heures 12 minutes, tel qu'un grand nombre d'Obſervations l'a donné: auſſi ce terme d'un jour & demi, eſt-ce celui qui eſt le plus conforme aux Obſervations, & en conſultant les Tables qui ſont dans les Me-

Memoires de l'Académie de l'année 1710. pag. 330. & 332. & prenant la différence moyenne, on trouve fort à-peu-près la même valeur. Toutes ces circonſtances, l'explication naturelle de ce Phénomene, ſa conformité avec toutes les Obſervations faites juſqu'ici, & ſon uſage pour déterminer au juſte un des points des plus eſſentiels, qu'on n'a connu encore que par tatonnement, ſont bien voir la juſteſſe & la ſupériorité de nos Méthodes. *

## VI.

Les autres corrections que l'on doit apporter aux Formules & à la Table du précedent Chapitre, regardent l'hypotheſe que nous avons faite, pour rendre d'abord la Queſtion & les Calculs plus faciles; ſçavoir *que les deux Luminaires ſont des Cercles parfaits autour de la Terre, & cela dans le plan de l'Equateur.* Cette ſuppoſition entraîne celle d'une égalité parfaite dans les diſtances des Luminaires à la Terre, auſſi-bien que dans leur mouvement, & elle fait outre cela leur déclinaiſon, à l'égard de l'Equateur, nulle. Voyons donc à préſent ce que les différentes diſtances, l'inégalité des viteſſes & l'obliquité des orbites peuvent faire ſur l'heure des Marées.

## VII.

Les différentes diſtances des deux Luminaires à l'egard de la Terre changent le rapport de leurs forces ſur la Mer; & c'eſt cependant de ce rapport que dépendent preſque toutes les Propoſitions du précedent Chapitre. Nous avons ſuppoſé ce rapport pour les diſtances moyennes de la Lune & du Soleil, comme 5 à 2, fondés ſur un grand nombre d'Obſervations, qui doivent nous confirmer dans cette ſuppoſition, à l'égard des variations des diſtances, après avoir remarqué & démontré la Propoſition qui ſuit:

*Les Forces de chaque Luminaire ſur la Mer ſont en raiſon reciproque triplée de leurs diſtances à la Terre.*

En voici la Démonſtration. Nous avons dit & démontré au Chapitre quatriéme, que la Force de chaque Luminaire eſt généralement $= \frac{n\,g\,b}{G\,a^3} \times b$ en entendant par $n$ un nombre conſtant par $\frac{G}{g}$ le rapport de la péſanteur dans la region de la Terre vers le Luminaire à la péſanteur qui ſe fait vers le centre de la Terre, & par $\frac{b}{a}$ le rapport du rayon de la



* Je vois après avoir fini cette Piece, que M. Caſſini a deja indiqué ce que nôtre Remarque contient de Phyſique. Voy. les Mem. de l'Ac. des Sc. de 1714. p. 252.

Terre $b$ à la distance du Luminaire $a$: or comme les différentes distances ne changent que les quantités $G$ & $a$, nous voyons que la Force de chaque Luminaire est constamment proportionelle à $\frac{g}{a}$, & la quantité $g$, qui exprime la pésanteur vers le centre du Luminaire, étant reciproquement proportionnelle aux quarrés des Distances $a$, il s'ensuit que les Forces de chaque Luminaire sur la Mer, sont en raison reciproque triplée de leurs Distances à la Terre.

M. Newton a déja démontré cette Proposition, qui se confirme aussi par toutes les Observations faites sur les Marées, quand on en fait une juste estime, & une application bien ménagée. La Proposition que nous venons de démontrer, nous enseigne qu'à la place de notre Equation fondamentale $\delta = \frac{5}{2}\epsilon$, employée dans le Chapitre précedent, il faut se servir de celle-ci plus générale

$$\delta = \frac{5}{2} \times \frac{l^3}{L^3} \times \frac{S^3}{s^3} \times \epsilon.$$

en dénotant par $l$ & $s$ les distances moyennes de la Lune & du Soleil à la Terre, & par $L$ & $S$ leurs Distances données quelconques; & là-dessus on pourra calculer toutes les Questions traitées ci-dessus pour des Distances quelconques entre les Luminaires & la Terre: mais nous ne considérerons que deux cas, 1°. Lorsque la Lune étant dans son Périgée, & la Terre dans son Aphelie, le rapport de $\delta$ à $\epsilon$ devient le plus grand; & 2°. Lorsque la Lune étant au contraire dans son Apogée, & la Terre dans son Perihelie, le rapport de $\delta$ à $\epsilon$ devient le plus petit. Nous donnerons 1000 parties à la distance moyenne de la Lune, 1055 à sa plus grande distance, & 945 à sa plus petite distance; & pour le Soleil, nous poserons les pareilles distances être en raison de 1000, 1027 & 983: & nous aurons pour le *premier* cas $\delta = 3{,}115\,\epsilon$; & dans le *second* cas $\delta = 2{,}022\,\epsilon$.

Comme il ne s'agit ici que des petites corrections, nous supposerons simplement pour le premier cas $\delta = 3\epsilon$, & pour le second $\delta = 2\epsilon$; & afin que nos regles soient d'autant plus faciles dans l'application, nous n'aurons point d'égard aux variations du Soleil, comme n'étant presque d'aucune importance par rapport à celles de la Lune. Disons donc simplement, que dans le Perigée de la Lune, il faut mettre $\delta = 3\epsilon$, & dans l'Apogée $\delta = 2\epsilon$. Cela étant, voici les conséquences que nous en tirons.

1°. Un jour & demi après les Syzygies, l'intervalle de deux Marées qui se suivent, est dans le Périgée de 24 heures $27\frac{1}{2}$ minutes; & dans l'Apogée de 24 heures 33 minutes.

2°. Un jour & demi après les Quadratures, le même intervalle est dans le Perigée de 25 heures 15 minutes; & dans l'Apogée de 25 heures

heures 40 minutes. Voyez à l'égard de ces deux Propoſitions le §. VII. du Chap. VI.

3°. Le plus grand intervalle entre le paſſage de la Lune par le Méridien & la haute Mer (que nous avons vû au XVI. §. du Chap. VI. devoir ſe faire environ $2\frac{1}{4}$ jours avant & après les Quadratures, ſans nos corrections, mais qui ſera réellement environ $1\frac{1}{4}$ jours avant, & $4\frac{1}{4}$ après les Quadratures) eſt de 39 minutes environ le Perigée de la Lune, & d'une heure environ ſon Apogée. Ce plus grand intervalle ſe fait auſſi plutôt dans le Perigée, & plus tard dans l'Apogée; la différence eſt d'environ un demi jour.

4°. Pour calculer la Table pareille à celle de ci-deſſus, mais qui ſerve pour le Perigée & pour l'Apogée de la Lune, nous remarquerons que les Sinus des petits Arcs horaires, qui marquent les intervalles entre le paſſage de la Lune & la haute Mer ſont toujours

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{B}{2\sqrt{4 + BB}}\right)}$$

& qu'à la place de cette quantité, on peut ſubſtituer la valeur fort approchante $\frac{1}{B} - \frac{3}{2B^3}$ (§. *XVIII. Chap. VI.*) & même qu'on peut négliger ici, ſans le moindre ſcrupule, le ſecond terme, puiſqu'il ne s'agit que de petites corrections. Nous conſidérerons donc ces petits Arcs horaires, comme reciproquement proportionnels aux quantités $B$, c'eſt-à-dire, aux quantités $\frac{-\delta' b b}{6 m n} + \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$. Et dans cette derniere quantité, nous pourrons encore rejetter ſans peine les deux derniers termes pour notre preſent deſſein, & dire par conſéquent, que pour les différentes valeurs de $\frac{\delta}{6}$, tout le reſte étant égal, les intervalles entre le paſſage de la Lune, & la haute Marée ſont reciproquement proportionnels aux valeurs de $\frac{\delta}{6}$, ou directement proportionnels aux valeurs de $\frac{6}{\delta}$. D'où il paroît que les nombres de la ſeconde Colonne de notre précedente Table, doivent être multipliés par la Fraction $\frac{5}{6}$ dans le Perigée, & par $\frac{5}{4}$ dans l'Apogée de la Lune, après quoi les nombres de la troiſiéme Colonne ſe déterminent comme dans la précedente Table. Mais quant aux nombres de la premiere Colonne, il faut les augmenter chacun d'environ 20 dégrés, à cauſe du retard d'un jour & demi expliqué au long dans ce Chapitre, pendant lequel la Lune change de place à l'égard du Soleil d'environ 19 dégrés, à la place deſquels je mettrai un nombre rond de 20 dégrés.

Voici donc à preſent une Table corrigée à l'égard de toutes les circonſ-

conſtances expoſées juſqu'ici. La premiere Colonne marque la diſtance qui eſt entre le Soleil & la Lune, environ le tems de la haute Mer, ou plutôt ici, environ le paſſage de la Lune par le Méridien. Les trois Colonnes ſuivantes marquent le nombre de minutes entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & la haute Mer pour le Perigée, pour les Diſtances moyennes & pour l'Apogée de la Lune. Et les trois dernieres marquent les heures abſolues des hautes Mers pour les Perigées, les Diſtances moyennes & les Apogées de la Lune. Et pour ſe ſervir de cette Table, il ne faudra plus qu'ajoûter aux nombres des ſix dernieres Colonnes l'heure moyenne du Port en vertu du III. §. La Table n'a été calculée que de dix en dix dégrés: les interpolations ſuppléeront avec aſſez de juſteſſe à telle autre Diſtance entre les deux Luminaires, que les Ephémérides indiqueront. La même méthode des interpolations peut auſſi être employée, lorſque la Lune ſe trouve à une Diſtance donnée de ſon Apogée ou Perigée.

# TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGE'

*pour trouver l'heure des hautes Marées.*

| *Distances entre les Luminaires au moment du passage de la Lune par le Meridien.* | *Tems de la haute Mer avant & après le passage de la Lune par le Meridien en minutes de tems.* | | | *Table approchante des heures de la haute Mer, dont on peut se servir au défaut des Ephémérides, qui marquent le passage de la Lune par le Méridien.* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Perigée de la Lune.* | *Distance moyenne de la Lune.* | *Apogée de la Lune.* | *Perigée de la Lune.* H. M. | *Distance moyenne de la Lune.* H. M. | *Apogée de la Lune.* H. M. |
| 0 | 18 après. | 22 après. | 27½ après. | 0 18 | 0 22 | 0 27½ |
| 10 | 9½ après. | 11½ après. | 14 après. | 0 49½ | 0 51½ | 0 54 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 1 20 | 1 20 | 1 20 |
| 30 | 9½ avant. | 11½ avant. | 14 avant. | 1 50½ | 1 48½ | 1 46 |
| 40 | 18 avant. | 22 avant. | 27½ avant. | 2 22 | 2 18 | 2 12½ |
| 50 | 26 avant. | 31½ avant. | 39½ avant. | 2 54 | 2 48½ | 2 40½ |
| 60 | 33 avant. | 40 avant. | 50 avant. | 3 27 | 3 20 | 3 10 |
| 70 | 37½ avant. | 45 avant. | 56 avant. | 4 2½ | 3 55 | 3 44 |
| 80 | 38½ avant. | 46½ avant. | 58 avant. | 4 41½ | 4 33½ | 4 22 |
| 90 | 33½ avant. | 40½ avant. | 50½ avant. | 5 26½ | 5 19½ | 5 9½ |
| 100 | 21 avant. | 25 avant. | 31 avant. | 6 19 | 6 15 | 6 9 |
| 110 | 0 | 0 | 0 | 7 20 | 7 20 | 7 20 |
| 120 | 21 après. | 25. après. | 31 après. | 8 21 | 8 25 | 8 31 |
| 130 | 33½ après. | 40½ après. | 50½ après. | 9 13½ | 9 20½ | 9 30½ |
| 140 | 38½ après. | 46½ après. | 58 après. | 9 58½ | 10 6½ | 10 18 |
| 150 | 37½ après. | 45 après. | 56 après. | 10 37½ | 10 45 | 10 56 |
| 160 | 33 après. | 40 après. | 50 après. | 11 13 | 11 20 | 11 30 |
| 170 | 26 après. | 31½ après. | 39½ après. | 11 46 | 11 51½ | 11 59½ |
| 180 | 18 après. | 22 après. | 27½ après. | 0 18 | 0 22 | 0 27½ |

Cette Table ſuppoſe encore le plan des Orbites de la Lune & du Soleil être le même que celui de l'Equateur de la Terre, ce qu'il faut ſur-tout remarquer à l'égard des trois dernieres Colonnes. Mais cette ſuppoſition n'a pas beaucoup d'influence ſur les autres Colonnes; & les Ephémerides, qui marquent le paſſage de la Lune par le Méridien, ſuppléeront aux trois dernieres.

## VIII.

Après avoir expoſé au long tout ce que les différentes diſtances des Luminaires, & ſur-tout de la Lune à la Terre, peuvent contribuer pour faire varier l'heure des Marées, nous dirons auſſi un mot ſur l'inégalité du mouvement des Luminaires.

Cette inégalité ſeroit d'une très-grande importance, s'il falloit conſtruire une Table pour les heures des Marées, ſans ſe rapporter aux Tables & aux Ephémerides: mais elle ne nous eſt d'aucune conſéquence, puiſque nous ſuppoſons l'heure du paſſage de la Lune par le Méridien, auſſi-bien que l'Arc compris entre les deux Luminaires, connus par les Ephémerides. C'eſt la raiſon qui m'a engagé à rapporter l'heure des Marées au paſſage de la Lune par le Méridien, en donnant une Table, qui marque, combien la premiere avance ou retarde ſur l'autre.

## IX.

Il nous reſte à conſidérer les inclinaiſons des Orbites à l'égard de l'Equateur: pour cet effet il faut concevoir un Cercle qui paſſe par les centres du Soleil, de la Lune & de la Terre; & c'eſt proprement ce Cercle que doivent repréſenter toutes nos Figures, que nous avons conſidérées juſqu'ici, comme repréſentant l'Equateur de la Terre. On voit bien après cela, que tous les Points reſteront dans ce Cercle aux mêmes endroits; & que les Arcs ſe conſerveront tels, que nous les avons déterminés: mais les Angles horaires formés ſur l'Equateur par ſes Arcs, en ſont changés. On ne ſçauroit ſans une Théorie parfaite de la Lune déterminer au juſte ces Angles horaires, à cauſe de la variabilité de l'inclinaiſon de l'Orbite lunaire à l'égard de l'Equateur; mais auſſi ce changement n'eſt-il pas fort conſidérable, par rapport à l'Arc horaire compris entre le paſſage de la Lune par le Méridien, & le moment de la haute Mer; nous ſuppoſerons, & nous pouvons le faire ici ſans aucune erreur ſenſible, que les Orbites de la Lune & du Soleil ſont dans un même plan, ayant chacune une inclinaiſon avec l'Equateur de $23^{d}.\ 30^{m}.$ & nous conſidérerons là-deſſus la Lune dans trois ſortes de ſituation: 1°. Lorſque ſa déclinaiſon, à l'égard de l'Equateur, eſt nulle; & alors

il

il faut multiplier les nombres de la seconde, troisiéme & quatriéme Colonnes de notre Table par $\frac{92}{100}$, & ce qui proviendra marquera le nombre de minutes entre le passage de la Lune par le Méridien, & l'heure de la haute Mer. 2°. Lorsque la Lune se trouve dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'Equateur ; & alors il faut multiplier lesdits nombres de notre Table par $\frac{100}{92}$. Et enfin 3°. lorsque la Lune se trouve au milieu de ces deux situations ; auquel cas il faut se servir de notre Table, sans y apporter aucun changement. Quant aux autres situations de la Lune en longitude, on peut se servir du principe de la proportionalité de la différence des termes. Ces regles sont fondées sur la proportion qu'il y a entre les petits Arcs de l'Ecliptique & de l'Equateur, compris entre deux mêmes Méridiens fort proches l'un de l'autre.

## X.

Il suit de tout ce que nous venons de dire, que le plus grand intervalle possible entre le passage de la Lune par le Méridien & la haute Marée, est environ un jour avant les Quadratures, & quatre jours après les Quadratures, la Lune dans son Apogée & dans sa plus grande déclinaison à l'égard de l'Equateur de la Terre ; & que dans le concours de toutes ces circonstances, ledit plus grand intervalle peut aller jusqu'à 63 minutes de tems, que la haute Marée avancera sur le passage de la Lune par le Méridien un jour avant les Quadratures, & qu'elle retardera quatre jours après les Quadratures.

## XI.

Voilà mes refléxions sur le tems des Marées ; je me flatte qu'elles ont toute la précision qu'on peut esperer sur cette matiere, du moins quant à la Méthode. Toute l'incertitude qui y reste encore, est fondée sur le rapport moyen entre les forces de la Lune & du Soleil, que je crois pourtant avoir fort bien déterminé, puisque tous nos Théoremes conviennent si bien avec les Observations. Un plus grand nombre d'Observations nous donnera peut-être un jour plus de précision là-dessus. Il est vrai que nous n'avons déterminé l'heure & les intervalles des Marées, que sous la Ligne Equinoctiale ; mais je ne crois pas que la latitude des lieux puisse changer sensiblement les intervalles des Marées : ainsi je n'ai pas jugé nécessaire d'en parler. La latitude des lieux a cependant beaucoup de liaison avec la hauteur des Marées : c'est à quoi nous ferons attention dans la suite.

CHA-

## CHAPITRE VIII.

*Sur les différentes hauteurs des Marées pour chaque jour de la Lune.*

### I.

JE me propoſe à préſent d'examiner les diverſités des hauteurs des Marées, non d'un endroit à l'autre, mais d'un même endroit, que nous ſuppoſerons d'abord pris ſous l'Equateur, pour toutes les diverſes circonſtances qui peuvent ſe rencontrer. Nous ſuivrons, pour cet effet, la même Methode que nous avons obſervée pour déterminer généralement l'heure des Marées, c'eſt-à-dire, que nous commencerons nos recherches par les cas les plus ſimples, pour ne pas être arrêtés tout court en voulant ſurmonter trop de difficultés à la fois : nous nous ſervirons donc d'abord des mêmes hypotheſes que nous avons employées dans le Chap. VI. & que nous avons expoſées à la fin du Chap. IV. après quoi nous pouſſerons nos recherches dans le Chapitre ſuivant à tous les cas poſſibles, tout comme nous avons fait dans le Chapitre précedent pour déterminer généralement l'heure des Marées.

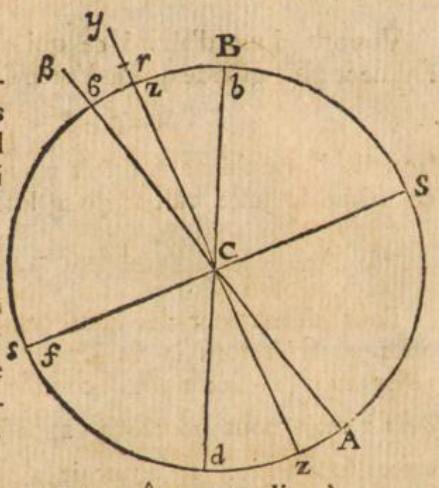
### II.

J'entens par hauteur d'une Marée toute la variation de la hauteur verticale des eaux, depuis la haute Mer juſqu'à la baſſe Mer ſuivante. Pour trouver cette hauteur, il faut d'abord faire attention aux §. §. XI. XII. & XIII. du Chap. V. qui déterminent l'Equateur, les lieux de la Lune & du Soleil étant donnés, la poſition des deux points auſquels la Mer eſt la plus haute & la plus baſſe; après quoi le VIII. Art. du même Chapitre donnera la hauteur cherchée, en cherchant premierement la hauteur de la haute Mer, & enſuite la hauteur de la baſſe Mer.

### III.

Remarquons d'abord, que les deux points de la Circonférence, qui marquent la haute & la baſſe Mer, ſont éloignés entre eux de 90 dégrés. On le voit par les expreſſions des §. §. XI. & XIII. & nous l'avons démontré dans la premiere Remarque du §. XII. Chap. V. Suppoſant donc le Soleil répondre au Point *b*, la Lune au Point *c*, & que la haute Mer réponde au Point *z*, il faut prendre l'Arc *z s* de 90 dégrés,

grés, & le Point $s$ ſera celui qui répond à la baſſe Mer. Cherchez donc par le VIII. §. du Chap. V. la valeur de $yz$, qui marque l'élevation des eaux pour le Point $z$; & enſuite prenez de la même maniere la valeur de $sx$, qui étant négative, marque la dépreſſion des eaux; cela étant fait, on voit que la ſomme de $yz$ & de $sx$ marquera la hauteur de la Marée; mais dans l'expreſſion analytique de $sx$, il faut changer les Signes. Il eſt vrai que cette Methode ſuppoſe, que pendant l'intervalle, depuis la haute Mer juſqu'à la baſſe Mer, la Lune ne change pas de place; & c'eſt à quoi on pourroit avoir égard, en augmentant d'environ trois dégrés l'Arc $b\beta$ dans le Calcul de $sx$: mais ce ſeroit une exactitude hors de place, & qui augmenteroit beaucoup les peines du Calcul, qui n'eſt déja que trop embaraſſé. On pourra même remedier à ce petit défaut, déja inſenſible par ſa nature, en prenant l'Arc $b\beta$, tel qu'il eſt, non au moment de la haute Marée, ni à celui de la baſſe Mer, mais au milieu de leur intervalle; & c'eſt ce que nous ſuppoſerons dans la ſuite.




Soit donc comme dans le V. Chap. le Sinus de l'Arc $b\beta = m$; ſon Coſinus $= n$; le Sinus de l'Angle $bCz = \sigma$; le Sinus de l'Angle $\beta Cz = \varrho$; le Sinus total $= b$; & nous aurons en vertu du §. VIII. Chap. V.

$$yz = \frac{2bb-3\sigma\sigma}{3bb} \times \beta + \frac{2bb-3\varrho\varrho}{3bb} \times \delta.$$

De là on trouvera $sx$ en vertu du §. XII. Chap. V. en mettant $bb-\sigma\sigma$, & $bb-\varrho\varrho$ à la place de $\sigma\sigma$ & de $\varrho\varrho$: & de cette façon on aura

$$sx = \frac{3\sigma\sigma-bb}{3bb} \times \beta + \frac{3\varrho\varrho-bb}{3bb} \times \delta.$$

Changez à preſent les Signes dans la valeur de $sx$, & ſuppoſez la hauteur de la Marée $= M$, & vous aurez

$$M = \frac{bb-2\sigma\sigma}{bb} \times \beta + \frac{bb-2\varrho\varrho}{bb} \times \delta.$$

Cette derniere expreſſion marque généralement la hauteur des Marées, puiſqu'on peut toujours déterminer les valeurs de $\sigma\sigma$ & $\varrho\varrho$ par les §. §. XI. & XIII. du Chap. V. Mais les Calculs ne laiſſent pas d'être aſſez pénibles, quoi-que les Formules ne ſoient pas prolixes. Nous tâcherons

donc de rendre ces Calculs plus faciles, ſans déroger beaucoup à l'exactitude des Formules.

## IV.

Voyons donc d'abord ce qui arriveroit, ſi la Force lunaire étoit infiniment plus grande que la Force ſolaire. On auroit en ce cas $\varrho = 0$ & $\sigma = m$,

$$M = \zeta + \delta - \frac{2mm}{bb} \times \zeta,$$

laquelle Formule ne ſçauroit manquer d'être aſſez approchante ; elle donne même la juſte valeur pour les Syzygies & pour les Quadratures.

## V.

Pour déterminer les hauteurs des Marées plus exactement encore, nous conſidérerons la valeur de $\varrho$ comme fort petite, au lieu de la ſuppoſer tout-à-fait nulle, comme nous l'avons fait dans l'Article précedent : mais nous pourrons ſuppoſer hardiment $\varrho = \frac{\zeta mn}{\delta}$, & on verra que cette ſuppoſition ne ſçauroit s'éloigner beaucoup de la vérité, ſi l'on conſulte l'Article VII. du précedent Chapitre vers la fin, & le peu d'erreur qui pourroit s'y trouver, n'eſt preſque d'aucune conſéquence pour notre préſent ſujet. On voit outre cela, que $\varrho$ étant fort petit, on peut ſuppoſer cette Analogie

$$\varrho : m - \sigma :: b : n;$$

puiſque cette Analogie ſeroit exactement vraie, ſi les quantités $\varrho$ & $m - \sigma$ étoient réellement & infiniment petites : de cette Analogie on tire

$$\sigma = m - \frac{n\varrho}{b} = m - \frac{mn\zeta}{b\delta};$$

ſubſtituant ces valeurs expoſées pour les quantités $\varrho$ & $\sigma$, & faiſant le Sinus total $b = 1$, on obtient cette Equation,

$$M = \zeta + \delta - 2mn\zeta + \frac{2m^2n^2\zeta\zeta}{\delta} - \frac{2m^2n^4\zeta^3}{\delta\delta}.$$

De cette maniere il paroit que les Marées décroiſſent depuis les Syzygies juſqu'aux Quadratures, & qu'elles croiſſent avec la même loi depuis les Quadratures juſqu'aux Syzygies. Ceux qui voudront eſſayer la juſte Equation du §. III. & cette Equation approchante, ſur un même exemple, verront qu'elles ne different gueres.

## VI.

Il nous ſera facile à préſent de calculer & de donner une Table pour les hauteurs des Marées, telle que nous en avons donné une à la fin du Chap. VI. pour les heures des Marées, & pour laquelle nous tâcherons

rons dans le Chapitre ſuivant de trouver les corrections néceſſaites aux différentes circonſtances, tout comme nous avons fait à l'égard de ladite Table du VI. Chap. Nous ſuppoſerons encore le rapport moyen de $\delta$ à $\zeta$ être comme 5 à 2, tant que nous n'avons pas des Obſervations qui puiſſent déterminer ce rapport au juſte. Nous donnerons mille parties à la hauteur de la plus grande Marée.

La *premiere* Colonne marquera dans cette Table de dix en dix dégrés les Arcs compris entre les deux Luminaires, environ le milieu des Juſans (§. III.) c'eſt-à-dire, environ trois heures après le paſſage de la Lune par le Méridien; la *ſeconde* Colonne donnera les hauteurs cherchées des Marées, pour les ſuſdites hypotheſes; & la *troiſiéme* en marquera les différences.

## TABLE FONDAMENTALE

*pour trouver les Hauteurs des Marées, ou les Deſcentes verticales des eaux pendant les Juſans.*

| *Diſtance entre les Luminaires en Dégrés.* | *HAUTEUR DES MARE'ES.* | *DIFFERENCE DES HAUTEURS.* |
|---|---|---|
| 0 Dégrés. | 1000 Parties. | |
| 10 | 987 | − 13 |
| 20 | 949 | − 38 |
| 30 | 887 | − 62 |
| 40 | 806 | − 81 |
| 50 | 715 | − 91 |
| 60 | 610 | − 105 |
| 70 | 518 | − 92 |
| 80 | 453 | − 65 |
| 90 | 429 | − 24 |
| 100 | 453 | + 24 |
| 110 | 518 | + 65 |
| 120 | 610 | + 92 |
| 130 | 715 | + 105 |
| 140 | 806 | + 91 |
| 150 | 887 | + 81 |
| 160 | 949 | + 62 |
| 170 | 987 | + 38 |
| 180 | 1000 | + 13 |

## VII.

Si on avoit voulu conſtruire cette Table conformément à l'Equation finale du §. III. qui eſt la vraie Equation, on auroit pu profiter de la Table du VI. Chap. dans laquelle les nombres de la ſeconde Colonne diviſés par 4, donnent les dégrés de l'Arc, dont le Sinus eſt appellé $\rho$; après quoi on connoît auſſi l'Arc dont le Sinus eſt appellé $\sigma$. Connoiſſant ainſi par les Tables les quantités $\rho$ & $\sigma$, on trouve ſans beaucoup de peine la valeur de $M$ du §. III.

## VIII.

On voit auſſi, que ſi la diſtance entre les deux Luminaires eſt entre deux nombres de la premiere Colonne, on peut ſans aucune erreur ſenſible employer le principe général des Interpolations, de ſorte que cette Table peut ſuffire pour tous les cas.

## IX.

On remarquera au reſte, qu'il eſt ici de grande importance d'avoir ſubſtitué la vraie valeur pour $\frac{\delta}{\zeta}$, & qu'un aſſez petit changement dans cette valeur, a une grande influence ſur le rapport des Marées. On ne doit donc encore conſidérer cette Table, que comme un exemple de nos Formules générales: le Chapitre ſuivant fera voir les précautions que l'on doit prendre là-deſſus.

## X.

Nous voyons tant par les Formules que nous avons données pour les hauteurs des Marées, que par la précedente Table, qu'elle eſt *in abſtracto* la nature des variations des Marées. On peut faire là-deſſus les Remarques qui ſuivent.

1°. Que les changemens des Marées ſont fort petits, tant aux Syzygies qu'aux Quadratures, & ils ſeroient infiniment plus petits que les autres, ſi l'intervalle d'une Marée à l'autre étoit auſſi infiniment petit.

2°. Que les plus grands changemens ne ſe font pas préciſément au milieu, mais plus près des Quadratures que des Syzygies: c'eſt-à-dire, que la plus grande diminution de Marée ſe fait dans nos ſuppoſitions, lorſque la Lune eſt environ à 60 dégrés (80 avec la correction de 20 dégrés expliquée au Chap. VII.) depuis les Syzygies; le plus grand décroiſſement ſe fait donc de la neuviéme à la dixiéme Marée (de

la douziéme à la treiziéme avec la correction) : de même le plus grand accroiſſement ſe fait à environ 30 dégrés depuis les Quadratures (50 dégrés avec la correction) qui répond au changement de la quatriéme à la cinquiéme Marée (de la ſeptiéme à la huitiéme avec la correction) depuis les Quadratures. Je parle dans cette Remarque de toutes les Marées qui ſe font, tant celles du matin, que celles du ſoir, pour rendre leurs intervalles plus petits : on ſe ſouviendra cependant de ce que j'ai dit expreſſément, que je fais abſtraction par-tout ailleurs des Marées, qui répondent au paſſage inférieur de la Lune par le Méridien, lorſqu'il s'agit de comparer les Marées entre elles : car ces deux ſortes de Marées ont quelques inégalités entre elles, que je n'ai pas encore conſidérées.

3°. Que les petits changemens dans les Syzygies, & ceux des Quadratures, comparés entre eux, ſont inégaux ; puiſque ceux-ci ſont environ doubles de ceux-là. Dans l'application de cette Remarque il faudra ajoûter, de part & d'autre, trois Marées, ou environ un jour & demi de tems.

4°. Que le plus grand changement de deux Marées qui ſe ſuivent, entre celles qui répondent à la Lune de deſſus (dont l'intervalle répond à environ 13 degrés de variation dans la diſtance de la Lune au Soleil) fait près du quart de la variation totale de la plus grande à la plus petite Marée.

## XI.

Je ne doute pas que les Obſervations ne confirment en gros les Remarques que je viens de faire, & toutes les Regles précedentes. On ne ſçauroit plus douter de la Théorie que nous avons adoptée & établie; & la Théorie poſée, les Calculs en ſont ſûrs. Mais comme nous ne ſommes pas encore ſûrs des hypotheſes ſecondes, qu'on ne ſçauroit éviter, telles que ſont le juſte rapport entre la force lunaire & ſolaire, que nous avons ſuppoſé comme 5 à 2 ; le retardement des effets de la Lune ſur ſa poſition, que nous avons ſuppoſé d'un jour & demi, ou de trois Marées, ou de 20 dégrés, que la Lune peut parcourir en longitude pendant ce retardement, &c. nous nous croyons en droit de demander quelque indulgence pour le reſultat deſdites Remarques & Regles. Cependant comme je n'ai fait aucune ſuppoſition ſans un mur examen fondé ſur les plus juſtes Obſervations choiſies entre toutes celles qui peuvent les déterminer, j'oſerois me flatter d'un aſſez bon ſuccès, ſi Meſſieurs les ACADEMICIENS vouloient ſe donner la peine de confronter nos Tables, nos Regles & nos Théoremes nouveaux avec les Obſervations, dont ils ont un grand Tréſor: mais ce ſuccès, dont je me flatte par avance, ſe manifeſtera davantage, ſi ils veulent encore faire attention aux

correc-

corrections que je vais donner dans le Chapitre ſuivant, à l'égard de diverſes circonſtances variables, & que nous avons ſuppoſées dans ce Chapitre comme conſtamment les mêmes.

---

## CHAPITRE IX.

### *Sur les Hauteurs des Marées corrigées, ſuivant differentes circonſtances variables.*

### I.

NOus ſuivrons dans cet examen la même route que nous avons tenuë dans le VII. Chap. à l'égard du tems des Marées. Pour commencer donc par l'effet des Vents & des Courants, on voit bien qu'ils peuvent augmenter & diminuer les Marées, & que ces variations ne ſont pas d'une nature à pouvoir être aucunement déterminées. On pourra pourtant remarquer que lorſque ces cauſes conſervent pendant un tems un peu conſidérable leur force & leur direction, leur effet conſiſtera plûtôt à hauſſer ou baiſſer la Mer elle-même, qu'à augmenter ou diminuer les Marées.

### II.

Les circonſtances attachées à chaque Port ou autre endroit en particulier, telles que ſont ſa ſituation, la profondeur des eaux, la pente des fonds, la communication avec l'Océan, &c., ſont extrêmement varier les Marées. Ce ſont ces cauſes qui font que les grandes Marées ne ſont que d'un petit nombre de pieds dans de certains endroits de 8 ou 10 pieds dans d'autres, & de 50 à 60 pieds, & au-delà encore dans d'autres endroits. Ce qu'il y a de ſingulier, eſt que dans la Mer libre les grandes Marées ne ſont que d'environ 8 pieds, pendant qu'elle vont au-delà de 50 pieds dans pluſieurs Ports & autres endroits, dont la communication avec la Mer ouverte, eſt entrecoupée & empêchée de tous côtés; & qui par conſéquent devroient, ſelon les premieres apparences, avoir les Marées moins grandes. Nous donnerons dans un autre Chapitre la raiſon hydroſtatique de ce Phénomene, pour ne point nous écarter de notre ſujet préſent. Cela fait d'abord voir, qu'on ne ſçauroit rien déterminer ſur les grandeurs abſoluës des Marées, & que tout ce que la Théorie pourroit encore faire, ſeroit d'en marquer le rapport: mais l'expérience nous enſeigne encore, que ce rapport même n'eſt pas conſtant dans les différens endroits, quoi qu'il ſoit renfermé dans des bornes plus étroites.

La

La grande Marée ſera double de la petite Marée dans un endroit; & elle pourra être triple dans un autre: c'eſt que les cauſes qui font varier les hauteurs abſoluës des Marées à l'égard de différens endroits, ne gardent pas une proportion tout-à-fait conſtante. Mais les Marées moyennes entre la plus grande & la plus petite pendant une même revolution de la Lune, peuvent être cenſées obſerver les regles que nous leur avons preſcrites dans le Chapitre précedent. Il y a même apparence, que les changemens qui dépendent de la différente ſituation des Luminaires obſerveront à-peu-près les Loix que nous avons démontrées *in abſtracto*. Ces refléxions m'ont déterminé à conſidérer la plus grande & la plus petite Marée, non telles qu'elles devroient être dans la Théorie pure, mais telles qu'on les obſerve, lorſque les Luminaires ſe trouvent à peu près dans l'Equateur, & dans leurs diſtances moyennes à la Terre, ſans qu'aucune cauſe accidentelle les trouble. Nous avons démontré au III. §. du Chap. VIII. que la hauteur de la grande Marée doit être exprimée par $\delta + \epsilon$, & la hauteur de la petite Marée par $\delta - \epsilon$: mais ſi l'on ſuppoſe la hauteur moyenne réelle de la grande Marée $A$ & de la petite Marée $B$, il faudra ſuivant cette correction faire

$$\delta + \epsilon = A, \text{ \& } \delta - \epsilon = B:$$

c'eſt-à dire, $\delta = \frac{A+B}{2}$, & $\epsilon = \frac{A-B}{2}$;

& ces valeurs doivent être ſubſtituées dans les Equations & Formules du Chapitre précedent. En ſuppoſant $\frac{\delta}{\epsilon} = \frac{5}{2}$ comme nous avons fait, on obtient $\frac{A}{B} = \frac{7}{3}$, & ſi cette raiſon étoit confirmée par les Obſervations, il n'y auroit aucun changement à faire. On pourroit ſe ſervir de la Table, telle qu'elle eſt, en donnant toujours 1000 parties à la hauteur de la grande Marée. Mais ſi $\frac{A}{B}$ avoit réellement une autre valeur conſidérablement différente de celle que nous venons de lui aſſigner, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons d'indiquer.

L'on voit auſſi après ces conſidérations, qu'on ne doit pas s'attendre à pouvoir déterminer avec la derniere préciſion les hauteurs des Marées. Nous pourrons donc ſans ſcrupule, pour rendre nos Propoſitions plus nettes & plus ſenſibles, nous ſervir de l'équation du §. IV. Chap VIII. qui auſſi-bien approche beaucoup de la vraie équation de l'Article qui précéde l'autre. Nous ſuppoſerons donc la hauteur des Marées toujours exprimée par $\delta + \epsilon - 2\,m\,m\,\epsilon$, & employant la correction indiquée, nous aurons à préſent

$$M = A - m\,m\,A + m\,m\,B, \text{ ou plus ſimplement,}$$
$$M = n\,n\,A + m\,m\,B:$$

C'eſt

C'eſt donc de cette derniere équation, que nous nous ſervirons dans la ſuite de cette Diſſertation.

## III.

Cette correction pourra en même tems remédier à un autre inconvenient, qui provient de l'inertie & de la Maſſe des eaux. Nous avons déja dit ailleurs que les Marées ſont une eſpéce d'oſcillations qui tâchent naturellement à ſe conſerver telles qu'elles ſont : on ſent bien que cette raiſon doit empêcher les grandes Marées d'atteindre toute leur hauteur, & les petites de diminuer autant qu'elles devroient faire naturellement : qu'elle ne doit pas changer ſenſiblement la Marée moyenne entre la plus grande & la plus petite, & qu'elle change les autres d'autant plus qu'elles ſont plus éloignées de cette Marée moyenne. Et on voit que notre correction ſatisfait à toutes ces trois conditions.

## IV.

Après ladite correction qui regarde immédiatement les hauteurs des Marées, il faut encore employer celle qui regarde les tems, que nous déterminons par les Phaſes de la Lune, ou par les diſtances, qui ſont entre les Luminaires. Nous avons expliqué au long aux §. §. IV. & V. du Chap. VII. que les Phaſes de la Lune qui répondent aux Marées en queſtion, ne doivent pas être priſes telles qu'elles ſont, mais telles qu'elles ſeroient environ un jour & demi après, c'eſt-à-dire, que les diſtances entre les Luminaires doivent être augmentées d'environ 20 dégrés, & moyennant cette correction, la Théorie ne ſçauroit manquer de ſatisfaire au juſte aux Obſervations.

## V.

Nous n'avons conſidéré juſqu'ici les Luminaires, que dans leurs diſtances moyennes à la Terre, & c'eſt pour ce cas que nous avons appellé la hauteur de la plus grande Marée $A$, & celle de la plus petite Marée $B$. Pour déterminer donc ce que les différentes diſtances peuvent faire ſur les hauteurs des Marées, il faudra ſe rappeller tout l'Art. VII. du Chap. VII. Nous y avons démontré, que la force lunaire doit être ſuppoſée généralement $= \frac{l^3}{L^3} \times \delta$, & la Force ſolaire $= \frac{s^3}{S^3} \times \sigma$. Or comme la ſomme de ces Forces exprime toujours la hauteur de la grande Marée, & que la différence des mêmes Forces exprime la hauteur de la petite Marée, il faudra faire ces deux Analogies :

$$\delta + \epsilon : \frac{l^3}{L^3} \times \delta + \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon :: A : \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta + \epsilon)} \times A$$

$$\delta - \epsilon : \frac{l^3}{L^3} \times \delta - \frac{s^3}{S^3} \times \epsilon :: B : \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta - \epsilon)} \epsilon \times B.$$

La premiere de ces quatriémes proportionnelles marquera donc la hauteur corrigée de la grande Marée, & la ſeconde, la hauteur corrigée de la petite Marée. Par conſéquent l'équation finale du II. §. ſera celle-ci après ſa correction:

$$M = \frac{l^3 S^3 \delta + L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta + \epsilon)} \times n\,n\,A + \frac{l^3 S^3 \delta - L^3 s^3 \epsilon}{L^3 S^3 (\delta - \epsilon)} \times m\,m\,B.$$

Je m'aſſure que cette équation donnera toujours les hauteurs des Marées avec toute la juſteſſe qu'on peut attendre ſur cette matiere, pour les ſuppoſitions auſquelles notre Théorie eſt encore aſſujettie. Mais comme il eſt preſque impoſſible qu'il n'y ait abſolument aucune cauſe étrangére, qui trouble les Marées, nous ne devons pas être trop ſcrupuleux ſur ces corrections, qui ſont elles-mêmes médiocres. Ainſi pour rendre nos regles plus ſenſibles & plus faciles, nous ne ferons point d'attention aux changemens dans les diſtances du Soleil à la Terre; ces changemens ſont beaucoup plus petits que dans la Lune, & ils ſont en même tems de beaucoup moindre conſéquence: Nous ſuppoſons donc $S$ conſtamment $= s$. Quant à la Lune, nous la conſidérerons, tout comme nous avons fait au VII. §. du Chap. VII. dans ſon Perigée, dans ſa diſtance moyenne & dans ſon Apogée, & nous retiendrons les ſuppoſitions que nous avons faites audit Article, pour les diſtances de la Lune, & pour les conſéquences que nous en avons tirées. Nous ferons donc pour le premier cas $\delta = 3\epsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 0{,}8439$: pour le ſecond cas $\delta = \frac{5}{2}\epsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 1{,}000$, & enfin pour le troiſiéme $\delta = 2\epsilon$, & $\frac{L^3}{l^3} = 1{,}174$. De cette façon nous aurons les trois équations qui ſuivent, exprimées en nombres décimaux.

1°. Pour le Périgée de la Lune,

$$M = 1{,}138\ n\,n\,A + 1{,}277\ m\,m\,B.$$

2°. Pour les diſtances moyennes de la Lune,

$$M = n\,n\,A + m\,m\,B.$$

3°. Pour l'Apogée de la Lune

$$M = 0{,}901\ n\,n\,A + 0{,}703\ m\,m\,B.$$

On remarquera dans ces équations, que $A$ marque la hauteur de la grande Marée, & $B$ la hauteur de la petite Marée dans les diſtances moyennes des Luminaires à la Terre, ces Luminaires étant ſuppoſés

l'un

l'un & l'autre ſe trouver dans l'Equateur : que *m* marque le Sinus de l'Arc compris entre les Luminaires diminué de 20 dégrés, & *n* le Coſinus de cet Arc.

On remarquera après cela, que les grandes Marées ſont compriſes en vertu de la premiere & de la troiſiéme équation dans les termes de 1138 à 901, & les Marées bâtardes dans les termes de 1277 à 703; d'où l'on voit que la différence entre les grandes Marées n'eſt pas à beaucoup près ſi grande, qu'elle l'eſt entre les Marées bâtardes, ſi on compare cette différence à la hauteur de la Marée qui lui répond. Cela ſe confirme par l'expérience, & c'eſt une nouvelle ſource des irrégularités des petites Marées comparées entre elles, dont nous avons déja parlé ailleurs, & que M. Caſſini n'a pas manqué d'obſerver.

## VI.

J'ajoûterai ci-deſſous une Table fondée & calculée ſur les trois dites équations, mais qui ſe rapporte aux Quantités *A* & *B*, qu'il faut donc connoître par expérience pour le Port ou autre endroit, dont il eſt queſtion. On pourra déterminer ces Quantités *A* & *B*, ſur un grand nombre d'Obſervations, tant des hautes que des petites Marées, en prenant des unes & des autres le milieu Arithmétique.

## VII.

On remarquera, quant à la conſtruction de la Table que nous allons donner, que les Arcs compris entre les Luminaires, ont été augmentés de 20 dégrés à l'égard de la Table précédente, dans laquelle on n'a pas eu égard aux cauſes ſecondes & aux corrections à faire. Ces 20 dégrés ſont déterminés par le retard d'un jour & demi des Marées, par rapport aux Phaſes de la Lune, expliqué ci-deſſus : il eſt vrai que cet intervalle d'un jour & demi ne demande pas tout-à-fait 20 dégrés de correction : mais comme il faudroit eſtimer les diſtances entre les Luminaires, telles qu'elles ſont, non au moment de la haute-Mer (qui doit être ſuppoſée ſe faire au moment du paſſage de la Lune par le Méridién) mais au milieu du Juſan, en vertu du III. §. du Chap. VIII. & que l'intervalle depuis la haute Mer juſqu'au milieu du Juſan, demande encore une correction d'environ un dégré & demi, la ſomme de ces corrections peut être ſuppoſée de 20 dégrés, en eſtimant les diſtances des Luminaires au moment du paſſage de la Lune par le Méridien, que les Ephémérides indiquent.

## VIII.

Voici donc à préſent la Table. La *premiere* Colonne y marque les diſtances entre la Lune & le Soleil dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien: les *trois* autres Colonnes marquent les hauteurs des Marées pour le Périgée de la Lune, pour les diſtances moyennes de la Lune à la Terre, & pour l'Apogée de la Lune.

## TABLE PLUS GENERALE ET CORRIGE'E
*pour trouver les Hauteurs des Marées.*

| *Distances entre les Luminaires.* | *HAUTEURS des Marées au Périgée de la Lune.* | *Hauteurs des Marées aux Distanees moyennes de la Lune à la Terre.* | *HAUTEURS des Marées à l'Apogée de la Lune.* |
|---|---|---|---|
| 0 Deg. | 0,995A+0,149B | 0,883A+0,117B | 0,795A+0,082B |
| 10 | 1,104A+0,038B | 0,970A+0,030B | 0,874A+0,021B |
| 20 | 1,138A+0,000B | 1,000A+0,000B | 0,901A+0,000B |
| 30 | 1,104A+0,038B | 0,970A+0,030B | 0,874A+0,021B |
| 40 | 0,995A+0,149B | 0,883A+0,117B | 0,795A+0,082B |
| 50 | 0,853A+0,319B | 0,750A+0,250B | 0,676A+0,176B |
| 60 | 0,668A+0,527B | 0,587A+0,413B | 0,529A+0,290B |
| 70 | 0,460A+0,749B | 0,413A+0,587B | 0,372A+0,412B |
| 80 | 0,284A+0,958B | 0,250A+0,750B | 0,225A+0,527B |
| 90 | 0,133A+1,127B | 0,117A+0,883B | 0,105A+0,621B |
| 100 | 0,034A+1,238B | 0,030A+0,970B | 0,027A+0,682B |
| 110 | 0,000A+1,277B | 0,000A+1,000B | 0,000A+0,703B |
| 120 | 0,034A+1,238B | 0,030A+0,970B | 0,027A+0,682B |
| 130 | 0,133A+1,127B | 0,117A+0,883B | 0,105A+0,621B |
| 140 | 0,284A+0,958B | 9,250A+0,750B | 0,225A+0,527B |
| 150 | 0,460A+0,749B | 0,413A+0,587B | 0,372A+0,412B |
| 160 | 0,668A+0,527B | 0,587A+0,413B | 0,529A+0,290B |
| 170 | 0,853A+0,319B | 0,750A+0,250B | 0,676A+0,176B |
| 180 | 0,995A+0,149B | 0,883A+0,117B | 0,795A+0,082B |

IX.

Il nous reſte à conſidérer les déclinaiſons des Luminaires & les latitudes des lieux ſur la Terre, pour leſquels on cherche la nature des Marées. Nous avons ſuppoſé les unes & les autres nulles dans ce Chapitre. Mais cette matiere eſt ſi riche & ſi remarquable par pluſieurs propriétés très ſingulieres, & elle demande d'ailleurs tant d'attention, que j'ai cru devoir la traiter à part. Ce ſera donc le ſujet du Chapitre ſuivant.

---

## CHAPITRE X.

*Dans lequel on examine toutes les propriétés des Marées, qui dépendent des différentes Déclinaiſons des Luminaires & des différentes latitudes des Lieux.*

I.

LEs déclinaiſons des Luminaires à l'égard de l'Equateur, & les diſtances des lieux ſur la Terre du même Equateur, ont tant de rapport entre elles, qu'on ne ſçauroit bien traiter cette matiere, qui eſt une des plus importantes de notre ſujet, ſans les conſidérer les unes & les autres en même tems. Mais pour ne pas rendre la queſtion trop embarraſſante dès le commencement, nous ne ferons d'abord attention qu'à la Lune, tout comme ſi les Marées étoient uniquement produites par l'action lunaire. Nous conſidérerons auſſi la choſe d'abord ſuivant la pure Théorie, & nous verrons enſuite quelles corrections on y pourra employer.

II.

Reſſouvenons-nous de tout ce que nous avons dit dans quelques-uns des premiers Chapitres, & ſur-tout dans le cinquiéme, ſur le changement de la figure de la Terre produit par l'action de l'un des Luminaires. Nous avons conſidéré la Terre d'abord comme parfaitement ſphérique : nous avons démontré enſuite que cette figure eſt changée par l'action de l'un des Luminaires en ellipſoïde, dont l'Axe prolongé paſſe par le centre du Luminaire agiſſant ; & enfin que la rotation diurne de la Terre fait que chaque Point dans la ſurface de la Terre, doit tantôt ſe baiſſer, tantôt s'élever, afin que ſa figure ellipſoïde ſoit conſervée ; mais nous n'avons calculé ces baiſſemens & hauſſemens, que pour les

Points

Points pris dans l'Equateur même, dans le plan duquel nous avons ſuppoſé en même tems ſe trouver l'Axe de l'Ellipſoïde. C'eſt pour ces cas, que nous avons démontré (§. *V. Chap. V.*) *que les baiſſemens des eaux ſont proportionnels aux Quarrés des Sinus des Angles horaires, qui commencent du moment de la haute Mer*; & l'on remarquera que ces Angles horaires ſont proportionnels alors aux Arcs compris entre le Pole de l'Ellipſoïde & le Point en queſtion.

## III.

Voici à préſent comment il faut s'y prendre, pour trouver les mêmes baiſſemens & hauſſemens, qui ſe font pendant le mouvement diurne de la Terre dans un point quelconque, & la Lune ayant auſſi une déclinaiſon quelconque. On voit qu'on aura toujours le même Ellipſoïde, quelle que ſoit la déclinaiſon de la Lune; mais qu'il ſera obliquement poſé à l'égard de l'Equateur: on voit auſſi qu'il faut s'imaginer dans ce Sphéroïde allongé une Section parellele à l'Equateur, qui paſſe par le point en queſtion: cette Section ne ſera pas un cercle parfait, & ſa circonférence n'aura pas tous ſes points également éloignés du centre de l'Ellipſoïde: c'eſt les différences de ſes diſtances, qui forment la nature des Marées. Il s'agit donc de déterminer ces différences.

## IV.

Pour cet effet il faudra commencer par chercher les diſtances de chaque point du Parallele au *Pole de l'Ellipſoïde* (j'appelle ainſi l'extrémité de l'Ellipſoïde, qui prolongé, paſſe par le centre de la Lune) & ces diſtances étant connues, il eſt facile de trouver la diſtance du même point au centre de l'Ellipſoïde, & les différences de ces diſtances. Car ſi le Coſinus de la diſtance d'un point pris dans le Parallele au Pole de l'Ellipſoïde étoit $\varrho$, le Sinus total $= 1$, & ſi le demi Axe de l'Ellipſoïde eſt nommé $b + \delta$, & le plus petit demi-diametre $b$, la diſtance du point pris par le Parallele juſqu'au centre de l'Ellipſoïde ſera généralement $= b + \varrho\varrho\delta$; nous avons démontré cette Propoſition au §. V. Chap. V.

## V.

Nous montrerons donc d'abord, comment il faudra déterminer la diſtance d'un Point quelconque, pris dans un Parallele donné au Pole de l'Ellipſoïde. La voye de la Trigonometrie ſphérique ordinaire nous ſeroit aſſez inutile ici, puiſqu'il nous faut des expreſſions analytiques, applicables à tous les cas, & traitables aux Calculs. Si l'on vouloit tirer de telles expreſſions des regles de ladite Trigonometrie, les formules qui en

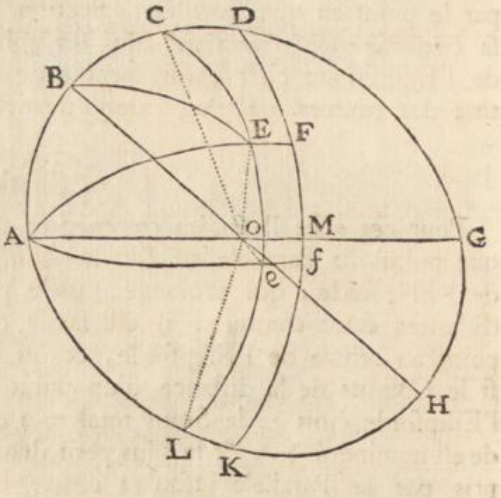
en proviendroient ſeroient beaucoup trop prolixes. M. Mayers nous a donné là-deſſus un beau Mémoire inſéré dans les Commentaires de l'Académie Impériale des Sciences de Petersbourg Tom. 2. p. 12. Il y a dans ce Mémoire au XVIII. §. un Théoreme général, par le moyen duquel on pourra toujours de trois choſes données dans un Triangle ſphérique, trouver le reſte par des expreſſions analytiques extrêmement ſimples. Voici le cas que notre ſujet demande.

Soit dans un Triangle ſpherique, le Sinus total = 1; le Sinus d'un des côtés = $S$; le Coſinus du même côté = $C$; le Sinus d'un autre côté = $s$; le Coſinus de cet autre côté = $c$; le Coſinus de l'Angle compris entre les deux côtés donnés = $y$; le Coſinus du troiſiéme côté oppoſé à l'Angle donné, que j'appellerai $q$, ſera exprimé par cette équation

$$q = Ssy + Cc.$$

## VI.

Soit à preſent $ADGK$ le Méridien de la Terre, qui paſſe par le centre de la Lune, & que la Lune réponde au point $B$, qui deviendra ainſi le Pole de l'Ellipſoïde, & la droite $BH$, qui paſſe par le centre $O$, ſon Axe. Soit l'Axe de rotation de la Terre $AG$, les Poles $A$ & $G$; $DFK$ l'Equateur; $CEL$ un Parallele, dans lequel nous prendrons un point quelconque $E$, & qu'on tire enfin par ce point $E$, & par le Pole $A$ l'Arc $AEF$.




De cette maniere, l'Arc $AB$ ſera le complément de la déclinaiſon de la Lune; l'Arc $AE$ ſera le complément de la latitude du point $E$, & l'Arc $DF$ ſera l'Arc horaire depuis le paſſage du point $E$ par le Méridien, qui paſſe par la Lune; de ſorte qu'on connoît dans le Triangle $BAE$, les Côtés $BA$ & $EA$; avec l'Angle compris $BAE$, & de là on tirera par le moyen du Théoreme expoſé au précedent Article, l'Arc $BE$, qui eſt la diſtance du Point $E$ au Pole de l'Ellipſoïde.

Nous nommerons donc encore le Sinus total 1, le Sinus du côté $AB = S$; ſon Coſinus = $C$; le Sinus du côté $AE = s$, ſon Coſinus = $c$;

le

le Cosinus de l'Arc $DF$, qui est la mesure de l'Angle $BAE$, $=y$; le Cosinus de l'Arc $BE=q$: nous aurons

$$q = Ssy + Cc.$$

## VII.

Ayant ainsi trouvé l'Arc $BE$, il est facile d'exprimer la droite $EO$, qui est la distance du point $E$ jusqu'au centre de l'Ellipsoïde, par le moyen du 4^e. Art. qui nous marque que cette distance est toujours égale au plus petit demi-diametre, augmenté par le produit du Quarré du Cosinus de cet Arc trouvé, & de l'excès du demi-Axe $BO$ sur le plus petit demi-diametre: c'est-à-dire, si nous retenons les dénominations, dont nous nous sommes servis depuis le IV. §. jusqu'ici, que nous aurons $EO = b + (Ssy + Cc)^2 \delta$.

C'est cette équation de laquelle nous devons tirer toutes les variations des Marées, que la déclinaison de la Lune & la latitude du lieu peuvent produire.

## VIII.

Nous voyons d'abord, que n'y ayant que la lettre $y$ de variable, la quantité $EO$ est toujours d'autant plus grande, que l'on prend $y$ plus grande. Pour avoir donc la plus grande $EO$, il faut faire $y = 1$. La haute Mer répond donc encore au passage de la Lune par le Méridien; & on aura alors la droite $CO = b + (Ss + Cc)^2 \delta$.

## IX.

Mais pour trouver la plus petite $EO$ ou $eO$, il ne faut pas faire $y=0$; mais $y = -\frac{Cc}{Ss}$ & alors la hauteur $eO$ est simplement $= b$. Nous ferons là-dessus les remarques suivantes:

I. La différence entre la plus grande $CO$ & la plus petite $eO$, faisant la hauteur de la Marée, entant quelle est produite par la seule action de la Lune, il s'ensuit que cette hauteur est $= (Ss + Cc)^2 \delta$. Cette formule nous apprend bien de nouvelles proprietés sur les Marées, & nous sert en même tems à décider plusieurs questions, sur lesquelles les Auteurs ne sont pas encore convenus.

($\alpha$) Nous voyons d'abord, que la plus grande Marée se fait, lorsque la déclinaison de la Lune est égale à la latitude du lieu. Cette regle suppose toute la Terre inondée; & c'est à quoi il faut avoir égard, lorsqu'il est question de la hauteur d'un lieu. Ce n'est pas par exemple immédiatement aux Ports de Picardie, de Flandre, &c. que les eaux sont

élévées par la Lune: la cauſe principale des Marées dans tous ces endroits doit être attribuée plûtôt à l'élevation & deſcente des eaux, qui ſe font dans la Mer du Nord, à environ 35 degrés de Latitude Septentrionale, autant que j'en ai pû juger par l'inſpection des Cartes Marines. J'avouë pourtant que ce n'eſt ici qu'une eſtime fort incertaine; il eſt impoſſible de rien dire de poſitif là-deſſus.

On remarquera auſſi que je parle ici de la hauteur de la Marée, qui répond au paſſage ſupérieur de la Lune par le Méridien: j'appellerai cette Claſſe de Marées, *Marées de deſſus*, & la Claſſe de celles qui répondent au paſſage inférieur de la Lune par le Méridien, *Marées de deſſous*.

(ζ) Si la déclinaiſon de la Lune eſt nulle, nous aurons $S=1$ & $C=0$, & la hauteur de la Marée de deſſus ſera $=ss\delta$. Nous voyons de-là, que ſi la Terre étoit toute inondée, & que les Luminaires reſtaſſent dans le plan de l'Equateur, les hauteurs des Marées pour les endroits de différentes latitudes ſeroient en raiſon quarrée des Sinus des diſtances au Pole.

(γ) Si pour nos Païs Septentrionaux, la déclinaiſon de la Lune devient Méridionale, les Marées de deſſus deviennent encore plus petites à cet égard, & cette diminution ſeroit très-conſidérable, s'il n'y avoit pas une cauſe hydroſtatique que je marquerai ci-deſſous, qui lui eſt un obſtacle; ſans la conſidération de cette cauſe, on pourroit croire facilement que notre Théorie ne répond pas aſſez aux Obſervations.

(δ) Nous éclaircirons cette matiere par un exemple, en ſuppoſant la Latitude du lieu de 35 degrés. En ce cas la hauteur des Marées de deſſus, tout le reſte étant égal, devoit être,

| | |
|---|---|
| Dans la plus grande Déclinaiſon Septentrionale de la Lune, . . . . . | $=0{,}963\,\delta$. |
| Lorſque la Déclinaiſon de la Lune eſt nulle . | $=0{,}671\,\delta$. |
| Dans la plus grande Déclinaiſon Méridionale de la Lune . . . . . | $=0{,}265\,\delta$. |

La différence de ces Marées eſt énorme, & ſurpaſſe de beaucoup toutes les inégalités qu'on peut ſoupçonner avoir quelque rapport à la Déclinaiſon de la Lune. Nous en dirons bientôt la raiſon.

(ε) Si on ſuppoſoit la Latitude telle que $Ss$ fût $= Cc$, ou $Ss = \sqrt{1-SS}\times\sqrt{1-ss}$, ou enfin $s=\sqrt{1-SS}=C$, le point $E$ qui répondroit à la plus petite $EO$, ſeroit préciſément au point $L$. En ce cas, il n'y auroit qu'une Marée de deſſus dans l'eſpace d'un jour lunaire, & la Marée de deſſous s'évanouiroit entiérement. Cela arriveroit donc, par exemple, ſi la Lune ayant 20 degrés de Déclinaiſon Septentrionale, l'élevation du Pole étoit de 70 degrés: mais en même tems la Marée ſe-

roit

roit bien petite, puiſqu'elle ne monteroit qu'à environ la cinquiéme partie, qu'elle feroit ſous l'Equateur.

(*f*) Si $s$ eſt plus petit que $C$, la quantité du §. VII. $(Ss+Cc)^2\delta$, ne ſçauroit plus devenir égale o; c'eſt pourquoi la Mer décroitra alors continuellement depuis le paſſage ſupérieur de la Lune par le Méridien, juſqu'à ſon paſſage inférieur. Il n'y aura donc plus qu'une Marée par jour depuis le parallele, qui fait $s = C$, juſqu'au Pole; & pour ſçavoir la hauteur de ces Marées, il faut dans cette Formule, premierement ſuppoſer $y = 1$; & enſuite $y = -1$, & prendre la différence des Formules: la hauteur des Marées ſera donc dans ces cas $= (Ss+Cc)^2\delta - (-Ss+Cc)^2\delta$, ou bien $= 4SsCc\delta$. Elle ne ſçauroit donc être qu'extrêmement petite.

Nous aurions un grand nombre de refléxions à faire encore ſur cette matiere, s'il ne falloit pas ſe contenir dans de certaines bornes; & quoique tous ces Théoremes ne ſoient vrais que dans la Théorie, où l'on ſuppoſe les eaux être conſtamment dans leur état d'équilibre, & toute la Terre inondée (car avec ces ſuppoſitions, ces Théorêmes ſeroient exactement vrais) & que diverſes circonſtances peuvent leur donner quelquefois une toute autre face, ils ne laiſſent pas d'être très-utiles, pour expliquer en gros un grand nombre de Phénomenes obſervés ſur les Marées, & pour pénétrer à fond cette matiere.

II. Nous avons démontré qu'il n'y a des Marées de deſſous, que que tant que $s$ eſt plus grand que $C$, lorſque la Déclinaiſon de la Lune eſt Septentrionale (ſi cette Déclinaiſon eſt Méridionale, il n'y aura point alors de Marées de deſſus dans les Païs Septentrionaux.) Nous diſpoſerons donc $s$ plus grand que $C$, & nous chercherons là-deſſus la hauteur de la Marée de deſſous, de la même façon que nous l'avons trouvée pour celles de deſſus.

Nous avons vû que la hauteur $EO$ eſt la plus petite poſſible, lorſqu'on prend $y = -\frac{Cc}{Ss}$, & qu'alors elle devient $= b$; après cela les hauteurs $EO$ croîtront juſqu'au point $L$, qui fait $y = -1$. La différence de ces hauteurs fera donc la hauteur de la Marée de deſſous, qui ſera par conſéquent $= (-Ss+Cc)^2\delta$, pendant que celle de la Marée de deſſus étoit $= (Ss+Cc)^2\delta$. On pourra faire là-deſſus les remarques ſuivantes.

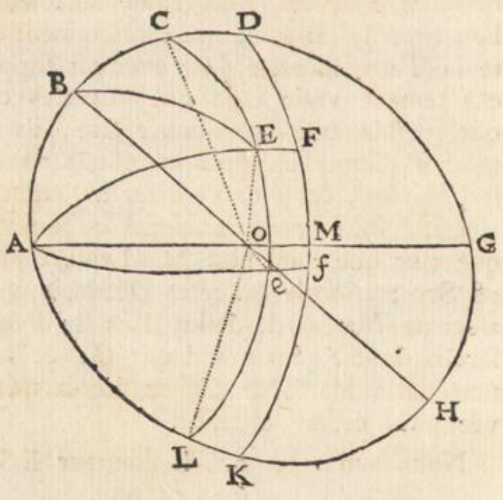
(*a*) Les Marées de deſſus ſont égales à celles de deſſous, lorſque la déclinaiſon de la Lune eſt nulle.

(*b*) Dans les Païs Septentrionaux, les Marées de deſſus ſont plus grandes que celles de deſſous, lorſque la déclinaiſon de la Lune eſt Septentrionale, & plus petites lorſque cette déclinaiſon eſt Méridionale, &

généralement les déclinaiſons de la Lune étant égales, mais de différens côtés les Marées de deſſus deviennent les mêmes qu'étoient celles de deſſous, & reciproquement.

(c) La différence des deux Marées d'un même jour lunaire eſt $= 4\, Cc\, Ss\, \delta$; ſi l'on applique ces Formules à des cas particuliers, on verra que les Marées de deſſus devroient différer conſidérablement de celles de deſſous, s'il n'y avoit pas une autre raiſon qui doit les rendre à peu près égales. Nous expoſerons cette raiſon ci-deſſous, après que nous aurons examiné tout ce que la Théorie dit ſur cette matiere *in abſtracto*.

III°. Nous voyons auſſi que les durées des deux Marées d'un même jour doivent être ſelon la pure Théorie fort différentes. Voici comme on peut déterminer ces durées. Si dans le Parallele $CL$ on ſuppoſe $e$ être le point, la diſtance duquel au centre de l'Ellipſoïde ſoit la plus petite & égale à $b$, & qu'on tire enſuite par ce point un Arc de Méridien $Aef$, l'Arc $Df$ ſera la meſure du tems depuis la haute Mer de deſſus juſqu'à la baſſe Mer ſuivante, & l'Arc $fK$ la meſure du tems, depuis cette baſſe Mer juſqu'à la haute Mer de deſſous. Or nous avons vû au IX. §. que le Coſinus de l'Arc $Df$ $(y)$ eſt $= -\frac{Ce}{Ss}$, ou bien ſi $DM$ eſt de 90 degrés, le Sinus de l'Arc $Mf$ vers le point $K = \frac{Ce}{Ss}$. Là-deſſus nous pourrons faire ces remarques.




(1) Dans les Païs Septentrionaux la déclinaiſon Septentrionale de la Lune rend les Juſans des Marées de deſſus plus longs, & les Flots des Marées de deſſous plus courts; & la déclinaiſon Méridionale fait le contraire avec les mêmes meſures; & lorſque la déclinaiſon eſt nulle, la durée du Juſan eſt égale à celle du Flot ſuivant.

(2) Si la déclinaiſon de la Lune eſt égale au Coſinus de la latitude du lieu, le Juſan durera 12 heures lunaires, & il n'y a point de Flot pour l'autre Marée, parce qu'il n'y a point du tout de Marée de deſſous.

(3) En général, la différence du tems, entre le Juſan de la Marée de deſſus, & le Flot de la Marée de deſſous, ſe détermine par le double

ble de l'Arc horaire $Mf$, & la différence des durées des deux Marées entieres, eſt exprimée par le quadruple de l'Arc $Mf$, dont le Sinus eſt $= \frac{Cc}{Ss}$. D'où l'on voit que plus la déclinaiſon de la Lune eſt grande, plus cette différence eſt grande auſſi.

Soit, par exemple, la latitude du lieu de 35. degrés, la déclinaiſon de la Lune de 25 degrés, l'Arc $Mf$ ſera de 15 degrés, qui répond à une heure lunaire; le Juſan durera donc 7 heures lunaires, & le Flot ſuivant 5 heures lunaires, & la différence ſera de deux heures, & toute la Marée de deſſus durera 4 heures plus que celle de deſſous.

## X.

Voilà donc comme la choſe ſeroit, ſi la Terre étoit toute inondée, & ſi les eaux étoient conſtamment dans une ſituation d'équilibre parfait. Nous avons expoſé toutes les variations des Marées qui ſont dues à l'action de la Lune, par rapport aux différentes déclinaiſons & latitudes, & par le moyen de nos Remarques on connoit les différences entre les Marées d'un même jour, entre celles qui ſe font dans différentes Saiſons, &c. tant à l'égard des hauteurs des Marées, que de leurs durées. Il eſt vrai que les deux hypotheſes indiquées ſont bien éloignées de la vérité, & que cela change extrêmement les meſures des variations; mais je ſuis pourtant ſûr qu'il doit y avoir des variations, & qu'elles ſeront de la nature que nous avons trouvée.

Quant aux irrégularités de la ſurface de la Terre, il n'eſt pas poſſible d'en deviner les effets, que fort ſuperficiellement, & comme chaque endroit demanderoit à cet égard des refléxions différentes, nous n'entreprendrons point cet examen. Nous ne conſidérerons donc que ce qui regarde le défaut de l'équilibre des eaux, & les mouvemens reciproques ou oſcillatoires qui en réſultent.

## XI.

La Lune change la ſurface de la Terre de Sphérique en Ellipſoïdique, & l'Axe de l'Ellipſoïde paſſe par la Lune. Cet Axe étant différent de l'Axe de Rotation, la figure de la Terre change continuellement, quoique toujours la même à l'égard de l'Axe de l'Ellipſoïde; & s'il n'y avoit pas quelques cauſes ſecondes, leſdits changemens conſiſteroient ſimplement en ce que chaque goute montât & deſcendît alternativement & directement vers le centre.

Il eſt remarquable encore, que ſi les eaux ſe mouvoient librement, ſans ſouffrir aucune reſiſtance, ces oſcillations augmenteroient continuellement

à l'infini, parce qu'à chaque demi-tour de la Terre, les eaux doivent être cenſées avoir reçû quelque nouvelle impulſion : c'eſt une propriété qu'on peut démontrer par pluſieurs exemples ſemblables, tirés de la Méchanique & de l'Hydrodynamique. Mais le grand nombre de reſiſtences qui s'oppoſent aux mouvemens des eaux, font que celles-ci prennent bien vîte leur plus grand degré d'oſcillations. Ces derniers degrés d'oſcillations peuvent cependant être cenſés proportionnels aux forces que la Lune exerce ſous différentes circonſtances, pourvû que les changemens qui ſe font dans la Lune, ſe faſſent aſſez lentement, pour donner aux eaux le tems qu'il leur faut pour changer leur mouvement. On peut donc dire à cet égard, que les changemens qui ſe font dans la Lune, par rapport à ſes declinaiſons doivent produire dans les Marées à peu-près les Phénomenes que nous avons indiqués, & à beaucoup plus forte raiſon les changemens de déclinaiſons dans l'autre Luminaire. Mais les changemens qui ſont dûs à la rotation de la Terre ſont trop vîtes, pour que les Marées puiſſent s'y accommoder, car elles tâchent de conſerver leur mouvement reciproque comme un Pendule ſimple. Cette ſeule raiſon fait que ſi les deux Marées d'un même jour doivent être ſuivant les différens effets de la Lune fort différentes, la plus grande augmente la plus petite, & celle-ci diminue l'autre, de ſorte qu'elles ſont beaucoup moins inégales qu'elles ne devroient être ſans cette raiſon. Tout ce qu'on peut donc dire à cet égard, eſt que nos Théorêmes ſont vrais, quant à leur nature, mais non pas ſuivant les meſures que nous en avons données. On peut pourtant, moyennant une autre refléxion, réparer en quelque façon cet inconvenient: c'eſt en ſuppoſant que la plus grande Marée donne à la plus petite, qui eſt ſa compagne, autant qu'elle en perd, & les ſuppoſer l'une & l'autre à peu-près égales, ce que l'expérience confirme, & de là on tirera la hauteur abſoluë de chacune, en prenant le milieu Arithmétique des deux Marées, qui conviennent à un même jour lunaire. En corrigeant de cette façon les précédentes Propoſitions, nous aurons les Théorêmes ſuivans, qui ne ſçauroient plus manquer d'être aſſez conformes aux Obſervations.

## XII.

La hauteur de la Marée de deſſus eſt $= (Ss + Cc)^2 \delta$ (§. *Remarque I.*) & la hauteur de la Marée de deſſous $= (-Ss + Cc)^2) \delta$ (§. *IX. Remarque II.*) en prenant donc la moitié de la ſomme de ces deux hauteurs, nous aurons la hauteur moyenne de la Marée, qui convient aux déclinaiſons de la Lune, & latitudes du lieu données, $(SSss + CCcc)\delta$. De cette Formule, que je crois fort juſte pour la ſuppoſition de l'entiere inondation de la Terre, on pourra tirer les Corollaires ſuivans.

(I.) Les

(I.) Les déclinaiſons Septentrionales & Méridionales de la Lune ſont le même effet ſur les Marées, à l'égard de leur hauteur moyenne.

Cette propriété eſt confirmée par les Obſervations. Mais il ſera toujours vrai, que dans les Païs Septentrionaux la déclinaiſon Septentrionale de la Lune augmente un peu les Marées de deſſus, & diminue celles de deſſous; & que la déclinaiſon Méridionale fait le contraire: & c'eſt ce que l'expérience confirme auſſi. On ſe ſouviendra donc que nous parlons de la hauteur moyenne des deux Marées d'un même jour lunaire.

(II.) A la hauteur de 45 degrés la hauteur moyenne de la Marée eſt $= (\frac{1}{2} SS + \frac{1}{2} CC)\delta = \frac{1}{2}\delta$, & par conſéquent conſtamment la même.

C'eſt ici une proprieté bien ſinguliere, que quelles que ſoient les déclinaiſons des Luminaires, les hauteurs moyennes des Marées n'en ſoient point changées, & cette propriété nous fait voir, pourquoi dans nos Païs on s'apperçoive de ſi peu de changement dans les Marées, à l'égard deſdites déclinaiſons.

(III.) Si la latitude du lieu eſt moins de 45°. la plus grande Marée moyenne ſe fait lorſque les déclinaiſons des Luminaires ſont nulles, & les Marées diminuent, ſi les déclinaiſons augmentent.

L'expérience confirme encore cette propriété, & tout le monde convient que dans nos Païs (dont les Marées dépendent de la Mer du Nord, à environ 35 degrés de latitude) les plus grandes Marées, tout le reſte étant égal, ſe font environ les Equinoxes.

Si la latitude du lieu eſt plus grande de 45 degrés, c'eſt le contraire.

(IV.) Sous l'Equateur, la hauteur de la Marée eſt $= SS\delta$, & les variations qui dépendent des différentes déclinaiſons de la Lune, y ſeront le plus ſenſibles: ſi la déclinaiſon eſt nulle, la hauteur de la Marée y eſt exprimée par $\delta$; & ſi la déclinaiſon eſt ſuppoſée de 15 dégrés (elle peut aller juſqu'à près de 29 degrés) la hauteur de la Marée moyenne ſera de $0{,}82\,\delta$. La différence des hauteurs eſt de $\frac{18}{100}\delta$.

(V.) Les variations ſont moins grandes à cet égard ſur les Côtes de la France, baignées par l'Océan, ſi les Marées y ſont cauſées par la Mer du Nord à la hauteur d'environ 35 degrés, la hauteur de la Marée, la déclinaiſon de la Lune étant nulle, y ſera exprimée par $0{,}671\,\delta$, & ſi la Lune avoit 25 degrés de déclinaiſon, la hauteur moyenne y ſera exprimée alors par $0{,}610\,\delta$. La plus grande Marée eſt donc à la plus petite à cet égard, comme 671 à 610, & la différence ſera comme 61; qui fait l'onziéme partie de la grande Marée.

Nous voyons par ces exemples, que les variations qui dépendent de la déclinaiſon de la Lune, ſont toujours beaucoup plus petites, que celles

les qui dépendent des différentes distances de la Lune, & qui peuvent aller jusqu'au tiers de la grande Marée. C'est pourquoi on a eu beaucoup de peine à s'appercevoir des variations qui répondent aux différentes déclinaisons.

(VI.) Enfin nous remarquerons que cette Formule $(SSss+CCcc)\delta$ pour les hauteurs moyennes des Marées ne doit pas être poussée au-delà du terme des doubles Marées, qui est lorsque la latitude du lieu est égale à la déclinaison de la Lune: car, passé ce terme, nous avons démontré qu'il ne doit y avoir qu'une Marée par jour, dont la hauteur est exprimée par $4SsCc\delta$, en vertu de la Remarque (7) de l'Art. IX. Il faudra aussi donner à ce terme une certaine latitude; car il y apparence que ce n'est qu'à une certaine distance depuis ce terme vers l'Equateur, que les Marées commencent à être doubles, & à une autre distance vers le Pole, qu'elles commenceroient à être simples, si la Mer libre s'étendoit jusques-là; & que dans la Zone, qui est entre deux, les Marées seront mêlées de l'une & l'autre espéce avec beaucoup d'irrégularité.

## XIII.

Nous venons d'exposer au long, & avec toute la précision possible, le rapport réel des hauteurs des Marées: nous n'avons qu'un mot à dire sur l'heure des hautes Marées. Comme c'est toujours au moment du passage supérieur de la Lune par le Méridien, que la Mer devroit être la plus haute, quelle que soit la déclinaison de la Lune, & la latitude du lieu: nous voyons que si les Marées dépendoient uniquement de la Lune, ces deux sortes de variations ne devroient point apporter de changement à l'heure de la haute Mer; & si l'on veut avoir égard aux forces du Soleil, nous avons déja montré au IX. Art. du Chap. VII. les variations qui peuvent provenir à cet égard.

Mais si la déclinaison de la Lune & la latitude du lieu n'ont pas d'influence directement sur l'heure de la haute Mer, & si elles n'en ont que très-peu, lorsque l'action de la Lune est combinée avec celle du Soleil, il est remarquable, que tant la déclinaison de la Lune, que la latitude du lieu, feroient extrêmement varier l'heure des basses Mers, sans cette cause seconde, que j'ai exposée au long dans le XI. Art. & qui fait que les deux Marées d'un même jour lunaire sont beaucoup moins inégales, qu'elles ne devroient être. Cependant cette raison ne sçauroit rendre les deux Marées tout-à-fait égales, & il sera toujours vrai, ce que j'ai dit dans la Remarque (1) de la III. Partie du §. IX. que c'est tantôt le Jusan d'une Marée, qui surpasse en durée le flot de la Marée suivante, tantôt celui-ci qui surpasse l'autre. C'est une propriété qui n'est point échappée aux Observateurs des Marées; mais on n'avoit pas remar-

remarqué les circonſtances de ces inégalités, ſçavoir que dans les Païs Septentrionaux, la déclinaiſon Septentrionale de la Lune rend les Marées de deſſus plus longues, & les Marées de deſſous plus courtes, & que la déclinaiſon Méridionale fait le contraire.

On voit donc qu'à cet égard le Juſan peut être différent du flot ſuivant, mais non pas du flot antécédent; & ſi l'on remarque quelque différence entre le flot & le Juſan d'une même Marée, ou cette différence ſera conſtante pendant tout le cours de l'année, & alors il faut l'attribuer à la configuration des Côtes; ou elle n'aura point de loix, & ne ſera que tout-à-fait accidentelle, & cauſée par des Vents ou Courants accidentels.

## XIV.

Les différences que nous avons expoſées dans ce Chapitre entre les deux Marées d'un même jour, tant pour leur hauteur, que pour leur durée, nous donnent un moyen de reconnoitre ces deux Claſſes de Marées, & de diſtinguer l'une d'avec l'autre, ce qui ſeroit impoſſible ſans cela ſur les Côtes irrégulieres de l'Europe, où nous ſçavons que les diverſes heures du Port comprennent toute l'étendue d'une Marée, ou d'un demi-jour lunaire.

La Claſſe des Marées de deſſus comprendra celles qui ſont plus grandes & plus longues, la déclinaiſon de la Lune étant Septentrionale, ou qui ſont petites & plus courtes, cette déclinaiſon étant Méridionale, & l'autre Claſſe ſera reciproque.

## XV.

Nous avons examiné avec toute l'attention requiſe les effets des différentes déclinaiſons de la Lune, qui ſont la ſource de tant de propriétés très-remarquables des Marées. Il ne nous reſte donc plus qu'à conſidérer encore les déclinaiſons du Soleil. Cet examen nous ſera très-facile, après celui que nous venons de faire ſur la Lune.

Nous nommerons la force du Soleil, ſa déclinaiſon étant nulle, $\mathfrak{C}$, comme nous avons fait toujours dans le Corps de ce Traité, & nous retiendrons les dénominations du V. §. Si nous appliquons donc au Soleil tout le raiſonnement que nous avons fait ſur la Lune, nous voyons qu'on n'a qu'à ſubſtituer dans toutes les Formules de ce Chapitre $\mathfrak{C}$ à la place de $\mathfrak{D}$, pour trouver les variations qui proviennent des différentes déclinaiſons du Soleil dans tous les lieux de la Terre, & de cette maniere tout ce que nous avons dit ſur la Lune, ſera auſſi vrai à l'égard du Soleil. Si donc la hauteur de la Marée, entant qu'elle eſt produite ſous l'Equateur par la ſeule action du Soleil au tems des Equinoxes, eſt appellée $\mathfrak{C}$, la hauteur de la Marée ſera pour telle déclinaiſon du Soleil,

& telle latitude du lieu entre les deux Cercles Polaires qu'on voudra = $(TTss+EEcc)\mathfrak{C}$, entendant par $T$ le Sinus de la distance du Soleil au Pole, & par $E$ son Cosinus.

## XVI.

Pour tirer tout l'avantage, qui est possible, de nos Méthodes, & leur donner la derniere perfection, nous tâcherons enfin de donner une Formule générale pour tous les cas possibles. Souvenons-nous pour cet effet, que nous avons nommé au IX. Chapitre $A$ la hauteur des Marées qui se font sous la Ligne dans les Syzygies (ou plutôt un jour & demi après) les distances des Luminaires étant moyennes, & leurs déclinaisons nulles; & que pour les mêmes circonstances nous avons nommé $B$ la hauteur des Marées bâtardes: voyons à présent, comment il faut changer ces Quantités $A$ & $B$, lorsque les déclinaisons des Luminaires, & les latitudes des lieux sont d'une grandeur quelconque.

(I.) Quant à la quantité $A$, comme elle a été exprimée par la somme des forces entieres des deux Luminaires, c'est-à-dire, par $\mathfrak{S}+\mathfrak{C}$, on voit qu'il faut mettre ici à la place de $\mathfrak{S}$ sa quantité corrigée $(SSss+CCcc)\mathfrak{S}$, & à la place de $\mathfrak{C}$ sa quantité corrigée $(TTss+EEcc)\mathfrak{C}$, & ensuite faire cette Analogie

$$\mathfrak{S}+\mathfrak{C} : A :: (SSss+CCcc)\mathfrak{S}+(TTss+EEcc)\mathfrak{C} : \frac{(SSss+CCcc)\mathfrak{A}+(TTss+EEcc)\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}+\mathfrak{C}}A.$$

Cette quatriéme proportionnelle marque la hauteur des Marées dans les Syzygies, lorsque les déclinaisons des Luminaires, & la latitude du lieu sont quelconques, & si la déclinaison de l'un & l'autre Luminaire est nulle, cette quantité devient simplement $= ssA$. Si l'on nomme donc $F$ la hauteur de la Marée dans les Syzygies, les déclinaisons des Luminaires étant nulles pour un lieu quelconque, il faut supposer $ssA=F$, & de cette maniere ladite quatriéme proportionelle devient

$$= \frac{(SSss+CCcc)\mathfrak{A}+(TTss+EEcc)\mathfrak{C}}{ss(\mathfrak{S}+\mathfrak{C})}F.$$

C'est cette quantité qu'il faut substituer dans les équations du §. V. Chap. IX. pour $A$.

(II.) La quantité qu'il faudra substituer pour $B$ dans ces equations, que nous venons de citer, se trouve à peu-près de la même façon; il n'y a qu'à prendre au lieu de la somme $\mathfrak{A}+\mathfrak{C}$ leur différence $\mathfrak{A}-\mathfrak{C}$, qui exprimoit la hauteur des Marées bâtardes. Si l'on appelle donc $G$ la hauteur de la Marée dans les Quadratures, les déclinaisons des Luminaires étant nulles, on trouvera la quantité à substituer pour

$$B = \frac{(SSss+CCcc)\mathfrak{A}-(TTss+EEcc)\mathfrak{C}}{ss(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})} \times G.$$

Nous ſubſtituerons encore dans l'équation générale du §. V. Chap. IX. à la place des Lettres *S* & *s* (qui y marquent le rapport des diſtances du Soleil à la Terre ſous diverſes circonſtances, & qui ſe trouvent employées dans ce Chapitre dans un autre ſens) ces autres Lettres *D* & *d*.

Après ces réflexions préliminaires nous conſidérerons le Problême général des hauteurs des Marées ſous telles circonſtances, qui pourront concourir, & qui ſervira à déterminer ces hauteurs avec toute la préciſion poſſible. Je m'aſſure que tous ceux qui jetteront les yeux ſur cette Solùtion, verront ſans peine, combien j'ai été attentif à examiner & éplucher toutes les circonſtances qui peuvent faire varier les Marées.

## PROBLEME GENERAL.

## XVII.

*Trouver généralement la hauteur des Marées, en ſuppoſant toutes les circonſtances qui peuvent les faire varier, connuës.*

### SOLUTION.

Il faut connoître d'abord par Obſervations les quantités *F* & *G*, qui marquent les hauteurs moyennes des grandes Marées, & des Marées bâtardes, qui ſe font un jour & demi après les Syzygies & les Quadratures, les déclinaiſons des Luminaires étant nulles, & leurs diſtances à la Terre étant moyennes. Dans la Théorie, deux Obſervations ſuffiſent pour cet effet; mais il vaut mieux dans l'application de nos Méthodes obſerver un grand nombre de fois, comme on a déja fait preſque dans tous les Ports de la France, la hauteur des grandes Marées, & celles des petites Marées, les Luminaires ſe trouvant à peu-près dans l'Equateur, & prendre des unes & des autres le milieu Arithmétique, que j'appelle *F* pour les grandes Marées, & *G* pour les petites Marées.

Il faut enſuite connoître le rapport moyen, qu'il y a entre les forces de la Lune & du Soleil. Nous avons donné pluſieurs moyens pour cela dans le corps de cette Diſſertation, & nous nous croyons bien fondés de le ſuppoſer comme 5 à 2. Quoi qu'il en ſoit, nous nommons ce rapport $A : B$.

Il faut après cela faire attention aux Phaſes de la Lune, ou à l'Arc compris entre les deux Luminaires dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien: cet Arc doit être diminué de 20 dégrés (§. *VII. Chap. IX.*) Nous nommons le Sinus de l'Arc réſultant *m*, & le Coſinus *n*, & le Sinus total 1.

Il faut auſſi connoître les diſtances des Luminaires à la Terre : j'appelle $d$ la diſtance moyenne du Soleil; $D$ ſa diſtance au tems de la Marée cherchée; $l$ la diſtance moyenne de la Lune; $L$ ſa diſtance au tems de la Marée cherchée.

Il faut ſçavoir encore les déclinaiſons des Luminaires à l'égard de l'Equateur : j'appelle $S$ le Sinus de la diſtance de la Lune au Pole; $C$ ſon Coſinus; $T$ le Sinus de la diſtance du Soleil au Pole; $E$ ſon Coſinus.

Enfin, il faut faire attention à la latitude du lieu, & à la Remarque ($\alpha$) du IX. Art. que nous avons faite pour l'eſtimation des latitudes. Nous appellons le Sinus de la diſtance au Pole $s$ & le Coſinus $c$. Toutes ces dénominations faites, je dis que la hauteur de la Marée ſera

$$\frac{l^3 D^3 \delta + L^3 d^3 \zeta}{L^3 D^3 (\delta + \zeta)} \times \frac{nn}{ss} \times \frac{(SSss + CCcc)\delta + (TTss + EEcc)\zeta}{\delta + \zeta} \times F.$$

$$+ \frac{l^3 D^3 \delta - L^3 d^3 \zeta}{L^3 D^3 (\delta - \zeta)} \times \frac{mm}{ss} \times \frac{(SSss + CCcc)\delta - (TTss + EEcc)\zeta}{\delta - \zeta} \times G.$$

## XVIII.

Je n'ai mis ici cette grande Formule, que pour faire voir toute l'étendue & toute l'exactitude de notre Théorie & de nos Calculs, car les meſures & la Table que nous avons donnés au Chapitre IX. ont aſſez de préciſion dans une Queſtion auſſi ſujette que celle-ci aux variations accidentelles, qui n'admettent aucune détermination.

Je ne dis rien des Marées & de leurs changemens extraordinaires, qui ſe font dans la Zone glaciale, pour ne point groſſir trop ce Traité, & pour ne point l'embarraſſer de choſes fort abſtraites & aſſez difficiciles. J'ai d'ailleurs déja expoſé en gros & même aſſez au long ce qui en eſt.

Quant enfin à l'heure des hautes Mers, j'ai fait voir qu'elle n'eſt point changée par les déclinaiſons des Luminaires, ni par la latitude du lieu; nous avons donc déja donné toute la perfection poſſible dans les Chapitres précédens à cette autre grande Queſtion. Pour l'heure des baſſes Mers, qui dépendent beaucoup des déclinaiſons des Luminaires, & de la latitude du lieu, nous en avons fait voir toutes les variations & propriétés dans ce Chapitre.

CHA-

## CHAPITRE XI.

*Qui contient l'Explication & Solution de quelques Phénomenes & Queſtions, dont on n'a pas eu occaſion de parler dans le corps de ce Traité, ſur-tout à l'égard des Mers détachées, ſoit en partie, ſoit pour le tout, de l'Océan.*

### I.

SUivant quelle progreſſion les eaux montent & deſcendent dans une même Marée, par rapport aux tems donnés.

Cette Queſtion dépend de toutes les circonſtances que nous avons conſidérées dans ce Traité; mais les variations à l'égard du changement de ces circonſtances, ne font pas varier beaucoup la loi, ſuivant laquelle les eaux montent & deſcendent; je ne parlerai donc que du cas le plus ſimple, qui eſt lorſque la latitude du lieu, & les déclinaiſons des Luminaires ſont nulles, & lorſqu'en même tems les Luminaires ſont dans leurs Syzygies, ou dans leurs Quadratures. Que l'on exprime donc tout le tems depuis la haute Mer juſqu'à la baſſe Mer par un quart de Cercle, dont le rayon eſt égal à l'unité: je dis *que les deſcentes verticales des eaux depuis la haute Mer doivent être exprimées par les Quarrés des Sinus des Arcs, qui repréſentent les tems donnés.* Si l'on conſidére les Marées depuis le commencement du Flot, il faudra dire *que les élévations verticales des eaux, ſont en raiſon quarrée des Sinus, qui répondent aux tems donnés* §. III. Chap. V. Ceux qui voudront rendre cette Propoſition plus générale, pourront conſulter le §. VIII. Chap. V. & ſi on y ajoute enfin les §. §. VI. & VII. du Chap. X. on verra facilement, ce qu'il faudroit faire pour tous les cas poſſibles. Mais la loi générale ne différera pas beaucoup de celle que nous venons d'expoſer; & cela d'autant moins que les deux Marées d'un même jour, qui devroient être ſouvent fort inégales, ne laiſſent pas de ſe compoſer à une égalité mutuelle par la raiſon expoſée au long au §. XI. Chap. X. On peut donc ſe tenir ſans peine à la Regle que nous venons d'établir.

Il s'enſuit de cette Regle, que les baiſſemens ou élevations des eaux, qui ſe font dans de petits tems égaux, ſont proportionnels aux produits des Sinus par les Coſinus répondans des Arcs horaires; de ſorte que ſi on partage tout le tems du Flux ou du Reflux également, les variations également éloignées en deçà & en delà de ce terme, ſont égales: ces variations ſont les plus ſenſibles au milieu du Flux ou du Ruflux, & la

variation totale depuis le commencement du Flux ou du Reflux juſqu'au milieu, fait préciſément la moitié de toute la variation d'une Marée. On voit enfin que les variations doivent être inſenſibles au commencement & à la fin de chaque Flux & Reflux.

Toutes ces Propoſitions ſont confirmées entierement par les Obſervations qu'on a faites ſur cette matiere, rapportées par M. Caſſini dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1720. pag. 360. Il ſemble ſeulement qu'il y a une erreur de quelques minutes dans la détermination de l'heure de la baſſe Mer, erreur preſque inévitable dans cette ſorte d'Obſervations. Mais il faut remarquer, pour voir plus parfaitement l'accord de notre Regle avec les Obſervations, que tout le tems du Flux & Reflux eſt de ſix heures lunaires, pendant que les Obſervations ont été priſes ſur des heures ſolaires.

## II.

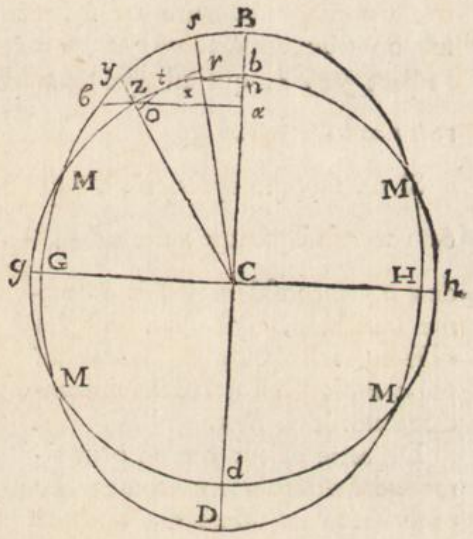
Pourquoi il n'y a point de Marées ſenſibles dans la Mer Caſpienne, ni ſelon quelques-uns dans la Mer Noire, & pourquoi elles ſont très-petites dans la Mer Méditerranée, & de quelle nature ſont ces Marées.

On ne ſçauroit bien répondre à ces queſtions, ſans conſidérer auparavant le Problême principal, qui eſt de ſçavoir les Marées, lorſque la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, & c'eſt un Problême pénible pour le Calcul, & aſſez délicat pour la Méthode. Pour le rendre d'abord plus ſimple, nous ſuppoſerons les Luminaires en conjonction & dans le plan de l'Equateur, & que c'eſt auſſi ſous l'Equateur, que l'on cherche les Marées.

Reſſouvenons-nous que ſans l'action des Luminaires, l'Equateur ſeroit parfaitement circulaire, comme $bgdh$, & que les Luminaires ſe trouvant dans l'Axe $DB$, cette Figure eſt changée en l'Ellipſe $BGDH$, lorſque toute la Terre eſt inondée, & que les eaux peuvent couler de tous côtés. Nous avons démontré auſſi au III. §. Chap. V. que dans cette ſuppoſition, la petite hauteur $yz$ (dont les variations par rapport à ſes différentes ſituations expriment les variations des Marées au point $z$) eſt $= \frac{3ss-bb}{3bb} \times \ell$, dans laquelle Formule on ſuppoſe $Cx=s$; $Cb=b$, & la différence entre la plus grande $CB$ & la plus petite $CG=\ell$.

Suppoſons à préſent que la Mer n'a qu'une certaine étendue en longitude, ſçavoir celle de $zx$, & qu'on tire par le centre $C$ & l'extrémité $x$ la droite $Cs$. Cela poſé on voit bien que la ſurface de la Mer ne peut pas être en $ys$, comme elle ſeroit, ſi toute la terre étoit inondée; car l'eſpace $yCs$ eſt plus grand que l'eſpace $zCx$, & il faut que cet

cet eſpace ſoit conſtamment le même; puiſque la quantité d'eau dans une Mer doit être ſuppoſée la même pendant les revolutions de la Terre: mais la ſurface de l'eau prendra la courbure $o\,r$, & voici quelle ſera la nature de cette courbure $o\,r$; il faut premierement, que l'eſpace $o\,C\,r$ ſoit conſtamment le même que l'eſpace $z\,C\,x$, & en ſecond lieu, que la courbe $o\,r$ ſoit ſemblable à la courbe $y\,s$, ou plûtôt la même, puiſque toutes les petites lignes, telles que $s\,x$, ſont incomparablement plus petites que le rayon de la Terre; & ainſi la petite perpendiculaire $s\,r$ ſera égale à la petite perpendiculaire $y\,o$, de même que toutes les perpendiculaires compriſes entre les termes $s$ & $y$.



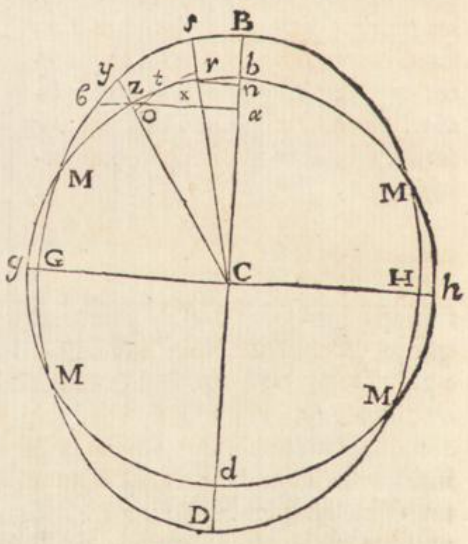

On voit donc déja que ce ne ſont plus les $s\,x$ & $y\,z$, dont les variations marquent les variations des Marées pour les points $x$ & $z$, & que ces variations ſont exprimées ici par celles des petites lignes $r\,x$ & $o\,z$. De là on peut conclure par la ſeule inſpection de la Figure, que les Marées doivent être d'autant plus petites, que la Mer eſt moins étendue en longitude; que ces Marées ne peuvent être que tout-à-fait inſenſibles dans la Mer Caſpienne & dans la Mer Noire, & fort petites dans la Mer Méditerranée, dont la communication avec l'Océan eſt preſque entiérement coupée au Détroit de Gibraltar. On en peut même tirer des propriétés très-ſingulieres de cette ſorte de Marées. 1°. Que la plus haute Mer ne ſe fait pas ici au moment du paſſage des deux Luminaires par le Méridien, comme dans l'Océan, ni 6 heures lunaires après, mais au milieu, ſi la Mer a peu d'étendue en longitude. 2°. Que les Marées ſont les plus grandes aux extrémités Orientales & Occidentales $z$ & $x$, & qu'elles ſont incomparablement plus petites au milieu $r$. 3°. Que la haute Mer dans l'une des extrémités ſe fait au même moment que la baſſe Mer dans l'autre extrémité. Voilà en gros les propriétés des Marées dans ces Mers: le Calcul en fera connoître le détail.

Pour ne point ennuyer le Lecteur par une trop longue ſuite de raiſonnemens purement Géometriques, & dans pluſieurs circonſtances aſſez compliquées & chargées de Calcul, je ne mettrai ici que le plus précis.

Soit $B\,b + G\,g = 6$, qui marque la variation pour la Mer libre de tous côtés;

côtés : ſoit l'Arc $z x$, qui marque l'étendue de la Mer en longitude $= A$. Le rayon de la Terre que nous prenons pour le Sinus total $= 1$ ; qu'on tire $x n$ perpendiculaire à $CB$, & ſoit l'eſpace $z_{\alpha} n x z = S$. Cela poſé, on trouvera d'abord $y z x s = \frac{2}{3} A \ell$. Cet eſpace devant être égal à l'eſpace $y o r s$, qui eſt égal à la petite $s r$ multiplié par $A$, on en tire $s r = \frac{2}{3}\ell - \frac{S}{A}\ell$.

Si on ſuppoſe après cela $Cn = n$ & $C_{\alpha} = s$, on en aura $s x = n n \ell - \frac{1}{3}\ell$, & par conſéquent $r x = n n \ell - \ell + \frac{S}{A}\ell$, & ce ſont les différentes valeurs de $r x$, en conſidérant $n$ & $S$ comme variables, qui marquent les différentes hauteurs de la Mer au point $x$, qui eſt à l'extrémité occidentale de la Mer.




De cette valeur $r x$ on peut tirer géométriquement toutes les propriétés des Marées, quelque étendue qu'on ſuppoſe à la Mer, & tout ce que nous avons trouvé pour le point $x$, peut être déterminé de la même façon pour tel autre point dans l'Arc $z x$ qu'on voudra ; mais on remarquera ſurtout une propriété générale, qui eſt que l'Arc horaire compris entre la haute & la baſſe Mer, c'eſt-à-dire l'Arc compris entre la plus grande & la plus petite $r x$, eſt toûjours de 90 degrés. Pour le démontrer, il faut ſuppoſer la différentielle $r x = o$, & faire $-dS = \frac{n n - s s}{\sqrt{1 - n n}}\, dn$, à cauſe de la valeur conſtante de $A$, d'où l'on tirera cette équation $2 A n \sqrt{1 - n n} + s s = o$, qui marque déja la propriété générale que nous venons d'indiquer. Cette propriété donne enſuite la hauteur de la Marée, exprimée par la différence de la plus grande & de la plus petite valeur de $r x = \left( 2 n n - 1 + \frac{n\sqrt{1 - n n} - s\sqrt{1 - s s}}{A} \right) \ell$, & on remarquera que dans toutes ces Formules, $s$ eſt donnée en $n$ & en conſtantes, à cauſe de l'Arc $A$ donné.

Nous appliquerons ces équations générales à deux ſortes de cas particuliers ;

ticuliers ; premierement, lorſque $A$ eſt de 90 degrés ; & en ſecond lieu, lorſque cet Arc eſt fort petit.

I. Si $A$ eſt de 90 degrés, on aura $s = \sqrt{1 - nn}$, & le lieu de la haute ou de la baſſe Mer, à l'égard du point fixe $B$ ſera déterminé par cette Equation

$$-2An\sqrt{1-nn} + 2nn - 1 = 0, \text{ qui donne}$$

$$Cn, \text{ ou } n = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{AA+1}}\right)} = 0{,}9602,$$

qui marque que l'Arc $xb$ eſt d'environ 16 degrés 13. minut. & que la hauteur de la Marée ſera de 0,8446. Nous voyons donc que ſi la Mer avoit 90 degrés d'étendue en longitude, la haute Mer ſe feroit dans les Syzygies 1 heure 5. minutes plus tard que ſi toute la Terre étoit inondée, & que la hauteur de la Marée ſeroit de 156 milliémes parties plus petite.

II. Suppoſons à préſent que l'étendue de la Mer en longitude ſoit très-petite, c'eſt-à-dire, que $A$ exprime un Arc circulaire fort petit, & ſoit la corde de cet Arc $= B$ : la Géométrie commune donne $s = n - \tfrac{1}{2}nBB + \tfrac{1}{2}\sqrt{4BB - 4nnBB + nnB^4 - B^4}$. Et $B$ étant ſuppoſée fort petite, on changera la quantité radicale en ſuite, & l'on négligera les quantités affectées de $B^3$ (le Calcul fait voir à la fin, qu'il faut retenir les termes affectés de $BB$) & de cette maniere on trouvera

$$s = n - B\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nBB.$$

On remarquera après cela, que la différence entre l'Arc $A$ & ſa corde $B$, convertie en ſuite commence par le terme $\tfrac{1}{4}B^3$, lequel pouvant être négligé pour notre deſſein, on mettta $A$ à la place de $B$, & on aura

$$s = n - A\sqrt{1-nn} - \tfrac{1}{2}nAA.$$

En ſubſtituant dans l'équation expoſée ci-deſſus

$$2An\sqrt{1-nn} - nn + ss = 0$$

la valeur trouvée pour $s$, & négligeant toujours les termes affectés de $A^3$ & de $A^4$, nous aurons ſimplement $n = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$.

L'Arc $xb$ eſt donc pour ce dernier cas de 45 degrés, & la haute Mer, ſi elle étoit ſenſible, ne ſe feroit par conſéquent que trois heures lunaires après le paſſage de la Lune par le Méridien. La hauteur de la Marée étant généralement exprimée, comme nous avons vû ci-deſſus, par $\left(2nn - 1 + \frac{n\sqrt{1-nn} - s\sqrt{1-ss}}{A}\right) \times \ell$, il faudra ſubſtituer dans cette expreſſion les valeurs trouvées pour $n$ & $s$ ; ce que faiſant avec les mê-

mes précautions, que nous avons employées en cherchant la valeur de $s$, on trouvera à la fin ſimplement la hauteur de la Marée $= A\ell$.

Cette expreſſion fait voir que dans les petites Mers, les hauteurs des Marées ſont proportionelles aux étendues que ces Mers ont en longitude, & les Marées ſe trouveront par cette Analogie. Comme le Sinus total eſt à l'Arc longitudinal, que la Mer renferme, ainſi la hauteur de Marée dans la Mer qui eſt ſuppoſée inonder toute la Terre, exprimée par $\ell$, ſera à la hauteur de la Marée en queſtion.

Appliquons maintenant tout ce que nous avons trouvé pour en tirer les propriétés des Marées dans la Mer Caſpienne. Suppoſons pour cet effet, que dans les conjonctions & oppoſitions des Luminaires, la hauteur des Marées grandiſſimes dans la Mer du Sud (dans laquelle les Marées ne ſçauroient manquer d'atteindre preſque toute la hauteur, qu'elles auroient, ſi toute la Terre étoit inondée) eſt ſous l'Equateur de 8 pieds: c'eſt la hauteur que les Relations de voyages m'ont fait adopter pour la Mer libre, & que je crois qu'on remarquera ſur les Côtes eſcarpées des petites Iſles ſituées près de l'Equateur dans ladite Mer du Sud: Cela étant, j'ai démontré dans la Propoſition (II.) du XII. §. du Chapitre précédent, que les grandes Marées ne ſeront plus que de 4 pieds à la hauteur de 45 degrés, où je ſuppoſe le milieu de la Mer Caſpienne. Si nous donnons après cela à cette Mer dix dégrés d'étendue en longitude, cet Arc fait environ la ſixiéme partie du Rayon, & la hauteur des grandiſſimes Marées devroit être par conſéquent aux extrémités Orientale & Occidentale de la Mer Caſpienne d'environ huit pouces: mais elles ſeront nulles au milieu de la Mer. Je ſuppoſe cette agitation de la Mer trop petite pour avoir pû être remarquée par les gens qui ont été ſur les lieux, & qui ſans doute n'ont pas fait un examen fort ſcrupuleux là-deſſus, & qui n'auroient pas manqué de l'attribuer à des cauſes accidentelles, s'ils avoient remarqué quelque petite élévation & baiſſement des eaux. J'eſpére que des Obſervations plus exactes confirmeront un jour ce que je viens d'indiquer ſur les Marées de la Mer Caſpienne.

On doit faire le même raiſonnement ſur la Mer Noire, qui peut être conſidérée comme détachée de la Mer Méditerranée, à cauſe du peu de largeur du Détroit qui eſt entre deux. Il eſt à remarquer qu'on a obſervé dans cette Mer des Marées, quoique très-petites.

On voit auſſi que les Marées dans la Mer Méditerrannée doivent être beaucoup plus petites, que dans l'Océan, ſur-tout ſi l'on fait attention que cette Mer n'eſt tout-à-fait ouverte que depuis l'Iſle de Chypre juſqu'à celle de Sicile.

## III.

Comment les Marées peuvent être beaucoup plus grandes sur les Côtes, dans les Bayes, dans les Golfes, &c. que dans la Mer libre de tous côtés.

Pour répondre à cette question, il faut encore faire réflexion à ce que j'ai déja dit, que si les Luminaires restoient à un même lieu, & que le mouvement journalier de la Terre se fit avec une lenteur infinie, les eaux qui inondent la Terre, ne pourroient point manquer d'être dans un parfait équilibre, & les Marées auroient par-tout les hauteurs qu'on leur a prescrites dans cet Ouvrage, sans que la configuration des Côtes ou autres causes semblables les pût déranger, pourvû que l'endroit en question communiquât avec l'Océan : d'ailleurs les eaux ne feroient que monter & descendre verticalement; excepté aux Côtes, qui alternativement sont baignées, & restent à sec, & ausquelles les eaux auroient quelque mouvement horisontal, quoi qu'infiniment lent, & la direction de ce mouvement des eaux dépendroit dans ce cas, aussi bien que dans les autres, de la direction de la pente des Côtes. Mais la vîtesse du mouvement journalier de la Terre, qui fait que dans le tems d'un jour tout l'Océan doit faire quatre mouvemens & agitations reciproques, rend ces mouvemens fort sensibles. Comme outre cela la Mer n'inonde pas toute la Terre, & qu'il y a de grands Golfes, Canaux, &c. qui par l'élévation & baissement des eaux, sont tantôt plus tantôt moins pleins, il faut que ceux-ci reçoivent les eaux & les renvoyent alternativement vers des endroits qui s'empliront, pendant que les autres se vuideront, & de là doivent provenir des mouvemens horisontaux, qu'on appelle communément Flux & Reflux. Ce sont ces mouvemens horisontaux, qui se faisant vers des endroits plus serrés, peuvent produire les grandes Marées, qui vont dans de certains endroits au-delà de 60 pieds; c'est aussi cette raison qui rend les Marées plus grandes dans le Golfe de Venise, qu'elles ne sont dans la Mer Méditerrannée. C'est ici qu'on peut faire un grand usage de ce que divers Auteurs ont donné sur le mouvement des eaux, & je m'assure que moyennant les connoissances qu'on a déja sur cette matiére, on pourroit rendre exactement raison de tous les différens Phénomenes, qui s'observent sur les Marées aux endroits différemment situés. Mais un tel examen demanderoit des volumes, & des années pour les faire.

## IV.

Quelle est en gros la nature des Marées au Détroit de Gibraltar.

Les Marées doivent ſans doute être beaucoup plus compliquées ; & paroître plus irrégulieres au Détroit de Gibraltar, que dans d'autres endroits, parce qu'il s'y fait un concours de deux ſortes de Marées, dont l'une vient de l'Océan, & l'autre de la Méditerranée ; & on voit facilement, que ſi les Marées conſiſtoient ſimplement à élever & baiſſer les eaux, ſans cauſer des Courans, il y auroit ſur ces Côtes quatre Marées par jour, c'eſt-à-dire, que les eaux monteroient & deſcendroient quatre fois, parce que les Marées des deux Mers ne ſe font pas en même tems : mais comme il ſe forme des Courans reciproques, chaque Courant tâche à ſe conſerver, & de là il ſe forme des liſieres, qui ont chacune des mouvemens différens : celles qui ſont ſur les Côtes de chaque côté, paroiſſent devoir être attribuées aux Marées de la Méditerranée, & deux autres qui les touchent, aux Marées de l'Océan : on remarque même au milieu une cinquiéme liſiere, dont le mouvement n'eſt pas ſi irrégulier que celui des quatre autres, & qui ne fait voir preſque aucun rapport avec la Lune : il ſemble que ce Courant ne doit ſa ſource, qu'à un défaut d'équilibre entre les deux Mers.

Je dirai à cette occaſion, qu'il peut arriver de même, que les Marées ſont formées dans un certain Port par le mouvement des eaux, qui viennent de deux différens côtés & à divers tems : il ſemble qu'il faut tirer de là qu'il peut y avoir des endroits où le Flot dure conſtamment plus long-tems que le Juſan, & qu'il y en a d'autres où il arrive le contraire. Cette même cauſe peut encore produire pluſieurs ſortes de Phénomenes particuliers à de certains endroits.

## V.

Pourquoi les petites Marées ſont beaucoup plus inégales, par rapport à leur grandeur, que les grandes Marées.

Nous avons déja vû que les petites Marées qui ſuivent les Quadratures, doivent être fort ſuſceptibles de pluſieurs irrégularités, tant par rapport au moment de la haute & baſſe Mer, que par rapport à la hauteur de la Marée.

Il me ſemble qu'on doit outre cela remarquer les grandes inégalités qui régnent parmi les petites Marées, quoique tout-à-fait régulieres, pouvant ſous diverſes circonſtances croître juſqu'au double, pendant que les grandes Marées ne croiſſent que d'environ un quart. Pour rendre raiſon de cette Obſervation qu'on a faite, il faut ſe reſſouvenir des circonſtances eſſentielles & fondées dans la nature des Marées, qui peuvent les rendre, tantôt plus grandes, tantôt plus petites dans un même lieu, quoique l'âge de la Lune ne différe point.

Nous avons vû que ce ſont les diverſes diſtances des Luminaires à la Terre,

Terre, & leurs différentes déclinaiſons, qui peuvent encore changer les hauteurs des Marées, lorſque l'âge de la Lune, & la latitude du lieu ſont les mêmes. Le calcul nous a enſeigné auſſi, que l'effet de la diverſité des déclinaiſons des Luminaires eſt beaucoup plus petit que celui de la diverſité des diſtances : comme donc la diverſité des diſtances eſt beaucoup plus grande dans la Lune, que dans le Soleil, & que le Soleil a en même tems beaucoup moins de force que la Lune, on peut pour eſtimer en gros les variations des petites Marées, & les variations des grandes Marées, ſimplement faire attention aux diſtances de la Lune : nous avons trouvé que la diverſité des diſtances peut faire varier l'action de la Lune depuis 2 à 3, l'action du Soleil que nous conſidérons comme conſtante, étant exprimée par l'unité. Cela étant, & les hauteurs des petites Marées étant auſſi proportionnelles aux différences des actions des deux Luminaires, nous voyons que les hauteurs de ces petites Marées doivent être contenues dans les termes de $2-1$, & $3-1$, ou 1 & 2, pendant que les hauteurs des grandes Marées, qui ſont proportionnelles aux ſommes des actions des Luminaires, ſeront renfermées dans les termes de $2+1$ & $3+1$, c'eſt-à-dire, de 3 & 4.

Leſdits termes ſont confirmés par les Obſervations, comme par exemple, par celles qui ſont expoſées dans les Mémoires de l'Académie de 1713. pag. 287. & 288. Nous voyons de cette raiſon, que les variations abſoluës doivent être à peu-près les mêmes dans les petites Marées & dans les grandes Marées, & c'eſt ce que les Obſervations citées confirment auſſi; & comme ces variations ſont par conſéquent plus ſenſibles dans les petites Marées que dans les grandes Marées, il faudra peut-être ſe ſervir plûtôt des premieres, que des autres, pour examiner par des Obſervations ce que les diverſes circonſtances peuvent contribuer pour faire varier les hauteurs des Marées.

## V I.

Pourquoi les Marées étant montées plus haut, & ayant inondé plus de terrain pendant le Flot, deſcendent en même tems davantage, & laiſſent plus de terrain à ſec pendant le Juſan, & quelle proportion il y a entre les montées & deſcentes.

Nous voyons la premiere Queſtion indiquée, comme fort remarquable dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1712. pag. 94. La raiſon en eſt que les Marées ſont une eſpece de mouvement oſcillatoire, ou de balancement; car il y a dans ces balancemens un point d'équilibre, qui doit paſſer pour fixe, & au-deſſus duquel l'eau doit être cenſée s'élever dans la haute Mer, & ſe baiſſer dans la baſſe Mer. On pourroit croire d'abord que les élévations & deſcentes de l'eau à l'égard

gard du point fixe, ſont conſtamment proportionnelles, & en ce cas notre Problême ſeroit réſolu dans toute ſon étendue avec beaucoup de facilité. Mais il y a une toute autre proportion bien plus variable & bien plus compliquée, que nous allons rechercher, d'autant que ce n'eſt pas proprement la hauteur des Marées dans le ſens que nous lui avons donné juſqu'ici, qu'il importe davantage de connoître dans la Navigation pour l'entrée & ſortie des Vaiſſeaux dans les Ports ou les Rades: il s'y agit plutôt de connoitre la hauteur abſolue des eaux, lorſqu'elles ſont arrivées à leur plus grande ou leur plus petite hauteur; & pour cet effet, il faut ſçavoir dans chaque Marée, tant l'élévation des eaux à l'égard du point fixe, que leur baiſſement: juſqu'ici nous n'avons déterminé que la ſomme de ces variations ſous le nom de hauteur de la Marée.

Voyons d'abord comment il faudra déterminer le point fixe: il eſt vrai qu'il eſt en quelque façon arbitraire, cependant il paroît le plus convenable de le placer là, où atteindroit la ſurface de la Mer, ſi les Marées étoient nulles. Un tel point doit être conſidéré comme demeurant conſtamment à la même hauteur; car les cauſes qui peuvent le hauſſer ou le baiſſer, telles que ſont les Vents, les Courans inégaux, &c. ne ſont que paſſageres & purement accidentelles. Il s'agit donc à préſent de ſçavoir, combien les eaux montent au-deſſus de ce point fixe dans la haute Mer, & combien elles deſcendent au-deſſous du même point dans la baſſe Mer. Cette Queſtion dépend de toutes les circonſtances qui concourent pour former la hauteur abſolue des Marées, & que nous avons examinées au long avec tout le ſoin poſſible. Ce ſeroit donc ſe jetter de nouveau dans les mêmes difficultés, ſi nous voulions traiter la préſente Queſtion avec la même rigueur, & auſſi ſcrupuleuſement, que nous avons fait l'autre; c'eſt pourquoi nous ne conſidérerons que les circonſtances fondamentales & principales, qui ſont que la Terre eſt toute inondée, que les Luminaires ſont dans le plan de l'Equateur, & que la latitude du lieu eſt nulle, faiſant abſtraction de toutes les cauſes ſecondes: ceux qui voudront enſuite une Solution plus exacte, n'auront qu'à conſulter les Chapitres VIII. & IX. pour y arriver.

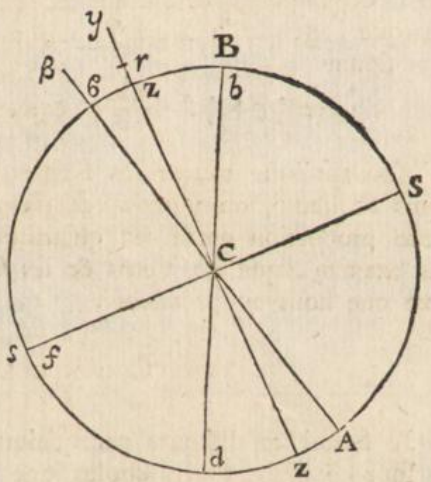
Soit donc encore (comme nous avons ſuppoſé au Chap. V.) $bgsdb$ l'Equateur, & que $b$ marque le lieu du Soleil, $g$ celui de la Lune, & $z$ le point de la plus grande élévation des eaux, exprimée par $yz$; ſi l'on prend un Arc de 40 degrés $zs$, le point $s$ marquera l'endroit du plus grand baiſſement des eaux, exprimé par $sx$: nous avons démontré là-deſſus au VIII. §. du Chap. V. qu'on a généralement

$$yz = \frac{2bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times g + \frac{2bb - 3\varrho\varrho}{3bb} \times d.$$

dans laquelle équation $b$ marque le Sinus total, $\sigma$ le Sinus de l'Angle $bCz$,

$bCz$, déterminé au §. XI. Chap. V. $\varrho$ le Sinus de l'Angle $\zeta Cz$, exprimé au §. XIII. Chap. V. $\ell$ la hauteur des Marées entant qu'elles seroient produites par la seule action de la Lune. Nous avons démontré pareillement au III. §. Chap. VIII. qu'en regardant $sx$ comme positive, de négative qu'elle est par rapport à $yz$, on a généralement

$$sx = \frac{bb - 3\sigma\sigma}{3bb} \times \ell + \frac{bb - 3\varrho\varrho}{3bb} \times \delta.$$




Or comme les points $z$ & $s$, qui sont de niveau, marquent le point fixe dans le sens que nous venons de lui donner, on voit que ces quantités $yz$ & $sx$ marquent précisément l'élévation des eaux au dessus du point fixe, & leur baissement au-dessous du même point, tels que nous sommes proposés de les déterminer. Des valeurs que nous venons de trouver, on pourra tirer les Corollaires suivans.

(*a*) La différence entre chaque élévation au-dessus du point fixe, & la descente au-dessous du même point, est toujours $= \frac{1}{3}\ell + \frac{1}{3}\delta$ : d'où nous voyons déja que l'une croissant ou diminuant, l'autre doit croître ou diminuer aussi, qui est le Phénomene observé par M. Cassini. Cette différence fait *environ* le tiers de la plus grande hauteur de Marée: je dis *environ*, parce que les quantités $\ell$ & $\delta$ sont variables, quoique leurs variations soient beaucoup plus petites que celles qui résultent des différens âges de la Lune, & à cet égard on peut dire que la différence dont il s'agit ici, est presque constante.

(*b*) Dans les Syzygies (ou plûtôt un jour & demi après) les quantités $\varrho$ & $\sigma$ doivent être supposées $= 0$, & ainsi on a $yz = \frac{2}{3}\ell + \frac{2}{3}\delta$, & $sx = \frac{1}{3}\ell + \frac{1}{3}\delta$: la montée est donc dans les grandes Marées toujours double de la descente. Cette propriété servira à déterminer commodément le point fixe dans chaque Port, & elle le donne de 5. pieds 3 pouces plus haut pour Brest, qu'il n'a été choisi par les Observateurs, si on la compare avec l'Observation, qui est au milieu de la page 94. des Mém. de l'Acad. des Scienc. de 1712.

(*c*) Dans les Quadratures (ou un jour & demi après) il faut faire $\varrho = 0$, & $\sigma = b$, ce qui donne $yz = \frac{2}{3}\delta - \frac{1}{3}\ell$, & $sx = \frac{1}{3}\delta - \frac{2}{3}\ell$: d'où l'on voit que la montée & descente des eaux à l'égard de notre point fixe, ont une raison variable dans les petites Marées, qui dépend du rap-

rapport qui ſe trouve alors entre la force lunaire $\delta$, & la force ſolaire $\zeta$. Nous avons ſuppoſé dans cet Ouvrage ce rapport moyen comme 5 à 2, & ce rapport poſé, il faut dire que dans les petites Marées, l'élévation des eaux au-deſſus de notre point fixe, eſt 8 fois plus grande que leur baiſſement au-deſſous du même point. Dans les Marées minimes nous avons ſuppoſé $\delta = 2\zeta$, & dans les plus grandes des petites Marées $\delta = 3\zeta$.

(*d*) Nous avons fait voir, que le point $z$ n'eſt jamais éloigné beaucoup du point $\zeta$, cela étant & faiſant le Sinus de l'Angle $bc\zeta$ (qui marque l'âge de la Lune) $= m$, on pourra ſuppoſer $\varrho = 0$ & $\sigma = m$, ce qui donne

$$yz = \tfrac{2}{3}\zeta + \tfrac{2}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\zeta, \text{ \& } sx = \tfrac{1}{3}\zeta + \tfrac{1}{3}\delta - \frac{mm}{bb}\zeta.$$

Si l'on applique toutes ces Regles aux Obſervations faites en différens tems & lieux, on y trouvera un grand accord, ſi l'on choiſit bien la juſte proportion entre les quantités $\delta$ & $\zeta$. Mais on remarquera dans cet examen, que les Vents & les Courans peuvent faire varier le point fixe que nous avons adopté.

## CONCLUSION.

Je finirai ce diſcours par quelques refléxions ſur notre Théorie. Elle ſuppoſe avant toutes choſes une peſanteur vers les centres du Soleil & de la Lune, pareille à celle qui ſe fait vers le centre de la Terre, & que cette peſanteur s'étend au-delà de la région de la Terre. C'eſt le ſeul principe qui nous ſoit abſolument néceſſaire, & il n'y a perſonne qui le conteſte. La rondeur des Luminaires prouve ſuffiſamment la peſanteur qui ſe fait vers le centre; & quelle raiſon pourroit-on avoir pour donner des limites à cette peſanteur? Auſſi a-t-elle été reconnue depuis les ſiécles les plus reculés; mais on n'en a connu toute l'évidence & toutes les loix, que depuis la Philoſophie immortelle de M. NEWTON. Les premieres conſéquences que nous avons tirées de ce principe pour l'explication des Marées, ſont purement Géométriques. Nous pouvons donc être aſſurés de connoître la vraie cauſe des Marées, quoique nous en ignorions encore la cauſe premiere, qui eſt la cauſe générale & phyſique de la peſanteur. S'il y avoit quelqu'un qui eût deviné cette premiere cauſe, il mériteroit d'autant plus la préférence, que ſon Syſtême renfermeroit néceſſairement la vraie cauſe univerſelle de la peſanteur: cette conſéquence ſera la pierre de touche pour prouver la vérité d'un tel Syſtême ſur les Marées. Il en eſt de ceci, comme ſi l'on demandoit, par exemple, pourquoi la ſurface de l'eau dans un reſervoir ſe met toujours horiſontalement: on voit qu'on ne ſçauroit en di-

re la premiere cauſe, ſans qu'elle renferme la vraie Théorie ſur la peſanteur & ſur la fluidité, qui ſeules peuvent être la vraie cauſe du Phénomene en queſtion. Cette ſeule reflexion m'a fait quitter quelques conjectures qui ſe préſentoient à mon eſprit ſur la cauſe matérielle des Marées, quoi qu'elles me paruſſent d'ailleurs aſſez plauſibles. Je n'ai fait au reſte en employant ce principe, que ce que Kepler a déja fait. M. Newton eſt allé beaucoup plus loin ſur cette matiere, après avoir démontré auparavant que la peſanteur vers chaque corps dans le Syſtême du monde diminue en raiſon quarrée reciproque des diſtances: d'où il a tiré pluſieurs nouvelles propriétés ſur les Marées, leſquelles s'accordant avec les Obſervations, pourroient confirmer davantage ſon principe ſur la diminution de la peſanteur, s'il avoit beſoin d'autres preuves. Ce principe n'a pourtant pas beaucoup d'influence, ſi je me ſouviens bien, ſur les variations des Marées, qui dépendent des Phaſes de la Lune, des declinaiſons des Luminaires & de la latitude des lieux, ſoit à l'égard des hauteurs des Marées, ſoit à l'égard des Marées. Il ne ſert principalement qu'à déterminer au juſte les variations qui dépendent des différentes diſtances des Luminaires à la Terre, & que les Obſervations n'ont pû déterminer avec aſſez de préciſion; il n'y en a cependant aucune qui lui ſoit contraire, & pluſieurs Obſervations bien détaillées, ſont tout-à-fait conformes aux réſultats que ce principe donne. On remarquera enfin que ce que j'ai dit ſur la peſanteur terreſtre, que j'ai conſidérée comme formée par l'attraction univerſelle de la matiere, n'a abſolument aucun rapport avec aucune variation des Marées; ces Marées pourront ſubſiſter telles qu'elles ſont, quelle que ſoit la nature de la peſanteur à cet égard: tout cet examen ne nous a ſervi que par rapport à la queſtion, quelle devroit être la hauteur abſolue de la hauteur des Marées, ſans le concours d'une infinité de cauſes ſecondes, qui peuvent augmenter & diminuer ces hauteurs abſolues, de ſorte que quel qu'eût été le réſultat de ces recherches, notre Théorie n'en eût pû ſouffrir aucune atteinte. J'eſpére avec tout cela, qu'on n'aura pas trouvé ces recherches inutiles à l'égard de pluſieurs circonſtances qui en ont été éclaircies, outre que nos déterminations donnent, en choiſiſſant les hypotheſes les plus vraiſemblables, des nombres tels que la nature de la choſe paroît exiger. Nous pouvons donc être tout-à-fait ſûrs de n'avoir rien admis d'eſſentiel dans toutes nos recherches, qui ne ſoit au-deſſus de toute conteſtation.

Quant à l'application de nos principes, à l'uſage que j'en ai fair, & au ſuccès de mon travail, ce n'eſt pas à moi à faire cet examen, ſur-tout ne pouvant le faire, ſans entrer dans un certain parallele avec un auſſi grand Homme qu'étoit M. Newton. Si j'ai eu quelques ſuccès, je dois avouer à l'honneur de ce ſçavant Philoſophe, que c'eſt

lui qui nous a mis en état de raiſonner ſolidement ſur ces ſortes de matieres ; & ſi j'oſe me flatter de quelque mérite, c'eſt celui d'avoir traité notre ſujet avec une attention & une exactitude conforme aux grande vûës de L'ACADEMIE, & au reſpect qu'on doit à cet illuſtre Corps.



# DE
# CAUSA PHYSICA
# FLUXUS ET REFLUXUS
# MARIS.

*A D. D.* MAC-LAURIN *Mathematicarum Profeſſore, è Societate Academiæ Edimburgenſis.*

OPINIONUM COMMENTA DELET DIES, NATURÆ JUDICIA CONFIRMAT.

---

## SECTIO I.

### PHÆNOMENA.

PHILOSOPHI motum Maris triplicem olim agnoverunt *, diurnum, menſtruum & annuum; motu diurno Mare bis ſingulis diebus intumeſcit defluitque, menſtruo æſtus in Syzygiis Luminarium augentur, in Quadraturis minuuntur, annuo denique æſtus hyeme quàm æſtate fiunt majores: verùm Phænomena hæc ſunt paulò accuratiùs proponenda.

I. Motus Maris diurnus abſolvitur horis circiter ſolaribus 24. minutiſque primis 48, intervallo ſcilicet temporis quo Luna motu apparente à Meridiano loci cujuſvis digreſſa ad eundem revertitur. Hinc altitudo Maris maxima contingit Lunâ appellente ad datum ſitum reſpectu Meridiani loci dati; verùm hora ſolaris in quam incidit æſtus ſingulis diebus retardatur, eodem ferè intervallo quo Lunæ appulſus ad Meridianum loci. Atque hic motus adeò accuratè ad motum Lunæ componitur, ut, ſecundùm Obſervationes à celeb. D. Caſſini allatas, ratio ſit habenda horæ in quam incidit vera conjunctio vel oppoſitio Solis, & æquatio à motu



* Plin. Lib. 2. Cap. 99.

motu Lunæ deſumpta adhibenda, ut tempus quo Mare ad maximam aſſurget altitudinem die Novilunii vel Plenilunii accuratiùs definiatur. In æſtuariis autem diverſi exiſtunt æſtus tempore, ut loquitur Plinius, non ratione diſcordes. Duo æſtus qui ſingulis diebus producuntur, non ſunt ſemper æquales; matutini enim majores ſunt veſpertinis tempore hyberno, minores tempore æſtivo, præſertim in Syzygiis Luminarium. (*a*).

II. De motu Maris menſtruo tria præcipuè ſunt obſervanda. 1. Æſtus fiunt maximi ſingulis menſibus paulò poſt Syzygias Solis & Lunæ, decreſcunt in tranſitu Lunæ ad Quadraturas, & ſunt paulò poſt minimi. Differentia tanta eſt, ut aſcenſus totius aquæ maximus ſit ad minimum ejuſdem menſis, ſecundùm quaſdam Obſervationes, ut 9 ad 5; & in nonnullis caſibus differentia obſervatur adhuc major. 2. Æſtus ſunt majores, cæteris paribus, quò minor eſt diſtantia Lunæ à Terra, idque in majori ratione quàm inverſa duplicata diſtantiarum, ut ex variis Obſervationibus colligitur. Ex. gr. anno 1713. aſcenſus aquæ in Portu Briſtonico, (*b*) referente eodem Cl. viro, 26°. Febr. fuit pedum 22 digitorum 5. & Martii 13°. pedum 18. digit. 2. Declinatio Lunæ in utroque caſu ferè eadem; in priori diſtantia Lunæ partium 953, in poſteriori partium 1032, quarum diſtantia mediocris eſt 1000. Eſt autem quadratum numeri 1032 ad quadratum numeri 953, ut 22. pedes 5 digit. ad 19 pedes $1\frac{2}{5}$ digitos; aſcenſus autem aquæ in poſteriori caſu fuit tantùm 18. ped. cum 2. digitis. 3. Æſtus ſunt, cæteris paribus, majores, cùm Luna verſatur in Circulo æquinoctiali, & minuuntur creſcente Lunæ declinatione ab hoc Circulo.

III. Æſtus fiunt, cæteris paribus, majores, quò minor eſt diſtantia Solis à Terra; adeòque majores hyeme cæteris paribus, quàm æſtate. Differentia verò longè minor eſt quàm quæ ex diverſis Lunæ diſtantiis oritur. Ex. gr. diſtantiæ Lunæ perigeæ fuerunt æquales Junii 19. 1711. & Decemb. 28. 1712. aſcenſus aquæ priore die pedum 18 digit. 4, poſteriori pedum 19 digit. 2; declinatio autem Lunæ fuit paulò minor in hac quàm in illa Obſervatione. (*c*).

Porrò in diverſis locis æſtus ſunt diverſi, pro varia locorum latitudine, eorumque ſitu reſpectu Oceani unde propagantur, pro ipſius Oceani amplitudine, & littorum fretorumque indole, aliiſque variis de cauſis.

## SECTIO II.

### PRINCIPIA.

Phænomenis æſtus Maris inſignioribus breviter recenſitis, progredimur ad

(*a*) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.
(*b*) *Ibid.* (*c*) *Mém. de l'Acad. Royale*, 1710. 1712. & 1713.

ad Principia, unde horum ratio eſt reddenda. Liceat tamen præfari nobiliſſimam quidem, ſed ſimul difficilimam eſſe hanc Philoſophiæ partem, quæ Phænomenorum cauſas inveſtigat & explicat. Ea eſt Naturæ ſubtilitas, ut non ſit mirum cauſas primarias, ſolertiam Philoſophorum plerumque effugere. Qui omnium Phænomenorum rationes, exponere, integramque cauſarum ſeriem nobis exhibere in ſe ſuſceperunt; illi certè magnis ſuis auſis hucuſque exciderunt. Philoſophiam quidem perfectiſſimam viri clariſſimi ſibi propoſuerunt exſtruendam, qualem tamen humanæ ſorti competere fas eſt dubitare. Præſtat igitur tantorum virorum ſucceſſu minùs felici edoctos ipſius naturæ veſtigia cautè & lentè ſequi. Quòd ſi Phænomena ad generalia quædam Principia reducere poſſimus, horumque vires calculo ſubjicere, hiſce gradibus aliquam veræ Philoſophiæ partem aſſequemur; quæ quidem manca ſeu imperfecta erit, ſi ipſorum Principiorum cauſæ lateant: tanta tamen ineſt rerum naturæ venuſtas, ut ea pars longè præſtet Subtiliſſimis virorum acutiſſimorum commentis.

Motus Maris cuivis vel leviter perpendenti manifeſtum eſt Luminarium, Lunæ præſertim, motibus affines eſſe & analogos. Eadem eſt periodus motûs Maris diurni ac Lunæ ad Meridianum loci, eadem motûs menſtrui ac Lunæ ad Solem; utriuſque Luminaris vis in motu Maris generando hinc elucet, quòd æſtus ſint majores quò minores utriuſque diſtantiæ à Terra; adeò ut nullus ſit dubitandi locus, motum Maris eſſe aliquâ ratione ad motum Lunæ & Solis compoſitum. Quales autem dicemus illas eſſe vires quæ à Luna & Sole propagatæ (aut ab his aliquo modo pendentes) aquam bis ſingulis diebus tollunt & deprimunt; quæ in Syzygiis Luminarium conſpirant, Quadraturis pugnant; in minoribus utriuſque diſtantiis augentur, in majoribus minuuntur; quæ in minori Lunæ declinatione fortiores, in majori debiliores ſunt; & nonnunquam majorem motum cient cùm Sol & Luna infra Horizontem deprimuntur, quàm cùm in Meridiano ſuperiori ambo dominantur. Fuerunt Viri celeberrimi qui æſtum Maris preſſione quâdam Lunæ cieri putarunt. Verùm cauſam & menſuram hujus preſſionis non oſtenderunt, nec quo pacto motus Maris varii hinc oriri poſſint ſatis clarè indicarunt, multò minùs motus illos (hoc principio poſito) ad Calculum revocare docuerunt.

Sagaciſſimus Keplerus Mare versùs Lunam gravitare, æſtumque Maris hinc cieri olim monuit. Newtonus, poſtquàm leges gravitatis detexiſſet, invenit æquilibrium Maris non tam turbari ipſius gravitate versùs Lunam, quàm ex inæqualitate vis quâ particulæ Maris tendunt ad Lunam & Solem pro diverſis ſuis diſtantiis ab horum centris, primuſque motum Maris ad certas Leges, & ad Calculum revocare docuit. Fatendum quidem eſt gravitatis cauſam ignotam eſſe vel ſaltem obſcuram;

Corpora tamen non ſunt ideò minùs gravia. Sint qui aſſerant Corpora nullo impulſu aut vi externâ, ſed vi quâdam innatâ ſe mutuò appetere; verùm non æquum eſt horum ſomnia veritati afficere. Alii ſtatim confugiant ad immediatum ſupremi Auctoris imperium, aſt neque horum nimia feſtinatio probanda eſt, neque illorum faſtidium qui tot naturæ teſtimoniis non attendunt quoniam cauſa gravitatis eſt obſcura. Vis gravitatis eſt nobis adeò familiaris, ejuſque menſura adeò pro comperto habetur, ut hâc ad alias vires æſtimandas ferè ſemper utamur; quam in Cœlis, non minùs quàm in Terris dominari, & ſecundùm certam legem augeri & minui demonſtravit vir eximius tanta cum evidentia ut majorem fruſtra deſideres in ardua & difficili hâc Philoſophiæ parte, quæ de rerum cauſis agit.

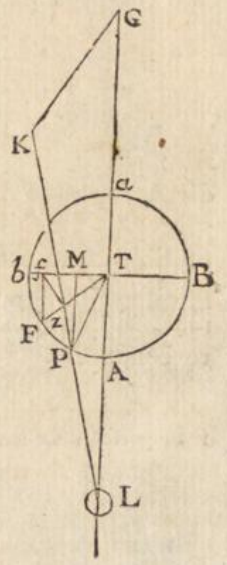
Newtonus argumento ſingulari oſtendit, Lunam urgeri versùs centrum Terræ vi quæ (habitâ ratione diſtantiarum) cum gravitate Corporum terreſtrium planè congruit; quali Terram versùs Lunam pariter urgeri æquo jure cenſendum eſt. Cùm Corpus aliquod versùs aliud pellitur, inde quidem haud ſequitur hoc versùs illud ſimul urgeri. Verùm quid de gravitate Corporum cœleſtium ſentiendum ſit, ex iis quæ comperta ſunt de gravitate Corporum terreſtrium (aliiſque viribus ſimilibus) optimè dignoſcitur; cùm per hanc ad illam agnoſcendam ducamur, ſintque Phænomena omninò ſimilia. Mons gravitat in Terram, & ſi Terra non urgeret montem vi æquali & contraria, Terra à monte pulſa pergeret cum motu accelerato in infinitum. Porrò ſtatus cujuſvis ſyſtematis Corporum (i. e. motus centri gravitatis) neceſſariò turbatur ab omni actione cui non æqualis & contraria eſt aliqua reactio, ita ut vix quidquam perenne aut conſtans dici poſſit in ſyſtemate ſi hæc lex locum non habeat. Cumque Terræ partes ita ſemper in ſe mutuò agant, ut motus centri gravitatis Terræ nullâtenus turbetur à mutuis Corporum aut agentium quorumcunque conflictibus, ſive intra ſive extra ſuperficiem ſitorum; eademque lex obtineat in viribus magneticis, electricis aliiſque, teſte experientiâ, jure concludit Newtonus Lunam non tantùm in Terram, ſed hanc quoque in illam gravitare, & utramque circa commune centrum gravitatis moveri, dum hoc centrum circa totius ſyſtematis centrum gravitatis (*a*) continuò revolvitur.

Gravitatem, cæteris paribus, proportionalem eſſe quantitati materiæ ſolidæ Corporis, accuratiſſima docent experimenta, idemque, è calculo gravitatis Corporum cœleſtium comprobatur; quin gravitatem quoque ſequi

(*a*) Suſpicari licet aliquam obliquitatis Eclipticæ variationem, de qua ſermo eſt apud Aſtronomos, ex motu Solis circa centrum ſyſtematis oriri: indicio erit hanc eſſe Phænomeni cauſam, ſi conſtiterit illam variationem analogiam ſervare cum motu Jovis Planetarum maximi.

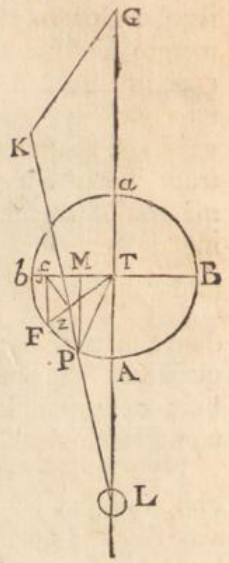
ſequi rationem materiæ Corporis versùs quod dirigitur, ex principio memorato aliiſque argumentis colligitur. Similis eſt ratio aliarum virium quæ in naturâ dominantur. Lucis radii ex. gr. magis refringuntur, cæteris paribus, quò denſiora ſunt Corpora quæ ſubintrant. Terræ partes versùs ſe mutuò gravitant, non versùs illud punctum fictum quod centrum Terræ appellamus; quod cùm rationi & analogiæ naturæ ſit maximè conſentaneum, tum pulcherrimè confirmatur accuratiſſimis experimentis quæ in Boreali Europæ parte nuper inſtituerunt viri clariſſimi ex Academia Regia Pariſienſi. Cauſa gravitatis (quæcumque demum ſit) latè dominatur; cumque ſit diverſa in diverſis diſtantiis, non eſt mirandum, ejus vim pendere quoque à magnitudine illius Corporis, versùs quod alia impellit. Fatemur vim hanc Corpori centrali impropriè tribui; expedit quidem brevitatis gratiâ ſic loqui, id autem ſenſu vulgari non Philoſophico eſt intelligendum.

Hæc breviter tantùm hîc attingimus. Newtonus poſtquàm definiviſſet vim Solis ad aquas turbandas ex differentiâ diametri Æquatoris & Axis Terræ (quam approximatione quâdam ſuâ inveſtigaverat) per regulam auream quærit breviter aſcenſum aquæ ex vi Solis oriundum. Verùm quamvis elevatio aquæ quæ ſic prodit parum à verâ differat, cùm tamen Problemata hæc ſint diverſi generis, quorum priùs pendet à Quadraturâ circuli, poſterius autem à Quadraturâ Hyperbolæ ſeu Logarithmis, ut poſteà videbimus; ſitque dubitandi locus an à priori ad poſteriorem elevationem determinandam, tranſitus adeò brevis ſit omni ex parte legitimus, vel etiam an Methodus quâ figuram Terræ definiverat ſit ſatis accurata; cúmque vires ſubtiliſſimæ motum Maris producant, quæ nullos alios ſenſibiles edunt effectus, adeò ut leviſſima quæque in hac diſquiſitione alicujus momenti eſſe poſſint; propterea exiſtimavi me facturum operæ prætium, ſi aliam aperirem viam quâ calculus in hiſce Problematibus ex genuinis principiis accuratiſſimè inſtitui poterit.




Repetenda imprimis ſunt pauca ex Newtono, poſtea viam diverſam ſequemur. Sit *L* Luna, *T* centrum Terræ, *Bb* planum rectæ *LT* perpendiculare, *P* particula quævis Terræ; ſitque *PM* perpendicularis in planum *Bb*. Repræſentet *LT* gravitatem Terræ mediocrem vel particulæ in centro *T* poſitæ versùs Lunam, ſumatur *LK* ad *LT*, ut eſt $LT^2$ ad $LP^2$, eritque recta *LK* menſura gravitatis particulæ *P* in Lunam. Ducatur *KG* rectæ *PT* parallela, occurratque *LT* productæ, ſi opus eſt, in *G*, & reſolvetur vis *LK* in vires *KG* & *LG*, quarum prior urget particulam

ticulam *P* versùs centrum Terræ eſtque ferè æqualis ipſi *PT*; poſterioris pars *TL* omnibus particulis communis, & ſibi ſemper parallela, motum aquæ non turbat; altera verò pars *TG* eſt quàm proximè æqualis ipſi 3 *PM*: * Imprimis igitur quærendum eſt quænam debeat eſſe figura Terræ fluidæ cujus particulæ versùs ſe mutuò gravitant viribus in inversâ diſtantiarum ratione, duplicatâ decreſcentibus, quæque ſimul agitantur duabus viribus extraneis, quarum altera versùs centrum *T* dirigitur, eſtque ſemper ut *PT* diſtantia particulæ à centro, altera agit in rectà ipſi *TL* parallela eſtque ad priorem ut 3 *PM* ad *PT*. Oſtendemus autem Sectione ſequenti figuram hujus Fluidi eſſe accuratè Sphæroidem quæ gignitur revolutione Ellipſeos circà Axem tranſverſum, ſi Terra ſupponatur uniformiter denſa; atque hinc calculum motûs Maris ex motibus cœleſtibus deducere conabimur.




Obſervandum autem alias cauſas conſpirare ad motus Maris producendos cum inæquali gravitate partium Terræ versùs Lunam & Solem. Motus Terræ diurnus circa Axem ſuum variis modis æſtum Maris afficere videtur, præter illum à Newtono memoratum, quo æſtus ad horam lunarem ſecundam aut tertiam retardatur. 1. Æſtus fit paulò major ob vim centrifugam & figuram ſphæroïdicam, ex motu Terræ oriundam, cùm hæc vis paulò major evadat in partibus Maris altioribus quàm in depreſſioribus. 2. Cùm Maris æſtus fertur vel à Meridie versùs Septentrionem, vel contrà à Septentrione versùs Meridiem, incidit in aquas, quæ diversâ velocitate circa Axem Terræ revolvuntur, atque hinc motus novos cieri neceſſe eſt, ut poſtea dicemus. Porrò ſecundùm Theoriam gravitatis, vis quâ particulæ Maris urgentur versùs Terram ſolidam, (quæ aquâ longè denſior eſt) ſuperat vim quâ versùs aquam urgentur. Vires illæ ſunt quidem exiguæ; cùm autem vires quibus Luna & Sol in aquas agunt, in experimentis pendulorum & ſtaticis nullos producant effectus ſenſibiles, tantos autem motus in aquis Oceani generent, ſuſpicari licet vires tantillas ad aquæ motus augendos aliquâ ex parte conducere.

* Vis hæc paulò major eſt ſi particula *P* ſit in parte Terræ Lunæ obverſa, minor ſi in parte Lunæ aversâ, unde meritò habetur æqualis ipſi 3 P M.

SECTIO

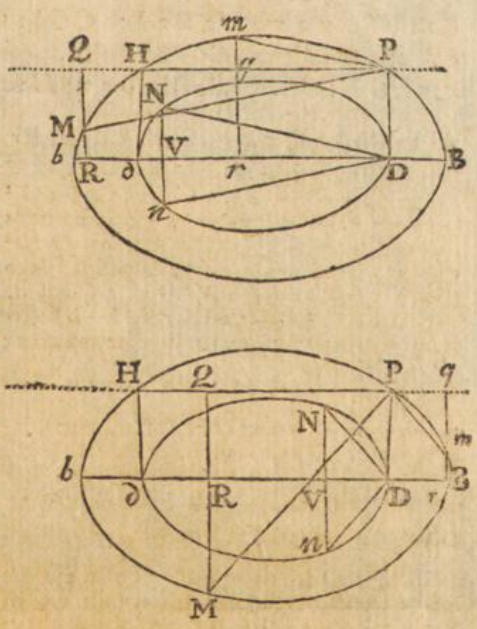
## SECTIO III.

*De Figurâ quam Terra fluida æqualiter denſa indueret ex inæquali particularum gravitate, versùs Lunam aut Solem.*

Expoſitis Phænomenis æſtus Maris & principiis generalibus unde celeberrimi Phænomeni ratio petenda videtur, progredimur nunc ad figuram determinandam quam Terra fluida viribus Lunæ vel Solis ſuprà explicatis, agitata aſſumeret; præmittenda autem ſunt quædam Lemmata quibus hæc diſquiſitio aliàs difficillima facilè perfici poterit.

### (†) LEMMA I.

(†) Hoc Lemma ad demonſtrandum Corol. 4^tum. proponitur, quod Corollarium ad Propoſitionem ſequentem reducitur quæ facillimè Analytice demonſtrari poteſt.




THEOREMA.

A Puncto quovis Ellipſeos, ducantur ad Ellipſim tres lineæ P H, P M, P m, prior quidem P H ſit axi parallela reliquæ P M, P m faciant cum ipſa æquales quoſvis angulos M P H, m P H; à punctis P, H, M & m ducantur perpendiculares ad P H & ad axim P D, H d, Q M R, m q r & ſuper D d deſcribatur Ellipſis ſimilis priori, ducanturque à puncto D ad eam Ellipſim lineæ D N, D n lineis P m, P M parallelæ, denique ducatur N n quæ ſecet axim in V dico quod 2 D V = P Q + P q = D R + D r, ſi puncta Q & q cadant ab eâdem parte puncti P, vel quod 2 D V = P Q − P q = D R − D r ſi puncta Q & q cadant ad partes diverſas puncti P.

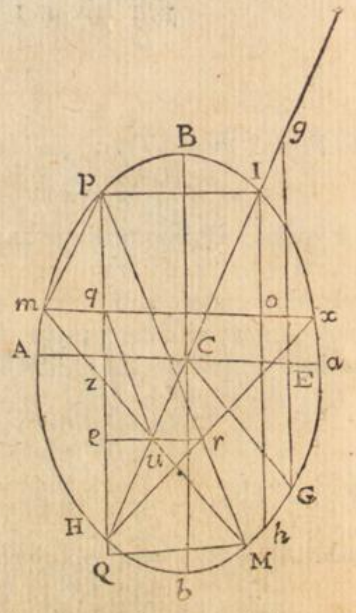
Primo quoniam ex conſtructione, lineæ D N, D n æquales faciunt angulos cum axe D d, facile deducitur lineam N V n eſſe axi perpendicularem ideoque ſi Radius ſit ad Tangentem anguli Q P M, ut 1 ad $t$, & D V dicatur $z$, erit N V = $tz$; & pariter ſi P Q aut P q vel eorum æquales D R aut D r dicantur $x$, M Q vel m q dicentur, $tx$.

Axis major ſit ad minorem in utraque Ellipſi ut $a$ ad $b$ dicaturque B D $f$, D b = $g$, D P = $h$, & D d = $g - f = l$ erit per naturam Ellipſeos $a^2 : b^2 = fg : h^2$, & pariter erit $a^2 : b^2 = z \times \overline{l - z} : t^2 z^2 = l - z : t^2 z$, hinc $a^2 : \frac{b^2}{t^2} = l - z : z$ & Componendo $\frac{t^2 a^2 + b^2}{t^2} : \frac{b^2}{t^2} = a^2 t^2 + b^2 : b^2 = l : z = \frac{b^2 l}{a^2 t^2 + b^2} = DV$.

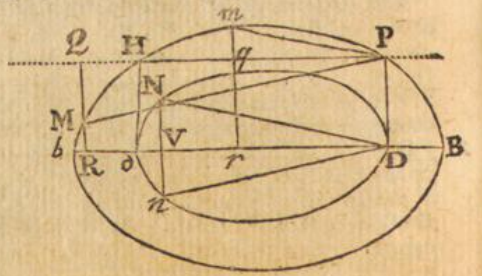
In primo autem caſu in quo Q & q ſunt ab eadem parte puncti P erit R M = $h - tx$

Sit *Abab* Ellipsis, *C* centrum, *HI* diameter quævis, *Mm* ordinata ad diametrum *HI* in puncto *u*, ex *H* & *M* ducantur rectæ *HP* & *mx* parallelæ, duabus quibusvis diametris conjugatis; & sibi mutuò occurentes in *q*; jungantur *qu* & *PM*, atque hæ rectæ erunt sibi mutuò parallelæ.

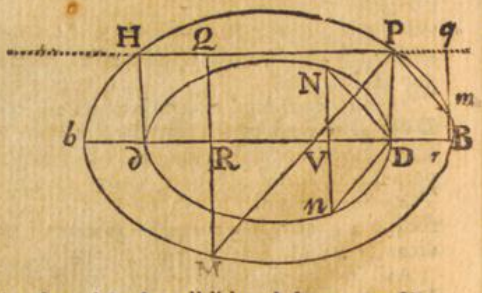
Occurrat recta *HP*, ordinatæ *Mm* in *z*, & rectæ *MQ* (quæ parallela sit ipsi *mq*) in *Q*. Sint *CG*, *CA* & *CB* semidiametri respectivè parallelæ rectis *Mm*, *mx* & *HP*. Ducatur *GE* parallela ipsi *CB* & producatur donec occurrat semidiametro *CI* in *g*. Ex natura Ellipseos Rectangulum $Mz \times zm : Hz \times zP :: CG^2 : CB^2$; & ob parallelas *CG* & *Mm*, erit $qz : zm :: GE : CG$. Unde $Mz \times qz : Hz \times zP ::$




vel $tx-h$ & $rm = h+tx$, & BR aut Br, $f+x$; & Rb aut rb, $g-x$; hinc ex naturâ Ellipseos erit $a^2 : b^2 = \overline{f+x} \times \overline{g-x} : \overline{h \mp tx}^2$
$= fg + gx - fx - xx : h^2 \mp 2htx + t^2x^2$
$= l x - x^2 : \mp 2htx + t^2x^2$ (demptis ex utroque termino respective terminis $fg : h^2$ qui sunt in eâdem ratione, & posito $l$ loco $g-f) = l-x : \mp 2ht + t^2x$, atque hinc habetur $a^2t^2x \mp 2a^2ht = b^2l - b^2x$ & transpositione factâ reductisque terminis, fit $x = \frac{b^2l \pm 2a^2ht}{a^2t^2+b^2}$. Quare si sumatur summa duarum linearum DR, Dr, quæ per singulos valores $x$ exprimuntur erit $DR + Dr = PQ + Pq = \frac{2b^2l}{a^2t^2+b^2}$ duplum valoris DV prius inventi.



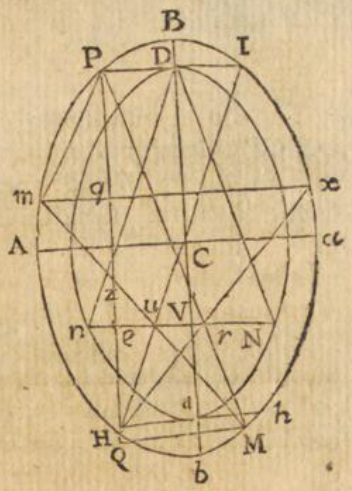

In altero verò casu in quo Q & q hinc inde à puncto P cadunt, erit $RM = tx-h$, & $rm = h-tx$, erit $BR = f+x$ & $Br = f-x$, $Rb = g-x$ & $rb = g+x$. Unde ex natura Ellipseos erit
$a^2 : b^2 = f \pm x \times g \mp x : h^2 - 2htx + t^2x^2$
$= fg \pm gx \mp fx - x^2 : h^2 - 2htx + t^2x^2$
$= \pm l x - x^2 \cdot 2htx + t^2x^2$ (demptis terminis $fg$; $h^2$ & adhibito $l$ loco $g-f$)
$= \pm l - x : -2ht + t^2x$, hincque obtinetur $a^2t^2x - 2htra^2 = \pm b^2l - b^2x$ & transpositione factâ reductisque terminis fit $x = \frac{\pm b^2l + 2htra^2}{a^2t^2+b^2}$. Quare si sumatur differentia duorum DR, Dr quæ per singulos valores $x$ exprimuntur erit $DR - Dr = PQ - Pq = \frac{2b^2l}{a^2t^2+b^2}$ duplum valoris DV prius inventi, ergo $2DV = PQ \mp Pq$ prout Q & q sunt ab eâdem vel à diversâ parte puncti P. Q. E. D.



$CG \times GE : CB^2$. Verùm $Hz \times zP : zu \times zP :: Hz : zu :: Gg : CG$. Quare ex æquo $Mz \times zq : zu \times zP :: Gg \times GE : CB^2$. Eſt autem Rectangulum ſub $Gg$ & $GE$ æquale quadrato ex ſemidiametro $CB$ per notam proprietatem ellipſeos, cùm $CI$ ſit conjugata ſemidiametro $CG$, & $CB$ ipſi $CA$. Proinde $Mz \times zq = zu \times zP$, & $zq : zu :: zP : zM$, adeóque $qu$ parallela rectæ $PM$. q. e. d.

Cor. 1. Recta $PQ$ dividitur harmonicè in $q$ & $z$ vel $PQ : Pq :: Qz : qz$. Quippe ducatur $ue$ parallela ipſi $mx$, occurratque rectæ $HP$ in $e$, tum erit $Pz : qz :: PM : qu$ (ob parallelas $PM$, $qu$) $:: PQ : qe$. Unde $Pq : qz :: Pe : qe :: qe : ez :: Pe + qe : qe + ez ::$ (quoniam $Qe$, $eq$ ſunt æquales) $PQ : Qz$.

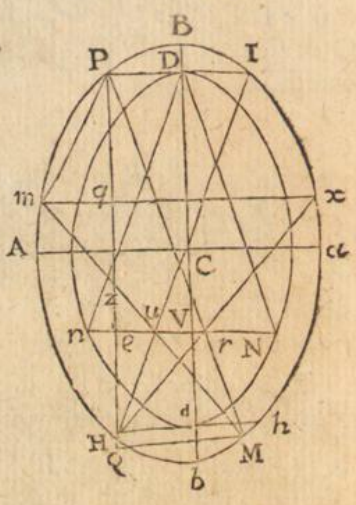
Cor. 2. Occurrat recta $mx$ Ellipſi in $x$, jungatur $Hx$ quæ occurrat rectæ $PM$ in $r$, juncta $ur$ erit parellela $mx$. Quippe ſit $Ih$ parallela rectæ $HP$ & occurrat ipſi $mx$ in $o$; tum $ox$ erit æqualis rectæ $qm$ & $Io : ox :: Pq : qm :: PQ : QM$; adeóque $Ix$ erit parallela ipſi $PM$. Verùm cùm $IH$ ſit diameter Ellipſeos & ad $x$ punctum in Ellipſi ſitum ductæ ſint rectæ $Ix$, $Hx$ ab extremitatibus diametri $IH$, erunt hæ parallelæ duabus diametris conjugatis, ex naturâ Ellipſeos. Quare cùm ex punctis $H$ & $M$ eductæ ſint duæ rectæ $Hx$ & $PM$ reſpectivè parallelæ duabus diametris conjugatis, quæ ſibi mutuò occurrunt in $r$, juncta $ur$ erit parallela rectæ $xm$ per hoc Lemma.




Cor. 3. Sit recta $HP$ nunc parallela Axi Ellipſeos, eritque Angulus $HPM$ æqualis Angulo $HPm$, quoniam $QM : qm :: Qz : qz :: PQ : Pq$ per Cor. 1. Ducantur porrò $Hh$ & $PI$ parallelæ alteri Axi $Aa$ & occurrant Axi $Bb$ in $D$ & $d$; ſuper Axem $Dd$ deſcribatur Ellipſis ſimilis Ellipſi $ABab$ & ſimiliter poſita cui occurrat recta $ur$ producta in $N$ & $n$; occurrat $ur$ Axi $Dd$ in $V$, eritque $VN$ vel $Vn$ æqualis rectæ $er$, & ſi jungantur $Dn$, $DN$ erunt hæ rectæ reſpectivè parallelæ rectis $PM$, $Pm$. Nam $Pe : er :: Pq : qm$ & $He : er :: Hq : qx$, unde $He \times Pe : er^2 :: Hq \times qP : mq \times qx :: CB^2 : CA^2$. Sed Rectangulum $DV \times Vd : VN^2 :: CB^2 : CA^2$; $dV = He$, $DV = Pe$, adeóque $DV \times Vd = He \times Pe$, unde $VN^2 = er^2$, & $VN = er$, $PM$ parallela rectæ $DN$ & $Pm$ rectæ $Dn$.

Cor. 4. Hinc ſequitur conversè quod ſi $Nn$ ſit ordinata ab interiori Ellipſi ad Axem $Dd$ & $DP$ perpendicularis Axi $Dd$ occurrat Ellipſi exteriori in $P$; jungantur $DN$ & $Dn$ hiſque parallelæ $PM$, $Pm$

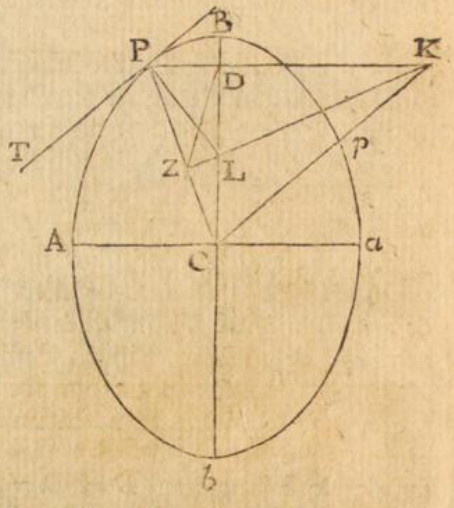
occurrant Ellipſi exteriori in $M$ & $m$; ducatur $PH$ parallela Axi $Dd$, in quam ſint perpendiculares $MQ$ & $mq$, tum $PQ + Pq$ (vel $2Pe$) erit æqualis $2DV$ punctis $Q$ & $q$ cadentibus ad eaſdem partes puncti $P$, & $PQ - Pq = 2DV$ cum $Q$ & $q$ ſunt ad contrarias partes puncti $P$.




## Lemma II.

Recta $PL$ perpendicularis Ellipſi $ABab$ in $P$, occurrat Axi $Bb$ in $L$, & ex puncto $L$ ſit $LZ$ perpendicularis in ſemidiametrum $CP$, eritque Rectangulum $CPZ$ contentum ſub ſemidiametro $CP$ & interceptâ $PZ$ æquale quadrato ex ſemiaxi $CA$.

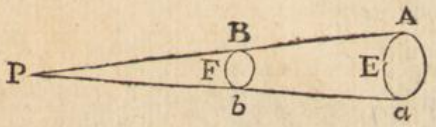
Sit $Cp$ ſemidiameter conjugata ipſi $CP$, ducatur $PD$ perpendicularis in Axem $Bb$ & producatur donec occurrat ſemidiametro $Cp$ in $K$, jungatur $KZ$. ſitque $PT$ tangens Ellipſeos in puncto $P$. Ob Angulos rectos $LDP$, $LZP$, $LPT$ circulus tranſibit per quatuor puncta $L$, $D$, $P$, & $Z$, & continget rectam $PT$ in $P$, adeóque Angulus $PDZ$ æqualis erit Angulo $CPT$ vel $PCK$. Proinde circulus tranſibit per quatuor puncta $C$, $K$, $D$ & $Z$; Angulus $CZK$ æqualis erit recto $CDK$, $KZ$ tranſibit per punctum $L$ & ex naturâ circuli $CP \times PZ = DP \times PK = CA^2$. q. e. d. (*a*)




Lem-

(*a*) Proprietates bis in hoc & præcedenti Lemmate demonſtratæ analogicè facilè ad hyperbolam transferuntur.

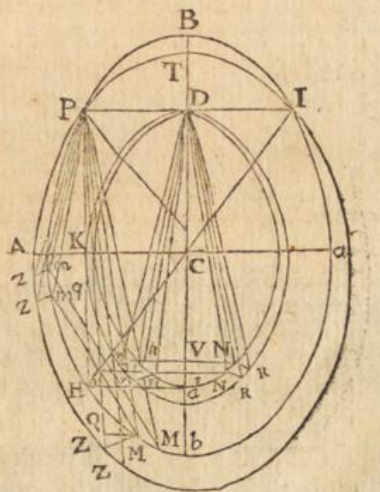
## LEMMA III.




Ponamus particulas corporum versùs se mutuò gravitare viribus decrescentibus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum à se invicem, sintque *PAEa*, *PBFb* similes pyramides vel coni ex materiâ hujusmodi homogeneâ compositi, eritque gravitas particulæ *P* in solidum *PAEa* ad gravitatem ejusdem particulæ in solidum *PBFb* ut *PA* ad *PB*, vel ut homologa quævis latera horum solidorum.

Gravitas enim particulæ *P* in superficiem quamvis *AEaA* puncto *P* concentricam est ut superficies hæc directè & quadratum radii *PA* inversè, adeóque est semper eadem in quâvis distantiâ *PA*. Quare gravitas particulæ *P* versùs totum solidum *PAEa* erit ad gravitatem ejusdem particulæ versùs totum solidum *PBFb* ut *PA* ad *PB*.

COR. 1. Hinc gravitates quibus particulæ similiter sitæ respectu solidorum similium & homogeneorum versùs hæc solida urgentur, sunt ut distantiæ particularum à punctis similiter sitis in ipsis solidis, vel ut latera quævis solidorum homologa. Quippe hæc solida resolvi possunt in similes conos vel pyramides, vel similia horum frustra, quæ vertices habebunt in particulis gravitantibus.

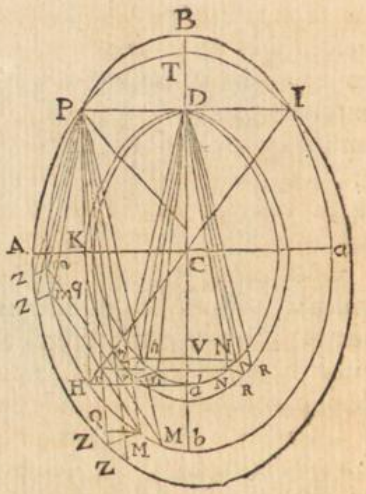



COR. 2. Hinc etiam facilè sequitur (*) quòd si annulus ellipticus, figuris similibus *DBab*, *DndN* terminatus, circà Axem alterutrum revolvatur, gravitatem particulæ intra solidum sic genitum sitæ, vel in interiori ejus superficie positæ, versùs hoc solidum evanescere; quoniam si recta quævis Ellipsibus hisce similibus & similiter positis occurrat, æqualia semper erunt rectæ segmenta extrema quæ ab Ellipsibus intercipiuntur (ut facilè ostenditur ex naturâ harum figurarum) adeóque vires æquales & oppositæ in hoc casu se mutuò destruent. Hinc verò sequitur quòd si *ABab* sit Sphærois genita motu Ellipseos circà alterutrum Axem, sintque *B* & *D* particulæ quævis in eodem semidiametro sitæ, gravitatem particulæ *B* versùs Sphæroidem fore ad gravitatem particulæ *D* ut distantia *CB* ad distantiam *CD*, per Corollarium præcedens.



(*) Vid. Newt. Lib. I. Prop. XCI. Cor. 3.

## Lemma IV.




Sit *ABab* Sphærois genita motu semiellipseos *ABa* circà Axem *Aa*, *P* particula quævis in superficie solidi, sit *PK* Axi normalis in *K*; & *PD* Axi parallela occurrat plano *Bb* (quod Axi supponitur normale) in *D*. Resolvatur vis quâ particula *P* gravitat versùs Sphæroidem in duas vires, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem, eritque prior æqualis vi quâ particula *K* in Axi sita tendit ad centrum solidi, posterior autem æqualis vi quâ particula *D* urgetur versùs idem centrum.

Producatur *PK* donec rursùs occurrat Ellipsi generatrici in *H*, ducatur *Hd* parallela Axi *Aa* quæ occurrat Axi *Bb* in *d*, concipiamus solidum *DndN* simile ipsi *BAba* & similiter positum describi super Axem *Dd*. Horum solidorum Sectiones ab eodem plano resectæ erunt semper Ellipses similes & similiter positæ, uti notum est & facilè ostenditur. Sint igitur *BAba*, *DndN* hujusmodi figuræ à plano *PAbIBP*, quod semper transire ponatur per datam rectam *PDI* resectæ ex similibus hisce solidis. Contineat planum *PzZIT* cum plano priori Angulum quàmminimum & faciat Sectiones similes *PzZIT*, *DrRD* & similiter positas in prædictorum solidorum superficiebus. Hisce positis, imprimis ostendemus vim quâ particula *P* urgetur versùs duo frusta quæ planis *PbI*, *PZI* & planis *PBI*, *PTI* continentur, si reducatur ad directionem *PK*, æqualem fore vi quâ particula *D* urgetur versùs frustum planis *DnND*, *DrRD* terminatum.

Sint enim *Nn*, *N'n'* duæ ordinatæ ex interiori Ellipsi ad Axem *Dd*; sint (*a*) *PM*, *Pm*, *PM'* & *Pm'* respectivè parallelæ rectis *DN*, *Dn*, *DN'* & *Dn'*; sint porrò plana *DNR*, *DN'R'*, *Dnr*, *Dn'r'*, *PMZ*, *PM'Z'*, *Pmz*, *Pm'z'* plano *PbIB* perpendicularia quæ alteri plano, *PzZIT* occurrant in rectis *DR*, *DR'*, *Dr*, *Dr'*, *PZ*, *PZ'*, *Pz*, *Pz'*, respectivè. His positis, quoniam Anguli *NDN'* & *MPM'*, *nDn'* & *mPm'*,

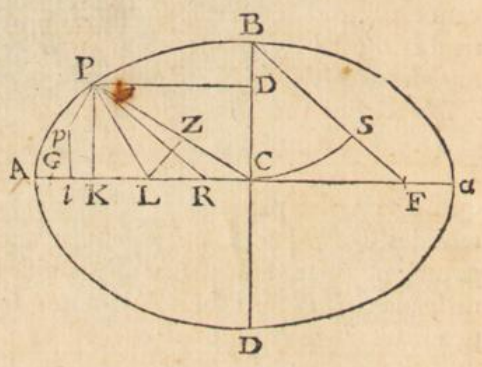
(*a*) In hac Figura describenda rectas *NR*, *N'R'*, &c. non duximus secundùm regulas perspectivæ, sed eâ ratione quâ facillimè dignosci possint.

$mPm'$, ponuntur ſemper æquales; & rectæ $PM$ & $DN$, $Pm$ & $Dn$, æqualiter ſemper inclinantur ad $PI$ communem planorum Sectionem; ſi Angulus $NDN'$ & inclinatio planorum $PbTB$, $PZIT$ ad ſe invicem continuò minui ſupponantur donec evaneſcant, erunt gravitates particulæ $D$, in Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$ & particulæ $P$ in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ ultimo in ratione rectarum $DN$, $Dn$, $PM$ & $Pm$ reſpectivè per Lemma 3. Eædemque vires ſecundùm rectas Axi $Aa$, perpendiculares æſtimatæ erunt ut rectæ $DV$, $DV$, $PQ$, $Pq$ reſpectivè. Unde cùm $PQ \mp Pq = 2DV$ per Corol. 4. Lem. 1. ſequitur vim quâ particula $P$ urgetur versùs Axem $Aa$, gravitate ſuâ in Pyramides $PMM'Z'Z$, $Pmm'z'z$ æqualem eſſe vi, quâ particula $D$ urgetur gravitate ſuâ versùs Pyramides $DNN'R'R$, $Dnn'r'r$. Quare ſi plana $DNR$, $PMZ$ ſibi mutuò ſemper parallela & plano $PbIB$ perpendicularia moveantur ſemper circà puncta $D$ & $P$ (rectis ſcilicet $DN$, $PM$ procedentibus ſemper in plano $PbIB$, & rectis $DR$, $Pz$ in plano $PZIT$) erunt vires quibus particula $P$ urgetur versùs Axem ex gravitate ſuâ in fruſta motu planorum $PMZ$, $Pmz$ ſic deſcripta, æquales ſemper viribus, quibus particula $D$ urgetur versùs eundem Axem gravitate ſuâ in fruſta motu planorum $DNR$, $Dnr$ deſcripta; unde ſequitur particulam $P$ urgeri eâdem vi ſecundùm rectam $PK$, gravitate ſuâ in fruſtra planis $PbI$, $PzI$, & planis $PBI$, $PTI$ contenta, quâ particula $D$ tendit versùs fruſtra planis $DnND$, $DrRD$ terminata. Proinde cùm hæ vires ſecundùm rectas Axi totius ſolidi perpendiculares æſtimatæ ſint etiam æquales, & par ſit ratio virium quibus particulæ $P$ & $D$ urgentur versùs fruſta quævis alia ſimiliter ex ſolidis reſecta, ſequitur particulam $P$ æqualiter urgeri versùs Axem gravitate ſuâ in ſolidum exterius, & particulam $D$ gravitate ſuâ in ſolidum ſimile interius, vel etiam in ſolidum exterius, cùm hæ vires ſint eædem per Corol. 2. Lem. 3.

Simili planè ratione colligitur vim, quâ particula $P$ urgetur ſecundùm rectam Axi Parallelam æqualem eſſe vi, quâ particula $K$ in Axe ſita urgetur versùs centrum ſolidi.

COR. 1. Particulæ igitur quævis Sphæroidis æqualiter ab Axe vel Æquatore ſolidi diſtantes æqualiter versùs Axem vel Æquatorem urgentur. Vireſque quibus particulæ quævis urgentur versùs Axem ſunt ut illarum diſtantiæ ab Axe, & vires quibus urgentur versùs planum Æquatoris, ſunt ad ſe invicem, ut illarum diſtantiæ ab hoc plano.

COR. 2. Repræsentet $A$ vim quâ Sphærois urget particulam in Axis termino $A$ sitam, $B$ vim quâ idem solidum urget particulam $B$ in circumferentia circuli medii inter $A$ & $a$ positam; sumatur $KR$ ad $KC$, ut $\frac{A}{CA}$ est ad $\frac{B}{CB}$, jungatur $PR$, & particula $P$ tendet versùs Sphæroidem in rectâ $PR$, vi quæ huic rectæ semper est proportionalis. Vis enim quâ particula $D$ urgetur versùs centrum solidi, est ad $B$, ut $CD$ ad $CB$, per Cor. 2. Lem. 3. Similiter vis quâ particula $K$ urgetur versùs solidi centrum est ad $A$, ut $CK$ ad $CA$. Quare per Lemma 4. vis quâ particula $P$ urgetur secundùm rectam $PK$ Axi normalem est ad vim, quâ urgetur secundùm rectam $PD$ Axi parallelam, ut $\frac{PK \times B}{CB}$ ad $\frac{CK \times A}{CA}$; adeóque ut $PK \times KC$ ad $CK \times KR$. i. e. ut $PL$ ad $KR$ ex constructione. Quare particula $P$ urgetur secundùm rectam $PR$, his viribus conjunctis, & vis composita est ad $B$, ut $PR$ ad $BC$. Quo verò pacto vires $A$ & $B$ computari possint postea ostendemus.




## PROPOSITIO I.

### THEOREMA FUNDAMENTALE.

Constet Sphærois $ABab$ materia fluida, cujus particulæ versùs se mutuò urgeantur viribus in inversâ duplicatâ ratione distantiarum decrescentibus; agantque simul duæ vires extraneæ in singulas Fluidi particulas, quarum altera tendat versùs centrum Sphæroidis, sitque semper proportionalis distantiis particularum ab hoc centro; altera agat secundùm rectas Axis solidi Parallelas, sitque semper proportionalis distantiis particularum à plano $Bb$ Axi normali; & si semiaxes $CA$, $CB$ Ellipseos generatricis sint inversæ proportionales viribus totis, quæ agunt in particulas æquales in extremis Axium punctis $A$ & $B$ sitas, erit totum Fluidum in æquilibrio.

Ut hæc Propositio nostra primaria clarissimè demonstretur, ostendemus imprimis vim compositam ex gravitate particulæ cujusvis $P$ & duabus viribus extraneis, semper agere in rectâ $PL$, quæ est ad superficiem Sphæroidis semper normalis. 2. Fluidum in rectâ quâvis $PC$ à superficie ad centrum ductâ, ejusdem ubique esse ponderis. 3. Fluidum in canalibus

canalibus quibuſvis à ſuperficie ad datam quamvis particulam intra ſolidum ductis, eâdem ſemper vi particulam illam urgere.

1. Vires totæ quæ agunt in particulas $A$ & $B$ dicantur $M$ & $N$, quæ ex hypotheſi ſunt in ratione Axium $CB$ & $CA$. Reſolvatur vis prior extranea quæ agit ſecundùm rectam $PC$ in vires duas, alteram Axi parallelam, alteram eidem perpendicularem; eruntque hæ vires ſemper ut rectæ $PK$ & $KC$. Unde cùm vis quâ gravitas particulæ $P$ urget eam ſecundùm rectam $PK$ ſit etiam ut $PK$, per Lemma ſuperius, ſequitur vim totam quâ particula $P$ urgetur ſecundùm rectam $PK$, eſſe ad $N$, ut $PK$ ad $CB$. Vires tres agunt in particulam $P$ ſecundùm rectam $PD$ Axi parallelam, particulæ ſcilicet gravitas & duæ vires extraneæ, quæ ſingulæ variantur in ratione rectæ $PD$ vel $KC$; adeóque vis ex his tribus reſultans erit ad $M$ ut $CK$ ad $CA$. Vis igitur quâ particula $P$ urgetur ſecundùm rectam $PK$ eſt ad vim quâ urgetur ſecundùm rectam $PD$ ut $\frac{N \times PK}{CB}$ ad $\frac{M \times KC}{CA}$ ſive (cùm $M:N::CB:CA$) ut $PK \times CA^2$ ad $CK \times CB^2$. i. e. (quoniam ſi $PL$ Ellipſi generatrici perpendicularis occurrat Axi $Aa$ in $L$, erit $KC$ ad $KL$, ut $CA^2$ ad $CB^2$, ex notâ Ellipſis proprietate) ut $PK \times KC$ ad $KC \times KL$, adeóque ut $PK$ ad $KL$. Unde vis compoſita particulam urget in recta $PL$, quæ ad ſuperficiem Fluidi ponitur perpendicularis; eſtque ſemper ut recta hæc $PL$, cùm vires ſecundùm rectas $PK$ ſint ſemper ut $PK$.

2. Sit $LZ$ normalis in ſemidiametrum $CP$, & vis quâ particula $P$ urgetur versùs centrum, erit ut recta $PZ$ per vulgaria Mechanicæ Principia, & pondus Fluidi in rectâ $PC$ ut rectangulum $CP \times PZ$, quod ſemper eſt æquale quadrato ex ſemiaxi $CB$ per Lemma II. Centrum igitur æqualiter undique urgetur, eſtque Fluidum in æquilibrio in $C$.

3. Sit $p$ particula quævis in ſolido ubicunque ſita, $Pp$ recta quævis à ſuperficie ad particulam $p$ ducta; ſint $PK$, $pl$ normales in Axem $Aa$, & vis quâ particula $p$ urgetur pondere Fluidi in rectâ quâvis $Pp$ ſecundùm hanc rectam, facili calculo quem brevitatis gratiâ omitto, invenietur æqualis $\frac{N}{2CB} \times \overline{PK^2 - pl^2} - \frac{M}{2CA} \times \overline{Cl^2 - CK^2} =$ (cùm $M:N::CB:CA$) $\frac{M \times CA^2 \times PK^2 + M \times CK^2 \times CB^2 - M \times CA^2 \times pl^2}{2CB^2 \times CA} - \frac{M \times CB^2 \times Cl^2}{2CB^2 \times CA} =$ (cùm $PK^2 : CA^2 - CK^2 :: CB^2 : CA^2$, & ſi $CG$ ſit ſemiaxis Ellipſeos per $p$ ductæ ſimilis Ellipſi $ABab$, & ſimiliter ſitæ, $pl^2 : CG^2 - Cl^2 :: CB^2 : CA^2$) $\frac{M \times CA - M \times CG}{2}$ adeóque cùm hæc quantitas à ſitu puncti $P$ non pendeat, vis hæc eſt ſemper eadem, ſi detur locus particulæ $p$; quæ proinde cùm undique æqualiter urgeatur, Fluidum erit ubique in æquilibrio.

COR. I. Sit ut in Cor. 2. Lemmatis IV. $A$ vis gravitatis in Sphæroidem in loco $A$, $B$ vis gravitatis in eandem in loco $B$, $V$ vis $KG$ in mediocri ſuâ quantitate in ſuperiore Sectione expoſitâ, quâ Luna vel Sol aquam Sphæroidis deprimit in diſtantia $d$, quæ ponitur mediocris inter $CA$ & $CB$. Sit $CA=a$, $CB=b$, eritque vis $N$, quâ particula $B$ versùs $C$ urgetur, æqualis $B+\frac{bV}{d}$, & $M=A+\frac{aV}{d}-\frac{3aV}{d}=A-\frac{2aV}{d}$. Unde per hanc Propoſitionem ſi $a:b::B+\frac{bV}{d}:A-\frac{2aV}{d}$, erit Fluidum in æquilibrio. Atque hinc ex datis $A$, $B$ & $V$ in terminis $a$ & $b$ ſpecies figuræ innoteſcet. Eſt $Aa-Bb=\frac{2a^2V}{d}+\frac{b^2V}{d}$.

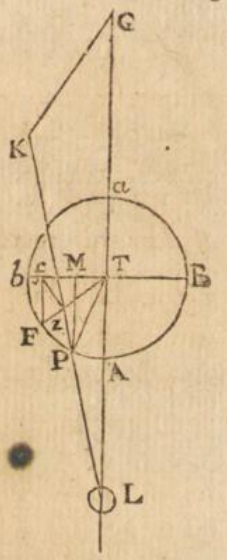
COR. 2. Cùm vis $V$ (ſive ex inæquali gravitate particularum versùs Lunam, vel versùs Solem oriatur) ſit exigua admodum reſpectu virium $A$ & $B$, & differentia inter $a$ & $b$ admodum parva, ducatur $a=d+x$ & $b=d-x$, eritque $Bd-Bx+V\times\frac{\overline{d-x}^2}{d}=Ad+Ax-2V\times\frac{\overline{d+x}^2}{d}$, & neglectis terminis ubi $xx$ reperitur $Bd-Bx+Vd-2Vx=Ad+Ax-2Vd-4Vx$, unde $Bd-Ad+3Vd=Ax+Bx-2Vx$; adeóque $x:d::B-A+3V:B+A-2V$; & differentia altitudinis aquæ in $A$ & $B$ (ſeu $2x$) ad ſemidiametrum mediocrem $d$ ut $2B-2A+6V$ ad $B+A-2V$, vel quàm proximè ut $B-A+3V$ ad gravitatem versùs Sphæroidem mediocrem.

COR. 3. In præcedentibus Corollariis ſuppoſuimus $d=\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}CB$; verùm ſi $d$ denotet aliam quamvis diſtantiam ubi vis $KG$ ponatur æqualis ipſi $V$, ſitque $e=\frac{1}{2}CA+\frac{1}{2}CB$, erit $x:e::B-A+\frac{3eV}{d}:B+A-\frac{2eV}{d}$.

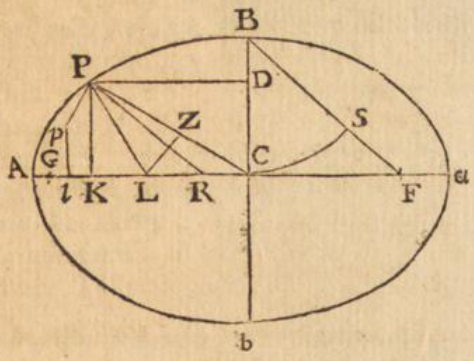
COR. 4. Per vim $V$ in his Corollariis intelleximus vim vel Solis vel Lunæ, & figuram conſideravimus, quam Terra fluida homogenea indueret ſi hæ vires ſeorsùm in eam agerent. Sit nunc Luna Soli conjuncta vel oppoſita, & ſimul agant in Terram. In hoc caſu vires Luminarium conſpirant ad aquam tollendam in $A$ & $a$, eamque deprimendam in $B$ & $b$, & eaſdem ubique ſervant leges. Unde erit etiam in hoc caſu fluidum in æquilibrio, ſi vis tota quæ agit in loco $A$, ſit ad vim totam quæ agit in loco $B$ ut $CB$ ad $CA$; adeóque ſi $V$ nunc deſignet ſummam virium, quibus Sol & Luna aquam deprimit in rectis $Tb$, $TB$ ad mediocrem diſtantiam fluidum erit in æquilibrio, ſi $b:a::A-\frac{2aV}{d}:B+\frac{bV}{d}$, vel $x$ ad $d$ ut $B-A+3V$ ad $B+A-2V$ quàm proximè, ut priùs.

COR. 5. Sit nunc Luna in recta $Aa$, Sol in recta $Bb$, & quoniam

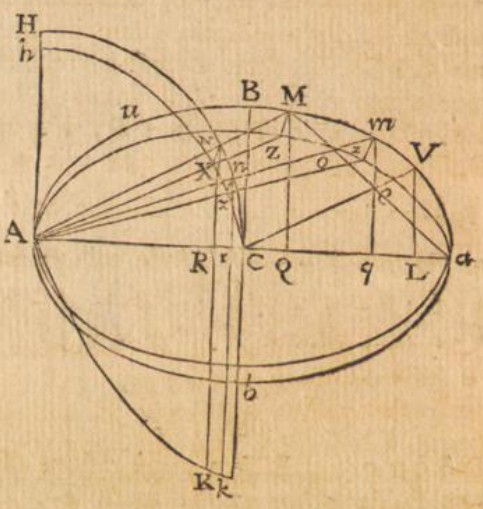
niam Lunæ vis potior est, Axis transversus figuræ generatricis transeat per Lunam, conjugatus per Solem; & si vis tota quæ agit in loco $A$ sit ad vim totam quæ agit in loco $B$ ut $CB$ ad $CA$ erit Sphærois fluida in æquilibrio etiam in hoc casu. Sit $s$ vis quâ Sol deprimit aquam in rectis $TA$, $Ta$ ad mediocrem à centro $C$ distantiam, $l$ vis quâ Luna aquam deprimit in rectis $TB$, $Tb$ ad æqualem distantiam; eritque vis tota quæ agit in loco $A$ æqualis $A-\frac{2al}{d}-\frac{as}{d}$, vis tota quæ agit in loco $B$ æqualis $B+\frac{bl}{d}-\frac{2bs}{d}$. Unde colligitur ut in Corol. 2. $x:d::B-A+3l-3s:B+A-2l-2s::$ (si $l-s$ nunc dicatur $V$) $B-A+3V.\ B+A-2V$, ut priùs.




SCHOL. Eâdem planè ratione ostenditur quòd si $BabA$ sit Sphærois fluida oblata genita motu semiellipsis $BAb$ circa Axem minorem $Bb$; & vertatur hæc Sphærois circa eundem Axem tali motu ut gravitas versùs Sphæroidem hanc in Polo $A$ sit ad excessum quo gravitas in loco $B$ superat vim centrifugam in $B$ ex motu Sphæroidis circa Axem oriundam ut $CB$ ad $CA$, Fluidum fore ubique in æquilibrio. Unde sequitur figuram Terræ, quâtenus ex vi centrifugâ à motu diurno oriunda immutatur, esse Sphæroidem oblatam qualis gignitur motu semiellipsis $Bab$ circa Axem minorem (si materia Terræ pro æqualiter densa habeatur) semidiametrum Æquatoris esse ad semiaxem ut gravitas sub Polis in Terram est ad excessum gravitatis supra vim centrifugam sub Æquatore, corpus in loco quovis $P$ tendere versùs Terram vi quæ est semper ut recta $PL$ perpendicularis Ellipsi generatrici & Axi majori occurrens in $L$, & mensuram denique gradus in Meridiano esse semper ut cubus ejusdem rectæ $PL$. Hæc omnia accuratè demonstrantur ex hac Propositione; quæ quamvis in disquisitione de figurâ Terræ eximii usus sint, hic obiter tantum monere convenit.



## LEMMA V.




Sit figura quævis *ABa*: describatur circulus *CNH* centro *A*, radio quovis dato *AC*; ex *A* educatur recta quævis *AM* occurrens figuræ *ABa* in *M*, & circulo in *N*; sint *MQ* & *NR* perpendiculares in Axem datum *Aa*, sit *KR* semper æqualis abciſſæ *AQ*, & vis quâ particula *A* urgetur versùs ſolidum motu figuræ *ABa* circa Axem *Aa* genitum erit ut area quam generat ordinata *KR* directè & radius *AC* inversè.

Occurrat alia recta ex *A* educta figuræ in *m* & circulo in *n*, ſintque *mq* & *nr* normales in Axem *Aa*. Sit *AZza* alia Sectio ſolidi per Axem, cui occurrant plana *AMz*, *Amz* ipſi *AMa* normalia in rectis *AZ*, *Az*, quæ circulum radio *AC* in plano *AZza* deſcriptum ſecent in *X* & *x*; denique arcus *Mo* circularis centro *A* deſcriptus occurrat *Am* in *o*. His poſitis, minuatur angulus contentus planis *AMa*, *AZa*, & ſimul angulus *MAm* donec evaneſcant, & ultima ratio vis quâ particula *A* tendit ad Piramidem *AMZzm* ad vim quâ urgetur versùs Piramidem *ANXxn* erit rectæ *AM* ad *AN*, vel *AQ* ad *AR*, per Lem. II. vis hujus Piramidis eſt ut vis ſuperficiei *NXxn* in rectam *AN*, adeóque ut $\frac{NX \times Nn}{AN^2} \times AN = \frac{NX \times Nn}{AN}$, vel ut $\frac{NR \times Nn}{AN}$ (quoniam *NX* eſt ut *NR*) i. e. ut *Rr*; ejuſdemque vis ad directionem Axis reducta ut $Rr \times \frac{AR}{AN}$; quare vis Piramidis *AMZzm* ad eandem directionem reducta $Rr \times \frac{AQ}{AC} = \frac{Rr \times KR}{AC}$. Vis igitur quâ particula *A* urgetur versùs fruſtum ſolidi planis *AMa*, *Aza* contenti, eſt ut area quam generat ordinata *KR* directè & radius *AC* inversè; cúmque ſolidum ſit rotundum, motu ſcilicet figuræ circa Axem *Aa* genitum, par erit ratio vis quâ particula urgetur versùs integrum ſolidum.

COR. Vis quâ particula *A* urgetur in ſolidum eſt ad vim quâ urgetur versùs Sphæram ſuper diametrum *Aa* deſcriptam ut area quam gene-

generat ordinata $KR$ ad $\frac{1}{3}\ CA^2$. Quippe si $AMa$ sit circulus, erit $AQ$ ad $Aa$ ut $AQ^2$ ad $AM^2$, vel $AR^2$ ad $AN^2$. Unde in hoc casu erit $KR=\frac{2\,AR^2}{AC}$, & area $ARK$ (quam generat ordinata $KR$) $=\frac{2\,AR^3}{3\,AC}$, adeóque area tota motu ordinatæ $RK$ genita erit $\frac{2}{3}\ CA^2$.

## PROPOSITIO II.

### PROBLEMA.

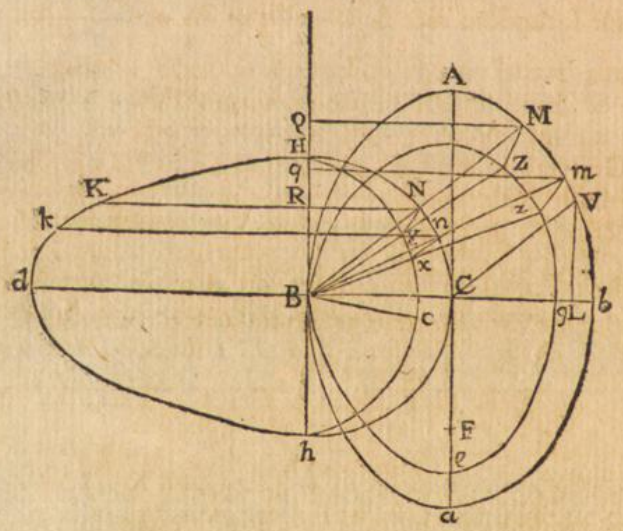
*Invenire gravitatem particulæ A in extremitate Axis transversi sitæ versùs Sphæroidem oblongam.*

Cæteris manentibus ut in Lemmate præcedenti sit $AMa$ Ellipsis; $Aa$ Axis transversus, $C$ centrum, $Bb$ Axis conjugatus, $F$ focus; educatur recta quævis $AM$ ex $A$ Ellipsi occurrens in $M$, cui parellela $CV$ occurrat Ellipsi in $V$; unde ducatur ordinata ad Axem $VL$, juncta $aM$ rectæ $CV$ occurrat in $e$, eritque $AM=2\,Ce$: cúmque $AQ:CL::AM\,(2Ce):CV::2CL:Ca$, erunt $\frac{1}{2}\,AQ$, $CL$ & $CA$ continuè proportionales. Sit $CA=a$, $CB=b$, $CF=c$, $AR=x$, $CL=l$, cúmque $AR^2:NR^2::CL^2:VL^2$ erit $x^2:a^2-x^2::l^2:\overline{a^2-l^2}\times\frac{l^2}{a^2}$; adeóque $l^2=\frac{a^2b^2x^2}{a^4-c^2x^2}$ & $AQ$ vel $KR=\frac{2\,ab^2x^2}{a^4-c^2x^2}$, area $ARK=\int\frac{2\,ab^2x\,dx}{a^4-c^2x^2}=$ (si $z:x::c:a$) $\int\frac{2\,a^2b^2}{c^3}\times\frac{z^2\,dz}{a^2-z^2}$. Quare sit $a$ quantitas cujus Logarithmus evanescit, sive systematis Logarithmici modulus, $l$ Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, eritque $ARK=\frac{2\,a^2b^2}{c^3}\times\overline{l-z}$. Unde vis quâ particula $A$ gravitat versùs solidum genitum motu segmenti elliptici $AUMA$ circa Axem $Aa$, erit ad vim quâ eadem particula gravitat versùs solidum genitum motu segmenti circularis ex circulo supra diametrum $Aa$ descripti eadem recta $AM$ abscissi circa eundem Axem ut $\frac{2a^2b^2}{c^3}\times\overline{l-z}$ ad $\frac{2x^3}{3a}$; & si $L$ sit Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ (vel $\frac{a}{b}\times\overline{a+c}$) erit vis quâ particula $A$ tendit versùs totam Sphæroidem ad vim quâ tendit versùs totam Sphæram ut $3b^2\times\overline{L-c}$ ad $c^3$.

SCHOL. Eâdem ratione invenitur gravitas particulæ in Polo sitæ versùs Sphæroidem oblatam, quærendo aream cujus ordinata est $\frac{2b^2a^2}{c^3}\times\frac{z^2}{b^2+z^2}$. Sit $BAba$ Sphærois oblata motu Ellipsis $BAb$ circa Axem minorem genita, centro $B$, radio $BC$ describatur Arcus circu-

li $CS$, rectæ $BF$ occurrens in $S$, eritque gravitas in hanc Sphæroidem in Polo $B$ ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram ſuper diametrum $Bb$ deſcriptam ut $3\,CA^2 \times \overline{CF - CS}$ ad $CF^3$. Methodus verò quâ gravitas particulæ in Æquatore ſitæ versùs Sphæroidem oblongam vel oblatam computatur, eſt minùs obvia, facilis tamen evadit ope ſequentis Lemmatis.

## LEMMA VI.




Duo plana $BMbaB$, $BZgeB$ ſe mutuò ſecent in recta $HBb$. communi figurarum tangente, auferantque ex ſolido fruſtum $BMbaBzgeB$; ſint ſemicirculi $HCb$, $Hcb$ ſectiones horum planorum & ſuperficiei Sphæræ centro $B$, radio $BC$ deſcriptæ. Ex puncto $B$ educatur recta quævis $BM$ in priori plano figuræ $BMba$ occurrens in $M$, & ſemicirculo $HCb$ in $N$; ſintque $MQ$ & $NR$ normales in $Hb$, & ordinata $KR$ ſemper æqualis rectæ $MQ$. His poſitis, ſi angulus $CBc$ planis hiſce contentus minuatur in infinitum, erit gravitas particulæ $B$ versùs fruſtum $BMbaBZgeB$ ultimò ad gravitatem ejuſdem particulæ versùs fruſtum Sphæræ ſemicirculis $HBb$, $Hcb$ contentum, ut area $HKdb$ genita motu ordinatæ $KR$ ad ſemicirculum $HCb$.

Sit $m$ punctum in figurâ $BMB$, ipſi $M$ quàm proximùm jungatur $Bm$ quæ circulo $HCb$ occurrat in $n$; ſitque $nr$ normalis in $Hb$. Ad hæc ſint plana $BMZ$, $Bmz$ perpendicularia plano $BMba$, ſecentque planum alterum $BZge$ in rectis $BZ$, $Bz$ circumferentiæ $Hcb$ occurrentibus in $X$ & $x$. His poſitis, vis quâ particula $B$ gravitat in Pyramidem

dem $BMZzm$ erit ad vim quâ eadem particula gravitat in Pyramidem $BNXxn$ ultimò ut recta $BM$ ad $BN$, vel $Ma$ ad $NR$ per Lem. III. Gravitas autem in hanc Pyramidem eſt ut $\frac{NX \times Nn}{BN^2} \times BN$, vel (quoniam $NX$ eſt ut $NR$) ut $\frac{NR \times Nn}{BC}$ i. e. ut $Rr$; atque hæc gravitas agit ſecundùm rectam $Bb$ vi quæ eſt $\frac{Rr \times RN}{BC}$; unde gravitas in Pyramidem $BMZzm$ agit ſecundùm rectam $Bb$ vi quæ eſt ut $\frac{Rr \times MQ}{BC}$, vel $\frac{Rr \times KR}{BC}$. Proinde ultima ratio virium quibus particula $B$ urgetur versùs integra fruſta ſolidi & Sphæræ $BC$, eſt ratio areæ $HKdh$ (quam generat ordinata $KR$) ad ſemicirculum $HCh$.

Cor. Gravitas in fruſtum planis $BMba$, $BZge$ terminatum, eſt ad gravitatem in fruſtum Sphæricum contentum circulis ſuper diametros $Bb$, $Bg$ deſcriptis, ut area $HKdh$ ad $\frac{8}{3} CB^2$. Sit enim $BMBb$ circulus, eritque $MQ$ ad $Bb$, ut $RN^2$ ad $BC^2$, & $KR = \frac{2RN^2}{CB} = 2BC^2 - \frac{2BR^2}{CB}$, & area $HKdB = \frac{4}{3} CB^2$ adeóque area tota $HKdh = \frac{8}{3} CB^2$.

## PROPOSITIO III.

### Problema.

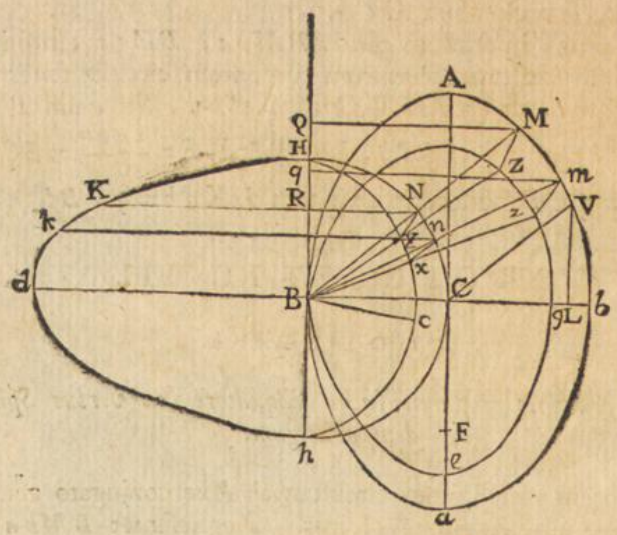
*Invenire gravitatem particulæ in Æquatore ſitæ versùs Sphæroidem oblongam.*

Per Æquatorem intelligimus circulum ab Axe conjugato genitum dum figura circa alterum Axem revolvitur. Repræſentet $BMba$ in figura præcedentis Lemmatis, Sectionem quamvis Sphæroidis Æquatoris plano normalem, eritque hæc figura ſemper ſimilis Sectioni per Polos ſolidi, ſeu figuræ cujus revolutione ſolidum genitum eſſe ſupponimus. Hujus demonſtrationem ut facilem & ab aliis traditam brevitatis gratiâ omitto. Sit igitur $CA$ Sectionis hujus ſemiaxis tranſverſus, $CB$ ſemiaxis conjugatus, $F$ focus; ſit $CB = b$, $CA = a$, $CF = c$, $BR = x$, $CV$ ſemidiameter parallela rectæ $BM$, $VL$ ordinata ad Axem $Bb$, $CL = l$. Tunc $CB : CL :: CL : \frac{1}{2} MQ$ ut in Propoſit. præcedenti, & $MQ = \frac{2l^2}{b}$. Verùm $NR^2 : BR^2 :: CL^2 : VL^2$ i. e. $b^2 - x^2 : x^2 :: l^2 : \overline{b^2 - l^2} \times \frac{a^2}{b^2}$, vel $a^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} : x^2 :: l^2 : b^2 - l^2$, & $l^2 = \frac{a^2 b^2 \times \overline{l^2 - x^2}}{a^2 b^2 - c^2 x^2} = (\text{ſiz } x :: c : b)$ $\frac{b^2 a^2}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, & $KR = MQ = \frac{2l^2}{b} = \frac{2a^2 b}{c^2} \times \frac{c^2 - z^2}{a^2 - z^2}$, & area $BdKR$

æqua-

æqualis $\int \frac{2a^2b^2dz}{c^3} \times \frac{c^2-z^2}{a^2-z^2} = \frac{2a^2b^2z}{c^3} - \int \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2dz}{a^2-z^2}$. Sit igitur $l$ (ut in priore Propositione) Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$, & area $B\,d\,K\,R$ erit $\frac{2a^2b^2z}{c^3} - \frac{2a^2b^2}{c^3} \times \frac{b^2l}{a^2} = \frac{2b^2}{c^3} \times \overline{a^2-b^2}\,l$.

Supponantur nunc $x=b$, adeóque $z=c$; sitque $L$ Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, ut priùs, eritque area tota $HK\,dh$, motu ordinatæ $K\underline{K}$ genita, æqualis $\frac{4b^2}{c^3} \times \overline{a^2-b^2}\,L$. Quare gravitas particulæ $B$




versùs frustum planis ellipticis $BMb\,a$, $BZg\,e$ terminatum erit ultimò ad gravitatem in frustum iisdem planis contentum à Sphæra centro $C$ radio $CB$ descripta resectum, ut $a^2c-b^2L$ ad $\frac{2}{3}c^3$ per Cor. Lem. VI. Sit circulus $BPpb$ Æquator Sphæroidis, $BP$ & $Bp$ duæ quævis chordæ hujus circuli; Sectiones Sphæroidis circulo $BPb$ perpendiculares erunt Ellipses similes Sectioni quæ per Polos solidi transit, quarum $BP$ & $Bp$ erunt Axes transversi; Sectiones autem Sphæræ super diametrum $Bb$ descriptæ per eadem plana erunt circuli quorum diametri erunt chordæ $BP$, $Bp$. Proinde eadem semper erit ratio gravitatis particulæ $B$ in frustra elliptica & sphærica his planis terminata; eritque gravitas versùs integram Sphæroidem ad gravitatem versùs Sphæram, ut $a^2c-b^2L$ ad $\frac{2}{3}c^3$, $a$ denotante semiaxem transversum figuræ cujus

jus motu gignitur ſolidum, $b$ ſemiaxem conjugatum, $c$ diſtantiam foci à centro, & $L$, Logarithmum ipſius $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$ vel $a \times \frac{a+c}{b}$. q. e. f.

COR. Eadem ſemper eſt ratio gravitatis versùs fruſtum quodvis Sphæroidis & fruſtum Sphæræ eodem plano ad Æquatorem normali abſciſſum ab eâdem parte plani; vel gravitas in portionem à Sphæroide hoc plano abſciſſam eſt ad gravitatem in integram Sphæroidem, ut gravitas in fruſtum Sphæræ eodem Plano ex eâdem parte abſciſſum ad gravitatem in integram Sphæram.

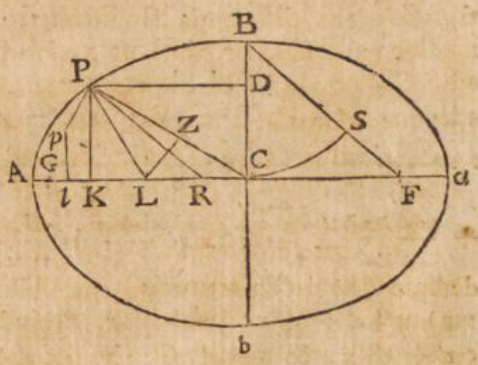
SCHOL. Eâdem ratione ſi $BAba$ ſit Sphærois oblata motu figuræ $BAb$ circa Axem minorem $Bb$ genita, erit gravitas in Sphæroidem hanc in loco $A$ ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro $C$ radio $CA$ deſcriptam, ut $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$ ad $\frac{2}{3} CF^3$.

## PROPOSITIO IV.

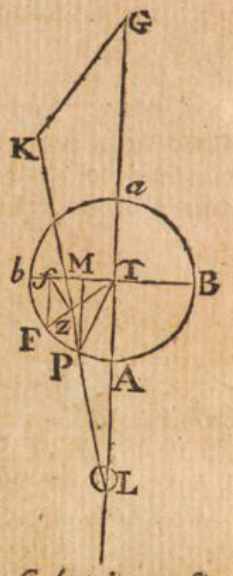
### PROBLEMA.

*Ex datis viribus quibus Terræ particulæ gravitant versùs Solem & Lunam, invenire figuram quam Terra indueret in Syzygiis vel Quadraturis Solis & Lunæ in hypotheſi quòd Terra conſtet ex Fluido homogeneo, & circa Axem ſuum non moveatur.*

Gravitas in loco $A$ versùs Sphæroidem oblongam motu figuræ $ABa$ circa Axem tranſverſam $Aa$ genitam, eſt ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro $C$ radio $CA$ deſcriptam, ut $3b^2 \times \overline{L-c}$ ad $c^3$ per Prop. II. Hæc autem gravitas eſt ad gravitatem in $B$ versùs Sphæram centro $C$ radio $CB$ deſcriptam, ut $CA$ ad $CB$ (per Cor. 1. Lem. III.) quæ eſt ad gravitatem in loco $B$ versùs Sphæroidem ut $\frac{2}{3} C^3$ ad $a^2c - b^2L$ per Prop. IV. Componantur hæ rationes, eritque gravitas in loco $A$ versùs Sphæroidem ad gravitatem in loco $B$ versùs eandem, ut $2ab \times \overline{L-c}$ ad $a^2c - b^2L$. Deſignet $A$ gravitatem in loco $A$, $B$ gravitatem in loco $B$, $V$ ſummam virium quibus Luminaria conjuncta vel oppoſita aquam deprimunt in rectis



$TB$, $Tb$ perpendicularibus rectæ $Aa$ quæ per Terræ & Luminarium centra tranſire ſupponitur, ut in Cor. 4. Prop. I. vel differentiam earumdem virium in Lunæ Quadraturis, ut in Cor. 5. ejuſdem Prop. & per ea quæ demonſtrantur Cor. 1. Prop. I. erit $Aa-Bb=\frac{2a^2V+b^2V}{d}$. Adeóque $Aa-bA\times\frac{a^2c-b^2L}{2ab\times\overline{L-c}}=\frac{2a^2V+b^2V}{d}$, & $V:A::2a^2L+b^2L-3a^2c:\frac{2a}{d}\times\overline{2a^2+b^2\times\overline{L-c}}$. Atque ex datâ ratione $V$ ad $A$ vel ad $B$, vel $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ (quæ pro $G$ gravitate mediocri in circumferentiâ $ABab$ haberi poteſt) habebimus æquationem unde ſpecies figuræ & differentia ſemiaxium ſeu aſcenſus aquæ computari poſſunt.




Eſt autem $L$ Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}$, adeóque æqualis $c+\frac{c^3}{3a^2}+\frac{c^5}{5a^4}+\frac{c^7}{7a^6}$, &c. per Methodos notiſſimas, adeóque $L-c=\frac{c^3}{3a^2}+\frac{c^5}{5a^4}+\frac{c^7}{7a^6}$, &c. Unde eſt $V$ ad $A$, ut $\frac{2c^2}{15a^2}+\frac{4c^4}{35a^4}+\frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{\overline{L-c}\times ad}{c^3\times 2a^2+b^2}$, & $V$ ad $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ vel $G$, ut $\frac{2c^2}{15a^2}+\frac{4c^4}{35a^4}+\frac{6c^6}{63a^6}$, &c. ad $\frac{2a^2+b^2}{2bdc^3}\times\overline{2abL-b^2L+a^2c-2abc}$.

Verùm ſi $V$ ſit admodum exigua reſpectu gravitatis $G$ (ut in præſenti caſu) erit differentia ſemidiametrorum $CA$, $CB$ ad ſemidiametrum mediocrem quàm proximè ut $15V$ ad $8G$, vel paulò accuratiùs ut $15V$ ad $8G-57\frac{5}{14}\times V$. Sit enim ut in Cor. 2. Prop. I. $a=d+x$, $b=d-x$, adeóque $c^2=a^2-b^2=4dx$, eritque $A:B::2ab\times L-c:a^2c^2-b^2L::\frac{b}{3}+\frac{bc^2}{5a^2}+\frac{bc^4}{7a^4}$ &c. : $\frac{a}{3}+\frac{ac^2}{15a^2}+\frac{ac^4}{35a^4}$, &c. i. e. ut $\frac{d-x}{3}+\frac{4dx\times\overline{d-x}}{5\times\overline{d+x}^2}+\frac{16d^2x^2\times\overline{d-x}}{7\times\overline{d+x}^4}$, &c. ad $\frac{d+x}{3}+\frac{4dx\times\overline{d+x}}{15\times\overline{d+x}^2}+\frac{16d^2x^2\times\overline{d+x}}{35\times\overline{d+x}^4}$, &c. adeóque (neglectis terminis, quos plures dimenſiones ipſius $x$ ingrediuntur) ut $\frac{1}{3}d+\frac{17}{15}x:\frac{1}{3}d+\frac{19}{15}x$. Proinde erit $B-A$ ad $B+A(=2G::x:5d+18x$, & $B-A:G::2x:5d+18x$. Sed per Cor. 2. Prop. I. eſt $x$ ad $d$ ut $B-A+3V$ ad $B+A-2V$, adeóque ſubſtituendo valores quantitatum $B-A$ & $B+A$, erit $x:d::\frac{2Gx}{5d+18x}+3V:2G-2V$. Unde $2Gx-2Va=\frac{2Gdx+15Vd+54Vx}{5d+18x}$, & $10Gdx-10dVx+36Gxx-36Vxx=2Gdx+15Vd+54Vx$, & terminis omiſſis ubi reperi-

reperitur $x\,x$, erit $8\,G\,dx - 64\,V\,x = 15\,V\,d$ atque $x : d :: 15\,V : 8\,G - 64\,V$, & $2x$ ad $d$ ut $15\,V$ ad $4\,G - 32\,V$. Aſcenſus igitur totius aquæ i. e. differentia ſemidiametrorum $CA$, $CB$ (vel $2x$) eſt ad ſemidiametrum mediocrem, ut $15\,V$ ad $8\,G$ quàm proximè; facile autem erit rationem hanc exhibere magis accuratè, quoties uſus id poſtulabit, aſſumendo plures terminos valoris Logarithmi $L$, & calculum proſequendo; prodit autem hoc pacto $x$ ad $d$ magis accuratè, ut $15\,V$ ad $8\,G - 57\frac{5}{14} \times V$.

Cor. $B - A$ eſt æqualis $\frac{3\,V}{4}$; & $B - G = \frac{3\,V}{8}$ quàm proximè. Quippe $B - A : G :: 2x : 5\,d :: 30\,V : 40\,G$, adeóque $B - A : V :: 3 : 4$.

Schol. Eâdem ratione patebit gravitatem versùs Sphæroidem oblatam in Polo $B$ fore ad gravitatem in Æquatore in loco quovis $A$, ut $2\,CB \times CA \times \overline{CF - CS}$ ad $CA^2 \times CS - CB^2 \times CF$.

## PROPOSITIO V.

### Problema.

*Invenire vim* V *quæ oritur ex inæquali gravitate partium* Terræ *versùs Solem, & definire aſcenſum aquæ hinc oriundum.*




Sit $S$ Sol, $T$ Terra, $ABab$ orbita lunaris neglectâ excentricitate, $B$ & $b$ Quadraturæ. Deſignet $S$ tempus periodicum Terræ circa Solem, $L$ tempus periodicum Lunæ circa Terram, $l$ tempus quo Luna circa Terram revolveretur in circulo ad diſtantiam mediocrem $Td$ $(= \frac{1}{2}CA + \frac{1}{2}CB)$ ſi motus Lunæ gravitate ſuâ versùs Solem nullâtenus turbaretur, & ſolâ gravitate versùs Terram in orbitâ retineretur. Deſignet porrò $K$ gravitatem mediocrem Lunæ vel Terræ versùs Solem, $g$ gravitatem Lunæ versùs Terram in mediocri ſuâ diſtantiâ, $v$ vim quam actio Solis huic gravitati adjiceret in Quadraturis ad eandem diſtantiam. His poſitis, erit $v : K :: dT : ST$; atque $K : g :: \frac{ST}{SS} : \frac{dT}{ll}$ ex vulgari doctrina virium centripetarum; unde $V : g :: ll : SS$: cúmque $ll$ ſit paulò minùs quàm $LL$, quoniam Luna nonnihil diſtrahitur à Terrâ gravitate ſuâ in Solem, patet vim $v$ eſſe ad $g$ in paulò minori ratione quàm $LL$ ad $SS$. Hanc autem rationem vis $v$ ad $g$ nemo hactenus (quantùm novi)

novi) accuratè definivit; ea tamen propior videtur esse rationi $LL$ ad $SS+2LL$ vel saltem rationi $LL$ ad $SS+\frac{1}{2}LL$ quàm rationi $LL$ ad $SS$. Argumenta verò quibus id colligitur hîc omittenda censeo, moniti Academiæ illustrissimæ memor, cùm in hâc disquisitione parvi sit momenti quænam harum rationum adhibeatur. Supponamus igitur cum Newtono $v:g::LL:SS::$ (per computos Astronomicos periodorum Solis ac Lunæ) $1:178{,}725$. Vis $V$ quæ in Terræ superficie vi $v$ respondet, est ad $v$, ut Terræ semidiameter mediocris ad distantiam Lunæ mediocrem vel ut 1 ad $60\frac{1}{2}$. Vis autem $g$ agit secundùm rectas, quæ in centro gravitatis Terræ ac Lunæ concurrunt, cujus ratione habitâ ex incremento gravitatis in descensu ad superficiem Terræ patebit vim $V$ esse ad $G$ (quâ gravitas mediocris in superficie Terræ designatur ut suprà) ut 1 ad 38604600. Unde cùm per Cor. 2. Prop. III. sit $x:d::15V:8G-57\frac{5}{14}V$ erit in hoc casu $x:d::1:20589116$. Cúmque semidiameter Terræ mediocris sit pedum 19615800; hinc sequitur totum aquæ ascensum ex vi Solis oriundum fore pedis unius Parisiensis cum $\frac{90545}{100000}$ partibus pedis, i. e. pedis unius cum digitis decem, & $\frac{8654}{10000}$ partibus digiti; quem suo more breviter deprehendit Newtonus esse pedis unius digitorum undecim cum $\frac{1}{10}$ parte digiti, quæ altitudo à nostrâ differt tantùm sexta parte unius digiti.




Verùm in hoc calculo Terra supponitur esse Sphærica, nisi quatenus à vi Solis Mare elevatur. Sed si ascensum aquæ maximum quæramus, ponendum est Solem in circulo æquinoctiali versari, figuramque $AaBb$ in hoc plano constitui, & augenda est vis $V$ in ratione semidiametri mediocris ad semidiametrum Terræ maximum, & minuenda est vis $G$ donec evadat æqualis gravitati sub Æquatore: i. e. Si figuram Terræ eam esse supponamus quam definivit Newtonus, augenda erit vis $V$ in ratione 459 ad 460, & minuenda est $G$ in eadem ferè ratione, quoniam vires gravitatis in superficie Terræ sunt inversè ut distantiæ locorum à centro; cúmque distantia $d$ sit augenda in eâdem ratione, erit ascensus aquæ in Æquatore augendus in ratione triplicata semidiametri mediocris ad maximam, adeóque erit pedis unius digitorum undecim cum $60^{ma}$. circiter parte digiti. Terra autem altior est sub Æquatore quàm prodiit calculo Newtoniano ex hypothesi quòd Terra sit uniformiter densa à superficie usque ad centrum; ut colligitur ex variis pendulorum Observationibus, & præsertim ex mensurâ gradus meridia-

meridiani quam viri clarissimi nuper definiverunt accuratissimè sub Circulo Polari.

SCHOL. 1. Si gravitatem posuissemus æqualem in $A$ & $B$, & ejusdem vis in totâ circumferentiâ $AB\,a\,b$, prodiisset $x$ æqualis tantùm $\frac{3Vd}{2G}$, & ascensus aquæ (seu $2x$) pedis unius digitorum sex cum tertiâ circiter parte digiti. Quippe in hâc hypothesi prodiisset $CA$ ad $CB$, ut $G+V$ ad $G-2V$, adeóque $x$ ad $d$, ut $\frac{3V}{2}$ ad $G$ quàm proximè. Atque hinc apparet utilitas præcedentium Propositionum, cùm ascensus aquæ secundùm hanc minùs accuratam hypothesim minor sit ascensu quem in hâc Propositione definivimus, differentiâ $\frac{3Vd}{4G}$, quartâ scilicet parte ascensus illius.

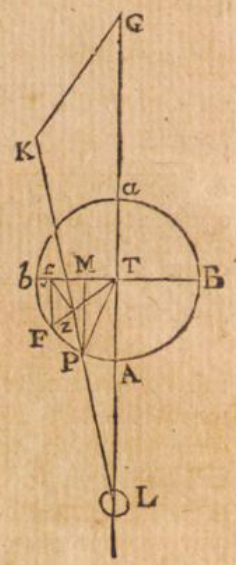
SCHOL. 2. Ex hac doctrina patet Satellites Jovis Soli & sibi mutuò conjunctos vel oppositos in Oceano Joviali (si ullus sit) ingentes motus excitare debere, modò non sint Lunâ nostrâ multò minores; cùm diameter Jovis ad distantiam cujusque Satellitis multò majorem habeat rationem quàm diameter Terræ ad distantiam Lunæ. Verisimile est mutationes macularum Jovis ab Astronomis observatas hinc aliquâ saltem ex parte ortum ducere; quòd si hæ mutationes eam analogiam servare deprehendantur cum aspectibus Satellitum, quam hæc doctrina postulat, indicio erit veram earum causam hinc esse petendam. Ex hâc doctrinâ licet quoque conjicere non absque utilitate, motus Satellitum circa Axes suos & circa primarios ita compositos esse ut idem Hemisphærium suis primariis semper ostendant, secundùm sententiam celeb. Astronomorum. Verisimile enim est motus Maris nimios in Satellitibus cieri deberi, si cum aliâ quâvis velocitate circa Axes suos revolverentur; aquis autem in his agitandis (si quæ sint) sufficere possunt æstus ex variis Satellitum distantiis à suis primariis oriundis.

## SECTIO IV.

### *De motu Maris quâtenus ex motu Telluris diurno aliisve de causis immutatur.*

Ostendimus in Sectione præcedenti Terram fluidam versùs Solem vel Lunam inæqualiter gravem Sphæroidis oblongæ figuram induere debere; cujus Axis transversus per centrum Luminaris transiret, si Terra non revolveretur circa Axem suum motu diurno; & ascensum aquæ in hypothesi Terræ quiescentis ex vi Solis oriundum definivimus. Verùm

ob motum Terræ diverſa eſt ratio æſtus Maris. Hinc enim aqua nunquam ſit in æquilibrio, ſed perpetuis motibus agitatur. Supponamus Solem & Lunam conjunctos vel oppoſitos verſari in plano Æquatoris *AB ab*; ſit *Aa* diameter quæ per illorum centra tranſit, *Bb* huic perpendicularis. Dum aquæ moles revolvitur motu diurno, augentur vires quibus aſcenſus ejus promovetur in tranſitu aquæ à locis *b* & *b* ad *A* & *a*, & in his locis evadunt maximæ; aſcenſus tamen aquæ prorogari videtur, poſtquàm hæ vires minui cœperunt uſque ferè ad loca ubi hæ vires æquipollent viribus quibus deprimitur infra altitudinem quam naturaliter obtineret, ſi nullâ vi extraneâ motus aquæ perturbaretur; adeò ut motus aquæ conſiderari poſſit tanquam libratorius, & tantundem ferè aſcendat viribus quibus elevatur decreſcentibus, quàm iiſdem creſcentibus. Cúmque vis centrifuga ex motu diurno orta ſit multò minor gravitate, ſitus loci *F* ubi prædictæ vires æquipollent ſub Æquatore, dum aqua tranſit à loco *b* ad locum *A*, ſic ferè definiri poſſe videtur. Ex puncto *F* ſit *Ff* normalis in *Bb*, & *fz* in *TF*. Deſignet *V* ſummam virium quibus Sol & Luna aquam deprimunt in rectis *TB*, *Tb* ut ſuprà, & vis quâ aqua tollitur in *F* erit $\frac{3V \times Fz}{d} = \frac{3V \times Ff^2}{d \times TF}$.




Supponamus *F* eſſe locum aquæ ubi altitudo aquæ ſit minima, ut *TF* haberi poſſit pro ſemiaxe conjugato figuræ *AB ab*, dicatur graviras in extremitate hujus Axis *B*, & gravitas mediocris in hac figura *G*, ut ſuprà; & vis quâ aqua deprimitur infra ſitum naturalem in loco *F* erit $B - A + \frac{V \times TF}{d}$. Ponantur hæ vires æquales, cúmque *TF* ſit quàm proximè æqualis diſtantiæ *d*, ſitque $B - G = \frac{3V}{8}$ per Cor. Prop. IV. erit $\frac{3V}{8} + V = \frac{3V \times Ff^2}{d^2}$, ſeu $TF^2 : Ff^2 :: 3 : 1 + \frac{1}{8} :: 24 : 11$. unde angulus *FTb* erit graduum 42 minutorum 37, incidetque ferè in punctum medium inter *b* & *A*. Hunc verò calculum ut accuratum non proponimus.

PROPO-

## PROPOSITIO VI.

### PROBLEMA.

*Motum Maris ex vi Solis oriundum, & motum lunarem in orbitâ quàm proximè circulari inter se comparare, & hinc aſcenſum aquæ æſtimare.*

Aſtronomis notiſſimum eſt Lunæ diſtantiam mediocrem in Syzygiis minorem eſſe diſtantiâ mediocri in Quadraturis. Clariſ. Halleyus ex Obſervationibus colligit diſtantiam priorem eſſe ad poſteriorem ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$. Newtonus Methodo quâdam ſuâ harum rationem invenit eſſe eam 69 ad 70: Princip. Prop. 28. Lib. 3. Clariſſimus Auctor Tractatûs de Motibus Lunæ ſecundùm Theoriam gravitatis, in hac doctrina optimè verſatus, colligit eam eſſe numeri 69 ad 70, ratione non habitâ decrementi gravitatis dum Luna tranſit à Syzygiis ad Quadraturas. Ut motus Maris ex vi Solis oriundus (qualis ſuprà definitur Prop. V.) cum motu Lunæ conferatur, ſupponamus orbem Lunarem aquâ compleri & quæramus aſcenſum hujus aquæ per Prop. IV. & V. In Prop. V. erat vis $v$ ad $g$, ut 1 ad 178,725; quare in hoc caſu foret $x : d :: 15v : 8g - 57\frac{5}{14} \times v :: 1 : 91{,}496$: adeóque ſemiaxis figuræ ad ſemiaxem conjugatum (vel $d + x$ ad $d - x$) ut 46.248 ad 45,248; quæ ferè congruit cum ratione diſtantiarum Lunæ in Quadraturis & Syzygiis quam Halleyus ex Obſervationibus deducit; adeò ut figura orbitæ Lunaris ſpecie vix diverſa ſit ab ea quam Globus aqueus quieſcens Lunæ orbitam complens ex vi Solis indueret; forent tamen poſitione diverſæ, ſiquidem illius Axis minor Solem reſpiciat, hujus Axis major versùs Solem dirigeretur. Ratio numeri 59 ad 60 (quarum ſemidifferentia eſt ad ſemiſummam ut $3v$ ad $g$ quàm proximè) probè congruit cum ratione ſemiaxium figuræ quam aqua ex vi Solis indueret, ſi vis gravitatis eadem eſſet per totam circumferentiam $ABab$, ut oſtendimus in Schol. 1. Prop. V. Aſcenſus autem aquæ Prop. V. definitus congruit cum eâ quam ex Obſervationibus colligit Halleyus; unde ſuſpicari licet differentiam diametrorum orbitæ lunaris paulò fieri majorem ex decremento gravitatis Lunæ in Terram dum tranſit à Syzygiis ad Quadraturas, ſimili ferè ratione quâ aſcenſus aquæ prodiit in hâc propoſitione major propter exceſſum gravitatis aquæ in Terram in loco $B$ ſupra ipſius gravitatem in loco $A$ aliiſque à centro diſtantiis. Verùm quicquid ſit judicandum de ratione diametrorum orbitæ Lunaris, ex his colligere licet aſcenſum aquæ Prop. V. definitum majorem vix evadere propter motum Terræ diurnum circa Axem ſuum. Supponamus enim hunc motum

tum augeri donec vis centrifuga ex hoc motu oriunda fiat æqualis gravitati, & particulæ Maris revolvantur ad morem Satellitum in orbitis quàm proximè circularibus Terram contingentibus. Hæ orbitæ erunt ellipticæ, quarum Axes minores productæ transibunt per Solem. Et si semiaxium differentia sit ad semidiametrum mediocrem ut $3V$ ad $G$ (secundùm ea quæ de motibus lunaribus tradit vir acutissimus) erit minor ascensu aquæ suprà definito Prop. V. in qua invenimus $2x$ esse ad $d$ ut $15V$ ad $4G$. Quòd si quæramus horum semiaxium differentiam ex figura orbitæ lunaris quâtenus ex Observationibus innotescit secundùm clarisſ. Halleyum, parum admodum superabit ascensum aquæ suprà definitum. Nec mirum si non accuratè conveniant, cùm gravitas Lunæ versùs Terram sequatur rationem inversam duplicatam distantiarum, gravitas aquæ major quoque sit in majori distantiâ, sed non in eâdem ratione. Cùm hæc Phænomena sint analoga, & sibi mutuò aliquam lucem afferant, hæc de iis inter se collatis memorare videbatur operæ prætium. Supponimus tamen hîc aquæ motum in eodem circulo Æquatori parallelo perseverare, vel latitudinem eandem in singulis revolutionibus servare, & variationem ascensus aquæ quæ ex figurâ Sphæroidicâ Terræ provenit non consideramus.

## PROPOSITIO VII.

*Motus aquæ turbatur ex inæquali velocitate, quâ corpora circa Axem Terræ motu diurno deferuntur.*

Quippe si aquæ moles feratur æstu, vel aliâ de causâ, ad majorem vel minorem ab Æquatore distantiam, incidet in aquam diversâ velocitate circa Axem Terræ latam; unde illius motum turbari necesse est. Differentia velocitatum quibus corpora, exempli gratiâ, in loco 50gr. ab Æquatore dissito; & in loco 36 tantùm milliaria magis versùs Septentrionem vergente, major est quàm quâ 7 milliaria singulis horis describeretur, ut facili calculo patebit. Cúmque motus Maris tantus nonnunquam sit ut æstus 6 milliaria, vel etiam plura singulis horis describat, effectus qui hinc oriri possunt non sunt contemnendi.

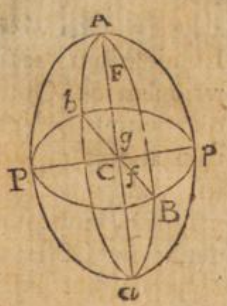
Si aqua deferatur à Meridie versùs Septentrionem motu generali æstus, vel aliâ quâvis de causâ, cursus aquæ hinc paulatim deflectet versùs Orientem, quoniam aqua priùs ferebatur motu diurno versùs hanc plagam majori velocitate quàm est ea quæ convenit loco magis versùs Boream sito. Contrà si aqua à Septentrione versùs Meridiem deferatur, cursus aquæ ob similem causam versùs Occidentem deflectet. Atque hinc varia motus Maris Phænomena oriri suspicamur. Hinc forsitan, exempli gratiâ, Montes glaciales quæ ex Oceano Boreali digrediuntur, frequen-

frequentiùs conſpiciuntur in Occidentali quàm Orientali Oceani Atlantici plagâ. Quin & majores æſtus hinc cieri poſſe in pluribus locis qnàm qui ex calculo virium Solis & Lunæ prodeunt, habitâ ratione latitudinis, veriſimile eſt. Eandem cauſam ad ventos præſertim vehementiores propagandos, & nonnunquam augendos vel minuendos, aliaque tum Aëris tum Maris Phænomena producenda conducere ſuſpicamur. Sed hæc nunc ſigillatim proſequi non licet.

## PROPOSITIO VIII.

### PROBLEMA.

*Invenire variationem aſcenſus aquæ in Prop. V. definiti, quæ ex figurâ Terræ Sphæroidicâ provenit.*




Sint $PApa$, $PBpb$ Sectiones Terræ per Polos $P$ & $p$, quarum prior tranſeat per loca $A$ & $a$, ubi altitudo aquæ in Æquatore viribus Solis & Lunæ fit maxima, poſterior per loca $B$ & $b$ ubi fit minima; ſint hæ Sectiones ellipticæ, $F$ focus figuræ $PApa$, $f$ focus Sectionis $PBpb$, & $g$ focus Sectionis $ABab$. Et ſi omnes Sectiones ſolidi per rectam $Aa$ tranſeuntes ſupponantur ellipticæ calculo inito ope Lemmatis V. invenimus gravitatem in loco $A$ versùs ſolidum hoc fore ad gravitatem in eodem loco versùs Sphæram centro $C$ ſuper diametrum $Aa$ deſcriptam ut $1+\frac{3CF^2+3Cg^2}{10CA^2}+\frac{9CF^4+6CF^2\times Cg^2+9Cg^4}{56CA^4}$, &c. ad $\frac{CA^2}{CB\times Cf}$; & ſi gravitas in loco $B$, definiatur ſimili calculo, ope ejuſdem Lemmatis & Schol. Prop. II. conſtabit ratio gravitatis in $A$ ad gravitatem in $B$, & per Cor. 2. Prop. I. innoteſcet ſemidiametrorum $CA$ & $CB$ differentia ſive aſcenſus aquæ. Verùm calculum utpotè prolixum omittimus, cùm ſit exigui uſus. Hâc Propoſitione oſtendere tantùm volui Geometriam nobis non defuturam in Problemate celeberrimo accuratiſſimè tractando. Verùm reſtat præcipuus in hac diſquiſitione nodus, de quo pauca ſunt addenda.

## PROPOSITIO IX.

### Problema.

*Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.*

Hæc ex motibus cœleſtibus colligi nequit, ſi verò conferetur aſcenſus aquæ in Syzygiis Luminarium, qui ex ſummâ virium Solis & Lunæ generatur, cum ejuſdem aſcenſu in Quadraturis, qui ex earundem differentia oritur, ex vi Solis per Prop. V. datâ, invenietur vis Lunæ. Hanc quærit Newtonus ex Obſervationibus à Sam. Sturmio ante oſtium Fluvii Avonæ inſtitutis, ex quibus colligit aſcenſum aquæ in Syzygiis æquinoctialibus eſſe ad aſcenſum aquæ in Quadraturis iiſdem, ut 9. ad 5. Dein poſt varios calculos concludit vim Lunæ eſſe ad vim Solis, ut 4.48 : 5 ad 1, & aſcenſum aquæ ex utrâque vi oriundum in diſtantiis Luminarium mediocribus fore pedum 50 cum ſemiſſe. Harum virium rationem ex Obſervationibus à celeb. Caſſini in loco ſuprà citato allatis quæſivimus. Verùm cùm præter generales cauſas jam memoratas quarum aliquæ ad calculum vix revocari poſſunt, aliæ variæ ex locorum ſitu, vadorum indole, ventorum vi & plagâ pendentes æſtus Maris nunc majores, nunc minores reddant, non eſt mirum ſi vires Lunæ quæ prodeunt ex Obſervationibus in locis diverſis, vel in eodem loco diverſis tempeſtatibus inſtitutis non planè conſentiant. Computis igitur quos de motu Maris ex vi Lunæ oriundo inſtituimus recenſendis impræſentiarum non immorabimur. Poſtquam verò Obſervationes aliquæ circa æſtus Maris ad littora Americæ & Indiæ Orientalis quas expectamus, ad manus pervenerint, de hiſce forſan certiùs judicemus. Obſervamus tantùm æſtus in minori ratione decreſcere videri quàm duplicatâ Sinus complementi declinationis; quin & reliquæ æſtus leges generales ex motu aquæ reciproco perturbantur. Sed veremur ne tædium pariat, ſi repetamus quæ ab aliis jamdudum tradita ſunt. Æſtus anomali à locorum & Marium ſitu plerumque pendere videntur. Obſervandum tamen ex Theoriâ gravitatis ſequi, unicum tantùm æſtum ſpatio 24 horarum contingere nonnunquam debere in locis ultra 62 gradum latitudinis, ſi reciprocatio motus aquæ id permitteret. *

Quòd ſi analyſis diverſarum cauſarum quæ ad æſtus Phænomena producenda conferunt accurata inſtitui poſſet, id certè ad uberiorem ſcientiam

* Sit enim Lunæ declinatio 28 gr. & loci ultra 62 gr. versùs eandem plagam, & manifeſtum eſt Lunam ſemel tantùm 24 horarum ſpatio loci hujus horizontem attingere.

tiam virium & motuum ſyſtematis Mundi non parum conferret. Hinc enim ſitus centri gravitatis Lunæ & Terræ, & quæ ad æquinoctiorum præceſſionem aliaque Phænomena naturæ inſignia ſpectant, certiùs innoteſcerent. Quas ob cauſas aſcenſus aquæ quantitatem, quouſque ex motibus cœleſtibus eam aſſequi licet, accuratè definiendam & demonſtrandam, poſitis legibus gravitatis quæ ex Obſervationibus deducuntur (de cujus causâ hîc non eſt diſſerendi locus) putavimus. Cogitata autem hæc qualiacunque judicio Illuſtriſſimæ ACADEMIÆ REGIÆ, quam omni honore & reverentiâ ſemper proſequimur, lubenter ſubmittimus.

## *ANNOTANDA IN DISSERTATIONEM de Causa Physica Fluxus & Refluxus Maris, cui præfigitur Sententia*, Opinionum commenta delet dies, Naturæ judicia confirmat.

I. IN Prop. IV. invenitur $x = \frac{15Vd}{8G}$ quàm proximè, qui valor ipsius $x$ est satis accuratus, nec ullâ correctione indiget præsertim in calculo Prop. V. Est autem magis accuratè $x$ ad $d$ ut $15V$ ad $8G - \frac{88}{7}V$ non ut $15V$ ad $8G - \frac{803}{14}V$ sive $8G - 57\frac{5}{14}V$ ut lapsu quodam calami aut calculi scripseram ad finem Prop. IV. qui quidem est exigui momenti, & argumenta Propositionum sequentium non immutat. Calculi autem summam hîc adjiciam. Inveneram in Prop. IV. esse $B$ ad $A$, ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15a^2} + \frac{c^4}{35a^4}$, &c. ad $\frac{b}{a} \times \frac{1}{3} + \frac{c^2}{3a^2} + \frac{c^4}{7a^4}$, &c. adeóque (substituendo loco $\frac{b}{a}$ ipsius valorem $\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$, sive $1 - \frac{c^2}{2a^2} - \frac{c^4}{8a^4}$, &c. ut $\frac{1}{3} + \frac{c^2}{15a^2} + \frac{c^4}{35a^4}$, &c. ad $\frac{1}{3} + \frac{c^3}{30a^2} + \frac{c^4}{840a^4}$; &c. unde $B - A$ est ad $G$ (seu $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$) ut $\frac{c^2}{10a^2} + \frac{23c^4}{24 \times 35a^4}$, &c. ad $1 + \frac{3c^2}{20a^2} + \frac{25c^4}{8 \times 70a^4}$, &c. Est autem $c^2 = 4dx$, & $a^2 = d^2 + 2dx + x^2$ ex iis quæ in Propositione supponuntur; unde $\frac{c^2}{4a^2} = \frac{x}{d} - \frac{2x^2}{d^2} + \frac{3x^3}{d^3}$, &c. & substituendo loco $\frac{c^2}{a^2}$ ejus valorem $\frac{4x}{d} - \frac{8x^2}{d^2}$, &c. prodibit $B - A$ ad $G$, ut $14dx + 18x^2$ ad $35d^2 + 21dx + 17x^2$ quàm proximè. Cúmque sit $\overline{B - A} \times d + 3V\overline{d} = 2Gx - 2Vx - \frac{3Vx^2}{d}$ per Corol. Prop. I. substituatur valor ipsius $\overline{B - A}$, & negligantur termini quos ingreditur $Vx^2$ (quoniam $V$ est admodum parva respectu $G$) eritque $3 \times 35Vd^2 = 56Gdx - 133Vdx + 24Gx^2$ & $x = \frac{3 \times 35Vd^2}{56dG - 133Vd + 24Gx}$, quòd si in denominatore pro $x$ scribatur valor vero propinquus $\frac{15Vd}{8G}$ prodibit valor magis accuratus $\frac{3 \times 35Vd}{56G - 88V}$, eritque $x : d :: 15V : 8G - \frac{88}{7}V$ quàm proximè. Diversâ paulò ratione prodit $x = \frac{15Vd}{8G} + \frac{165VVd}{56GG}$, &c. quam seriem producere non est difficile, si operæ pretium videbitur. In Prop. VI. quæsivimus figuram aquæ

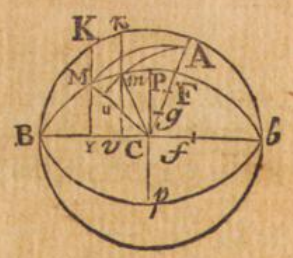
aquæ orbem lunarem complentis ex actione Solis oriundam. Hâc correctione adhibitâ, & cæteris retentis ut priùs, Axis minor figuræ ad majorem ut 46.742 ad 47.742, quæ parùm differt à ratione quàm in eâ Propositione exhibuimus.




II. Series quam exhibuimus in Prop. VIII. deducitur per Lem. V. & Prop. II. Sit $CA=a$. $CB=b$. $CP=e$. $CF=c$. $Cf=f$. $Cg=g$. Sint $ACM$, $ACm$ Sectiones quævis solidi per rectam $AC$ (quæ normalis est plano $BPbp$) transeuntes. Arcus $mu$ centro $C$ radio $Cm$ descriptus, occurrat rectæ $CM$ in $u$, & occurrant ordinatæ $MV$, $mv$ Axi $Bb$ in $V$ & $v$, & circulo $BKb$ in $K$ & $k$. Sit $CA^2-CM^2=x^2$, seu $x$ distantia foci à centro in figura $ACM$, sit $L$ Logarithmus quantitatis $a\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, & ultima ratio gravitatis particulæ $A$ in frustum planis $ACM$, $ACm$ terminatum ad gravitatem in frustum Sphæræ centro $C$ radio $CA$ descriptæ iisdem planis contentum, erit ea $3CM^2\times\overline{L-x}$ ad $x^3$ per Prop. II. Gravitas igitur particulæ $A$ in solidum erit ut $\int\frac{3CM^2\times\overline{L-x}}{x^3}\times\frac{mu}{CM}=\int\frac{3CM\times mu}{x^3}\times\overline{L-x}=\int\frac{3CK\times Kk\times CP}{CK\times x^3}\times\overline{L-x}=\int\frac{3e\times Kk}{x^3}\times\overline{L-x}$. Sit $CV=u$. Eritque $u^2+\overline{b^2-u^2}\times\frac{c^2}{b^2}=CM^2=a^2-x^2$. Unde $c^2+\frac{b^2-c^2}{b^2}u^2=a^2-x^2$. $u^2=\overline{a^2-c^2-x^2}\times\frac{b^2}{b^2-c^2}=\overline{c^2-x^2}\times\frac{b^2}{f^2}$. Adeóque $KV^2=b^2-u^2=b^2-\frac{b^2}{f^2}\times\overline{c^2-x^2}=b^2\times\frac{\overline{f^2+x^2-c^2}}{f^2}=\frac{b^2}{f^2}\times\overline{x^2-g^2}$. Est autem $Kk:Vv::CK:KV$. Adeóque $Kk=\frac{bdv}{KV}=\frac{b^2}{f}\times\frac{-xdx}{\sqrt{c^2-x^2}\times\frac{b}{f}\sqrt{x^2-g^2}}$ $=\frac{-bxdx}{\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}$. Quare gravitas particulæ $A$ versus solidum erit ut $\int\frac{-3ebxdx}{x^3\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}\times\overline{L-x}$. Verùm $L-x=\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^5}{5a^4}$, &c. Quare gravitas illa erit $\int\frac{-3ebxdx}{3a^2\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}+\int\frac{-3ebx^3dx}{5a^4\sqrt{c^2-x^2}\times\sqrt{x^2-g^2}}$, &c. Sit $z^2=x^2-g^2$, & prior summa erit $\int\frac{-ebdz}{a^2\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$, secunda erit $\int\frac{-ebx^2dz}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$ $=\int\frac{-ebdz\times\overline{z^2+g^2}}{5a^4\sqrt{c^2-g^2-z^2}}$. Quæ cum subsequentibus summis ad circulares

Arcus facilè reducuntur. Atque hinc ratio gravitatis particulæ *A* versùs hoc ſolidum ad gravitatem versùs Sphæram ſuper ſemidiametrum *CA* conſtructam, erit qualis in Propoſitione aſſignatur, terminis ſeriei citiſſimè decreſcentibus, ſi *CF*, *Cf* & *Cg* ſint admodum parvæ. Si evaneſcat *g*, hæc ſeries dabit gravitatem versùs Sphæroidem in Æquatore; quæ tamen elegantiùs inveſtigatur in Prop. III.

III. In Prop. IX. obſervavimus poſt Newtonum vim Lunæ ad Mare movendum cum vi Solis poſſe conferri, æſtus in Syzygiis & Quadraturis comparando; eadem ratio obtineri poſſet conferendo æſtus qui contingunt in Syzygiis Luminarium in diverſis diſtantiis Lunæ à Terra, ſi æſtus eſſent accuratè proportionales viribus quibus producuntur. Deſignet *L* vim Lunæ mediocrem, *S* vim Solis mediocrem, *X* & *x* duas diverſas diſtantias Lunæ à Terra in Syzygiis æquinoctialibus, *Z* & *z* diſtantias Solis à Terra in iiſdem Syzygiis, *d* & *D* mediocres utriuſque diſtantias; & ſi Lunæ declinatio nulla ſit, atque eſſent ut vires Luminarium, ſeu ut $\frac{Ld^3}{X^3}+\frac{SD^3}{Z^3}$ & $\frac{Ld^3}{x^3}+\frac{SD^3}{z^3}$, hinc comparando æſtus ratio *L* ad *S* detegeretur. Sit enim aſcenſus aquæ in priori caſu ad aſcenſum in poſteriori ut *m* ad *n*, eritque *L* ad *S* ut $\frac{mD^3}{z^3}-\frac{nD^3}{Z^3}$ ad $\frac{nd^3}{X^3}-\frac{md^3}{x^3}$.




INQUI

# INQUISITIO PHYSICA IN CAUSAM FLUXUS AC REFLUXUS MARIS.

*A. D. D.* EULER, *Mathematicarum Professore; è Societate Academiæ Imperialis Sancti-Petersburgensis.*

*Cur nunc declivi nudentur littora Ponto,*
*Adversis tumeat nunc Maris unda fretis;*
*Dum vestro monitu naturam consulo rerum:*
*Quàm procul à Terris abdita causa latet!*
*In Solem Lunamque feror. Si plauditis auso;*
*Sidera sublimi vertice summa petam.*

## CAPUT PRIMUM.

### *De Causâ Fluxus ac Refluxus Maris in genere.*

§. I. OMNEM mutationem, quæ in corporibus evenit, vel ab ipsa motûs conservatione proficisci, vel à viribus motum generantibus, hoc quidem tempore, quo qualitates occultæ causæque imaginariæ penitùs sunt explosæ, nullâ indiget probatione. Hoc autem discrimen quovis oblato Phænomeno diligentissimè considerari oportet, ne tam motûs conservationi ejusmodi effectus tribuatur, qui sine viribus oriri nequit, quàm vires investigentur, quæ motum suâ naturâ conservandum producant. Quo quidem in negotio, si debita attentio adhibeatur, errori vix ullus relinquitur locus: cùm ex legibus naturæ satis superque constet, cujusmodi motus vel per se conserventur, vel viribus externis debeantur. Corpus scilicet in motu posi-

tum

tum propriâ vi hunc motum uniformiter in directum retinet: atque corpus, quod circa axem convenientem per centrum gravitatis transeuntem motum rotatorium semel est consecutum, eodem motu rotari perpetuò suâ sponte perget: neque hujusmodi motuum causam in ullâ re aliâ, nisi in ipsâ corporum naturâ, quæri oportet. Quocirca si hujus generis Phænomenon fuerit propositum, alia causa investigari non potest, nisi quæ à principio tales motus procreaverit.

§. 2. Hujus generis foret quæstio, si quæreretur causa motûs vertiginis Planetarum ac Solis; hîc enim sufficeret eam causam assignasse, quæ initio hos motus produxisset, cùm Sol æquè ac Planetæ talem motum semel consecuti eundem propriâ vi perpetuò conservare debeant, neque ad hoc Phænomenon explicandum vis ulla externa etiam nunc durans requiratur. Longè aliter se res habet, si motus proponatur neque uniformis, neque in directum procedens, cujusmodi est motus Planetarum periodicus circa Solem: hoc enim casu minimè sufficit ea vis, quæ initio Planetas ad istiusmodi motus impulerit, sed perpetuò novæ virium actiones requiruntur, à quibus tam celeritas quàm directio continuò immutetur: quæ vires, quàm primùm cessarent, subitò Planetæ orbitas suas desererent, atque in directum motu æquabili avolarent. Quòd si igitur Phænomenon quodcunque naturæ proponatur, antè omnia sollicitè est inquirendum, ad quodnam genus id pertineat, atque utrum causa in viribus externis sit quærenda, an in ipso subjecto corpore? Quinetiam sæpenumerò usu venire potest, ut effectus utriusque generis in eodem Phænomeno multùm sint inter se permixti; quo casu summo studio ii à se invicem discerni antè debebunt, quàm causarum investigatio suscipiatur,

§. 3. His ritè perpensis explicatio Galilei, quam in suis Dialogis de æstu Maris assignare est conatus, mox concidit; putavit enim Fluxum ac Refluxum Maris tantùm à motibus Terræ rotatorio circa axem & periodico circa Solem oriri, neque aliis viribus tribui oportere, nisi quæ hos motus cùm producant, tùm conservent. Namque si ponamus Terram solo motu diurno esse præditam, iste motus Mare aliter non afficiet, nisi id sub Æquatore attollendo, ex quo figura Terræ sphæroidica compressa nascitur, motus verò reciprocus in Mari omninò nullus hinc generari poterit. Quòd si autem Terræ insuper motum æquabilem in directum tribuamus, priora Phænomena nullo modo afficientur, sed prorsùs eadem manebunt, quemadmodum ex principiis mechanicis clarissimè perspici licet, quibus constat motum uniformem in directum omnibus partibus Systematis cujuscunque corporum æqualiter impressum nullam omninò mutationem in motu & situ partium relativo inferre. Abeat nunc motus iste æquabilis Terræ in directum impressus in circularem vel ellipticum per vires quibus Terra perpetuò ad Solem urgetur; ac ne

hoc

hoc quidem casu ullus motus reciprocus in Mari produci poterit; quod cùm per se est perspicuum, tùm etiam ab ipso Galileo non statuitur: ipse enim non tàm ex mixtione motûs vertiginis & periodici æstum Maris proficisci est arbitratus, quàm ex motu quocunque progressivo sive rectilineo sive curvilineo, si is cum motu rotatorio combinetur.

§. 4. Quanquàm autem motus Terræ periodicus circa Solem cum motu rotatorio circa axem conjunctus nullum in Mari motum reciprocum generare valet, tamen Mare, quod si motus esset æquabilis in directum in quiete persisteret, aliquantùm turbari debebit. Quòd si autem ad vim quâ Terra in orbitâ suâ continetur attendamus, non difficulter mutationem, quam Mare ab ea patietur, colligere poterimus. Nam cùm partes Terræ à Sole remotiores minori vi, propiores verò majori sollicitentur, illæ ad majus tempus periodicum, hæ verò ad minus absolvendum cogentur, ex quo partibus Terræ fluidis, ut potè mobilibus, motus ab Oriente versùs Occidentem secundùm ecclipticam inducetur hancque veram esse causam existimo ac præcipuam cur tàm Oceanus quàm aer sub Æquatore perpetuò habeat Fluxum ab ortu versùs occasum. Possem etiam ex eodem principio clarè ostendere tàm Maris, si omninò liberum esset, quàm aeris celeritatem tantam fore, quâ tempore viginti-quatuor horarum spatium circiter viginti graduum absolvatur; sed cùm hæc inquisitio ad præsentem quæstionem propriè non pertineat, atque inclyta Academia fortasse aliâ occasione quæstiones hùc spectantes sit propositura, uberiorem explicationem hujus insignis Phænomeni eò usquè differendam esse censemus; hoc quidem tempore tantùm indicasse contenti, motum Terræ periodicum conjunctim cum motu diurno Mari motum aliquem imprimere posse, sed neutiquam motum reciprocum, uti Galileus est arbitratus.

§. 5. Uti in omnibus omninò quæstionibus physicis multò facilius est, quæ non sit causa Phænomeni cujuspiam oblati, quàm quæ sit, ostendere; ita etiam præsens quæstio de Fluxu ac Refluxu Maris est comparata, ut non difficulter causas falsò assignatas possimus refellere. Ac primò quidem post eversam Galilei sententiam, explicatio æstûs Maris Cartesiana pressioni Lunæ innixa tot tantisque laborat difficultatibus, ut omninò subsistere nequeat. Præterquàm enim quòd istiusmodi pressio aliundè probari nequeat, atque ad hoc solum Phænomenon explicandum gratuitò assumatur, observationibus etiam minimè satisfacit. In aperto enim ac libero Oceano aquam mox post transitum Lunæ per Meridianum elevari observamus, cùm secundùm Cartesii sententiam eodem tempore deprimi deberet; neque præterea hoc modo satis distinctè explicatur, cur Luna sub Terra latens eundem ferè effectum exerat, ac si super Horizonte versetur. Deinde hoc idem negotium non feliciori successu aggressus est Wallisius causam in communi centro gravitatis Terræ & Lunæ

quærens, cujus explicatio mox ſatis dilucidè eſt ſubverſa. Supereſt denique Newtoni theotia, quæ nemine contradicente Phænomenis multò magis eſt conſentanea: at in ea id ipſum quod hoc loco quæritur, cauſa ſcilicet phyſica, non aſſignatur, ſed potiùs ad qualitates occultas referri videtur; interim tamen ne hæc quidem theoria ſatis eſt evoluta, ut de ejus ſive conſenſu ſive diſſenſu cum obſervationibus judicium ſatis tutum ferri queat.

§. 6. Cùm igitur dubium ſit nullum, quin Fluxûs ac Refluxûs Maris cauſa in viribus externis & realibus ſit poſita, quæ ſi ceſſarent, ſimul æſtus Maris mox evaneſceret, ubi lateant hæ vires & quomodo ſint comparatæ potiſſimùm nobis erit explicandum, hoc enim eſt id ipſum, quod celeberrima Academia Scientiarum Ragia in quæſtione propoſita requirit. Neque verò vires tantummodò indicaſſe ſufficiet, verùm præterea id maximè erit monſtrandum, quomodo iſtæ vires agant, atque hos ipſos effectus, quos obſervamus, non verò alios producant; in hoc enim totius quæſtionis cardo, explicationis ſcilicet confirmatio, vertitur. Quoniam autem plerumque pluribus viribus excogitandis idem Phænomenon explicari poteſt, ſtudium adhibendum eſt ſummum in hac indagatione, ne ad vires inanes atque imaginarias delabamur, quæ in mundo neque ſunt neque locum habere poſſunt. Parum enim ſcientiæ naturali conſulunt, qui quovis Phænomeno oblato ſibi pro arbitrio mundi ſtructuram peculiarem effingunt, neque ſunt ſolliciti, utrùm ea compages cum aliis Phænomenis conſiſtere queat, an verò ſecùs. Quòd ſi enim jam aliundè conſtet exiſtere in mundo ejuſmodi vires, quæ oblato effectui producendo ſint pares, fruſtrà omne ſtudium in conquiſitione virium novarum collocabitur.

§. 7. Quoniam autem ad cauſam cujuſque Phænomeni detegendam, ad ſingulas circumſtantias ſedulò attendere neceſſe eſt, ante omnia mirificum conſenſum æſtûs Maris cum motu Lunæ contemplari conveniet. Non ſolùm enim inſignis harmonia inter æſtum Maris ac Lunæ motum diurnum deprehenditur, ſed etiam revolutio ſynodica reſpectu Solis ingentem affert varietatem. Omnes denique obſervationes abundè declarant rationem Fluxûs & Refluxûs Maris à ſitu cùm Lunæ tum etiam Solis conjunctim pendere: ex quo ſtatim prono ratiocinio conſequitur, vires illas æſtum Maris producentes, quæcunque etiam ſint, cùm Lunam potiſſimùm, tùm verò etiam Solem reſpicere debere. Quamobrem imprimis nobis erit inquirendum, utrum ejuſmodi vires Solem & Lunam reſpicientes, quæ in aquis talem effectum, qualis eſt æſtus Maris, producere queant, jure ac ratione ſtatui poſſint, an ſecùs. Ac ſi pluribus modis iſtiuſmodi vires animo concipere liceat, diligenter erit diſpiciendum, quænam cum aliis Phænomenis conſiſtere poſſint nec ne. Quantumvis enim explicatio quæpiam cum Phænomenis conſpiret, niſi virium, quæ

quæ assumuntur, existentia aliundè comprobetur, labili ea omninò innititur fundamento. Quòd si autem contrà, effectus ejusmodi viribus tribuatur quas in mundo reverà existere alia Phænomena clarè docuerunt, atque summus explicationis cum experientiâ consensus deprehendatur, dubium erit nullum quin ista explicatio sit genuina & sola vera.

§. 8. Quamvis autem certis viribus Lunæ ac Soli tribuendis Phænomenon æstûs Maris commodè explicari posset, tamen ob hanc solam causam istiusmodi vires statuere nimis audax videtur: quamobrem imprimis erit dispiciendum, num aliæ rationes ejusmodi vires non solùm admittant, sed etiam actu existere manifestò indicent. Perlustremus igitur vires, quas jam aliundè in mundo vigere novimus, sciscitemurque paucis an ad motum reciprocum Oceano inducendum sint idoneæ: tales enim vires si in mundo jam extent, omnis labor in aliis inquirendis impensus irritus foret ac ridiculus. Ac primò quidem si Solem spectamus, motus Terræ annuus omninò declarat Terram perpetuò versùs Solem urgeri & quasi attrahi, idque fortiùs in minori distantia, debiliùs verò in majori; atque adeò hanc Solis vim in Terram rationem tenere reciprocam duplicatam distantiarum: ex quo sponte sequitur non solùm universam Terram, sed etiam singulas ejus partes perpetuò versùs Solem urgeri. Tota quidem Terra æquè fortiter ad Solem sollicitatur, ac si omnis materia in ejus centro esset congesta; interim tamen partes circa superficiem sitæ vel magis vel minùs ad Solem allicientur, quàm totum Terræ corpus, prouti vel minùs vel magis sint remotæ à Sole, quàm centrum Terræ. Hinc igitur fit, ut hæc eadem vis ad Solem tendens aquam modò magis modò minus trahat, ex quâ alternâ actione motus reciprocus in Fluidis necessariò oriri debet. Quocircà ista Solis vis in præsenti negotio neutiquam negligi poterit, cùm ea, si fortè sola causam æstûs Maris non constituit, certè effectum aliarum virium necessariò afficere ac turbare debeat.

§. 9. Quemadmodùm autem Terra cum omnibus suis partibus versùs Solem sollicitatur, ita eorum sententia non multùm à veritate abhorrere videtur, qui in Lunâ similem vim collocant. Observationes quidem hujusmodi vim in Lunâ non demonstrant sicuti in Sole; cùm motus Terræ in orbitâ suâ à Luna omninò non affici deprehendatur: sed si docuerimus eandem vim ad Lunam respicientem, quæ æstui Maris producendo sit par, in motu Terræ nullam sensibilem anomaliam producere valere, audacia, quæ fortè in talis vis admissione consistere videbatur, multùm mitigabitur. Hujusmodi autem vis existentia aliis rationibus, nullo ad æstum Maris habito respectu, satis clarè evinci potest; quia enim nullum est dubium, quin Luna ad Terram constanter feratur, ob æqualitatem actionis & reactionis Terram quoque versùs Lunam pelli necesse est. Namque si ponamus Sole penitùs sublato, Terræ ac

Lunæ omnem motum ſubitò adimi, Luna utique ad Terram accedet; nemo autem non concedet, probè perpenſis principiis mechanicis, Terram intereà non prorsùs eſſe quieturam, ſed Lunæ obviam ituram, concurſumque in communi gravitatis centro contingere: hoc autem evenire non poterit, niſi Terra actu ad Lunam ſollicitetur. Deindè in ipsâ Lunâ gravitatem dari ſimilem huic, quam in Terrâ ſentimus, negari non poteſt; niſi enim talis vis in Lunâ vigeret, partes Lunæ fluidæ, cùm ob gravitatem in Terram, tùm ob motum Lunæ circa proprium axem, etſi ſit admodùm lentus, & tempori periodico æqualis, jam dudùm avolaſſent, parteſque ſolidæ conſiſtentiam ſuam amiſiſſent. Pluribus denique aliis rationibus ex naturâ vorticum petitis, magis confirmari poſſet tale corpus mundanum, cujuſmodi eſt Luna, ſubſiſtere non poſſe, niſi vortice ſit cinctum, quo gravitas in id generetur. Quòd ſi autem gravitationem versùs Lunam concedamus, cur ejus actionem non ad nos uſquè admittamus, nulla omninò ratio ſuadet: quin potiùs ejuſmodi vim ſimilem ſtatui conveniet, reliquis in mundo deprehenſis, quæ quaſi in infinitum porriguntur, atque inverſam duplicatam tenent diſtantiarum rationem.

§. 10. His expoſitis manifeſtum eſt, & quaſi experientiâ convictum, Terram cum ſingulis ſuis partibus tam versùs Lunam quàm versùs Solem perpetuò ſollicitari, atque utramque vim proportionalem eſſe reciprocè quadratis diſtantiarum. Hæ igitur vires, cùm actu exiſtant, conſtanterque effectum ſuum exerant, in præſenti negotio, quo in cauſam æſtûs Maris inquirimus, præteriri omninò nequeunt; niſi dilucidè antè ſit probatum, eas non ſolùm Fluxum ac Refluxum non generare, ſed ne quidem quicquam efficere. Si enim iſtæ vires ullum duntaxat motum reciprocum Mari inducere valeant, quantumvis is etiam ſit exiguus, atque adeò æſtui Maris fortaſsè contrarius, earum tamen ratio neceſſariò erit habenda, cùm ſine illis vera cauſa, quæcumque ſit, neque inveſtigari neque cognoſci poſſit. Neque præterea ſanæ rationis præcepta permittunt alias vires excogitare, in iiſque cauſam æſtûs Maris collocare, antequam evidenter ſit demonſtratum, binas iſtas vires Solem Lunamque ſpectantes, quas non gratuitò aſſumſimus, ſed ex certiſſimis Phænomenis in mundo exiſtere novimus, ad Fluxum ac Refluxum Maris producendum non eſſe ſufficientes. In ſequentibus autem capitibus clariſſimè ſumus oſtenſuri, ab his duabus viribus non ſolùm in Oceano motum reciprocum generari debere, ſed etiam eum ipſum, qui æſtus marini nomine inſigniri ſolet: atque hanc ob rem firmiter jam affirmamus veram Fluxûs ac Refluxûs cauſam in ſolis illis duabus viribus, quarum altera ad Solem eſt directa, altera ad Lunam, eſſe poſitam; hocque ſimul omnium eorum ſententias funditùs evertimus, qui vel aliis omninò viribus idem Phænomenon adſcribere, vel cum his ipſis alias vires conjungere conantur.

§. 11.

§. 11. Quæſtio igitur de cauſa Fluxûs ac Refluxûs Maris, prouti ea ab Illuſtriſſimâ Academiâ Regiâ eſt propoſita, ad hanc deducitur quæſtionem, ut binarum illarum virium, quibus ſingulæ Terræ partes cùm ad Solem tùm ad Lunam perpetuò urgentur, idque in diſtantiarum ratione reciprocâ duplicatâ, cauſa aſſignetur Phyſica. Ex quo tractationem noſtram bipartitam eſſe oportebit. Primò ſcilicet ex principiis Mechanicis dilucidè erit oſtendendum, à binis illis viribus Solem Lunamque reſpicientibus cùm Fluxum ac Refluxum Maris generatim oriri debere, tùm etiam hoc modo ſingula Phænomena diſtinctè explicari poſſe: hac enim parte abſolutâ nullum ſupererit dubium, quin origo æſtûs Maris his ipſis viribus, quas actu jam in mundo exiſtere docuimus, debeatur. Deinde verò harum virium cauſa Phyſica indicari debet, cùm id ſit præcipuum, quod Inclyta Academia requirit. Quod quidem ad illam partem attinet, in ejus explicatione minimè hæſitamus; & clariſſimis certiſſimiſque demonſtrationibus evincere pollicemur, per iſtas vires omnia omninò æſtûs Maris Phænomena abſolutiſſimè explicari poſſe; quâ in re nulli dubitationi ullus relinquetur locus, cùm tota ad Geometriam & Mechanicam ſublimiorem pertineat, calculoque analytico ſit ſubjecta. Altera verò pars, in ſcientiam naturalem imprimis incurrens, majori difficultati videtur obnoxia, nec tantæ evidentiæ capax; verùm cùm iſta res occaſione plurium quæſtionum ab Academiâ Celeberrima antehac propoſitarum jam tanto ſtudio ſit inveſtigata atque abſoluta, eam non minori certitudine expedire confidimus.

§. 12. Exploſis hoc ſaltem tempore qualitatibus occultis miſsâque Anglorum quorumdam renovatâ attractione, quæ cum ſaniori philoſophandi modo nullatenùs conſiſtere poteſt, omnium virium quæ quidem in mundo obſervantur, duplex ſtatuendus eſt fons atque origo. Nempe cùm viribus tribuatur vel motûs generatio vel immutatio, iſte effectus ſemper vel ab alliſione corporum, vel à vi centrifugâ proficiſcitur, quarum actionum utraque facultati, quâ omnia corpora ſunt prædita in ſtatu ſuo ſive quietis ſive motûs æquabilis in directum perſeverandi, debetur. Ob hanc enim ipſam facultatem corpus in motu poſitum alia corpora, quæ vel ipſius motui directè ſunt oppoſita, vel ejus directionem mutare cogunt, ad motum ſollicitat; atque priori caſu regulæ colliſionis corporum, poſteriori verò vis centrifugæ indoles & proprietates oriuntur ac demonſtrantur. Cùm igitur omnia corpora terreſtria tam versùs Solem, quàm versùs Lunam perpetuò ſollicitentur, cauſa hujus ſollicitationis continuo appulſui materiæ cujuſdam ſubtilis, vel vi centrifugæ ſimilis materiæ tribui debebit. Priori igitur caſu materiam ſubtilem ſtatui opporteret, quæ conſtanter ſummâ rapiditate cùm ad Solem tùm ad Lunam ferretur: hujuſmodi verò hypotheſis ob maximas difficultates, quibus eſt involuta, admitti minimè poteſt. Primò enim perpetuò novis viribus

ribus eſſet opus, quæ materiam ſubtilem indeſinenter versùs Solem Lunamque pellerent, quâ quidem re quæſtio non majorem lucem aſſequeretur. Deinde talis motus per ſe diu conſiſtere non poſſet, propter perpetuum materiæ ſubtilis ad eadem loca affluxum nullumque refluxum, ut taceamus alia maxima incommoda cum iſtiuſmodi poſitione permixta.

§. 13. Exclusâ igitur materiæ ſubtilis continuâ alliſione, tanquam ad vires cùm ad Solem tùm Lunam tendentes producendas minimè idonea, alia harum virium cauſa non relinquitur, niſi quæ in vi centrifugâ conſiſtat. Quemadmodum autem materia ſubtilis in gyrum acta ac vorticem formans non ſolùm animo concipi, ſed etiam in mundo perſiſtere queat, jam ſatis ſuperque eſt expoſitum, cùm in diſſertationibus, quæ cùm quæſtio de causâ gravitationis agitaretur, laudes Illuſtriſſimæ Academiæ merebantur, tùm etiam in aliis operibus; quibus in locis ſimul dilucidè eſt oſtenſum, quomodo ejuſmodi vortices comparatos eſſe oporteat, ut vires centrifugæ fiant quadratis diſtantiarum à centro vorticis reciprocè proportionales. Quæ res cùm meo quidem judicio jam tam plana ſit facta, ut vix quicquam ad præſens inſtitutum attinens adjici queat, vorticum ulteriori examini ſine ullâ hæſitatione ſuperſedemus; idque eò magis, quòd Celeberrima Academia ejuſmodi amplam atque adeò jam confectam digreſſionem poſtulare haud videatur. Quoniam enim quæſtio de cauſa gravitatis cùm versùs Terram tùm etiam versùs Solem & Planetas jam ſatis eſt inveſtigata ac diremta; nunc quidem, ſi cujuſcunque Phænomeni cauſa eò fuerit perducta, ibidem acquieſcendum videtur, neque actum agendo denuò in causâ gravitatis inveſtigandâ nimiùm immorari conveniret. Denique in præſenti negotio ſufficere poſſet, ſi æſtûs Maris cauſa adhuc tantis tenebris obvoluta ad alia maximè aperta Phænomena reducatur, quorum cauſa non ſolùm habetur probabilis, ſed etiam quæ ſola ſit veritati conſentanea, cujuſmodi eſt gravitatio tàm versùs Solem quàm Lunam.

§. 14. Cauſam igitur Fluxûs ac Refluxûs Maris proximam in binis vorticibus materiæ cujuſdam ſubtilis collocamus, quorum alter circa Solem alter verò circa Lunam ita circumagatur, ut in utroque vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centro vorticis; quæ lex vis centrifugæ obtinebitur, ſi materiæ ſubtilis vorticem conſtituentis celeritas ſtatuatur tenere rationem reciprocam ſubduplicatam diſtantiarum à centro vorticis. Quæcunque igitur corpora in iſtiuſmodi vortice poſita ad ejus centrum pellentur vi acceleratrice, quæ pariter ac vis centrifuga quadratis diſtantiarum reciprocè eſt proportionalis. Vis abſoluta autem quâ corpus quodpiam in datâ diſtantiâ à centro vorticis collocatum eò urgetur, pendet à celeritate materiæ ſubtilis abſolutâ. Ac primò quidem quod ad vorticem circa Solem rotatum attinet, ejus vis abſoluta ex

tem-

tempore Terræ periodico cum distantia ejusdem à Sole comparato tanta colligitur, ut corpus, cujus distantia à centro Solis æqualis est semidiametro Terræ, eò sollicitetur vi, quæ sit 227512 vicibus major, quàm est gravitas naturalis in superficie Terræ. Metiemur autem hanc ipsam vim absolutam cujusque vorticis, per vim, quam idem vortex exerit in distantiâ à suo centro semidiametro Terræ æquali: ex quo si vis gravitatis terrestris designetur per 1. erit vis absoluta Solis = 227512, cujus numeri loco brevitatis gratiâ utemur litterâ *S*. Simili modo vim vorticis Lunam cingentis absolutam indicabimus litterâ *L*, cujus valorem Newtonus rectè cùm ex ipso Fluxu ac Refluxu Maris, tùm etiam ex præcessione Æquinoctiorum constituisse videtur circiter $\frac{1}{40}$. Quare si, positâ Terræ semidiametro = 1, corporis cujusdam à centro Solis vel Lunæ distantia fuerit $x$, erit vis, quâ id corpus vel ad Solem sollicitatur vel ad Lunam, vel = $\frac{L}{xx}$ vel = $\frac{S}{xx}$, uti ex indole horum vorticum prona consequentia fluit. In his quidem litterarum *S* & *L* determinationibus assumsimus mediam Solis à Terra distantiam 20620 semidiametrorum Terræ, quæ ex parallaxi horizontali 10″ sequitur, Lunæ verò à Terra distantiam mediam 60 semid. Terræ; interim tamen vires ad Mare movendum hinc ortæ ab his hypothesibus non pendent, uti sequentibus patebit.

§. 15. Quoniam igitur æstum Maris per binas vires, quarum altera Solem respicit, altera Lunam, sumus exposituri, facilè videri possemus eandem omninò explicationem suscipere, quam Newtonus dedit in suis Principiis Mathematicis Philosophiæ Naturalis. Primùm autem notandum est, quòd si Newtonus veram causam hujus Phænomeni assignasset, summoperè absurdum atque absonum foret, novitatis studio aliam causam, quæ certò falsa futura esset, excogitare. Deinde verò Newtonus ne vestigium quidem reliquit, ex quo causa harum virium attractivarum, quas Soli Lunæque tribuit, colligi posset, sed potiùs de causæ Physicæ inventione, qualem Academia Regia potissimum requirit, desperasse videtur; id quod ejus asseclæ apertè testantur, qui attractionem omnibus corporibus propriam esse, neque ulli causæ externæ deberi firmiter asserunt, atque adeò ad qualitates occultas confugiunt. Denique Newtonus deductionem & expositionem omnium Phænomenorum ad æstum Maris pertinentium minimè perfecit, sed quasi tantum adumbravit; plena enim explicatio tot tamque difficilium Problematum solutionem postulat, quæ Newtonus non est aggressus: cùm enim hujus quæstionis enodatio amplissimos calculos requirat, ipse analysin vitans pleraque tantum obiter indicasse contentus fuit; ob quem defectum plurimis adhuc dubiis circa ipsius explicationem locus est relictus. Neque enim in his viribus veram æstûs Maris causam contineri antè certum esse potest, quàm absoluto cal-

calculo perfectus consensus Phænomenorum cum Theoriâ fuerit declaratus.

## CAPUT SECUNDUM.

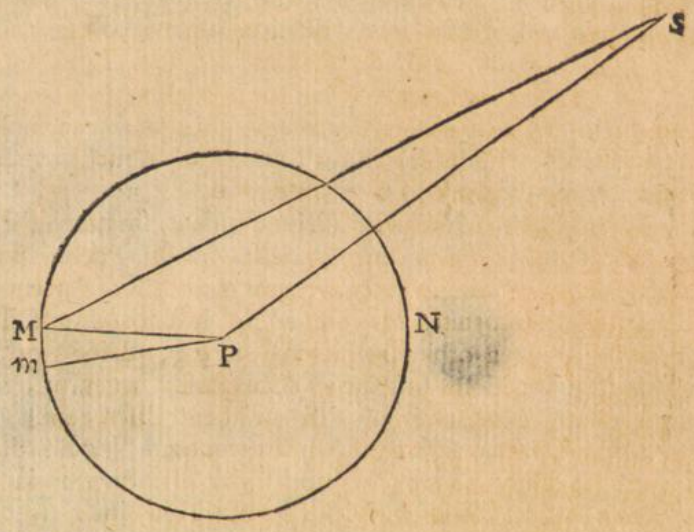
### *De viribus Solis & Lunæ ad Mare movendum.*

§. 16. EFFECTUS, quos vires cùm Solis tùm Lunæ antè stabilitæ in Terram exerunt, ad duo genera sunt referendi: quorum alterum eos complectitur effectus quos Sol ac Luna in universam Terram tamquam unum corpus consideratam exercet; alterum verò eos, quos singulæ Terræ partes à viribus Solis ac Lunæ patiuntur. Ad effectus prioris generis investigandos, omnis Terræ materia tanquam in unico puncto, centro scilicet gravitatis, collecta consideratur, ac tàm ex motu insito quàm viribus sollicitantibus motus Terræ progressivus in suâ orbitâ determinari solet. Ex hocque principio innotuit vim hanc Solis efficere, ut Terra circa Solem in orbitâ ellipticâ circumferatur, vim Lunæ autem tam esse debilem, ut vix ac ne vix quidem ullam sensibilem perturbationem in motu Terræ annuo producere valeat. Contrà autem docebitur, vim Lunæ ad partes Terræ inter se commovendas ac Mare agitandum multò esse fortiorem vi Solis; ex quo plerisque primo intuitu summè paradoxon videatur, quòd vis Lunæ in priori casu respectu vis Solis evanescat, cùm tamen eadem casu posteriori multum excedat vim Solis. Sed mox, cùm effectus utriusque generis diligentiùs evolvemus & perpendemus, satis dilucidè patebit, eos inter se maximè discrepare, atque à vi, quæ in universam Terram minimum exerat effectum, maximam tamen agitationem partium Terræ inter se oriri posse & viciſſim.

§. 17. Ad illum autem harum virium effectum, qui in commotione partium Terræ inter se consistit, dijudicandum, ante omnia probè notari oportet, si singulæ Terræ partes viribus æqualibus & in directionibus inter se parallelis sollicitentur, eo casu nullam omnino commotionem partium oriri, etiamsi sint maximè fluidæ nulloque vinculo invicem connexæ, sed totum virium effectum in integro tantum corpore movendo consumtum iri; perindè ac si totum Terræ corpus vel in unico puncto esset conflatum, vel ex materiâ firmissimè inter se connexâ constaret. Ex quo manifestum est partes Terræ saltem fluidas, quæ viribus cedere queant, inter se commoveri non posse, nisi à viribus dissimilibus urgeantur: atque hanc ob rem non magnitudo virium partes Terræ sollicitantium, sed potiùs dissimilitudo, quâ cùm quantitatis tùm directionis ratione inter se discrepant, eum effectum, quo situs partium mutuus per-

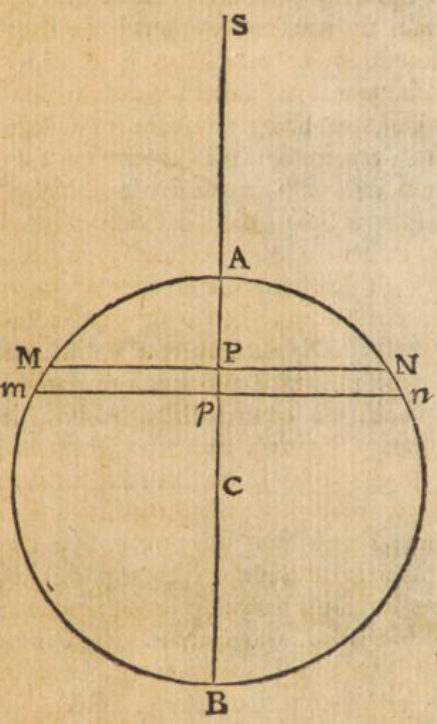
perturbetur, producit. Ita vis Solis, etsi est maxima, tamen ob insignem distantiam partes Terræ ferè æqualiter afficit, contrà verò vis Lunæ ob propinquitatem admodùm inæqualiter: unde à Luna multò major agitatio Oceani resultat, quàm à Sole, quamvis ea vis, quæ ad Solem tendit, insigniter major sit alterâ Lunam respiciente. Atque hoc pacto dubium antè allatum funditùs tollitur, hocque adhuc planius fiet, si utriusque vis effectus ad calculum revocabimus.

§. 18. Ad inæqualitatem igitur virium quibus singulæ Terræ partes vel à Sole vel à Luna sollicitantur, definiendam, ante omnia vim, quâ universa Terra, si in suo centro gravitatis esset concentrata, afficeretur, determinari oportet, hæcque est ea ipsa vis, quæ Terræ motum progressivum in sua orbita respicit & turbat; deindè dispiciendum est, quantùm vires, quibus singulæ Terræ partes urgentur, tàm ratione quantitatis quàm directionis ab illâ vi totali discrepent. Quòd si enim nulla deprehendatur differentia, partes quoque singulæ situm suum relativum inter se retinebunt; at quò major erit differentia inter vires illas singulas partes sollicitantes, eò magis eæ inter se commovebuntur, situm relativum permutabunt. In hac autem investigatione, simul gravitatis naturalis, quâ omnia corpora versùs centrum Terræ tendunt, ratio est habenda; hæc enim vis in causa est, quòd quantumvis vires Solis & Lunæ in diversis Terræ regionibus sint inæquales, æquilibrii tamen status detur, in quo partes tandem singulæ conquiescant, neque perpetuò inter se agitari pergant. Atque hanc ob rem singulæ Terræ partes à tribus viribus sollicitatæ considerari debebunt, primò scilicet à propriâ gravitate, quâ directè deorsum nituntur; tùm verò à vi, quâ ad Solem urgentur, ac tertiò à vi versùs Lunam directâ; hæque tres vires, cujusmodi Phænomena quovis tempore in partibus Terræ fluidis gignant, erit investigandum.




§. 19. Quò igitur vim totalem, quâ Terra vel à Sole vel à Luna urgetur, definiamus, conſideremus primùm peripheriam circuli $MN$ tanquam ex materiâ homogeneâ conflatam, cujus centro $P$ verticaliter immineat Sol vel Luna in $S$, ita ut recta $PS$ ad planum circuli $MN$ ſit perpendicularis. Sit circuli hujus radius $PM = y$, & diſtantia $SP = x$, ac vis ſive Solis ſive Lunæ abſoluta $= S$. His poſitis elementum peripheriæ $Mm$ pelletur ad $S$ in directione $MS$ vi acceleratrice $= \frac{S}{MS^2} = \frac{S}{xx+yy}$, poſitâ cùm vi gravitatis naturalis in ſuperficie Terræ $= 1$, tùm etiam ſemidiametro Terræ $= 1$: atque hanc ob rem elementum $Mm$ versùs $S$ nitetur vi $= \frac{S \times Mm}{xx+yy}$. Reſolvatur hæc vis in binas laterales, quarum alterius directio cadat in $MP$, alterius verò ſit parallela directioni $PS$; atque evidens erit vires omnes $MP$ per totam peripheriam ſe mutuò deſtruere, alterarum verò mediam directionem cadere in $PS$, ac vim his omnibus æquivalentem iiſdem conjunctim ſumtis fore æqualem. Trahetur autem elementum $Mm$ in directione ipſi $PS$ parallela vi $= \frac{Sx \times Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$, unde poſitâ ratione radii ad peripheriam $= 1 : \pi$ tota circuli $MN$ peripheria, quæ erit $= \pi y$, urgebitur ſeu quaſi gravitabit versùs $S$ in ipſâ directione $PS$ vi $= \frac{\pi Sxy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. Vis autem acceleratrix quâ hæc peripheria circuli versùs $S$ ſollicitabitur, prodibit, ſi vis motrix inventa dividatur per maſſam movendam, quæ eſt $= \pi y$, eritque $= \frac{Sx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$.

§. 20. Hoc præmiſſo, contemplemur ſuperficiem ſphæricam genitam converſione circuli $AMB$ circa diametrum $AB$; ſitque ſemidiameter $AC=BC=r$; erit ipſa ſuperficies $=2\pi rr$. Jam attrahatur hæc ſuperficies ad Solem Lunamve in $S$, exiſtente diſtantiâ $SC=a$; atque ad vim totalem ſeu conatum quo integra ſuperficies ad $S$ tendet, inveniendum, concipiatur annulus genitus converſione elementi $Mm$ circa diametrum $AB$, quæ protenſa per $S$ tranſeat. Poſitis igitur $SP=x$, $PM=y$, erit per §. præc. conatus hujus annuli in directione $PS=\frac{\pi Sxy.Mm}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}}$. At poſito $Pp=dx$, erit $Mm=\frac{rdx}{y}$, & $xx+yy=2ax-aa+rr$, unde annulli conatus versùs $S$ erit $=\frac{\pi Srxdx}{(2ax-aa+rr)^{\frac{3}{2}}}$, cujus integrale eſt $=C+\frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$, ex quo conatus portionis ſuperficiei ſphæricæ converſione arcus $AM$ ortæ prodibit $=\frac{\pi Srr}{aa}+\frac{\pi Sr(ax-aa+rr)}{a^2\sqrt{(2ax-aa+rr)}}$. Quare ſi ponatur $SP=SB$ ſeu $x=a+r$, emerget conatus totius ſuperficiei ſphæricæ $=\frac{2\pi Srr}{aa}$: hincque cùm ipſa ſuperficies ſit $=2\pi rr$, erit vis acceleratrix quâ ſuperficies ſphærica actu versùs $S$ tendet $=\frac{S}{aa}$, ideoque tanta, quanta foret, ſi tota ſuperficies in centro $C$ eſſet collecta.




§. 21. Cùm igitur ſuperficies ſphærica perinde ad Solem ſive Lunam in $S$ ſollicitetur, ac ſi tota in ipſo centro eſſet conflata, hæc proprietas ad omnes ſuperficies ſphæricas, ex quibus integra Sphæra compoſita concipi poteſt, patebit, dummodo ſingulæ hæ ſuperficies ex materiâ homogeneâ conſtent, ſive quod eodem redit, ipſa Sphæra in iiſdem à centro diſtantiis ſit æquè denſa. Hanc ob rem ejuſmodi Sphæra quoque perinde ad $S$ in directione $PS$ urgebitur, ac ſi tota ipſius materia in centro $C$ eſſet concentrata; hæcque proprietas non ſolùm in ejuſmodi

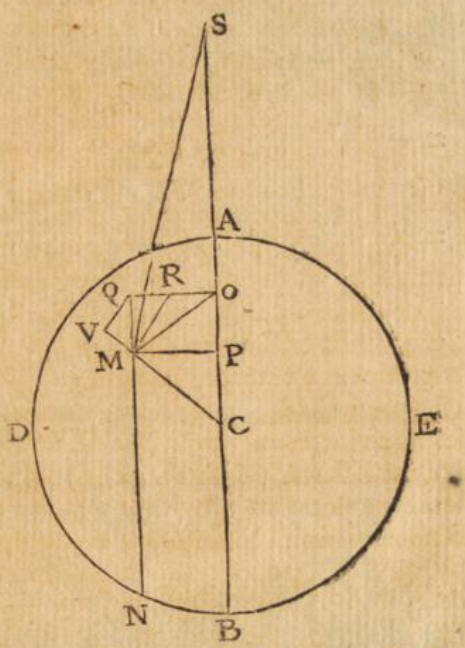
di Sphæras competit, quæ totæ ex materiâ uniformi ſunt confectæ, ſed etiam ut jam indicavimus, in tales, quæ ex materiâ conſtant difformi, dummodo in æqualibus à centro diſtantiis, materia circumquaque ſit homogenea ſeu ſaltem ejuſdem denſitatis. Cùm igitur Terram ſibi repræſentare liceat tanquam Sphæram, ſi non ex uniformi materiâ conflatam, tamen ſine ullo errore ita comparatam, ut in æqualibus circa centrum intervallis materiam æquè denſam includat, Terra quoque univerſa tàm à Sole quàm à Lunâ æquè ſollicitabitur, ac ſi omnis ejus materia in centro eſſet collecta. Quanquam enim nunc quidem accuratiſſimis ab Illuſtriſſimâ Academiâ Regiâ inſtitutis paſſim menſuris ſatis eſt demonſtratum, Terræ figuram ad polos eſſe compreſſam, tamen tantilla à perfectâ Sphærâ aberratio, in aliis quidem negotiis maximi momenti, in hoc inſtituto tutò negligi poteſt. Parique ratione, etiamſi Terra in æqualibus à centro diſtantiis non ſit æquè denſa, tamen differentia certè non eſt tanta, ut error ſenſibilis inde ſit metuendus.

§. 22. Ut igitur vires inveniantur, quæ tendant ad ſitum partium Terræ relativum immutandum, definienda eſt vis acceleratrix, quâ centrum Terræ ſive ad Solem ſive ad Lunam urgeatur: quâ cognitâ, ſi comperiantur omnes Terræ partes æqualibus viribus acceleratricibus & in directionibus parallelis ugeri, nulla omnino ſitûs mutatio, nullaque proinde Maris agitatio orietur. Sed Terra in ſe ſpectata omnium partium ſitum mutuum invariatum conſervabit. At ſi vires, quibus ſingulæ partes à Sole aut Lunâ urgentur, diſcrepent à vi centrum Terræ afficiente, tàm ratione quantitatis quàm directionis, tum niſi firmiſſimè inter ſe ſint connexæ in ſitu ſuo mutuo perturbari debebunt. Hocque caſu aquæ, quæ ob fluiditatem vi etiam minimæ cedunt, ſenſibiliter agitabuntur, atque affluendo defluendoque aliis locis elevabuntur, aliis deprimentur. Cùm autem iſte motus, qui in ſingulis Terræ partibus generatur, à differentiâ inter vires centrum Terræ & ipſas partes ſollicitantes proficiſcatur, propria vis, quâ quæque particula agitabitur, innoteſcet, ſi à vi acceleratrice illam particulam ſollicitante auferatur vis acceleratrix, quam centrum Terræ patitur: hæcque ſubtractio ita inſtituitur, ut cuique particulæ præter vim actu eam ſollicitantem alia vis æqualis illi, quam centrum perpetitur, in directione contrariâ applicata concipiatur: tum enim vis quæ ex compoſitione harum duarum oritur, erit vera vis particulam illam de loco ſuo deflectens.

§. 23. Conſentanea eſt hæc reductio principiis Mechanicis; quibus ſtatuitur motum relativum in ſyſtemate quotcunque corporum & à quibuſcunque viribus ſollicitatorum manere invariatum, ſi non ſolùm toti ſyſtemati motus æquabilis in directum ſimul imprimatur, ſed etiam ſingulis partibus vires æquales quarum directiones ſint inter ſe parallelæ; applicentur. Noſtro igitur caſu motus inteſtinus partium Terræ non turbabitur

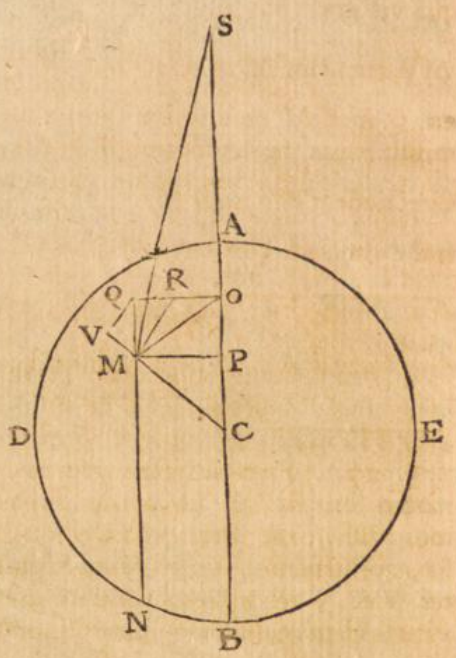
babitur, ſi ſingulis particulis vires æquales in directionibus parallelis applicemus ut fecimus: quòd ſi autem iſtæ vires æquales ſint illi, quâ tota Terra ſeu centrum ſollicitatur, & contrariæ, hoc ipſo Terræ motum curvilineum & inæquabilem, quippe qui ab iiſdem viribus oritur, adimemus. Quare ſi inſuper toti Terræ motum æqualem & contrarium illi, quo actu fertur, impreſſum concipiamus, obtinebimus totam Terram quieſcentem, atque etiam nunc partes perinde agitabuntur & inter ſe commovebuntur, ac ſi nullas iſtiuſmodi mutationes intuliſſemus. Quilibet autem facilè percipiet, quantum ex hâc reductione ſubſidium aſſequamur; multò enim facilius erit mutationes, quæ in ipsâ Terrâ accidunt, percipere atque explicare, ſi centrum Terræ conſtituatur immotum, quàm ſi totalis motus ſingularum partium motibus eſſet permixtus. Hanc ob rem iſtâ reductione quâ centrum Terræ in quietem redigitur, perpetuò utemur, quò Phænomena æſtûs Maris, prouti in Terrâ immotâ ſentiri debent, eliciamus; quippe qui eſt caſus naturalis, ad quem omnes obſervationes ſunt accommodatæ, omnes verò theoriæ accommodari debent.

§. 24. Concipiatur nunc Terra tota tanquam globus $ADBE$ urgeri ad Solem Lunamve in $S$ exiſtentem cujus vis abſoluta ſeu ea, quam in diſtantia à centro ſuo $S$ ſemidiametro Terræ æquali exerit, ſit $= S$, diſtantia verò centri Terræ $C$ ab $S$ ſeu $CS$ ponatur $= a$; eritque vis acceleratrix, quâ tota Terra tanquam in $C$ collecta ſollicitabitur in directione $CS$, $= \frac{S}{aa}$. Contemplemur jam particulam Terræ quamcunque $M$ cujus ſitus ita ſit definitus, ut ſit $CP = x$ & $PM = y$, exiſtente $MP$ normali ad $CS$; hinc igitur habebitur $SP = a - x$ & $SM = \sqrt{((a-x)^2 + y^2)}$. Vis igitur acceleratrix, quâ particula $M$ versùs $S$ pelletur, erit $= \frac{S}{(a-x)^2+y^2}$; à quâ cùm auferri debeat vis, quâ tota Terra versùs $S$ nititur, concipienda eſt particulæ $M$ applicata vis $= \frac{S}{aa}$ in directione $MN$ ipſi $CS$ parallela & oppoſita; quæ duæ vires particulam $M$ æquè afficient ac ſi univerſa Terra quieſceret vel uniformiter in directum moveretur, qui caſus ab illo



lo non differt. Ex his igitur ambabus viribus conatus innoteſcet, quo particula $M$ à vi ad $S$ directa de loco ſuo recedere annitetur: ad ipſum autem motum definiendum inſuper vis gravitatis erit reſpicienda: & quia hæc particula non eſt libera, ſed quaquaversùs materiâ terreſtri circumdata, inveſtigari oportet, quantum iſta materia effectum viribus ſollicitantibus concedat.

§. 25. Quoniam autem in hoc capite nobis nondum eſt propoſitum in ipſum effectum ab his viribus oriundum inquirere, ſed tantum conatum evolvere atque explorare; diligentiùs perpendemus, cujuſmodi vires ex combinatione harum potentiarum particulam $M$ ſollicitantium reſultent. Hunc in finem reſolvatur vis $MS$ in duas laterales, quarum alterius directio parallela ſit ipſi $CS$, altera verò in $MP$ cadat: ex quo reperietur vis illa particulam $M$ in directione $MQ$ urgens $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; altera verò vis in directione $MP$ trahens $= \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cùm autem particula $M$ inſuper trahatur in directione $MN$ vi $= \frac{aa}{S}$, tres iſtæ vires à Sole Lunave in $S$ exiſtente reducentur ad duas, quarum altera in directione $MQ$ urgens erit $= \frac{S(a-x)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{S}{a^2}$, altera verò directionem habens $MP = \frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Quare ſi rectæ $MQ$ & $MP$ his viribus proportionales capiantur, & rectangulum $MQOP$ compleatur exprimet diagonalis $MO$ tàm directionem quàm quantitatem vis ex tribus præcedentibus ortæ: erit autem anguli $OMP$ tangens $= \frac{a-x}{y} - \frac{((a-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 y}$; quo cognito, ſi fiat ut $MP$ ad $MO$ ita $\frac{Sy}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ad quartam, hæc ipſa quarta proportionalis erit vis particulam $M$ in directione $MO$ ſollicitans, quæ oritur à vi ad $S$ tendente.



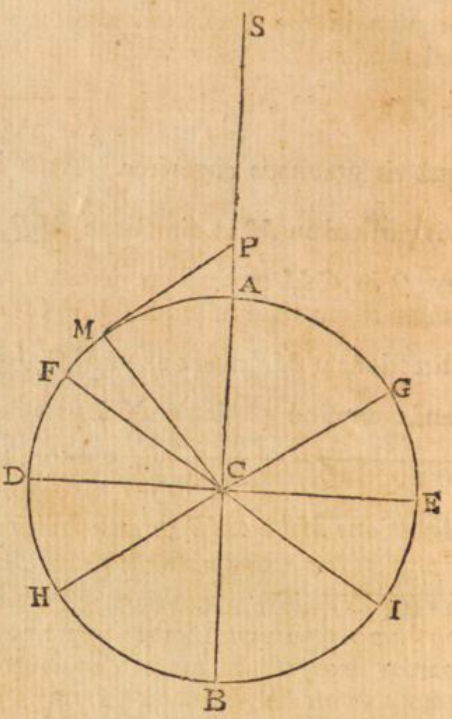

§. 26. Ut autem iſtæ vires faciliùs cum gravitate naturali, cujus directio eſt $MC$, conjungi queant, reſolvantur eæ in binas, quarum altera in ipſam directionem $MC$ cadat, alteriùs verò directio ſit $MR$ nor-

malis ad $MC$. Ad hoc commodiſſimè præſtandum, reſolvatur vis $MS$ primùm in duas, quarum altera ut antè directionem habeat ipſi $CS$ parallelam, alteriûs verò directio in ipſam $MC$ incidat. Cùm igitur ſit $MC = \sqrt{(x^2+y^2)}$ erit prior vis $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, poſterior verò $= \frac{S\sqrt{(x^2+y^2)}}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ quâ vis gravitatis augebitur. At ſi à priori auferatur vis $= \frac{S}{aa}$, remanebit vis particulam $M$ in directione $MQ$ ſollicitans $= \frac{Sa}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{S}{a^2}$. Jam ex $Q$ in $CM$ productam demittatur perpendiculum $QV$, eritque ob ſimilitudinem triangulorum $QVM$ & $MPC$ vis gravitati contraria ſecundùm directionem $MV$ agens ex vi $MQ$ orta $= \frac{Sax}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$; unde omninò particula $M$ à vi ad $S$ tendente versùs $C$ urgebitur vi $= \frac{Sx}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{S(ax-xx-yy)}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2)}}$. Præterea verò eadem particula $M$ in directione $MR$ ad $MC$ normali ſollicitabitur vi $= \frac{Say}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(x^2+y^2)}} - \frac{Sy}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 27. Tametſi iſtæ expreſſiones tantoperè ſint compoſitæ, ut parum ex iis ad uſum deduci poſſe videatur, tamen ſi conſideremus diſtantiam Lunæ à Terra, multò magis autem diſtantiam Solis, vehementer excedere quantitatem Terræ, ac propterea quantitates $x$ & $y$ reſpectu quantitatis $a$ exiguas admodum eſſe; per approximationem ſatis commodas formulas ex iis derivare licebit. Cùm enim ſit proximè $\frac{1}{((a-x)^2+y)^{\frac{3}{2}}} = (a^2 - 2ax + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3} + \frac{3(2ax-xx-yy)}{2a^5} + \frac{15(2ax-xx-yy)^2}{8a^7}$, loco $\frac{1}{((a-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ſatis tutò ſubſtitui poterit $\frac{1}{a^3} + \frac{3x}{a^4} + \frac{3(4xx-yy)}{2a^5}$. Ex his autem obtinebitur vis, quâ particula $M$ præter gravitatem à vi Solis ſive Lunæ in $S$ exiſtentis ad centrum Terræ $C$ in directione $MC$ urgetur, $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}}$. Præterea autem eadem particula $M$ ſollicitabitur in directione $MR$ ad $MC$ normali, vi $= \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{3Sy(4xx+yy)}{2a^4\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{3Sy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}\left(1 + \frac{4xx-yy}{2a}\right)$. Atque cùm in his formulis termini primi poſteriores multis vicibus excedant, rem craſſiùs inſpiciendo, particula $M$ à vi Solis Lunæve ſecundùm $MC$ urgebitur vi $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}$, in directione verò $MR$ vi $= \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(x^2+y^2)}}$.

§. 28.

§. 28. Ex his igitur poſtremis formulis intelligitur ab actione Solis ſive Lunæ in $S$ exiſtentis gravitatem particulæ $M$ augeri ſi ejus ſitus reſpectu rectæ $SC$ ita fuerit comparatus, ut ſit $yy > 2xx$ hoc eſt tangens anguli $MCP > \sqrt{2}$ poſito ſinu toto $= 1$, contrà verò gravitatem diminui, ſi fuerit $yy < 2xx$. Quare cùm angulus cujus tangens eſt $= \sqrt{2}$ contineat $54^{\circ}$, $45'$ circiter, ſi concipiatur circulus Terræ maximus quicunque $ADBE$, cujus planum per punctum $S$ tranſeat, in eoque ducantur rectæ $FCI$ & $GCH$, quæ cum rectâ $SAB$ angulos conſtituant $54^{\circ}$ $45'$; tùm omnes Terræ particulæ in ſpatiis $FCH$ & $GCI$ ſitæ gravitatis naturalis augmentum accipient, reliquæ verò particulæ in ſpatiis $FCG$ & $HCI$ poſitæ decrementum gravitatis patientur. Atque hinc, quâcumque Terræ particulâ propoſitâ, definiri poterit, quantùm ejus gravitas à Sole Lunâve in $S$ exiſtente vel augeatur vel diminuatur. Altera verò vis, quâ particula $M$ in directione horizontali $MR$ urgetur, *( vide figuram ad pag. 298.)* affirmativa erit, in eamque plagam, quæ in figura repræſentatur, verget, ſi quantitates $x$ & $y$ ambæ fuerint vel affirmativæ vel negativæ: contrariumque eveniet, ſi earum altera ſit affirmativa, altera negativa. Quare ſi particula $M$ ſita fuerit vel in quadrante $ACD$ vel $ACE$, tum vis horizontalis ad rectam $CA$ tendet; contrà verò hæc vis ad radium $CB$ dirigetur, ſi particula $M$ ſit vel in quadrante $BCD$ vel $BCE$ conſtituta. Ex quibus perſpicitur effectus vel Solis vel Lunæ in ambo hemiſphæria, ſuperius ſcilicet $DAE$ & inferius $DBE$, inter ſe eſſe ferè ſimiles; quæ ſimilitudo quoque in ipſo æſtu Maris obſervatur.




§. 29. Ponamus nunc particulam $M$ in ipsâ Terræ ſuperficie eſſe conſtitutam, eritque $\sqrt{(x^2+y^2)} = 1$ ob Terræ ſemidiametrum $= 1$. Quare ſi particula $M$ fuerit poſita in $M$, exiſtente anguli $ACM$ ſinu $= y$ & coſinu $= x$, ejus gravitas naturalis acceleratrix à Sole Lunâve in $S$ augebitur vi $= \frac{S(y^2 - 2xx)}{a^3}$, ſecùndum horizontem autem in direc-

tione

tione $MR$ urgebitur vi $= \frac{3Sxy}{a^3}$. Gravitas igitur maximè augebitur, si particula $M$ posita fuerit in $D$ vel $E$, quibus in locis punctum $S$ in horizonte apparet; ibi verò gravitatis augmentum erit $= \frac{S}{a^3}$. In punctis autem $A$ & $B$, quæ punctum $S$ vel in suo zenith vel nadir positum habent, maximum deprehendetur gravitatis decrementum, quod scilicet erit $= \frac{2S}{a^3}$: ita ut maximum gravitatis decrementum duplò majus sit quàm maximum incrementum. Vis autem horizontalis $\frac{3Sxy}{a^3}$ maxima evadet, si angulus $ACM$ fuerit semirectus, id quod accidit in iis Terræ regionibus, in quibus punctum $S$ conspicitur vel 45° gradibus supra horizontem elevatum, vel tantundem sub horizonte depressum latet: his igitur casibus ob $xy = \frac{1}{2}$ fiet vis horizontalis $= \frac{3S}{2a^3}$. Hujus ergo vis effectus in hoc consistet, ut directio gravitatis mutetur, atque versùs rectam $SC$ inclinetur angulo cujus tangens est $= \frac{3S}{2a^3}$, existente sinu toto $= 1$, quia gravitatem unitate designamus.

§. 30. Hæ itaque vires si satis essent magnæ, in ponderibus utique sentiri deberent, ac prior quidem gravitatem naturalem vel augens vel diminuens in oscillationibus pendulorum animadverti deberet, eorum motum vel accelerando vel retardando; posterior verò vis situm pendulorum quiescentium verticalem de hoc situ deflecteret, atque ad horizontem inclinatum efficeret. Quoniam autem hujusmodi perturbationes non observamus, operæ pretium erit dilucidè monstrare vires illas tam esse exiguas, ut hi effectus sensus nostros omninò effugiant. Primùm igitur cùm pro Sole sit $S = 227512$ atque $a = 20620$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{38535570}$; pro Luna autem quia est $S = \frac{1}{40}$ & $a = 60$, erit $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{8640000}$; ex quo vis Lunæ plus quàm quater major est vi Solis, ceteris paribus; atque si Solis & Lunæ vires prorsùs conspirent, erit ex iis conjunctim $\frac{S}{a^3} = \frac{1}{7057700}$. seu proximè $= \frac{1}{7000000}$. Hinc maxima gravitatis diminutio, quæ quidem oriri poterit, erit $= \frac{1}{1500000}$, maximum verò incrementum $= \frac{1}{7000000}$; unde numerus oscillationum ejusdem penduli eodem tempore editarum, illo casu erit ut $\sqrt{(1 - \frac{1}{3500000})}$ seu $1 - \frac{1}{7000000}$, hoc verò casu ut $\sqrt{(1 + \frac{1}{7000000})}$ seu $1 + \frac{1}{14000000}$. Numeri ergo oscillationum ab eodem pendulo eodem tempore absolutarum, cùm gravitas maximè est diminuta;

& cùm maximè eſt aucta, tenebunt rationem ut 13999998 ad 14000001; hoc eſt ut 4666666 ad 4666667; ex quo ſatis perſpicitur differentiam hanc minimè percipi poſſe. Similis autem omninò eſt ratio alterius Phænomeni declinationis ſcilicet à ſitu verticali comparata, quæ nunquam ad $5'''$ exſurgere poteſt.

## CAPUT TERTIUM.

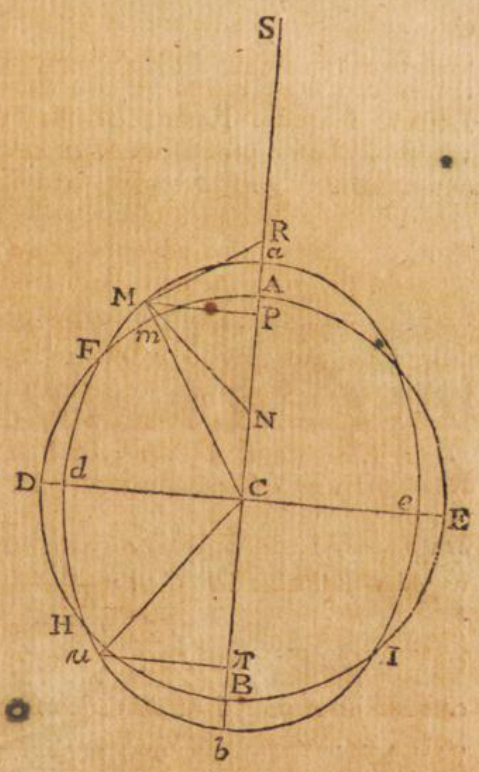
### *De Figurâ, quam vires cùm Solis tùm Lunæ Terræ inducere conantur.*

§. 31. CUM igitur in capite præcedente vires tàm à Sole quàm à Lunâ oriundas determinaverimus, quibus ſingulæ Terræ particulæ ad ſitum relativum cùm inter ſe tùm reſpectu centri, quod in hoc negotio tanquam quieſcens conſideratur, immutandum ſollicitantur; ordo requireret, ut jam in ipſum motum, quo ſingulæ particulæ inter ſe commoveri debeant, inquireremus. Verùm cùm hæc inveſtigatio ſit altioris indaginis, atque opus habeat principiis mechanicis ad motum partium inter ſe reſpicientibus, qualia vix uſquam adhuc reperiuntur; in hoc capite rem ſecundùm principia ſtatica ulteriùs perſequi pergamus, ac figuram determinemus, quam vires Solis & Lunæ cùm ſeorſim tùm etiam conjunctim inducere conantur. Hunc in finem Terram undequaque materiâ fluidâ ſeu aquâ cinctam contemplabimur, quò ſollicitationibus obedire ac figuram iis convenientem actu induere queat. In hoc ſcilicet negotio Solem & Lunam pariter ac ipſam Terram quieſcentes concipimus, ita ut inter ſe perpetuò eundem ſitum relativum conſervent, quo pacto Terræ ab actionibus Solis ac Lunæ figura permanens mox induetur, quam tamdiu retinebit, quoad idem ſitus relativus duret. Perſpicuum autem eſt cognitionem hujus figuræ magno futuram eſſe adjumento ad ejuſdem figuræ tranſmutationem definiendam, ſi tàm Soli quàm Lunæ motus tribuatur.

§. 32. Conſideremus igitur primùm Terram in ſtatu ſuo naturali, in quem ſe ſola vi gravitatis compoſuit; in quo, cùm habitura ſit figuram ſphæricam, repræſentet circulus *ADBE* ſeu potiùs globus ejus rotatione ortus Terram, quam præterea undique aquâ circumfuſam ponimus. Verſetur jam Sol vel Luna in ☉, à cujus vi cùm gravitas naturalis tam in *A* quàm in *B* diminuatur, in *D* verò & *E* augeatur, manifeſtum eſt Terram ſeu potiùs aquam illi circumfuſam elevatum iri in *A* & *B*, contrà verò in *D* & *E* deprimi, idque eouſque, quoad ſollicitationes à Sole Lunâve in ☉ oriundæ cum vi gravitatis ad æquilibrium fuerint redactæ.

Sit

Sit itaque curva *adbe* ea figura, quæ circa axem *ab* rotata generet Terræ formam, quam à vi ad *S* directâ tandem recipiet, atque cùm aquæ nunc ponantur in æquilibrio constituræ, necesse est ut directio media omnium sollicitationum, quibus singulæ Terræ particulæ in supremâ superficie sitæ urgentur, ad ipsam superficiem sit normalis. Quare si particulam quamcunque *M* spectemus; ea primùm à gravitate naturali in directione *MC* urgetur deorsùm, idque vi, quam constanter ponimus = 1; quippe quæ est ipsa gravitas in superficie Terræ, eò quòd elevatio vel depressio particulæ distantiam ejus à centro Terræ, à quâ variatio gravitatis pendet, sensibiliter non immutet. Deinde verò eadem particula *M* à vi in *S* existente sollicitatur duplici vi, quarum alterius directio in ipsam *MC* incidit, alterius verò in *MR* normalem ad *MC*. Quocirca trium harum virium mediam directionem incidere oportet in rectam *MN* normalem ad curvam *aMd*, quo ipso natura hujus curvæ determinabitur.



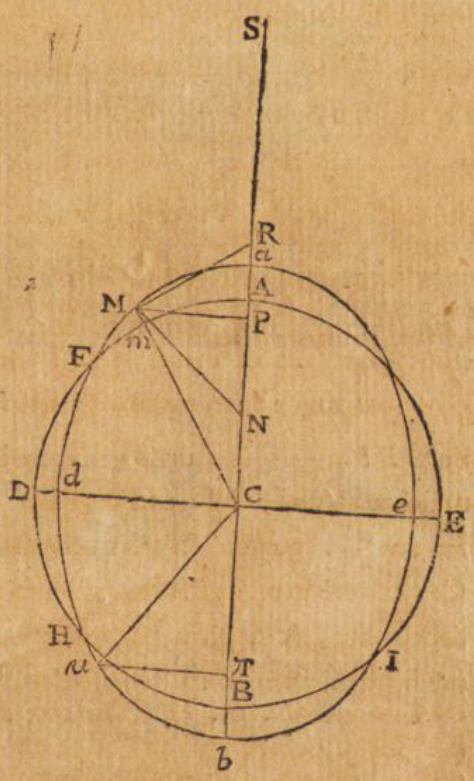

§. 33. Dubium hîc subnasci posset, quod cùm ad præsens institutum omnium virium, quibus singulæ particulæ sollicitantur, ratio haberi debeat, eam hîc negligamus, quæ à vi centrifugâ motûs Terræ diurni oritur, quippe quæ non solùm non est infinitè parva, sed multis vicibus major, quàm vires quæ vel à Sole vel Lunâ resultant: sed quia hæc vis constantem producit effectum, Terræ scilicet figuram sphæroidicam ad polos compressam, mutationem, quæ in Fluxu ac Refluxu Maris observatur, sensibiliter afficere nequit. Deinde quamvis hîc figuram Terræ sphæricam ponamus, tamen in aberrationem præcipuè ab hac figurâ tam à Sole quàm Lunâ oriundam inquirimus: manifestum autem est, quantum figura aquæ ob vires Solis Lunæve à sphæricâ recedat, tantundem aquæ figuram admisso motu diurno Terræ à figurâ sphæroidicâ esse discrepaturam. Quâpropter in hoc negotio sufficere potest, si, Terrâ instar sphæræ perfectæ consideratâ, definiamus quantam differen-

tiam in aquæ figurâ vires cùm Solis tùm Lunæ producant: hac enim determinatâ, ſi Terræ motus vertiginis reſtituatur, perſpicuum erit totam figuram ſub æquatore intumeſcere, ſub polis autem ſubſidere; ita tamen ut ubique eadem vel elevatio vel depreſſio aquæ à viribus Solis Lunæve maneat. Namque ſi ulla etiam varietas in æſtu Maris à motu vertiginis Terræ proficiſcatur, ea calculo monſtrante nuſquam major eſſe poteſt parte $\frac{1}{289}$ æſtûs totalis; tantilla autem differentia notari non meretur, neque ob eam cauſam operæ pretium eſt tam complicatos & abſtruſos calculos inire, ad quos perveniretur, ſi Terræ figura naturalis à ſphæricâ diverſa poneretur, atque inſuper vis centrifuga à motu vertiginis Terræ in computum duceretur.

§. 34. Ad curvam igitur $aMdb$, cui ea quæ ex alterâ parte axis $ab$ ſimilis eſt & æqualis, determinandam, ponatur vis abſoluta ſive Solis ſive Lunæ in $S$ exiſtentis $= S$, diſtantia $CS = a$, ac ducta ſemiordinata $MP$ vocetur $CP = x$, & $PM = y$. Ex præcedenti igitur capite habebitur vis, quâ punctum $M$ vel à Sole vel Lunâ versùs $C$ urgebitur $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$, inſuper autem idem punctum $M$ ſollicitabitur in directione $MR$ normali ad $MC$ vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$. Præter has verò vires punctum $M$ gravitate naturali deorſum pellitur vi $= 1$ ſecundùm directionem $MC$, ita ut punctum $M$ ab omnibus his viribus conjunctim in directione $MC$ deorſum urgeatur vi $= 1 + \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}}$ ubi ob 1 ſequens terminus tutò negligi poteſt, & in directione $MR$ vi $= \frac{3Syx}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$; quarum duarum virium ſi $MN$ ponatur media directio, prodibit per regulas compoſitionis motus anguli $CMN$ tangens $= \frac{3Sy(2ax+4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}+2Sa(yy-2xx)}$, quæ diviſione actu inſtitutâ, iiſque terminis neglectis in quorum denominatoribus $a$ plures quàm quatuor obtinet dimenſiones, abit in hanc expreſſionem $\frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(4xx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, quæ eſt ea ipſa formula, quâ vis $MR$ exprimebatur. Quocirca angulus $CMN$ prorsùs non pendet ab auctâ minutâve gravitate, ſed tantùm à vi horizontali ſingulis particulis in Terræ ſuperficie ſitis impreſsâ.

§. 35. Quoniam verò hæc ipſa media directio $MN$ debet eſſe ad curvam $aMd$ in puncto $M$ normalis, erit ſubnormalis $PN = -\frac{ydy}{dx}$ & $CN = \frac{xdx+ydy}{dx}$. Cùm igitur ſit anguli $MNP$ tangens $= \frac{-dx}{dy}$ & anguli $MCP$ tangens $= \frac{y}{x}$, erit horum angulorum differentiæ, hoc eſt anguli $CMN$ tangens $= \frac{ydy+xdx}{ydx-xdy}$, quæ ſuperiori expreſſioni, quâ hæc

hæc eadem tangens designabatur, æqualis posita pro curvâ quæsitâ $aMdb$ sequentem præbebit æquationem $\frac{ydy+xdx}{ydx-xdy} = \frac{3Sxy}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sy(axx-yy)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$, ad quam integrandam ponimus $\sqrt{(xx+yy)} = z = MC$, & anguli $MCA$ cosinum $\frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}} = u$, unde fiet $x = uz$ & $y = z\sqrt{(1-uu)}$, atque $ydx - xdy = \frac{zzdu}{\sqrt{(1-uu)}}$, itemque $xdx + ydy = zdz$. Hac autem factâ substitutione, æquatio inventa abit in hanc $\frac{dz}{zz} = \frac{3Sudu}{a^3} + \frac{3Szdu(5uu-1)}{2a^4}$, cujus postremus terminus, qui ob parvitatem præ reliquis ferè evanescit, si abesset, foret integrale $\frac{1}{c} - \frac{1}{z} = \frac{3Suu}{2a^3}$ seu $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3}$ proximè. Ponamus itaque completum integrale esse $z = c + \frac{3Sc^2u^2}{2a^3} + \frac{3Sc^3V}{2a^4}$, ac factâ applicatione reperietur $V = \frac{5u^3-3u}{3}$, ita ut habeatur $z = c + \frac{3Sccuu}{2a^3} + \frac{Sc^3u(5uu-3)}{2a^4}$, quod autem integrale proximè tantùm satisfacit; at mox aliâ viâ aperietur verum ipsius $z$ valorem per $u$ commodiùs & propiùs definiendi.




§. 36. Cùm autem soliditas sphæroidis, quod generatur ex conversione curvæ $adb$ circa axem $ab$, æqualis esse debeat soliditati Sphæræ radio $CA = 1$ descriptæ, hinc constans quantitas $c$ quæ per integrationem est ingressa, definietur: id quod commodissimè præstabitur, si utraque sphæroidis semissis, superior scilicet versùs $S$ directa, atque inferior seorsim investigetur. Quoniam igitur pro semissi superiori est $CP = x = zu = cu + \frac{3Sccu^3}{2a^3} + \frac{Sc^3u^2(5uu-3)}{2a^4}$ & $MP^2 = y^2 = z^2(1-uu) = (1-uu)\left(cc + \frac{3Sc^3u^2}{a^3} + \frac{Sc^4u(5uu-3)}{a^4}\right)$, erit $\int yydx$, cui soliditas genita conversione spatii $dCPM$ est proportionalis, $= c^3u - \frac{c^3u^3}{3} + \frac{5Sc^4u^3}{2a^3}$

$-\frac{3Sc^4us}{2a^3}-\frac{3Sc^5u^2}{a^4}+\frac{21Sc^5u^4}{4a^4}-\frac{5Sc^5u^6}{2a^4}$. Posito igitur $u=1$, prodibit superioris semissis ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}-\frac{Sc^5}{4a^4}$. Simili modo cùm pro inferiori semissi sit $Cac=z=c+\frac{3Sc^2u^2}{2a^3}-\frac{Sc^3u(5u^2-3)}{2a^4}$, erit ejus soliditas ut $\frac{2}{3}c^3+\frac{Sc^4}{a^3}+\frac{Sc^5}{4a^4}$; ex quibus totius sphæroidis soliditas erit ut $\frac{4}{3}c^3+\frac{2Sc^4}{a^3}$. Quare cùm Sphæræ radio $=1$ descriptæ soliditas pari modo definita, sit ut $\frac{4}{3}$, fiet $1=c^3+\frac{3Sc^4}{2a^3}$; hincque $c=1-\frac{S}{2a^3}$. Quamobrem pro curvâ quæsitâ habebitur, hoc valore loco $c$ substituto, ista æquatio $z=1+\frac{S(3u^2-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$; ex quâ natura istius curvæ luculenter cognoscitur.

§. 37. Hinc igitur perspicitur à Sole vel Lunâ in $S$ existente aquam, cujus superficies antè erat in $A$, attolli in $a$, ita ut sit elevatio $Aa=\frac{S}{a^3}+\frac{S}{a^4}$; atque in regione oppositâ $B$, aquam pariter elevari per spatium $Bb=\frac{S}{a^3}-\frac{S}{a^4}$: unde patet aquas in $A$ & $B$, ad eandem ferè altitudinem elevari, cùm excessus superioris elevationis super inferiorem sit tantum $\frac{2S}{a^4}$, quod discrimen respectu totius elevationis vix est sensibile. Contrà verò in regionibus lateralibus $D$ & $E$, aqua circumquaque æqualiter deprimetur, & quidem per intervallum $Dd=Ee=\frac{S}{2a^3}$; ex quo ista depressio duplo minor est, quàm elevatio quæ in $A$ & $B$ accidit. In punctis præterea $F$, $G$, $H$ & $I$, quæ à cardinalibus $A$ & $B$ distant angulo $54^\circ\ 45'$, quippe pro quo est $3uu-1=0$, neque elevabitur aqua neque deprimetur, sed naturalem tenebit altitudinem. In loco autem Terræ quocumque $M$ cognoscetur aquæ vel elevatio vel depressio ex angulo $ACM$, cujus cosinus $u$ est finus altitudinis sub quâ Sol vel Luna in $S$ existens super horizonte conspicitur ab observatore in $M$ constituto; hoc enim in loco aqua elevata erit supra naturalem altitudinem intervallo $=\frac{S(3uu-1)}{2a^3}+\frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$: quæ expressio si fit negativa, Maris depressionem indicat. Hîc autem annotare non est opus, quòd si punctum $S$ sub horizonte lateat, tum finus depressionis maneat quidem $u$, sed negativè accipi debeat.

§. 38. Definiamus igitur primùm cùm elevationem tùm depressionem, quæ à solâ vi Solis ubique terrarum produci deberet, si uti ponimus, omnia in statu æquilibrii essent constituta. Quoniam itaque est $S=227512$ atque $a=20620$ semid. Terræ, si una Terræ semidiameter assumatur

19695539

19695539 pedum Pariſ. erit $\frac{S}{a^3} = 0{,}5072$ ped. ſeu pauxillum excedet ſemipedem: valor autem $\frac{S}{a^4}$ omnino erit quantitas evaneſcens & imperceptibilis. Hanc ob rem in regionibus ſub Sole verticaliter ſitis, quæ habeant Solem vel in Zenith vel Nadir, aqua ultra altitudinem naturalem attolletur ad ſemipedem cum pollicis parte decimâ circiter; depreſſio autem maxima cadet in loca, quæ Solem in horizonte conſpicient; ubi aqua ad quadrantem pedis tantum deprimetur; ex quo totum diſcrimen, quod à Sole in altitudine aquæ naturali oritur, ad tres quartas pedis partes circiter aſſurget. Iſte Solis effectus autem diſtantiæ tantum mediocri Solis à Terra eſt tribuendus: quòd ſi enim Sol verſetur vel in apogæo, vel perigæo, ejus effectus vel diminui vel augeri debebit in ratione reciprocâ triplicatâ diſtantiarum Solis à Terra, quia pendet à valore $\frac{S}{a^3}$. Cùm igitur orbitæ Terræ excentricitas ſit $= \frac{163}{10000}$, erit intervallum $Aa$ vel $Bb$, dum Sol in perigæo verſatur, $= 0{,}3332$ ped. ſin autem Sol in apogæo ſit conſtitutus, $= 0{,}4825$ pedum; quorum differentia ad viceſimam pedis partem aſcendit: valor autem medius eſt $= 0{,}5072$, quem pro mediocri diſtantiâ Solis à Terra invenimus.

§. 39. Problema hoc, quod hucuſque dedimus ſolutum, quodque maximi eſt momenti ad effectus cùm Solis tùm Lunæ in Mari elevando & deprimendo definiendos, Newtonus ne attigit quidem, ſed aliam viam ſecutus, non ſolùm indirectam ſed etiam erroneam, invenit Mare à ſolâ vi Solis ad altitudinem duorum ferè pedum elevari debere; cùm tamen tam eandem vim Soli abſolutam quàm eandem diſtantiam à Terra aſſumſiſſet, quibus nos ſumus uſi. Concluſit autem hunc enormem effectum ex comparatione vis Solis ſeu valoris $\frac{S}{a^3}$ cum vi Terræ centrifugâ à motu diurno ortâ, quâ Terra ſub æquatore extenditur ac craſſior redditur quàm ſub polis; atque aſſumit elevationem aquæ à vi Solis ortam eandem tenere debere rationem ad incrementum Terræ ſub æquatore à vi centrifuga factum, quàm teneat vis Solis ad vim centrifugam. Sed præterquam quòd hoc ratiocinium nimis infirmo ſuperſtructum fundamento, noſtrâ viâ directâ, quâ ſumus uſi, ſtatim evertitur: ex ipsâ enim rei naturâ, nullis precariis aſſumtis principiis, elevationem aquarum à vi Solis oriundam directè & luculenter determinavimus; ac ſi ullum etiam dubium ob integrationem per approximationes tantum inſtitutum reſtaret, id mox tolletur, cùm infrà idem problema aliâ methodo prorſus diverſâ ſumus reſoluturi, congruentemque ſolutionem exhibituri.

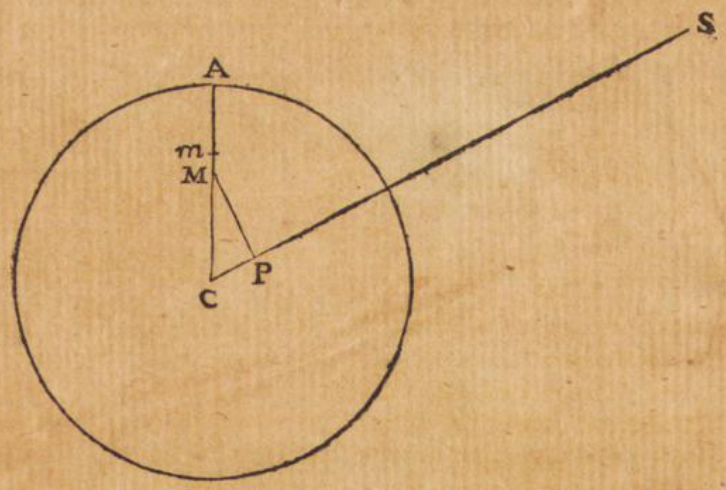
§. 40. Quamvis autem iſte Solis effectus in Mari tam elevando quàm deprimendo non adeò certus & planus eſſe videatur ob parallaxin Solis;

Solis, quam 10'' assumsimus, nondum accuratissimè definitam; à quâ tam distantia Solis à Terra $a$, quàm æstimatio vis absolutæ $S$, pendet: tamen si rem attentiùs perpendamus, comperiemus expressionem $\frac{S}{a^3}$ perpetuò eundem retinere valorem, quæcumque Soli parallaxis tribuatur: mutatâ enim parallaxi, valor litteræ $S$ præcisè in eadem ratione, in quâ cubus distantiæ $a^3$, mutabitur. Per leges enim motûs firmissimè stabilitas patebit quantitatem $\frac{S}{a^3}$ à solo tempore periodico Terræ circa Solem determinari, cujus quantitas accuratissimè est definita. Quod ut clariùs appareat, consideremus planetam quemcunque circa Solem in orbitâ ellipticâ revolventem, cujus semiaxis transversus seu distantia à Sole media sit $= a$, vis autem Solis absoluta $= S$, erit tempus periodicum semper ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; quòd si igitur tempus periodicum sit $= t$, erit $t$ ut $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$ & $\frac{S}{a^3}$ uti $\frac{1}{tt}$. Ad valorem autem fractionis $\frac{S}{a^3}$ absolutè inveniendum, exprimatur $a$ in semidiametris Terræ, atque in minutis secundis dato tempore periodico $t$, erit semper $t = \frac{5064\frac{1}{2}\, a\sqrt{a}}{\sqrt{S}}$; ex quo prodit $\frac{S}{a^3} = \frac{5064\frac{1}{2} \times 5064\frac{1}{2}}{tt}$, positâ unitate cùm pro gravitate naturali, tùm pro unâ Terræ semidiametro. At si tempus Terræ periodicum seu annus sidereus in minutis secundis exponatur, fiet $t = 31558164$, atque $\frac{S}{a^3} = 0{,}50723$ ped. positâ semidiametro Terræ per observationes exactissimas 19695539 ped. Paris. Reg. omnino uti antè invenimus.

§. 41. Simili modo ex superiori æquatione elevatio aquæ à vi Lunæ oriunda determinabitur; positâ enim vi Lunæ absolutâ $= L$, poni oportet $S = L$, ejusque valor proximè erit $= \frac{1}{40}$, quem à Newtono repertum tantisper retinebimus, quoad verus valor per alia Phænomena accuratiùs definiatur. Quoniam itaque Lunæ à Terrâ mediocris distantia est $= 60\frac{1}{2}$ semid. Terræ, erit $\frac{S}{a^3} = L \times 88{,}94$ ped. $= 2{,}223$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}47 = 0{,}037$ ped. Cùm autem Lunæ excentricitas sit quasi $\frac{550}{10000}$, erit dum Luna in perigæo versatur $\frac{S}{a^3} = L \times 104{,}44$ ped. $= 2{,}611$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}82 = 0{,}045$. pedum. At si Luna fuerit in apogæo, prodibit $\frac{S}{a^3} = L \times 75{,}74$ ped. $= 1{,}893$ ped. & $\frac{S}{a^4} = L \times 1{,}19 = 0{,}030$ pedum. Ex his igitur si Luna à Terrâ mediocriter distet, erit aquæ elevatio $Aa = L \times 90{,}41$ ped. $= 2{,}260$ ped. elevatio autem $Bb = L \times 87{,}47$ ped. $= 2{,}187$ pedum: ac depressio ad latera $Dd = Ee = L \times 44{,}47$ pedum $= 1{,}112$ ped. Pro perigæo verò Lunæ fiet $Aa = L \times 106{,}26$ ped. $= 2{,}656$ pedum

dum; $Bb = L.\ 102,\ 62$ ped. $= 2,565$ pedum; atque $Dd = Ee = L.\ 52,22 = 1,305$ pedum. Pro apogæo denique Lunæ habebitur $Aa = L.\ 76,93$ ped. $= 1,923$ pedum, & $Bb = L.\ 74,55$ ped. $= 1,864$ pedum; atque $Dd = Ee = L.\ 37,87$ ped. $= 0,947$ pedum.

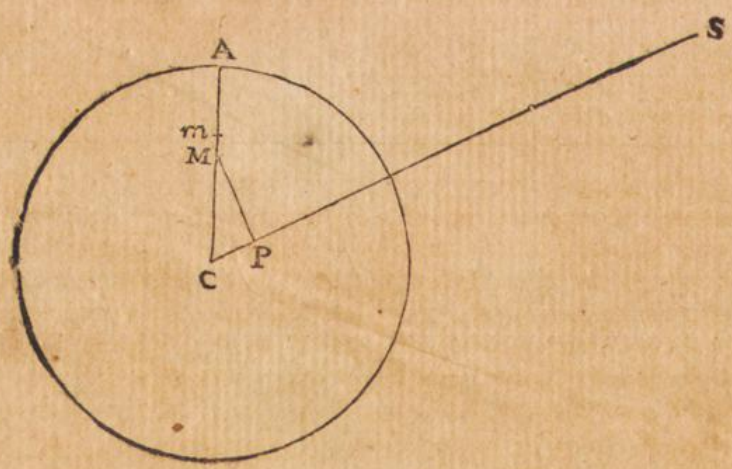
§. 42. Tametsi autem hac methodo non difficulter tam elevatio Maris quàm depressio quæ vel à Sole vel Lunâ seorsum gignitur, sit determinata, si quidem omnia ad statum quietis redacta concipiantur; tamen nimiùm foret difficile ejusdem methodi ope easdem res definire, si Sol & Luna conjunctim agant. Quamobrem aliam methodum exponamus, cujus usus pro utroque casu æquè pateat; quæ cùm à priori penitùs sit diversa, simul ea, quæ jam sunt eruta atque à Newtonianis diversa deprehensa, maximè confirmabit. Petita verò est hæc altera methodus ex eâ æquilibrii proprietate, quâ requiritur, ut omnes columnæ




aqueæ à superficie Terræ ad centrum pertingentes sint inter se æquiponderantes. Existente igitur vel Sole vel Lunâ in $S$, cujus vis absoluta ponatur $= S$, & distantia $SC = a$, sit $AC$ columna aquea à superficie Terræ $A$ ad centrum $C$ usque pertingens, quæ altitudo $AC$ sit $= b$. Ponatur anguli $ACS$ cosinus $= u$, qui simul erit sinus altitudinis sub quâ punctum $S$ à spectatore in $A$ constituto super horizonte elevatum conspicitur; sumaturque intervallum quodcunque $CM = z$, & consideretur totius columnæ elementum $Mm = dz$. Hoc igitur elementum primò à gravitate deorsum versùs $C$ urgebitur, cujus effectus, cùm intra Terram pro variis distantiis non satis constet, ponatur dignitati cuicunque distantiarum à centro putà ipsi $z^n$ proportionalis: mox enim planum fiet exponentem $n$ nil omnino determinationes esse turbaturum. Urgebitur ergo

go elementum $Mm$ versùs centrum $C$ vi $= z^n dz$; ex quo totius columnæ $AC$ nisus deorsum à gravitate oriundus, erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1}$.

§. 43. Præterea autem elementum $Mm = dz$ à vi $S$ sollicitabitur duplici modo, altero deorsum in directione $MC$, altero in directione ad illam $MC$ normali, quæ posterior vis, cùm pondus columnæ nequaquam afficiat, tutò negligetur, solaque prior considerabitur. Demisso autem ex $M$ in $CS$ perpendiculo $MP$, positisque $CP = x$ & $PM = y$, erit $\sqrt{(x^2+y^2)} = z$, & $x = uz$ atque $y = z\sqrt{(1-uu)}$. At ex §. 27. vis, quâ particulâ $Mm$ deorsum sollicitatur, est $= \frac{S(yy-2xx)}{a^3\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{3Sx(3yy-2xx)}{2a^4\sqrt{(xx+yy)}}$ $= \frac{Sz(1-3uu)}{a^3} + \frac{3Suz^2(3-5uu)}{2a^4}$. Quæ expressio per $dz$ multiplicata,




tumque integrata facto $z = h$, præbebit totius columnæ $AC$ nisum à vi $S$ oriundum $= \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$. Quocirca totus columnæ $AC$ nisus deorsum tendens erit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; qui cùm in omnibus columnis debeat esse idem, æquabitur conatui, quo columna æqualis semidiametro Terræ 1 in statu naturali à solâ gravitate deorsum nititur, quæ vis est $= \frac{1}{n+1}$. Hinc igitur sequens emergit æquatio, $1 = h^{n+1} + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4}$; ex quâ elicitur $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4}$, quæ est ea ipsa expressio, quam suprà §. 36. alterâ methodo invenimus.

§. 44.

§. 44. Agant nunc vires ambæ ad Solem Lunamque directæ conjunctim; ac primò quidem designet $S$ Solis vim absolutam, $a$ ejus distantiam à Terra, & $u$ sinum anguli, quo Sol suprà horizontem est elevatus. Deinde sit simili modo pro Luna $L$ ejus vis absoluta, $b$ ejus distantia à Terrâ, atque $v$ sinus altitudinis Lunæ super horizonte. Ex his igitur columna aquea $AC=h$ tam vi propriæ gravitatis quàm à viribus Solis ac Lunæ conjunctim in centrum $C$ urgebitur vi $= \frac{h^{n+1}}{n+1} + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv)}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$, quæ æqualis esse debebit vi $\frac{1}{n+1}$. Ex hac autem æquatione resultat $h = 1 + \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$. Quocirca aqua in $A$ supra situm naturalem, quem à solâ gravitate sollicitata obtineret, à viribus Solis ac Lunæ conjunctim sollicitantibus, elevabitur per intervallum $= \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ex quâ expressione status aquæ vel elevationis vel depressionis ubique terrarum cognoscetur.

§. 45. Hanc posteriorem viam secuti, non solùm actiones Solis ac Lunæ commodè conjungere potuimus, sed etiam nunc nobis licebit motûs vertiginis Terræ, & vis centrifugæ inde ortæ, rationem habere; id quod methodo priore opus fuisset insuperabile. Ponamus enim altitudinem columnæ naturalem $AC$, quam habitura esset à vi gravitatis & vi centrifugâ simul, seu quod eodem redit, in figurâ Terræ sphæroidicâ compressâ, esse $=f$, altitudinem autem quam habebit accedentibus viribus Solis ac Lunæ esse $=h$; atque manifestum est quantitates $f$ & $h$ quàm minimè ab 1 discrepare. Cùm igitur utriusque columnæ $f$ & $h$ idem debeat esse nisus deorsùm, columnæ autem $f$ in quam sola gravitas & vis centrifuga agunt nisus sit $= \frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff$, denotante $\alpha$ quantitatem à vi centrifugâ in $A$ pendentem, columnæ verò $h$ nisus sit $= \frac{h^{n+1}}{n+1} - \alpha h^2 + \frac{Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{Lh^2(1-3vv)}{2b^3} + \frac{Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5v^2)}{2b^4}$; erit æqualitate factâ $f^{n+1} - (n+1)\alpha ff = h^{n+1} - (n+1)\alpha h^2 + \frac{(n+1)Sh^2(1-3uu)}{2a^3} + \frac{(n+1)Lh^2(3-1vv)}{2b^3} + \frac{(n+1)Sh^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lh^3v(3-5vv)}{2b^4}$. Ponatur $h=f+s$, erit ob $\alpha$ quantitatem vehementer parvam, $a$ verò & $b$ maximas, $0 = f^n s + \frac{Sf^2(1-uu)}{2a^3} + \frac{Lf^2(1-3vv)}{2b^3} - 2\alpha fs + \frac{Sfs(1-3uu)}{a^3} + \frac{Lfs(1-3vv)}{b^3} + \frac{Sf^3u(3-5uu)}{2a^4} + \frac{Lf^3v(3-5vv}{2a^4}$, neglectis terminis in

quibus $s$ plures obtinet dimenſiones, ob ſummam ipſius $s$ parvitatem reſpectu ipſius $f$. Hinc itaque fiet $s = \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Sfu(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lfv(5vv-3)}{2b^4}$ : $f^{n-2} - \frac{2\alpha}{f} + \frac{S(1-3uu)}{a^3 f} + \frac{L(1-3vv)}{b^3 f}$.

Quòd ſi porrò ponatur ſemiaxis Terræ per polos tranſiens $= 1$, erit ob æquilibrium $\frac{f^{n+1}}{n+1} - \alpha ff = \frac{1}{n+1}$ & $f = 1 + \alpha$, ex quo denominator præcedentis fractionis ab unitate quàm minimè diſcrepabit; ſub ipſo enim æquatore eſt $\alpha = \frac{1}{578}$, ubi quidem eſt maximum: unde omnino ut antè elevatio aquæ à viribus Solis ac Lunæ orta ſupra altitudinem naturalem $s = \frac{S(3uu-1)}{2a^3} + \frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Su(5uu-3)}{2a^4} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$; diſcrimen enim quod revera aderit, ſenſus omnino effugiet, pendebitque ſimul à valore exponentis $n$.

## CAPUT QUARTUM.

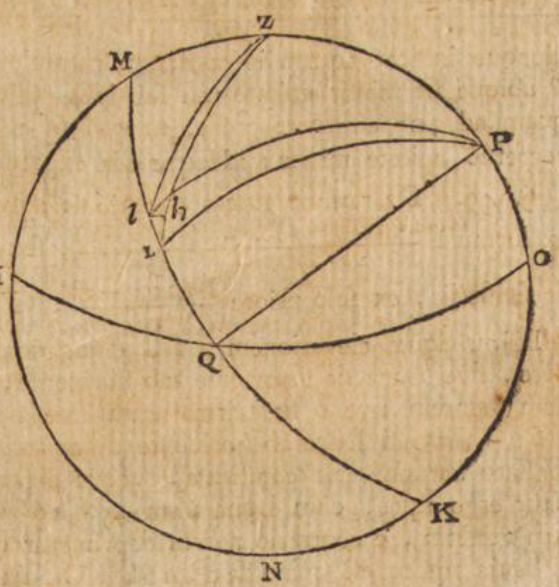
### *De Fluxu ac Refluxu Maris ſi aqua omni inertiâ careret.*

§. 46. QUÆ in capite præcedente ſunt tradita reſpiciunt hypotheſin aſſumtam, quâ Solem ac Lunam reſpectu Terræ perpetuò eundem ſitum tenere poſuimus; ibique præcipuè ſtatum æquilibrii, ad quem Oceanus à viribus Solis & Lunæ perducatur, determinavimus. Longè aliter autem ſe res habet, ſi tam Luna & Sol quàm Terra in motum collocentur, quo caſu ob perpetuam ſitûs relativi mutationem nunquam æquilibrium adeſſe poterit; cùm enim tempore opus ſit, quo data vis datum corpus ad motum perducat, duplici modo ſtatus oceani aſſignatus à vero diſcrepabit. Namque primò aqua quovis momento in eum æquilibrii ſitum, quem vires ſollicitantes intendunt, pervenire non poterit, ſed tantum ad eum appropinquabit continuò; deinde etiamſi in ipſum æquilibrii ſitum perveniat, in eo tamen non acquieſcet, ſed motu jam concepto ulteriùs feretur, uti ex naturâ motûs abundè conſtat. Hujus autem utriuſque aberrationis ratio in inertiâ aquæ eſt poſita, quâ fit ut aqua nec ſubitò in eum ſitum ſe conferat, in quo cum viribus datur æquilibrium, nec cùm hunc æquilibrii ſitum attigerit, ibi quieſcat. Quocirca ne difficultatum multitudine obruamur, aquam omni inertiâ carentem aſſumamus, hoc eſt iſtius indolis, ut non ſolùm quovis momento ſe in ſtatum æquilibrii ſubitò recipiat, ſed ibi etiam omnem motum inſitum deponendo permaneat, quamdiu iſte ſitus viribus

ſol-

ſollicitantibus conveniat. Hâc itaque factâ hypotheſi, perſpicuum eſt aquam quovis temporis momento in eo ipſo ſtatu fore conſtituram, qui ſecundùm præcepta capitis præcedentis poſitioni cùm Solis tùm Lunæ reſpondeat.

§. 47. Ut igitur in hâc hypotheſi, quâ Mare vis inertiæ expers ponimus, pro quovis loco ad quodvis tempus ſtatum Maris quàm commodiſſimè definiamus, primùm ſolam Lunam conſiderabimus, cùm in eâ præcipua æſtûs Maris cauſa contineatur, atque tam Fluxus quam Refluxus Maris à tranſitu Lunæ per meridianum computari ſoleat: quòd ſi enim Lunæ effectus innotuerit, non ſolùm Solis effectus quoque mutatis mutandis colligetur, ſed etiam effectus, qui ab ambobus luminaribus ſimul agentibus proficiſcitur. Propoſitus igitur ſit Terræ locus quicunque, cujus in cœlo Zenith ſit $Z$, horizon $HQO$ & $P$ polus borealis, ita ut arcus $PO$ ſit hujus loci elevatio poli, & circulus $PZHNO$ meridianus. Sit porrò $MLK$ parallelus æquatori, in quo Luna jam motu diurno circumferatur, atque hoc momento reperiatur Luna in $L$; eritque tempus, quo Luna vel ex $L$ ad meridianum $M$ appellet, vel viciſſim à meridiano ad $L$ pertigit, ut angulus $MPL$, ſive hoc tempus ſe habebit ad tempus unius revolutionis Lunæ, quod eſt 24. horarum 48′, uti ſe habet angulus $MPL$ ad quatuor rectos. Sit igitur anguli $MPL$ coſinus $= t$; ſinus elevationis poli $PO$ ſeu ſinus arcûs $PZ = p$, coſinus $= P$, ac ſinus declinationis Lunæ borealis $= Q$, qui idem eſt ſinus diſtantiæ Lunæ à polo $PL$, hujus verò ipſius arcûs ſinus ſit $= q$, cui ſimul coſinus declinationis Lunæ æquatur, atque ob ſinum totum conſtanter poſitum $= 1$, erit $Q^2 + q^2 = 1$. Cùm jam in triangulo ſphærico $ZPL$ dentur arcus $PZ$ & $PL$ cum angulo $ZPL$, reperietur per Trigonometriam ſphæricam arcûs $ZL$ coſinus $= tpq + PQ$, qui ſimul eſt ſinus altitudinis Lunæ ſupra horizontem, quem antè poſuimus $= v$. Ex quibus erit $v = tpq + PQ$, & $3vv - 1 = 3(tpq + PQ)^2 - 1$, atque $5vv - 3 = 5(tpq$



$(tpq+PQ)^2-3$; qui valores in formulis præcedentis capitis ſubſtituti præbebunt ſtatum Maris, hoc eſt vel elevationem vel depreſſionem, pro loco propoſito ad tempus aſſignatum.

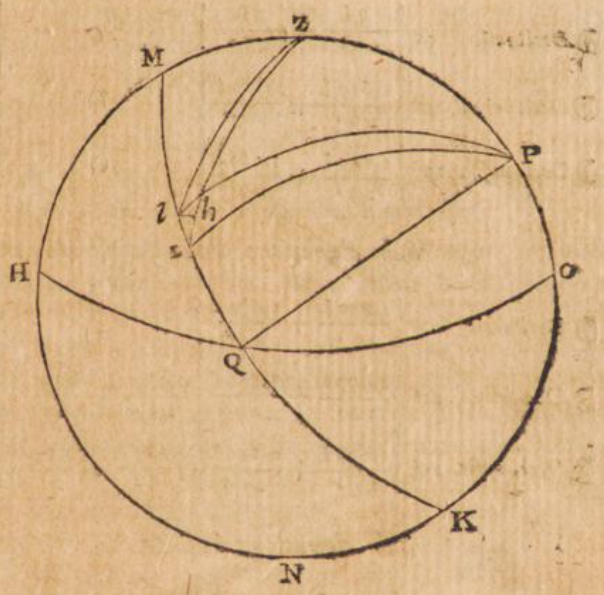
§. 48. Quòd ſi ergo Lunæ vis abſoluta ponatur $= L$, ejuſque à Terra diſtantia $= b$, erit intervallum, quo aqua ſupra ſtatum naturalem elevabitur, $= \frac{L(3(tpq+PQ)^2-1)}{2b^3} + \frac{L(tpq+PQ)(5(tpq+PQ)^2-3)}{2b^4}$, quæ expreſſio ſi fit negativa, indicat aquam infra ſtatum naturalem eſſe depreſſam. Ponamus Lunam horizonte ſeu versùs auſtrum per meridianum tranſire, quo caſu erit $t=1$; hoc igitur tempore aqua ſupra ſtatum naturalem erit elevata intervallo $= \frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3} + \frac{L(pq+PQ)(5(pq+PQ)^2-3)}{2b^4}$. Contrà verò dum Luna ſub horizonte vel versùs boream ad meridianum appellit, fiet elevatio aquæ ſupra ſtatum naturalem per intervallum $= \frac{L(3P^2Q^2-1)}{2b^3} + \frac{LPQ(5P^2Q^2-3)}{2b^4}$; quæ expreſſio ſemper eſt negativa; ideoque indicat aquam infra ſtatum naturalem conſiſtere. Namque cùm $P$ ubique ſit minor unitate niſi ſub ipſis polis, ac declinatio Lunæ nunquam ad 30° aſſurgere poſſit, ex quo $Q < \frac{1}{2}$ & $QQ < \frac{1}{4}$, erit $3P^2Q^2$ perpetuò unitate minor; ideoque illa expreſſio negativa.

§. 49. De ratione autem elevationis aquæ in genere judicare licebit ex formulâ $\frac{L(3vv-1)}{2b^3} + \frac{Lv(5vv-3)}{2b^4}$, ſeu cùm poſterior terminus vix ſit ſenſibilis, ex ſolo priore $\frac{L(3vv-1)}{2b^3}$. Ex hâc autem expreſſione intelligitur aquæ elevationem à ſolâ elongatione Lunæ ab horizonte pendere, ſive Luna ſit ſuper ſive ſub horizonte, retinet enim $3vv-1$ eundem valorem ſive $v$ ſit affirmativum ſive negativum. Deinde quia fit $3vv-1=0$ ſi Luna ab horizonte diſtet arcu 35° 16′, tum aqua in ipſo ſtatu naturali erit conſtituta, neque elevata neque depreſſa. Elevabitur ergo aqua, cùm Luna ultra 35° 16′ vel ſupra vel infra horizontem verſetur, è contrario autem deprimetur quando Lunæ ab horizonte diſtantia minor eſt quàm 35°. 16′. Omnino autem aqua maximè erit depreſſa dum Luna ipſum horizontem occupat, hocque tempore infra ſitum naturalem ſubſidet intervallo $\frac{L}{2b^3} = 1$, 111 pedum (§. 41.); atque de hoc ſitu elevabitur recedente Lunâ ab horizonte ſive ſuper ſive ſub Terra. Hinc iis in regionibus, in quibus Luna oritur & occidit, tempore 24. hor. 48′ Mare bis maximè erit depreſſa, biſque elevata; ſtatus ſcilicet depreſſionis incidet in appulſus Lunæ ad horizontem, ſtatus autem elevationis in appulſus Lunæ ad meridianum. At quibus in regionibus Luna nec oritur nec occidit, quoniam ibi Luna altero appulſu ad meridianum maximè, altero minimè ab horizonte diſtat, ſpatio 24 h. 48′ aqua

ſemel

ſemel tantum elevabitur, ſemelque deprimetur: ſub ipſis autem polis æſtus Maris omnino erit nullus, diurnus ſcilicet; nam variatio declinationis ſola ſtatum Maris turbabit.

§. 50. Cùm igitur ſub polis Terræ nullus ſit Fluxus ac Refluxus Maris, ſed aqua tantum aliquantulum aſcendat deſcendatque, prout Luna vel magis ab æquatore recedit vel ad eum accedit; videamus etiam quomodo æſtus Maris in aliis Terræ regionibus ſecundùm noſtram hypotheſin debeat eſſe comparatus. Conſiderabimus autem præcipuè tres regiones, quarum prima poſita ſit ſub ipſo æquatore, ſecunda habeat elevationem poli 30 graduum, tertia verò 60 graduum. Quia igitur in his omnibus regionibus Luna oritur atque occidit, maxima depreſſio aquæ ubique erit eadem, ſcilicet per intervallum $\frac{L}{2b^3}$ infra ſitum naturalem, eaque continget bis, quando nimirum Luna in ipſo horizonte verſatur. Ab hoc itaque ſtatu maximæ depreſſionis elevationes Maris indicabimus & computabimus, ſpatiis aſſignandis, per quæ aqua attolletur dum Luna vel ſupra horizontem in *M* vel infra in *K* ad meridianum appellit, itemque dum ab utroque meridiano æqualiter diſtat, qui locus ſit *L* exiſtente angulo *M P L* recto. Præterea tres quoque Lunæ ſitus in ſuâ orbitâ contemplabimur, quorum primus ſit, cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, ſecundus cùm Luna habet declinationem borealem 20 graduum, tertius verò cùm Luna declinationem habet auſtralem pariter 20 graduum. Denique in tabellâ ſequente adſcripſimus quantitatem anguli *M P Q*, ex quo tempus tam ortûs quàm occaſûs Lunæ, quo aqua maximè eſt depreſſa, atque elevatio exiſtit nulla, innoteſcit.



*In locis ſub Æquatore ſitis, eſt elevatio Maris, dum Luna verſatur in*

| | *M* | *L* | *K* | *ang. MPQ.* |
|---|---|---|---|---|
| ☽ *Declinatio* 0° | $\left\|\frac{3L}{2b^3}+\frac{2L}{2b^4}\right\|$ | 0 | $\left\|\frac{3L}{2b^3}-\frac{2L}{2b^4}\right\|$ | 90°, 0′ |
| ☽ *Decl. boreal.* 20° | $\left\|\frac{2,649L}{2b^3}+\frac{1,549L}{2b^4}\right\|$ | 0 | $\left\|\frac{2,649L}{2b^3}-\frac{1,549L}{2b^4}\right\|$ | 90°, 0′ |
| ☽ *Decl. auſtr.* 20° | $\left\|\frac{2,649L}{2b^3}+\frac{1,549L}{2b^4}\right\|$ | 0 | $\left\|\frac{2,649L}{2b^3}-\frac{1,549L}{2b^4}\right\|$ | 90°, 0′ |

*Sub elevatione Poli* 30°, *erit Maris elevatio*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ☽ *Declinatio* 0° | $\left\|\frac{2,250L}{2b^3}+\frac{1,082L}{2b^4}\right\|$ | 0 | $\left\|\frac{2,250L}{2b^3}-\frac{1,082L}{2b^4}\right\|$ | 90°, 0′ |
| ☽ *Decl. boreal.* 20° | $\left\|\frac{2,909L}{2b^3}+\frac{1,880L}{2b^4}\right\|$ | $\left\|\frac{0,087L}{2b^3}-\frac{0,156L}{2b^4}\right\|$ | $\left\|\frac{1,239L}{2b^3}-\frac{0,154L}{2b^4}\right\|$ | 102°, 8′ |
| ☽ *Decl. auſtr.* 20° | $\left\|\frac{1,239L}{2b^3}+\frac{0,154L}{2b^4}\right\|$ | $\left\|\frac{0,087L}{2b^3}+\frac{0,156L}{2b^4}\right\|$ | $\left\|\frac{2,909L}{2b^3}-\frac{1,880L}{2b^4}\right\|$ | 77°, 52′ |

*Sub elevatione Poli* 60°, *erit Maris elevatio*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ☽ *Declinatio* 0° | $\left\|\frac{0,740L}{2b^3}-\frac{0,125L}{2b^4}\right\|$ | 0 | $\left\|\frac{0,740L}{2b^3}+\frac{0,125L}{2b^4}\right\|$ | 90°, 0′ |
| ☽ *Decl. boreal.* 20° | $\left\|\frac{1,760L}{2b^3}+\frac{0,582L}{2b^4}\right\|$ | $\left\|\frac{0,263L}{2b^3}-\frac{0,514L}{2b^4}\right\|$ | $\left\|\frac{0,092L}{2b^3}+\frac{0,158L}{2b^4}\right\|$ | 129°, 5′ |
| ☽ *Decl. auſtr.* 20° | $\left\|\frac{0,092L}{2b^3}-\frac{0,158L}{2b^4}\right\|$ | $\left\|\frac{0,263L}{2b^3}+\frac{0,514L}{2b^4}\right\|$ | $\left\|\frac{1,760L}{2b^3}-\frac{0,582L}{2b^4}\right\|$ | 50°, 55′ |

§. 51. Si quis jam ex hâc tabulâ elevationem Maris ſupra ſtatum maximæ depreſſionis in menſuris cognitis definire voluerit, is loco fractionum $\frac{L}{b^3}$ & $\frac{L}{b^4}$ earum valores in pedibus Pariſinis ex §. 41. ſubſtituat, habitâ ratione diſtantiæ Lunæ à Terrâ, prout ibidem eſt expoſitum. Conſequuntur autem ex hac tabulâ multa egregia conſectaria, quæ verò nondum ſummo cum rigore ad experientiam examinari poſſunt, etiamſi jam inſignis convenientia deprehendatur. Aquam enim adhuc omnis inertiæ expertem ponimus, perſpicuum autem eſt, ſi aquæ inertia tribuatur, tum diverſa omnino Phænomena oriri oportere. Quòd ſi igitur hi aſſignati effectus jam cum obſervationibus planè conſentirent, id potiùs theoriam everteret quàm confirmaret, cùm aquam extra ſtatum ſuum naturalem

uralem ſimus contemplati. Interim tamen ſatis tutò jam ſtatus Maris ub ipſis polis poterit definiri, qui etſi ad experientiam examinari non poteſt, tamen ipsâ ratione confirmabitur. Ac primò quidem ſub polis nulla erit Maris mutatio diurna, cùm Luna per totum diem eandem teneat ab horizonte diſtantiam, id quod ipſa quoque ratio dictat, quia ibi non datur meridianus, à cujus appulſu æſtus Maris alibi æſtimari ſolet. Dabitur tamen his locis mutatio menſtrua, atque aqua maximè erit humilis cùm Luna in ipſo æquatore verſatur, quo quippe tempore perpetuò horizontem occupabit. Hinc porrò aqua ſenſim elevabitur prout Lunæ declinatio ſive versùs boream ſive versùs auſtrum augetur, donec tandem ſi declinatio ſit maxima, per ſpatium 10 pollicum tantum elevetur; quæ mutatio cùm ſit perquàm lenta, ab inertia aquæ vix turbabitur.

§. 52. Ex his verò iiſdem formulis effectus à Sole oriundus non difficulter colligetur; tantum enim quantitates $S$ & $a$, loco $L$ & ſubſtitui oportet, quo facto effectus Solis circiter quater minor reperietur quàm is qui à Lunâ oritur. Seorſim autem cùm Solis tùm Lunæ effectibus definitis, per conjunctionem ſimplicem effectus, quem ambo luminaria conjunctim producunt, determinabitur. Ponamus itaque primùm Solem Lunamque in conjunctione verſari, id quod fit tempore novilunii; tum igitur neglectâ Lunæ latitudine, Sol & Luna in eodem eclipticæ loco verſabuntur, atque ſimul ad meridianum æquè ac ad horizontem appellent. Quocirca manentibus ſuperioribus denominationibus, erit quoque Solis declinationis ſinus $= Q$, coſinus $= q$, ac pro angulo $MPL$ cujus coſinus eſt $= t$, erit ſinus altitudinis Solis pariter uti Lunæ $= tpq + PQ$. Ex quo dum ambo luminaria per meridianum versùs auſtrum tranſeunt, aquæ elevatio, quæ tum erit maxima, altitudinem naturalem ſuperabit intervallo $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)\left\{3(pq+PQ)^2-1\right) + \frac{L(pq+PQ)}{2b^4}\left(5(pq+PQ)^2-3\right)$, neglecto altero termino à vi Solis oriundo, cùm ſenſus omnino effugiat. At dum ambo luminaria infra horizontem ad meridianum pertingunt, erit elevatio aquæ $= \left(\frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}\right)(3(PQ-pq)^2-1) + \frac{L(PQ-pq)}{2b^4}(5(PQ-pq)^2-3)$. Maxima denique aquæ depreſſio incidet, quando luminaria vel oriuntur vel occidunt, eaque minor erit quàm altitudo aquæ naturalis intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Cùm igitur $\frac{S}{2a^3}$ ſit circiter ſubquadruplum ipſius $\frac{L}{2b^3}$, in novilunio omnes effectus Lunæ ſuprà recenſiti, quartâ ſui parte augebuntur.

§. 53. In plenilunio omnia eodem ſe habere modo deprehenduntur, quo in novilunio, quia enim tum Sol & Luna in oppoſitione verſantur, erit declinatio Solis æqualis & contraria declinationi Lunæ, unde quidem pro Sole fit $-Q$, quod in novilunio erat $+Q$; at cùm Sol ſecun-

dùm aſcenſionem rectam à Lunâ diſtet 180°, erit hoc caſu $-t$, quod antè erat $+t$, ex quo pro plenilunio habetur ſinus altitudinis Solis $=-tpq-PQ$, qui pro novilunio erat $=tpq+PQ$, ex quo quadratum hujus ſinûs utroque caſu eſt idem, ideoque etiam eadem Phænomena in novilunio atque plenilunio. Deinde etiam hoc tempore aqua maximè deprimetur, cùm luminaria ambo in horizonte verſantur, tumque aqua humilior erit quàm in ſtatu naturali intervallo $= \frac{S}{2a^3} + \frac{L}{2b^3}$. Ex hoc itaque ſitu donec Luna ad meridianum ſupra Terram appellit, aqua elevabitur per intervallum $= 3(PQ+pq)^2\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)$, tantoque iterum ſubſidet uſque ad Lunæ obitum; tum verò rurſus elevabitur uſque ad appulſum Lunæ ad meridianum infra horizontem, idque per ſpatium $3(PQ-pq)^2\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)$, neglecto termino ſequente quippe ferè inſenſibili. Cùm igitur ſint $PQ+pq$ & $PQ-pq$ ſinus diſtantiæ Lunæ ab horizonte dum in meridiano verſatur, erunt ſpatia per quæ aqua tempore pleniluniorum ac noviluniorum ſupra ſtatum maximè depreſſum elevatur, in ratione duplicatâ ſinuum diſtantiarum Lunæ ab horizonte, dum per meridianum tranſit. Niſi ergo vel Luna in ipſo æquatore exiſtat, vel Terræ locus ſub æquatore ſit ſitus, Fluxus Maris diurni ac nocturni erunt inæquales; luminaribus autem in æquatore extantibus, utraque aquæ elevatio fiet per ſpatium $= 3pp\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right)$.

§. 54. Ut nunc in effectus, quos Sol & Luna in quadraturis ſitî conjunctim producunt, inquiramus; ponamus, ne calculus nimium fiat prolixus, Solem in ipſo æquatore verſari, quoniam tum plerumque minimus æſtus obſervatur. Hoc itaque caſu Solis declinatio erit nulla, Lunæ verò maxima, quam neglectâ latitudine aſſumamus 23° 29′, cujus ſinus ſit $=Q$, coſinus $=q$, poſitâ hac declinatione boreali. Jam ponamus Lunam in meridiano in $M$ verſari, quo tempore Sol erit in horizonte; unde cùm aqua ſupra ſtatum naturalem elevetur à Lunâ intervallo $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}$, à Sole verò deprimatur intervallo $\frac{S}{2a^3}$, ab utrâque vi conjunctim elevabitur per ſpatium $\frac{L(3(pq+PQ)^2-1)}{2b^3}-\frac{S}{2a^3}$: at dum Luna ſub horizonte ad meridianum appellit, aqua elevabitur per ſpatium $\frac{L(3(PQ-pq)^2-1)}{2b^3}-\frac{S}{2a^3}$. Sumatur inter has ambas elevationes inæquales more ſolito medium, eritque elevatio aquæ mediâ hac quadraturâ eveniens $=\frac{L(3p^2q^2+3p^2Q^2-1)}{2b^3}-\frac{S}{2a^3}$. Refluxus verò continget, cùm Luna horizontem attinget, quo tempore Sol in meridiano proximè verſabitur, ex quo depreſſio totalis aquæ in Refluxu infra ſtatum naturalem pro-

proximè erit $= \frac{L}{2b^3} - \frac{S(3pp-1)}{2a^3}$: quare à Fluxu uſque ad ſubſequentem Refluxum aqua ſubſidet per intervallum $= \frac{3L(p^2q^2+p^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$.

§. 55. Quamvis motus Maris hoc modo aſſignatus ab inertiâ aquæ multum immutetur, tamen quia eandem ferè mutationem tam majoribus æſtibus quàm minoribus infert, ſatis tutò aſſumere poſſe videmur ſpatia, per quæ aqua circa æquinoctia cùm tempore plenilunii ſive novilunii, tùm etiam tempore quadraturarum actu aſcendit, expreſſionibus inventis eſſe proportionalia. Quamobrem ſi in dato Terræ loco ex pluribus obſervationibus determinetur ſpatium medium, per quod Mare à Refluxu ad Fluxum aſcendit, tempore æquinoctiorum, tam in pleniluniis noviluniiſve quàm in quadraturis, eorum ratio ad eam quæ ex formulis conſequitur, proximè accedere debebit. Atque hinc ex definitâ hac ratione per obſervationes ratio poterit inveniri inter vires Solis & Lunæ abſolutas $S$ & $L$, quæ eſt ipſa via quâ Newtonus eſt uſus ad vim Lunæ abſoluram definiendam, cùm vis Solis ſit cognita: quod negotium, cùm à Newtono non ſatis accuratè ſit pertractatum, nos id ex iſtis principiis expediemus. Exprimat igitur $m:n$ rationem intervallorum eorum, per quæ Oceanus in dato Terræ loco, cum in ſyzygiis luminarium quùm quadraturis tempore æquinoctiorum, aſcendendo deſcendendoque oſcillatur; eritque $m:n = 3pp\left(\frac{S}{2a^3}+\frac{L}{2b^3}\right) : \frac{3L(p^2q^2+p^2Q^2)}{2b^3} - \frac{3Spp}{2a^3}$; ex quâ elicitur iſta proportio $m\left(q^2+\frac{p^2Q^2}{p^2}\right)-n:m+n = \frac{S}{a^3}:\frac{L}{b^3}$; ex quâ cùm data ſit vis à Sole orta $\frac{S}{a^3}$, deducitur vis à Lunâ oriundâ $\frac{L}{b^3}$ ſaltem proximè. Inſtituamus calculum pro obſervationibus in Portu Gratiæ (*Havre de Graces*) factis, ex quibus diligenter inter ſe collatis pro ratione $m:n$ prodit iſta 17:11. Cùm igitur hujus loci elevatio poli ſit circiter 50°, erit $P = \text{ſin. } 50°$, & $Q = \text{ſin. } 23°, 29'$; hincque $qq + \frac{p^2Q^2}{pp} = 1{,}0668$: ex quo prodibit $\frac{S}{a^3}:\frac{L}{b^3} = 7{,}1356:28$; ita ut vis Lunæ $\frac{L}{b^3}$ ſit ferè quadrupla vis Solis $\frac{S}{a^3}$, ut jam Newtonus ex aliis obſervationibus concluſit: atque hanc ob rem ipſius determinationem vis Lunæ abſolutæ $L$ retinuimus.

§. 56. Si hæc, quæ de combinatione virium Lunam Solemque reſpicientibus ſunt allata, attentiùs conſiderentur, mox patebit maximos æſtus menſtruos in novilunia ac pleniluna incidere debere; his enim temporibus tam elevatio aquæ quàm depreſſio à Luna oriunda à vi Solis maximè adjuvatur, cùm eodem tempore, quo Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, ſimul quoque Solis vis aquam maximè vel elevet vel deprimat. In quadraturis autem hæ duæ vires ferè perpetuò diſ-

ſentiunt, ac dum Luna aquam maximè vel elevat vel deprimit, eodem tempore Sol contrarium exerit effectum, aquamque maximè vel deprimit vel elevat, ex quo minimum diſcrimen inter quemque Fluxum ac ſubſequentem Refluxum obſervabitur, æſtuſque erunt minimi. Quamobrem circa alias Lunæ phaſes æſtus Maris medium teneat inter maximum minimumque neceſſe eſt, quia tum vires Solis ac Lunæ nec omninò conſpirant, nec ſibi invicem adverſantur. Per totum autem annum quibus noviluniis pleniluniiſque maximus eveniat æſtus, quibuſque quadraturis minimus æſtus reſpondeat, abſolutè ſine reſpectu ad ſitum loci habito definiri nequit. Sub æquatore quidem ubi Luna, cùm eſt in æquatore, maximâ vi gaudet, dubium eſt nullum, quin æſtus maximi in æquinoctia incidat, quando ambo luminaria in æquatore ſunt poſita, quæ eadem proprietas etiam in loca ab æquatore non multum diſſita competit: at in locis ab æquatore magis remotis æſtus Maris, cùm Luna maximam habet declinationem, dantur quidem majores ex Tabula §. 50, verùm æſtus mox ſubſequentes multo ſunt minores. Quòd ſi autem inter binos æſtus à Lunâ oriundos conſequentes medium capiatur, patebit in regionibus 30°. ab æquatore remotis, quibus æſtus eſt $\frac{2,250}{2b^3} L$ ſi Lunæ declinatio ſit nulla, æſtum Maris medium, cùm Luna habet declinationem 20 graduum, fore $= \frac{2,074}{2b^3} L$, ideoque adhuc minorem quàm cùm Luna æquatorem tenet. Contrà verò ſub elevatione poli 60 graduum, eſt æſtus Maris, Lunâ verſante in æquatore, $= \frac{0,740}{2b^3} L$, æſtus autem medius, cùm Lunæ declinatio eſt 20°, eſt $= \frac{0,926}{2b^3} L$, ideoque major. Ex quo conſequitur in regionibus polis vicinioribus æſtus maximos, non in æquinoctia, ſed potius circa ſolſtitia, incidere debere, quâ quidem in re theoria noſtra per experientiam mirificè confirmatur.

## CAPUT QUINTUM.

### *De tempore Fluxûs ac Refluxûs Maris in eâdem hypotheſi.*

§. 57. QUANQUAM in præcedenti capite, quo in quantitatem æſtûs Maris præcipuè inquiſivimus, etiam tempora, quibus tam Fluxus quàm Refluxus eveniat, jam indicavimus; tamen hoc capite iſtud argumentum fuſiùs atque ad obſervationes accommodatè perſequemur. Obſervationes enim, quæ circa æſtum Maris inſtitui ſolent, ad tria genera commodiſſimè referuntur; ad quorum

rum primum pertinet Maris cùm elevatio maxima tùm maxima depreſſio, atque indicatur quantum quovis æſtu aqua cùm aſcendat tùm deſcendat. Ad ſecundum obſervationum genus numerari convenit eas, quæ ad tempus reſpiciunt, quibuſque definitur, quonam temporis momento ubivis terrarum aqua cùm ſummam teneat altitudinem tùm minimam. Tertium denique genus obſervationum ad ipſum motum Maris reciprocum ſpectat, iiſque determinatur quantâ celeritate quovis temporis momento alterna Maris elevatio ac depreſſio abſolvatur, ſive momentanea mutatio, dum Mare à Fluxu ad Refluxum tranſit & viciſſim, inveſtigatur. Quibus tribus rebus cùm obſervationes convenientiſſimè inſtituantur, iiſdem theoria atque explicatio phænomenorum commodiſſimè tractabitur. Ac primæ quidem & tertiæ parti pro noſtrâ hypotheſi in præcedentibus capitibus abundè ſatisfactum videtur.

§. 58. Quoniam autem à Maris inertiâ aliiſque circumſtantiis Maris motum turbantibus omnes cogitationes adhuc abſtrahimus, manifeſtum eſt ubique terrarum, ſi ſola Lunæ vis Mare agitaret, aquam maximè elevari debere cùm Luna ab horizonte longiſſimè fuerit remota, hoc eſt iis ipſis momentis quibus Luna per meridianum dati loci tam ſupra quàm infra Terram tranſit: ſunt enim elevationes aquæ in duplicatâ ratione ſinuum diſtantiarum Lunæ ab horizonte, ex quo ſimul ſucceſſiva Maris commotio cognoſcitur. Excipiuntur autem hinc, ut jam notavimus, loca polis Terræ proxima, quibus Luna vel non oritur vel non occidit; ibi enim altero Lunæ ad meridianum appulſu aqua debet eſſe ſumma, altero ima. Verùm de his locis non admodum erimus ſolliciti; cùm tam obſervationes ſufficientes, quibus theoria probetur, deficiant, quàm ipſe Maris motus indicatus rationi ſit conſentaneus, neque confirmatione indigeat. In Terræ locis ergo à polis ſatis remotis ſeu extra circulos polares ſitis, quibus Luna intervallo 24 h. 48′ tam oritur quàm obit, elevabitur Mare eodem temporis intervallo bis, totieſque deprimetur; atque utraque maxima Maris altitudo continget, cùm Luna ad meridianum illius loci pervenit, minima verò cùm Luna horizontem attingit. Hinc igitur temporis intervallum inter binos aquæ Fluxus ſeu ſummas elevationes interjectum conſtanter erit 12 h. 24′, ab anomaliis Lunæ mentem abſtrahendo; at tempus ſummæ depreſſionis, cùm reſpondeat appulſui Lunæ ad horizontem, inter binas elevationes æqualiter non interjacebit, ſed alteri elevationi eò erit propiùs, quò major fuerit cùm loci propoſiti elevatio poli tum Lunæ declinatio, hoc eſt quò majus fuerit diſcrimen inter ortum obitumve Lunæ & circulum horarium ſextum.

§. 59. Sed conjungamus cum Lunâ vim Solis, ut noſtræ concluſiones magis ad obſervationes perducantur. Ac primò quidem manifeſtum eſt tempore tam novilunii quàm plenilunii aquam maximè fore elevatam, quando Luna per meridianum loci tranſit, quippe quo momento etiam

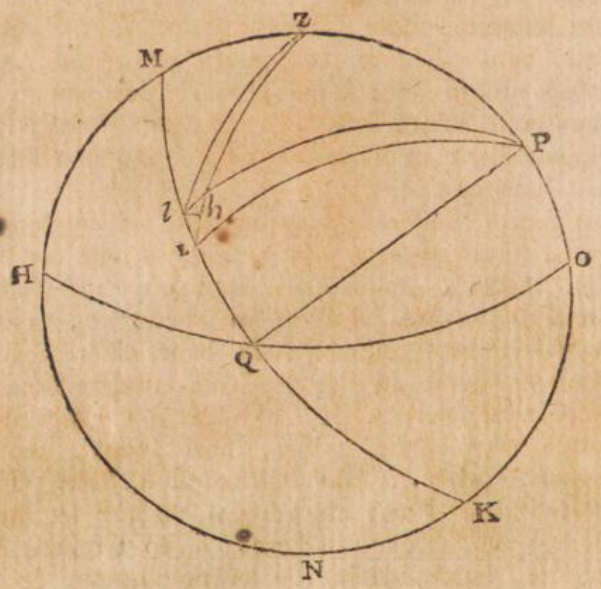
Sol ad eundem meridianum appellit, ſi quidem ſyzygia ipſo meridie vel mediâ nocte celebratur. Quamobrem ſi novilunium pleniluniumve in ipſum meridiem incidat; ipſo quoque meridiei momento maxima habebitur aquæ elevatio; pariterque ſi id eveniat mediâ nocte, eodem ipſo momento aqua maximam obtinebit elevationem. Verùm ſi conjunctio vel oppoſitio luminarium meridiem vel præcedat vel ſequatur, tum Fluxus non in ipſum meridiem incidet, ſed vel tardiùs vel citiùs veniet, quia Luna his caſibus tanquam primaria æſtûs cauſa vel poſt vel ante meridiem ad meridianum pertingit. Atque hinc eo die, in quem ſive plenilunium ſive novilunium incidit, facilè poterit definiri acceleratio vel retardatio Fluxûs reſpectu meridiei. Ponamus enim novilunium ſeu plenilunium celebrari $n$ horis ante meridiem, unde cùm motus Lunæ medius à Sole diurnus ſit 12°. circiter, ipſo meridie Luna à meridiano jam diſtabit angulo horario $\frac{n}{2}$ grad. versùs ortum, ex quo Luna poſt meridiem demum per meridianum tranſibit, elapſis $\frac{n}{30}$ horis ſeu $2n$ minutis primis. Sin autem novilunium pleniluniumve accidat $n$ horis poſt meridiem, tum Maris maxima elevatio $2n$ minutis ante meridiem eveniet. Hæc autem momenta accuratiſſimè cognoſcentur, ſi ad ſingulos dies tranſitus Lunæ per meridianum computentur; ac præterea tam ortus quàm occaſus notetur, quippe quibus momentis maxima aquæ depreſſio reſpondet; majorem autem hujuſmodi tabula afferet utilitatem, ſi inſuper quovis die diſtantia Lunæ à Terrâ inducetur, quippe à quâ Lunæ effectus præcipuè pendet.

§. 60. Congruunt hæc jam apprimè cum obſervationibus, quibus conſtat, diebus novilunii vel plenilunii æſtum Maris accelerari ſi novilunium pleniluniumve poſt meridiem accidat, contrà verò retardari. Quamvis enim ob aquæ inertiam maxima Maris elevatio non reſpondeat appulſui Lunæ ad meridianum, ſed tardiùs eveniat, uti poſt docebitur, tamen ſimilibus caſibus æqualiter retardabitur; pro termino igitur fixo, ſi ad obſervationes reſpiciatur, non ſumi debet momentum meridiei, ſed id momentum, quo ſi Lunæ cum Sole conjunctio vel oppoſitio in ipſum meridiem incidit, ſumma aquæ elevatio obſervatur. Hoc igitur momento notato, uti ab iis qui hujuſmodi obſervationes inſtituunt fieri ſolet, ſi plenilunium noviluniumve vel ante vel poſt meridiem incidat, ſumma Maris elevatio vel tardiùs vel citiùs continget: & quidem ſyzygia vera $n$ horis vel ante meridiem eveniat vel poſt, tum Fluxus $2n$ minutis vel tardiùs vel citiùs obſervari debebit. Atque hæc eſt ea ipſa regula quam Celeb. Caſſini in Mem. Academiæ Regiæ pro An. 1710, ex quamplurimis obſervationibus inter ſe comparatis derivavit; jubet ſcilicet numerum horarum, quibus conjunctio ſive oppoſitio luminarium verum meridiem

diem vel præcedit vel ſequitur, duplicari, totidemque minuta prima ad tempus medium notatum, quo Fluxus evenire ſolet, vel addi vel ab eo ſubtrahi, quo verum Fluxus momentum obtineatur. Quoniam autem hæc correctio nititur motu Lunæ medio, perſpicuum eſt eam correctione ulteriori opus habere à vero Lunæ motu petitâ, quæ verò plerumque erit inſenſibilis, cùm ſumma aquæ elevatio non ſubitò adſit, ſed per tempus ſatis notabile duret.

§. 61. Niſi autem luminaria proxima ſint vel conjunctioni vel oppoſitioni, maxima Maris elevatio non in ipſum Lunæ tranſitum per meridianum incidet. Quoniam enim Luna dum prope meridianum verſatur, per aliquod tempus eandem altitudinem conſervat, tantiſper etiam Mare eandem elevationem retinebit; & hanc ob rem ſi Sol interea ſenſibiliter vel ab horizonte recedat, vel ad eundem accedat, vis Solis ad Mare elevandum vel creſcet ſenſibiliter, vel decreſcet; ex quo dum Luna prope meridianum exiſtit, fieri poteſt, ut tamen mare etiamnum elevetur, vel adeò jam deprimatur à Sole. Ex his igitur perſpicuum eſt ſummam Maris altitudinem tardiùs ſeu poſt tranſitum Lunæ per meridianum accidere debere, ſi eo tempore Sol ab horizonte accedat, id quod evenit diebus novilunium & plenilunium præcedentibus. Contrà autem ſi Luna poſt Solem per meridianum tranſeat, idque vel ante Solis ortum vel ante occaſum; tum, quia Mare in tranſitu Lunæ per meridianum à vi Solis deprimitur, maximam habuit altitudinem ante appulſum Lunæ ad meridianum, id quod contingit diebus novilunium pleniluniumve ſequentibus. Quando autem Sol ipſum horizontem occupat, dum Luna in meridiano verſatur, tum etiamſi diſtantia Solis ab horizonte perquam ſit mutabilis, tamen cùm elevationis vis quadrato ſinûs altitudinis Solis ſit proportionalis, quod omnino evaneſcit, etiam hoc caſu maxima aquæ elevatio in ipſum Lunæ per meridianum tranſitum incidet, hicque caſus circa quadraturas luminarium locum habet.

§. 62. Ut



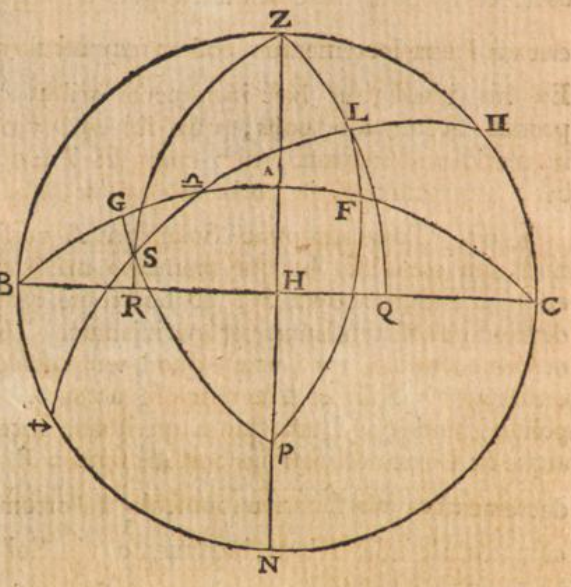

§. 62. Ut igitur innoteſcat, quamtum vires cùm Solis tùm Lunæ ad Mare elevandum dato tempore vel creſcant vel decreſcant, dum ab horizonte aliquantillum vel recedunt, vel ad eundem accedunt, ponamus Solem Lunamve in $L$ verſari, atque inde ad punctum meridiani $M$ progredi. Tempuſculo ergo per angulum $LPl = d\theta$ repræſentato progredietur Luna vel Sol ex $L$ in $l$ atque ab horizonte removebitur intervallo $Lh$: ad quod inveniendum ſit ut antè anguli $MPL$ coſinus $= t$, & ſinus $= T$, eritque ipſe angulus $LPl = d\theta = \frac{\sqrt{(1-tt)}}{+dt} = \frac{dt}{T}$, ex quo oritur anguli $MPl$ coſinus $= t + dt = t + Td\theta$. Si jam ponatur ſinus elevationis poli $= P$, ſinus declinationis borealis puncti $L = Q$, nam ſi declinatio ſit auſtralis, ſinus $Q$ ſumi debet negativè, coſinus verò reſpondentes ſint $p$ & $q$, reperietur ſinus altitudinis $L$ ſupra horizontem $= v = tpq + PQ$: punctique $l$ ſinus altitudinis $v + dv = tpq + PQ + Tpqd\theta$. Quocirca ſi Luna ponatur in $L$, cùm ejus vis ad Mare attollendum ſit $= \frac{L(3vv-1)}{2b^3}$, erit hujus vis incrementum tempuſculo $d\theta$ ortum $= \frac{3Lvdv}{b^3} = \frac{3L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{b^3}$. At ſi Sol ponatur in $L$, ejus vis ad Mare elevandum tempuſculo $d\theta$ capiet incrementum $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$. Quamvis autem pro Sole & Lunâ eidem angulo $d\theta$ non æqualia tempora reſpondeant, tamen quia ea proximè ad rationem æqualitatis accedunt,

dunt, sunt enim ut 24 ad 24 $\frac{1}{4}$ seu ut 32 ad 33, sine sensibili errore pro æqualibus haberi poterunt. Interim tamen si res accuratè definiri debeat, & vis Solis incrementum angulo $d\theta$ acquisitum sit $= \frac{3S(tpq+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, erit vis Lunæ incrementum eodem tempusculo acceptum $= \frac{32L(tpq+PQ)Tpqd\theta}{11b^3}$. Ex his intelligitur hæc incrementa tribus casibus evanescere, quorum primus evenit sub polis, quia ibi est $p=0$; secundus, si punctum $L$ in meridiano sit situm, tum enim fit $T=0$; tertius denique locum habet, si punctum $L$ in horizonte existat, ubi est $tpq+PQ=0$.

§. 63. Ponamus nunc Solem in $L$ versari ac Lunam per meridianum jam transiisse, hocque momento maximè aquam esse elevatam; jam enim ostendimus dum Sol ab horizonte recedit, aquam summam incidere post transitum Lunæ per meridianum. Hoc ergo momento necesse est, ut decrementum vis Lunæ, quod tempusculo $d\theta$ patitur, æquale sit incremento vis Solis eodem tempore accepto. Sit igitur anguli horarii ad polum sumti quo Luna jam à meridiano recessit, cosinus $= n$, sinus $= N$, atque sit Lunæ declinationis borealis sinus $= R$, cosinus $= r$, ex quibus orietur decrementum vis Lunæ tempusculo $d\theta$ ortum $= \frac{3L(npr+PR)Nprd\theta}{b^2}$, quod cùm æquale esse debeat incremento vis Solis eodem tempusculo nato $= \frac{3S(tpp+PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, denotante $Q$ sinum declinationis borealis Solis, & $q$ ejus cosinum, habebitur hæc æquatio $\frac{L(npr+PR)Nr}{b^3} = \frac{S(tpq+PQ)Tq}{a^3}$, neglectâ fractione $\frac{12}{33}$, per quam incrementum vis Lunæ multiplicari deberet. Quoniam autem Luna à meridiano non procul distabit, poni poterit $n=1$, atque cùm sit proximè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, obtinebitur iste valor $N = \frac{Tq(tpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$; qui in tempus conversus dabit temporis spatium, quo aqua post transitum Lunæ per meridianum maximam altitudinem attingit. Sub æquatore ergo erit $N = \frac{Ttqq}{4rr}$, ob $P=0$ & $p=1$; quare si declinationes Luminarium vel negligantur vel æquales assumantur, ita ut sit $qq=rr$, fiet $N = \frac{Tt}{4}$, cujus expressionis valor extat maximus si angulus $MPL$ sit $45°$, quo casu erit $N = \frac{1}{8}$, & angulus respondens $= 7°,11'$, qui indicat aquam summam 30 minutis post transitum Lunæ per meridianum contingere debere: totidemque minutis aqua ante transitum Lunæ per meridianum maximè erit elevata, si Sol tum versùs occasum versetur angulo $MPL =$ semirecto. Quamobrem si Luna ad meridianum appellat horâ nonâ sive matutinâ sive pomeridianâ, Fluxus demum post semihoram eveniet; at si horâ tertiâ appellat Luna ad meridianum, aqua summa 30' antè obser-

vabitur: in aliis verò Terræ regionibus iſta aberratio magis eſt irregularis; interim tamen ſatis prope ex formulâ datâ per ſolam æſtimationem poteſt definiri.

§. 64. Quòd ſi autem hanc rem curatiùs inveſtigare velimus, amborum Luminarium declinationes non pro arbitrio fingere licet, pendent enim à ſe mutuò maximè ob angulum horarium *MPL* inter ea interjectum datum: ut igitur pro datâ Lunæ phaſi aberrationem maximæ aquæ elevationis à tranſitu Lunæ per meridianum determinemus, repræſentet nobis circulus *Z B N C* verticalem primarium, *B C* horizontem, *Z N* meridianum per dati loci Zenith *Z* & Nadir *N* ductum, atque Æquator ſit *B A C*, polus auſtralis *p*, & ecliptica ♈ ♎ ♑.




Conſtitutus nunc ſit Sol in ☉ & Luna in *L*, quæ modò per meridianum tranſierit, quo tempore ponimus aquam maximè eſſe elevatam. Ponamus porrò longitudinis Solis ab æquinoctio verno computatæ ſinum eſſe $= F$, coſinum $= f$; Lunæ verò longitudinis ſinum eſſe $= G$, coſinum $= g$; ſitque inclinationis eclipticæ $B$ ♎ ♑ ſinus $= M$, coſinus $= m$. Ex his definientur declinationes cùm Solis tùm Lunæ, quarum ſinus antè erant poſiti $Q$ & $R$; erit ſcilicet $Q = FM$, $R = GM$; hincque $q = \sqrt{(1 - F^2 M^2)}$ & $r = \sqrt{(1 - G^2 M^2)}$. Deinde angulus *SpL* æqualis eſt angulo cujus tangens eſt $\frac{mF}{f}$ demto angulo cujus tangens eſt $\frac{mG}{g}$; hujus verò ejuſdem anguli ob angulos *SpZ* & *LpZ* datos, quorum ſinus ſunt poſiti $T$ & $N$, tangens quoque eſt $\frac{nT + Nt}{nt - NT}$, quæ tangens propter ſinum $N$ valde parvum proximè eſt $= \frac{T}{t} + \frac{N}{tt}$. Ponatur autem $K$ pro ſinu anguli qui exceſſus eſt anguli habentis tangentem $= \frac{mF}{f}$ ſuper angulum cujus tangens eſt $\frac{mG}{g}$, & $k$ pro coſinu, reperietur $T = K - Nk$ & $t = k + NK$ ſcripto 1 pro $n$: quibus valoribus ſubſtitutis prodibit $N =$

$\frac{Kq}{}$

$\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)q^2+kPQq}$ ex æquatione $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)}$, paragr. præced.

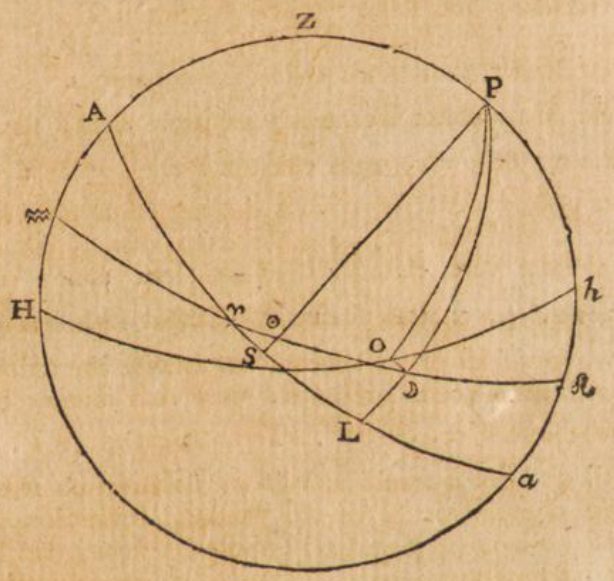
§. 65. Ponamus nunc Lunam in quadraturis verſari ac primò quidem in primo poſt novilunium quadrante, ita ut arcus $LS$ futurus ſit 90°., erit $G=f$, & $g=-F$, unde $Q=MF$ & $R=Mf$, ex quibus prodibit $K=$ ſin. $(\text{Atang.}\frac{mF}{f}-\text{Atang.}\frac{-mf}{F})$ atque $k$ ejuſdem anguli coſinui æquabitur. Quare his tempeſtatibus aqua maximè elevata poſt tranſitum Lunæ per Meridianum, intervallo temporis quod in arcum æquatoris converſum dabit angulum cujus ſinus erit $N=\frac{Kq(kpq+PQ)}{4r(pr+PR)+(2k^2-1)q^2+kPQq}$. Pro poſteriore verò quadraturâ poſt novilunium, erit $G=-f$ & $g=F$, unde erit $Q=MF$ & $R=-Mf$, ex quibus ſit ut antè $K=$ ſin. $(\text{Atang.}\frac{mF}{f}-\text{Atang.}\frac{-mf}{F})$ & $k=$ coſinui reſpondenti. Ne autem hìc ſigna + & − calculum confundant, notari convenit $K$ eſſe ſinum arcûs, qui reſtat, ſi aſcenſio recta Lunæ ſubtrahatur ab aſcenſione rectâ Solis; atque $k$ eſſe ejuſdem arcûs coſinum. Ponamus exempli causâ Solem in initio Arietis verſari, erit longitudo Solis $=0°$, ſeu 360°, & longitudo Lunæ $=$ vel 90° vel 270°, unde fiet $F=0$, $f=1$, $G=\mp 1$, & $g=0$, atque $Q=0$. Præterea aſcenſio recta Solis eſt 360°, & aſcenſio recta Lunæ vel 90° vel 270°; utroque caſu ergo fit $k=0$, unde etiam prodit $N=0$; quod idem evenit, ſi Sol verſetur in initio Libræ. In utroque igitur æquinoctio, dum Luna in quadraturis verſatur, aqua maximè erit elevata eo ipſo momento, quo Luna ad meridianum appellit.

§. 66. Sit porrò Sol in ſolſtitio æſtivo, Luna verò in ultimo quadrante, erit longitudo Solis 90°, Lunæ verò $=0°$, unde fit $F=1$, $f=0$; $G=0$, $g=1$, indeque $Q=M$ & $R=0$; itemque $q=m$ & $r=1$. Solis verò aſcenſio recta habebitur 90°, Lunæ verò $=0°$, ex quo $K=1$ & $k=0$. Hinc ergo fit $N=\frac{mMP}{(4-m^2)p}$. Pro primâ autem quadraturâ eſt longitudo Lunæ 180°, unde $G=0$, $g=-1$, at ut antè $F=1$, $f=0$; ergo $Q=M$, $R=0$, itemque $q=m$ & $r=1$. Cùm igitur Lunæ aſcenſio recta ſit 180°, erit $K=$ ſin. $-90°=-1$, & $k=0$, ex quibus fit $N=\frac{-mMP}{(4-m^2)}$. Quoniam autem eſt $4>m^2$, dum Sol in ſolſtitio æſtivo verſatur maxima aquæ elevatio in ultimâ quadraturâ continget poſt Lunæ tranſitum per meridianum ſupra Terram, priore verò quadraturâ ante hunc tranſitum, hæcque æquatio eò erit major, quò major fuerit elevatio poli; ſub æquatore enim omnino evaneſcit. Sit poli elevatio 45°, fietque his regionibus $N=\pm\frac{Mm}{4-m^2}$; quare cùm ſit $M$ ſinus 23°,29′, prodibit $N=$

ſinui anguli $6°,33'$, qui in tempus converſus dat $26'$. In primâ igitur quadraturâ totidem minutis ante tranſitum Lunæ per meridianum aqua maximè erit elevata, in ultimâ verò quadraturâ tot minutis poſt tranſitum. Contrarium evenit ſi vel Luna ſub Terra ad meridianum appellat, vel Sol in ſolſtitio hyemali verſetur. Ex his igitur formulis, ſi tabulæ adhibeantur, non erit difficile pro quovis loco Terræ ad quodvis tempus definire, quantum maxima aquæ elevatio tranſitum Lunæ per meridianum vel præcedere vel ſequi debeat; cujuſmodi ſupputationes maximam etiam afferent utilitatem, quando etiam inertiæ aquæ ratio habebitur.

§. 67. Quoniam igitur ſatis eſt expoſitum, quo momento Mare maximè ſit elevatum, maximam quoque Maris depreſſionem definire aggrediamur. Ac primò quidem manifeſtum eſt, ſi ſola Luna Mare agitaret, tum minimam aquæ altitudinem obſervatum iri, eo ipſo momento, quo Luna in horizonte verſetur: atque hinc perſpicuum eſt, idem uſu venire debere, ſi Sol eodem momento quoque in horizonte exiſtat, id quod accidit cùm noviluniis tùm pleniluniis. Præterea verò etiam ima aqua reſpondebit ſitui Lunæ in horizonte, ſi eo tempore Sol meridianum occupet, quia tum vis Solis per notabile temporis intervallum neque augetur nec diminuitur, etiamſi tum aqua non tantum deprimatur, quàm circa novilunia ac plenilunia. Ponamus igitur, quò reliquos caſus evolvamus, dum Luna horizontem occupat, Solem ab horizonte removeri; hoc ergo caſu aqua jam elevabitur, ex quo neceſſe eſt imam aquam ante adventum Lunæ ad horizontem extitiſſe, contrà verò ſi dum Luna in horizonte verſatur, Sol ad horizontem appropinquet, aqua tardiùs ſcilicet poſt appulſum Lunæ ad horizontem continget. Ponamus itaque Lunam ante ortum ſub horizonte $Hh$ in ☽ adhuc verſari, Solemque in ☉ eſſe poſitum, unde ad meridianum $PZH$ progrediatur; hocque ipſo momento aquam maximè eſſe depreſſam. Neceſſe igitur eſt, ut decrementum momentaneum vis Lunæ ad Mare movendum æquale ſit incremento momentaneo vis Solis. Ad hanc æqualitatem declarandam ſit anguli ☽ $PO$ ad polum ſumti, diſtantiam Lunæ à ſuo ortu $O$ indicantis, ſinus $= V$ & coſinus $= v$, qui ob angulum ☽ $PO$ valde parvum tutò ſinui toti 1 æqualis concipi poteſt. Invento ergo angulo hoc ☽ $PO$ ſeu arcu æquatoris illi reſpondente, eoque in tempus converſo, conſtabit quanto temporis intervallo ima aqua appulſum Lunæ ad horizontem præcedat: idem verò calculus tam ad Lunæ occaſum quàm ad acceſſionem Solis ad horizontem facilè accommodabitur.

§. 68. Poſitis nunc $A\Upsilon a$ æquatore ac ♒♈♌ ecliptica, ſit elevationis poli $Ph$ ſinus $= P$, coſinus $= p$; ſinus declinationis Lunæ borealis

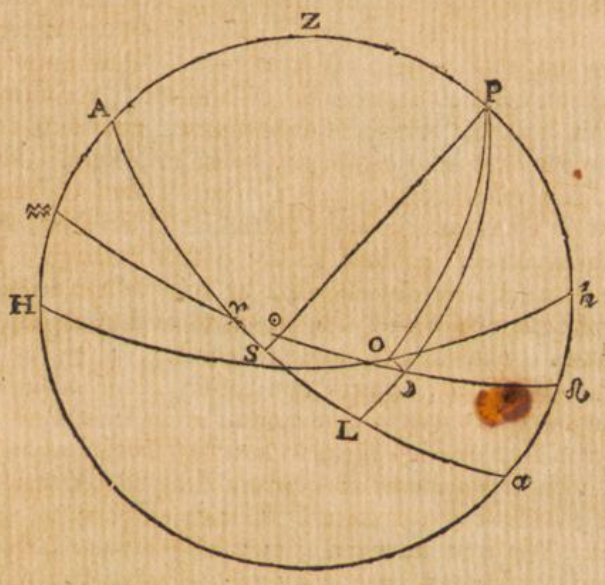



lis ☽ $L = R$, cosinus $= r$; ex quibus fiet anguli $APO$ cosinus $= \frac{-PR}{pr}$, quia Lunæ, cùm in horizontem $O$ pervenit, altitudo evanescit. Cùm igitur anguli $APO$ sinus sit $= \frac{\sqrt{(p^2r^2 - P^2R^2)}}{pr} = \frac{\sqrt{(1-P^2-R^2)}}{pr} = \frac{\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, erit anguli $AP$☽ sinus $= \frac{v\sqrt{(pp-RR)} - VPR}{pr}$, & cosinus $= \frac{-vPR - V\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, unde emergit decrementum momentaneum vis Lunæ $= \frac{3LV\sqrt{(pp-RR)}(\sqrt{(pp-RR)} - VPR)d\theta}{b^3} = \frac{3LV(pp-RR)d\theta}{b^3}$, ob $v = 1$ & $V$ valde exiguum. Sit porrò Solis declinationis borealis ☉ $S$ sinus $= Q$ & cosinus $= q$, atque anguli $AP$☉ sinus $= T$, cosinus $= t$, erit vis Solis incrementum momentaneum $= \frac{3S(tpq + PQ)Tpqd\theta}{a^3}$, quod illi vis Lunæ decremento æquale est ponendum, siquidem Maris altitudo hoc tempore est minima. Quare cùm sit ferè $\frac{L}{b^3} = \frac{4S}{a^3}$, ista habebitur æquatio $4V(pp-RR) = Tpq(tpq + PQ)$, quæ præbet $V = \frac{Tpq(tpq+PQ)}{4(pp-RR)}$: cùm igitur hoc pacto innotescat angulus $OP$☽, is in tempus conversus dabit temporis spatium, quo summa Maris depressio ante ortum Lunæ contingit. At si punctum $O$ designet Lunæ occasum, idem angulus præbebit tempus post Lunæ occasum, quo Mare maximè deprimetur. Intelligitur ex

formulâ inventâ quibus caſibus ima aqua in ipſum appulſum Lunæ ad horizontem incidat; hoc ſcilicet primò evenit, ſi $T=0$, hoc eſt ſi Sol in meridiano verſetur, deinde ſi $tpq+PQ=0$, id eſt ſi Sol quoque horizontem occupet; quos binos caſus jam notavimus.

§. 69. Sit locus noſter Terræ ſub æquatore ſitus, ſeu elevatio poli nulla, erit $P=0$, & $p=1$, unde efficitur $V=\frac{Ttqq}{4(1-RR)}=\frac{Ttqq}{4rr}$; in quâ formulâ cùm $q$ & $r$ denotent coſinus declinationum Solis ac Lunæ, non multum inter ſe diſcrepabunt; ponamus enim alteram declinationem eſſe maximam, alteram verò minimam ſeu $=0$, erit tamen coſinuum ratio minor quàm $1:\sqrt{\frac{3}{4}}$, ex quo fractio $\frac{qq}{rr}$ ſemper intra hos limites $\frac{4}{3}$ & $\frac{1}{4}$ continebitur. Quòd ſi ergo hanc ab æqualitate aberrationem negligamus, id quod tutò facere poſſumus, quia rem tantùm prope definire conamur, habebitur $V=\frac{Tt}{4}=\frac{2Tt}{8}$. Denotat autem $2Tt$ ſinum dupli anguli horarii quo Sol à meridiano diſtat, & hanc ob rem ad momentum maximæ depreſſionis aquæ aſſignandum, videndum eſt quâ diei horâ Luna ad horizontem appellat, hujuſque temporis vel à meridie vel mediâ nocte intervallum capiatur, atque in arcum æquatoris convertatur. Hujus deinde arcûs vel anguli ſumatur duplum, hujuſque dupli ſinus, cujus pars octava præbebit ſinum anguli, qui in tempus converſus dabit temporis intervallum, quo ima aqua Lunæ appulſum ad horizontem vel præcedit vel ſequitur; id quod ex notatis circumſtantiis diſcernere licet. Sic ſi Luna horâ 9 matutinâ adoriatur, erit tempus uſque ad meridiem 3 horarum, anguluſque reſpondens 45°, cujus dupli ſinus eſt ipſe ſinus totus, cujus pars octava ſit ſinus anguli 7°, 11′, cui tempus reſpondet ferè 30 minutorum, tantum itaque ima aqua ortum Lunæ præcedet.

§. 70. Ut hæc ad datum Lunæ cum Sole aſpectum accommodari queant, ponamus longitudinis Solis ☉ ſinum eſſe $=F$, coſinum $=f$ longitudinis verò Lunæ ☽ ſinum eſſe $=G$, coſinum $=g$; atque inclinationis eclipticæ & ☉ $a$ ſinum $=M$, coſinum $=m$. His poſitis erit $Q=MF$, & $R=MG$; atque aſcenſionis rectæ Solis ☉ $S$ tangens reperietur $=\frac{mF}{f}$, Lunæ verò aſcenſionis rectæ ☉ $L$ tangens $=\frac{mG}{g}$. Subtrahatur aſcenſio recta Solis ab aſcenſione rectâ Lunæ, & differentiæ ſinus ſit $=K$, coſinus $=k$. Cùm igitur anguli $\odot P \mathbb{D}$ ſit ſinus $=K$ & coſinus $=k$, aguli verò $APD$ ſinus $=\frac{\sqrt{(pp-RR)}-VPR}{pr}$ ob $v=1$, & coſinus $=\frac{-PR-V\sqrt{(pp-RR)}}{pr}$, erit anguli $APO$ ſinus $=T=\frac{(k+KV)\sqrt{(pp-RR)}-kPRV+KPR}{pr}$ & coſinus $t=\frac{(K-kV)\sqrt{(pp-RR)}-KPRV-kPR}{pr}$; quibus




bus valoribus ſubſtitutis, ſimulque ſinu $V$ tanquam valde parvo conſiderato, reperietur ſinus $V = \frac{(KPR + kV(pp-RR))\ q(KqV(pp-RR) - kPRq + PQr)}{4rr(pp-RR)}$. Sub æquatore autem, quo fit $P = 0$, $V = \frac{Kkqq}{4rr}$: ex quo pro æquatore regula ſuperior à diſtantiâ Solis à meridiano petita ſimul ad differentiam aſcenſionalem Solis & Lunæ poteſt accommodari, ita ut maneat invariata. Sed ad præſens inſtitutum, quo tantum veritatem cauſæ Fluxûs ac Refluxûs Maris exhibitæ declarare annitimur, non opus eſt hæc pluribus perſequi, quippe quæ potiſſimum ad accuratiſſimas æſtûs marini tabulas ſupputandas pertinent, quæ res in propoſitâ quæſtione Illuſtriſſimæ Academiæ non contineri videtur.

## CAPUT SEXTUM.

*De vero æſtu Maris, quatenus à Terris non turbatur.*

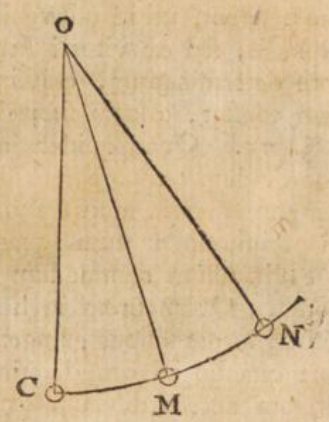
§. 71. QUÆ hactenus ex viribus Solis ac Lunæ circa æſtum Maris fuſiùs deduximus, eâ hypotheſi nituntur aſſumtâ, quâ aquam inertiæ expertem poſuimus: quamobrem non eſt mirandum ſi plerique effectus aſſignati cum Phænomenis minùs congruant, atque adeo

adeo pugnare videantur; quòd ſi enim inter ſe prorſus convenirent, theoria non ſolùm non eo conſenſu confirmaretur, ſed potiùs omnino ſubverteretur, cùm quilibet facilè agnoſcat ob aquæ inertiam determinationibus exhibitis ingentem mutationem inferri debere. Quæ autem ex deductis concluſionibus maximè ab experientiâ diſſentiunt, potiſſimum quantitatem elevationis aquæ ac temporis momentum, quo tam ſumma Maris elevatio quàm ima depreſſio contingere ſolet, reſpiciunt. Nuſquam enim ubi quidem Mare eſt liberum atque apertum, tam exiguum diſcrimen inter Fluxum ac Refluxum in aquæ altitudine obſervatur, quale in præcedentibus definivimus, quatuor ſcilicet pedum tantum; quæ elevatio inſuper tamen maxima eſt deprehenſa, ac tum ſolùm oriunda, quando tam regio prope æquatorem eſt ſita, quàm vires luminarium inter ſe maximè conſpirant. Experientiâ namque conſtat, pleriſque in locis, ſi æſtus contingat maximus, aquam non ſolùm ad altitudinem duplo majorem, ſed etiam quadruplam, imò nonnullis in locis adeo decuplam attolli; quanquam hæc enormis elevatio non ſoli inertiæ aquæ, ſed maximam partem vicino continenti ac littorum ſitui eſt tribuenda, uti in ſequenti capite clariſſimè monſtrabitur. Deinde etiam quod ad tempus attinet, nuſquam illis ipſis momentis, quæ aſſignavimus, Fluxus ac Refluxus unquam contingunt, nec etiam tempeſtatibus hìc definitis Fluxus maximi vel minimi, ſed ubique tardiùs evenire conſtanter obſervantur; cujus quidem retardationis cauſa in ipsâ aquæ inertiâ poſita eſſe primâ etiam fronte perſpicitur.

§. 72. Quantumvis autem agitatio Maris in præcedentibus capitibus determinata ab obſervationibus diſſentiat, tamen complures circumſtantiæ ſeſe jam præbuerunt experientiæ tantopere conſentaneæ, ut ampliùs dubitare omnino nequeamus, quin in viribus Solem Lunamque reſpicientibus, quas non temerè aſſumſimus, ſed aliunde exiſtere demonſtravimus, vera & genuina æſtûs Maris cauſa contineatur. Hanc ob rem jam meritò ſuſpicari licet, diſſenſiones quæ inter theoriam noſtram, quatenus eam aſſumtæ hypotheſi ſuperſtruximus, & experientiam intercedunt, ab aquæ inertiâ aliiſque circumſtantiis, quarum nullam adhuc rationem habuimus, proficiſci. Quocirca ſi omnia inertiæ ratione habitâ ad obſervationes propiùs accedant, id quidem noſtræ theoriæ maximum afferet firmamentum, atque ſimul omnes alias cauſas, quæ præter has vel ſunt prolatæ vel proferri poſſunt, excludet, irritaſque reddet. Cùm igitur conſenſum hujus theoriæ cum Phænomenis, mox ſimus evidentiſſimè oſtenſuri, quæſtioni ab Inclytâ Academiâ propoſitæ ex aſſe ſatisfeciſſe jure nobis videbimur: cùm non ſolum nullas vires imaginarias effinxerimus, ſed etiam virium Lunam Solemque reſpicientium exiſtentiam aliunde dilucidè evicerimus. Neque verò in hoc negotio cum pleriſque Anglorum ad qualitates occultas ſumus delapſi, verùm potius cauſam iſtarum

rum virium modo rationali & legibus motûs consentaneo in vorticibus constituimus, quorum formam atque indolem luculenter explicare possemus; idque feciſſemus, niſi ab aliis cùm jam ſatis eſſet expoſitum, tùm etiam ab Illuſtriſſimâ Academiâ in præſente quæſtione non requiri videatur.

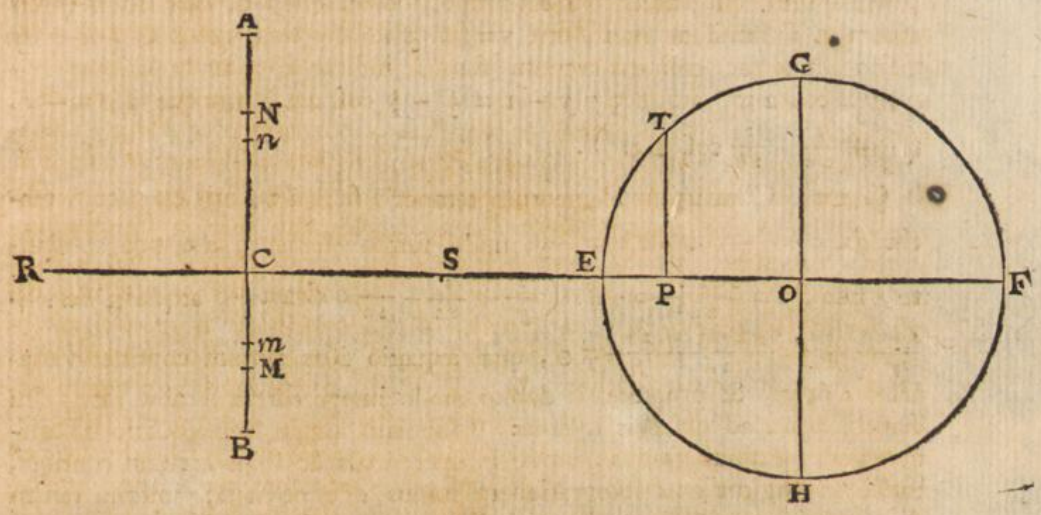
§. 73. Dum igitur hactenus aquæ omnem inertiam cogitatione ademimus, ipſi ejuſmodi qualitatem affinximus, quâ viribus ſollicitantibus ſubitò obſequeretur, ſeque in inſtanti in eum ſtatum reciperet, in quo cum viribus in æquilibrio conſiſteret; hocque pacto aquam non ſolùm ſubitò omnis motûs capacem poſuimus, ſed etiam ita comparatam, ut quovis momento omnem priſtinum motum amittat. Longè aliter autem res ſe habet, ſi inertiæ ratio in computum ducatur; hæc enim efficit ut primò aqua non ſubitò ſe ad eum ſitum componat, quem vires intendunt, ſed pedetentim per omnes gradus medios ad eum accedat; deinde verò eadem inertia in cauſa eſt, quòd aqua, cùm in ſtatum æquilibrii pervenerit, ibi non acquieſcat, ſed ob motum inſitum ultrà progrediatur, quoad omnem motum à potentiis renitentibus amittat. Ex quo perſpicuum eſt, admiſsâ inertiâ aquæ, à potentiis ſollicitantibus motum omninò diverſum actu imprimi debere ab eo, quem reciperet, ſi inertiâ privata eſſet; cujus diſcriminis ratio exemplo corporis penduli commodè ob oculos poni poteſt. Ponamus enim corpus pendulum *OC* ob gravitatem ſitum tenens verticalem, à vi quâpiam in latus ſecundùm directionem *CM* ſollicitari. Si nunc hoc pendulum inertiâ careret, ſeu ejuſmodi eſſet indolis, cujus aquam hactenus ſumus contemplati, tum ſubitò ſitum *OM* acciperet, in quo hæc vis cum gravitate æquilibrium teneret. At cùm pendulum inertiâ præditum conſideratur, poſt aliquod demum tempus elapſum ad ſitum *OM* perveniet: ac deinde quia motu accelerato eò pertingit, ibi non quieſcet, ſed ultrà excurret, putà in *N* uſque, ita ut ſpatium *CN* ferè ſit duplo majus ſpatio *CM*, prouti calculus clarè indicat. Propter inertiam igitur pendulum primùm tardiùs vi ſollicitanti obtemperat; atque à ſitu æquilibrii recedit; deinde verò etiam magis recedit, majoremque excurſionem conficit, quàm ſi inertiâ careret; quæ ſunt eæ ipſæ duæ res, in quibus theoria antè expoſita ab experientiâ maximè diſſentire deprehenſa eſt.




§. 74. Si nunc iſtud penduli exemplum ad noſtrum caſum æſtûs Maris transferamus, primò ingens ſimilitudo in ſitu penduli verticali ac ſta-

tu Maris naturali, quem obtinet remotis potentiis externis, obſervatur. Nam quemadmodum pendulum, ſi in quamcunque plagam de ſitu verticali declinetur, propriâ vi gravitatis ſe in eundem recipit, ita etiam aqua, ſi ex ſitu ſuo æquilibrii depellatur, vi gravitatis ſe ad eundem componit, ac præterea pariter ac pendulum oſcillationes peragit, cujuſmodi oſcillationum caſus in aqua obſervati paſſim inveniuntur expoſiti. Deinde etiam ſimili modo, quo pendulum, Mare quò magis ex ſitu ſuo naturali fuerit deturbatum, eò majorem habebit vim ſeſe in ſitum æquilibrii reſtituendi. Quòd ſi igitur Mare à viribus externis, Solis ſcilicet ac Lunæ, mox elevetur mox deprimatur, neceſſe eſt ut inde motus oſcillatorius ſeu reciprocus oriatur æſtui Maris omnino ſimilis, qui autem per leges motûs difficulter definiri queat accuratè quidem; nam vero proximè, hoc non adeo erit difficile. Duæ autem ſunt res, quæ abſolutam ac perfectam totius motûs determinationem ſummoperè reddunt difficilem, quarum altera phyſicam ſpectat, atque in ipsâ fluidorum naturâ conſiſtit, quorum motus difficulter ad calculum revocatur, præcipuè ſi quæſtio ſit de ampliſſimo Oceano, qui aliis in locis elevetur, aliis verò deprimatur. Altera autem difficultas in ipsâ analyſi eſt poſita, eò quòd iſte motus Maris reciprocus prorſus ſit diverſus ab omnibus oſcillationibus à Mathematicis adhuc conſideratis: vires enim Lunæ ac Solis Mare ſollicitantes neque à ſitu corporis oſcillantis, neque ab ejus celeritate pendent, uti id uſu venit in omnibus oſcillationum caſibus etiam nunc expoſitis, ſed eæ vires à ſitu luminarium reſpectu Terræ, ideoque à tempore determinantur, cujuſmodi oſcillationes nemo adhuc, quantum quidem conſtat, calculo ſubjecit.

§. 75. Quod quidem ad priorem difficultatem phyſicam attinet, res hoc quidem tempore ferè deſperata videtur; quamquam enim ab aliquo tempore theoria motûs aquarum ingentia ſit aſſecuta incrementa, tamen ea potiſſimum motum aquarum in vaſis & tubis fluentium reſpiciunt, neque vix ullum commodum inde ad motum Oceani definiendum derivari poteſt. Quamobrem in hoc negotio aliud quicquam præſtare non licet, niſi ut hypotheſibus effingendis, quæ à veritate quàm minimè abludant, tota quæſtio ad conſiderationes purè geometricas & analyticas revocetur: alteram autem difficultatem mathematicam, etiamſi difficillimis integrationibus ſit involuta, tamen feliciter ſuperare confidimus. Conſidero ſcilicet ſuperficiem aquæ $RS$, quæ hoc in ſitu æquilibrium teneat cum reliqua aqua, remotis viribus externis; his verò accedentibus alternis vicibus attollatur in $A$, deprimaturque in $B$. Quòd ſi igitur aqua in $M$ uſque ſit depreſſa, atque externæ vires Solis ac Lunæ ſubitò ceſſarent, tum vi gravitatis propriæ conaretur ſeſe elevare uſque in ſitum $RS$ naturalem, iſteque conatus eò erit major, quò majus fuerit ſpatium $CM$ quo à ſitu naturali diſtat. A veritate itaque non multum recedemus,




mus, ſi hanc vim ipſi ſpatio $MC$ ponamus proportionalem: quamobrem poſito ſpatio $MC = s$, erit vis, quæ aquæ ſuperficiem in $M$ uſque depreſſam attollet $= \frac{s}{g}$, quæ hypotheſis ad veritatem eò propiùs accedit, quòd ſponte indicat, ſi aquæ ſuperficies ſupra $C$ jam ſit elevata, tum vim fieri negativam, adeoque aquam deprimere. Præterea verò eadem hypotheſis confirmatur pluribus phænomenis aquæ niſum reſpicientibus, ita ut de ejus veritate ampliùs nullum dubium ſuperſit.

§. 76. Ponamus jam aquam in $M$ conſtitutam urgeri à ſolâ Lunâ, atque ut calculus per ſe moleſtus minus habeat difficultatis, ſit locus $C$ ſub ipſo æquatore ſitus, Lunæque declinatio nulla, ex quo Luna in circulo maximo per loci zenith tranſeunte æquatore ſcilicet circumferetur: ſit $EGFH$ iſte circulus, cujus radius ponatur $= 1$, atque $EF$ repræſentet horizontem, & $G$ zenith. Poſitis his, ſit Luna in $T$ dum Maris ſuperficies verſatur in $M$, ita ut $PT = y$ exprimat ſinum altitudinis Lunæ ſuper horizonte; unde vis Lunæ Mare attollens erit $= \frac{L(3yy-1)}{2b^3} = \frac{3yy-1}{h}$, poſito brevitatis gratiâ $h$ pro $\frac{2b^3}{L}$. Hanc ob rem ergo ſuperficies Maris in $M$ duplici vi attolletur, ſcilicet vi $= \frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}$. Quòd ſi ergo ponamus aquam in $M$ jam habere motum ſurſum directum, cujus celeritas tanta ſit quanta acquiritur lapſu gravis ex altitudine $v$, atque ſpatium $Mm = -ds$ tempuſculo infinitè parvo abſolvatur, habebitur per principia motûs $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$. Ponamus porrò tempus ab ortu lunæ in $E$

jam elapſum, quod arcui $ET$ eſt proportionale, eſſe $= z$, quæ littera ipſum arcum $ET$ ſimul denotet, erit $y = \text{ſin. } z$ ſcilicet ſinui arcûs $z$, hoc enim modo ſinus ac coſinus arcuum ſumus indicaturi : unde orietur $1 - 2yy = \text{coſ. } 2z$, atque $3yy - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{ coſ. } 2z$, hincque $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\text{ coſ. } 2z.\right)$.

§. 77. Cùm igitur elementum temporis ſit $= dz$, erit ex naturâ motûs $dz = -\frac{ds}{\sqrt{v}}$, atque $v = \frac{ds^2}{dz^2}$; unde ſumto elemento $dz$ pro conſtante, fiet $dv = \frac{2dsddz}{dz^2} = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{1}{2h} - \frac{3}{2h}\text{ coſ. } 2z\right)$, atque $2ddz + \frac{sdz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\,coſ.\,2z)}{2h} = 0$, quæ æquatio duas tantum continet variabiles $s$ & $z$, & propterea ſi debito modo integretur, indicabit ſitum ſeu ſtatum aquæ ad quodvis tempus. Quoniam autem hæc æquatio eſt differentialis ſecundi gradûs, atque inſuper arcus & ſinus arcuum continet, facilè intelligitur ejus integrationem minus eſſe obviam; interim tamen cùm alterius variabilis $s$ plus unâ dimenſione nuſquam adſit, ea per methodos mihi familiares tractari poterit. Soleo autem, quoties ejuſmodi occurrunt, initio eos terminos in quibus altera variabilis $s$ omnino non ineſt, rejicere; unde hæc conſideranda venit æquatio $2ddz + \frac{sdz^2}{g} = 0$, quæ per $dz$ multiplicata fit integrabilis, exiſtente integrali $dz^2 + \frac{ssdz^2}{2g} = cdz^2$ ob $dz$ conſtans. Hinc porrò elicitur $dz = \frac{ds\sqrt{2g}}{\sqrt{(2cg - ss)}}$, atque $\frac{z}{\sqrt{2g}} =$ arcui cujus ſinus eſt $\frac{1}{\sqrt{2c}}$, ex quo obtinetur $s = \sqrt{2cg}.\text{ ſin. }\frac{z}{\sqrt{2g}}$. Cognito autem hoc valore, idonea naſcitur ſubſtitutio facienda pro æquatione propoſitâ $2ddz + \frac{sdz^2}{g} + \frac{dz^2(1 - 3\,coſ.\,2z)}{2h} = 0$; fiat enim $s = u\text{ ſin. }\frac{z}{\sqrt{2g}}$, erit $ds = du\text{ ſin. }\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{udz}{\sqrt{2g}}\text{ coſ. }\frac{z}{\sqrt{2g}}$, atque $ddz = ddu\text{ ſin. }\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{2dudz}{\sqrt{2g}}\text{ coſ. }\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{udz^2}{2g}\text{ ſin. }\frac{z}{\sqrt{2g}}$. Quibus valoribus ſubſtitutis emerget iſta æquatio $2ddu\text{ ſin. }\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4dudz}{\sqrt{2g}}\text{coſ. }\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz^2(1 - 3\,coſ.\,2z)}{2h} = 0$, in quâ hoc commodè accidit, ut ipſa variabilis $u$ non inſit, ſed tantùm ejus differentialia.

§. 78. Quòd ſi ergo ponatur $du = pdz$, erit $ddu = dpdz$, & æquatio noſtra tranſibit in ſequentem differentialem primi gradûs tantum, $2dp\text{ ſin. }\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{4pdz}{\sqrt{2g}}\text{ coſ. }\frac{z}{\sqrt{2g}} + \frac{dz(1 - 3\,coſ.\,2z)}{2h} = 0$ : quæ integrabilis reddi invenitur, ſi multiplicetur per quantitatem quampiam ex $z$ & conſtantibus compoſitam, eò quòd $p$ plures unâ dimenſiones habet nuſquam. Ad

inte-

integrationem autem absolvendam notandum est hujus æquationis $dp + pZdz = \Sigma dz$, in quâ $Z$ & $\Sigma$ functiones quascunque ipsius $z$ denotent, integrale esse $e^{\int Z dz} p = \int e^{\int Z dz} \Sigma dz$. Reductâ autem nostrâ æquatione ad hanc formam, habetur $dp + \frac{2pdz\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}.sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{dz(3\,cos.2z-1)}{4h\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}$, ideoque

$Zdz = \frac{2dz\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{\sqrt{2g}.sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} = \frac{2\,diff.sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}$; atque hinc $\int Z dz = 2$ log. sin. $\frac{z}{\sqrt{2g}}$; & $e^{\int Z dz} = \left(sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2$. Ex his sequitur integrale nostræ æquationis $p\left(sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2 = \frac{1}{4h}\int dz\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}(3\,cos.2z-1) = \frac{3}{4h}\int dz\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\,cos.2z - \frac{1}{4h}\int dz\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}$, ad quas integrationes perficiendas notetur esse $\int dz\,sin.\alpha z = C - \frac{1}{\alpha}\,cos.\alpha z$, atque $\int dz\,sin.\alpha z.cos.\beta z = C - \frac{\beta\,sin.\alpha z.sin.\beta z - \alpha\,cos.\alpha z.cos.\beta z}{\alpha^2-\beta^2}$: ex his itaque conficietur $p\left(sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2 = C + \frac{\sqrt{2g}}{4h}\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{\left(2\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}.sin.2z + \frac{1}{\sqrt{2g}}\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}.cos.2z\right).3}{\left(\frac{1}{2g}-4\right)4h}$ atque $p = \frac{C}{\left(sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right)^2} + \frac{\sqrt{2g}.cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left[sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} - \frac{\left(4g\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}sin.2z + \sqrt{2g}.cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}cos.2z\right).3}{4h(1-8g)\left[sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}$.

§. 59. Cùm autem posuissemus $du = p\,dz$, erit $u = \int p\,dz = \int \frac{C dz}{\left[sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} + \int \frac{dz\sqrt{2g}.cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{4h\left[sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2} - \frac{3}{4h}\int dz \frac{\left[4g\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}sin.2z + \sqrt{2g}.cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}cos.2z\right]}{(1-8g)\left[sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}\right]^2}$. Hæ autem formulæ omnes sunt absolutè integrabiles, prodibitque $u = D - \frac{C\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}}}{sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} - \frac{g}{2h\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}} + \frac{3g\,cos.2z}{2h(1-8g)\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}}}$; ex quo tandem resultat $s = u\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}} = D\,sin.\frac{z}{\sqrt{2g}} + C\,cos.\frac{z}{\sqrt{2g}} - \frac{g}{2h} + \frac{3g\,cos.2z}{2h(1-8g)}$, quæ est æquatio generalis ad quodvis tempus $z$ statum aquæ, seu distantiam

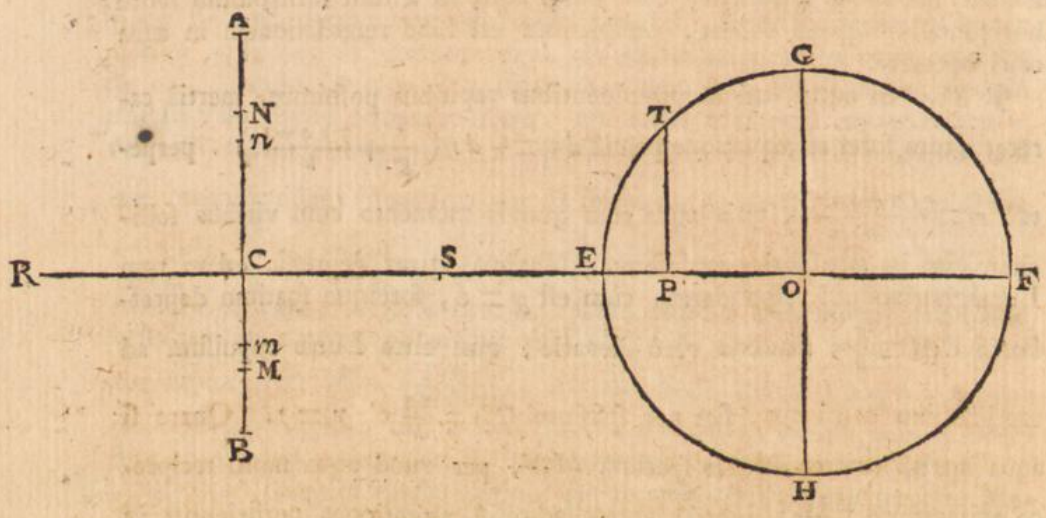
ejus ſupremæ ſuperficiei à $C$ indicans, ubi conſtantes $C$ & $D$ ex dato Maris ſtatu ad datum tempus definiri oportet. Quòd ſi igitur ponamus motum aquæ jam ad uniformitatem eſſe deductum, ita ut aqua omnibus diebus, quando Luna in $T$ verſatur in eodem loco $M$ verſetur, neceſſe erit ut valor ipſius $s$ maneat idem, etſi arcus $z$ integrâ peripheriâ $2\pi$ vel ejus multiplo augeatur. At poſito $z + 2\pi$ loco $z$, terminus $\cof. 2z$ manet quidem invariatus, at $D \sin. \frac{z}{\sqrt{2g}} + C \cof. \frac{z}{\sqrt{2g}}$ fit $= D \sin. \frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}} + C \cof. \frac{z+2\pi}{\sqrt{2g}}$, quæ æqualitas adeſſe non poteſt niſi vel $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ſit numerus integer, vel $C$ & $D = 0$. Cùm itaque $g$ determinari non liceat, quia jam eſt datum, ponendum erit $C = 0$ & $D = 0$, ita ut iſta habeatur æquatio $s = \frac{-g}{2h} + \frac{3g \cof. 2z}{2h(1-8g)}$, ex quâ facillimè ad quodvis tempus ſtatus Maris cognoſcetur: valores ſcilicet affirmativi ipſius $s$ dabunt ſitum aquæ infra ſitum naturalem $C$, negativi verò ſupra $C$.

§. 80. Cognito autem ſpatio $s$ per tempus $z$, celeritas quoque Maris quâ in $M$ aſcendit reperietur ex æquatione $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ erit enim $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{3g \sin. 2z}{h(1-8g)}$, quæ expreſſio ipſi celeritati, quâ aquæ ſuperficies, dum in $M$ verſatur, elevatur, eſt proportionalis: hæc ergo celeritas aquæ ſemper eſt ut ſinus dupli arcûs $ET$, vel etiam ut ſinus dupli temporis, quo Luna à tranſitu per meridianum abeſt, tempore ſcilicet in arcum æquatoris converſo. Hinc igitur celeritas aquæ erit nulla ſi Luna fuerit vel in $E$ vel in $G$ vel in $F$ vel in $H$, hoc eſt, vel in horizonte vel in meridiano: quare cùm his temporibus aqua vel maximè ſit elevata vel maximè depreſſa, unâ Lunæ revolutione aqua bis elevabitur, biſque deprimetur, ideoque bini Fluxus binique Refluxus contingent. Aqua quidem maximè erit depreſſa iis ipſis momentis, quibus Luna ad horizontem appellit, tum enim fit $\cof. 2z = 1$; atque ſpatium $CB$ erit $= s = \frac{g(1+4g)}{2(1-8g)}$; at maxima elevatio incidet in ipſos Lunæ tranſitus per meridianum, quibus eſt $\cof. 2z = -1$: ac tum altitudo $CA$ erit $= -s = \frac{g(2-4g)}{h(1-8h)}$. Quanquam autem hæc momenta cum experientiâ non ſatis conveniunt, tamen ea hypotheſi aſſumtæ planè congruunt, quâ poſuimus Lunam ſolam agere, ac perpetuò in ipſo æquatore verſari, ex quo æſtus ſe tandem ad ſummam regularitatem componat neceſſe eſt. Quòd ſi enim Lunæ declinatio ponatur variabilis, atque Sol inſuper agat, æſtus jam formati perpetuò turbabuntur, ex quo ob æquabilitatem continuò ſublatam effectus tardiores neceſſariò conſequi debebunt. Præterea quoque nullam adhuc motûs Maris horizontalis

zontalis habuimus rationem, cùm enim aqua ad æstum formandum motu horizontali progredi debeat, perspicuum est hinc retardationem in æstu oriri oportere.

§. 81. Si aqua, uti in præcedentibus capitibus posuimus, inertiâ careret, tum foret ex æquatione primâ $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \frac{3yy-1}{h}\right)$ perpetuò $s = \frac{g(1-3yy)}{h}$, quia aqua tum quovis momento cum viribus sollicitantibus in æquilibrio consisteret. Maxima igitur depressio etiam tum Lunæ horizontali responderet, cùm est $y = 0$, foretque spatium depressionis $CM = \frac{g}{h}$; maxima verò elevatio, quæ circa Lunæ appulsum ad meridianum continget, fiet per spatium $CN = \frac{2g}{h}$ ob $y = 1$. Quare si aqua inertiâ careret, foret spatium $MN$, per quod aqua motu reciproco agitaretur, $= \frac{3g}{h}$; inertiâ autem admissâ agitationes perficientur in spatio majore $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}$; cujus excessus super spatium $MN$ erit $= \frac{24gg}{h(1-8g)}$. Quantitas itaque æstûs pendet à valore litteræ $g$, qui quidem semper est affirmativus; nam si foret $g = 0$, quod evenit si gravitatis vis esset infinitè magna respectu virium Lunæ & Solis, tum etiam nullus æstus oriretur; deinde quò magis $8g$ ad 1 accedit, eò major prodibit æstus, qui adeo in infinitum excrescere posset si foret $8g = 1$; hoc quippe casu vis Lunæ gravitatem superaret, omnesque aquas ad Lunam attraheret; quod autem fieri non potest, multo minus autem esse potest $8g > 1$, quod tamen si eveniret, maxima elevatio appulsui Lunæ ad horizontem, maximaque depressio Lunæ meridianum occupanti responderet.

§. 82. Cùm igitur aqua, si inertiâ careret, agitetur per spatium $MN = \frac{3g}{h}$, suprà autem §. 41. eâdem hâc hypothesi, quâ tam locus quàm Luna in æquatore ponitur, aquam elevari supra libellam per spatium 2,260 pedum, infra eam verò deprimi spatio 1,112 pedum, erit $\frac{3g}{h} = 3{,}372$ pedum, ideoque $\frac{g}{h} = 1{,}124$ pedum $= 1\frac{1}{8}$ pedum. Quoniam verò valor ipsius $g$ cum unitate comparatur, ideo venit, quod tempus per ipsum arcum circuli cujus radius est $= 1$ expressimus: hinc itaque valor ipsius $g$ respectu unitatis definietur tempore eodem modo expresso, quo aqua in $M$ usque depressa solâ vi gravitatis se in $C$ restitueret, quod tem-




tempus ex circumſtantiis facilè poterit æſtimari: prodibit autem per calculum tempus hujus reſtitutionis $= \frac{\pi}{2}\sqrt{2g}$, denotante $\pi$ ſemiperipheriam circuli radium $= 1$ habentis, ſeu tempus duodecim horarum Lunarium. Quòd ſi igitur reſtitutio ponatur actu fieri tempore $\frac{12}{n}$ horarum, erit $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi\sqrt{2g}}{2}$ & $g = \frac{2}{nn}$, ex quo perſpicuum eſt, quò citiùs aqua ſe propriâ ſuâ vi reſtituere valeat, eò minùs exceſſurum eſſe ſpatium $AB$ ſpatium $MN$. Cùm autem de hâc reſtitutione non ſatis tutò judicare queamus, præſtabit ex obſervationibus rationem ſpatii $AB$ ad $MN$ proximè aſſumere. Si enim ponamus eſſe $AB = 2MN$, erit $\frac{3}{1-8g} = 6$, erit $g = \frac{2}{16}$; ſin autem ſit $AB = 3MN$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 9$ & $g = \frac{2}{12}$: at poſito $AB = 4MN$, erit $g = \frac{2}{32}$. Quoniam igitur aqua ob inertiam ferè duplo majus ſpatium abſolvere poni poteſt, aſſumamus $g = \frac{2}{72}$ ſeu $n = 6$, ita ut aqua propriâ vi gravitatis tempore circiter 2 horarum in ſtatum naturalem ſe reſtituere valeat. Poſito autem $g = \frac{1}{18}$, fiet $\frac{3}{1-8g} = 5,4$; ſpatiumque $AB = 6$ ped. proximè. Ne autem tractatio nimis fiat ſpecialis, retineamus litteram $n$, cujus valorem eſſe circiter 6 vel 5 notaſſe ſufficiet, qui valor ſatis propè ad æſtimationem accedit: ita ut ſit $g = \frac{2}{nn}$ & $AB = \frac{3nn}{nn-16} \cdot \frac{9}{8}$ pedum: unde ſatis patet $n$ neceſſariò eſſe debere $> 4$, eritque adeo vel 5 vel 6.

§. 83.

§. 83. Tentemus nunc idem hoc problema in ſenſu latiori, ac ponamus regionis $C$ elevationis poli ſinum eſſe $= P$, coſinum $= p$; Lunæ verò declinationis borealis ſinum eſſe $= Q$, coſinum $= q$; Lunamque ſuper Terra jam per meridianum tranſiiſſe, ab eoque diſtare angulo horario $= z$, ita ut $z$ ut antè tam tempus quàm arcum circuli radii $= 1$ deſignet; quòd ſi nunc arcûs $z$ coſinus ponatur $= t$, erit ſinus altitudinis Lunæ ſuper horizonte $= tpq + PQ$; ideoque vis Lunæ Mare elevans $= \frac{L}{2b^3}(3(tpq+PQ)-1) = \frac{3p^2q^2tt+6pqPQt+3P^2Q^2-1}{h}$, poſito ut antè $\frac{L}{2b^3} = \frac{1}{h}$. Quoniam verò eſt $t =$ coſ. $z$ erit $2tt - 1 =$ coſ. $2z$ & $tt = \frac{1+cof.2z}{2}$, ex quo vis Lunæ ad Mare elevandum habebitur $= \frac{3p^2q^2cof.2z}{2h} + \frac{6pqPQcof.z}{h} + \frac{3p^2q^2+6P^2Q^2-2}{2h}$. Ponamus nunc ſuperficiem aquæ in $M$ verſari, exiſtente $CM = s$, & celeritatem ejus quâ actu aſcendit debitam eſſe altitudini $v$, erit $dv = -ds\left(\frac{s}{g} + \text{vi Lunæ}\right)$, cùm verò ſit $dz = \frac{-ds}{\sqrt{v}}$ ſeu $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} =$ ipſi celeritati aſcensûs erit $v = \frac{2dsddz}{dz}$, poſito $dz$ conſtante: hinc igitur emerget iſta æquatio $2ddz + dz^2\left(\frac{s}{g} + \frac{3p^2q^2+6P^2Q^2-2}{2h} + \frac{6pqPQcof.z}{h} + \frac{3p^2q^2cof.2z}{2h}\right)$ relationem inter tempus $z$ & ſtatum Maris $s$ continens.

§. 84. Quòd ſi nunc hæc æquatio eodem modo tractetur, quo ſuperior, ea pariter bis integrari poſſe deprehendetur, integrationibus autem ſingulis debito modo abſolutis, & conſtantibus ita determinatis ut motus aquæ fiat uniformis, reperietur $s = \frac{-g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} - \frac{6gpqPQcof.z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2cof.2z}{2h(1-8g)}$ ac celeritas aſcensûs $\sqrt{v} = \frac{-ds}{dz} = \frac{-6gpqPQſin.z}{h(1-2g)} - \frac{2gp^2q^2ſin.2z}{h(1-8g)}$. Cùm autem ſit ſin. $2z = 2$ ſin. $z$ coſ. $z$, celeritas duobus caſibus evaneſcit, quorum primus eſt ſi ſin. $z = 0$, alter ſi coſ. $z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)}$; illi caſus dabunt aquam ſummam, hi verò imam. Hinc igitur patet aquam ſummam contingere debere iis ipſis momentis, quibus Luna per meridianum tranſit, imam verò non tum, cùm Luna horizontem attingit; namque Luna horizontem attingit, ſi eſt coſ. $z = \frac{-PQ}{pq}$, aqua verò eſt ima ſi eſt coſ. $z = \frac{-PQ(1-8g)}{pq(1-2g)} = \frac{-5PQ}{8pq}$ poſito $g = \frac{1}{18}$. Hìc autem idem eſt notandum quod ſuprà, ſcilicet nos poſuiſſe motum aquæ eſſe uniformem ſeu quotidie ſui ſimilem, Lunamque in ecliptica locum tenere fixum, ſeu ſaltem ſuam declinationem non variare. Quoniam verò ob va-

riabilitatem declinationis Lunæ, itemque ob actionem Solis, iſte motus perpetuò turbatur, atque inſuper motûs Maris horizontalis nulla adhuc habita eſt ratio, facilè intelligitur, tàm Fluxus quàm Refluxus tardiùs venire debere, quàm quidem ex his formulis ſequitur.

§. 85. Bini ergo unâ Lunæ revolutione contingent Fluxus, alter ſi Luna ſuper horizonte ad meridianum appellit, alter ſi ſub Terra; priori caſu eſt cof. $z = 1$, & cof. $2z = 1$, hoc itaque tempore Mare ſupra libellam $C$ elevabitur per ſpatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} + \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$. Dum autem Luna ſub horizonte meridianum attingit, tum aqua elevabitur per ſpatium $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3p^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)}$, propter cof. $z = -1$ ac cof. $2z = 1$ hoc caſu: harum igitur altitudinum differentia eſt $= \frac{12gpqPQ}{h(1-2g)}$: atque Mare in tranſitu Lunæ per meridianum ſupra horizontem altiùs elevatur, ſi declinatio Lunæ ſit borealis; contrà verò ſi declinatio fuerit auſtralis, major Maris elevatio reſpondebit appulſui Lunæ ad meridianum infra horizontem. Lunâ verò in ipſo æquatore verſante, ambo Fluxus inter ſe erunt æquales. Ratione autem elevationis poli, horum binorum Fluxuum ſucceſſivorum inæqualitas erit maxima ſub elevatione poli 45°, pro his enim regionibus fit $pP$ maximum; atque in aliis regionibus eò minor erit inæqualitas, quò magis fuerint à latitudine 45° remotæ. Mare autem maximè deprimetur, ſi fuerit cof. $z = \frac{-PQ(1-8)}{pq(1-2g)}$; quo valore ſubſtituto, reperietur aqua infra libellam $C$ ſubſidere per ſpatium $= \frac{3gp^2q^2}{2h(1-8g)} - \frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$; omnino igitur aqua in æſtu movebitur per ſpatium $= \frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6gpqPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, quorum ſignorum ambiguorum ſuperius + valet ſi Luna ſuper horizonte, alterum verò − ſi Luna ſub horizonte in Fluxu meridianum attingit.

§. 86. Si aqua inertiâ careret, tum ſuperiore Lunæ tranſitu per meridianum elevaretur ſupra libellam $C$ per ſpatium $= \frac{3(pq+PQ)^2-1}{h}g$, inferiori verò tranſitu per meridianum elevaretur ad altitudinem $\frac{3(pq-PQ)^2-1}{h}g$, quarum altitudinum diſcrimen eſt $= \frac{12gpqPQ}{h}$; ita ut diſcrimen admiſsâ inertiâ majus ſit parte circiter octava, quàm idem diſcrimen ſi inertia tollatur. Maximè autem deprimetur aqua ſublatâ inertiâ, ſi fuerit cof. $z = \frac{-PQ}{pq}$, tumque infra libellam erit conſtituta intervallo $= \frac{g}{h}$; ex quo

ſpatium,

ſpatium, per quod æſtus Maris fit ſublatâ inertiâ, prodit $= \frac{3l^2q^2+3P^2Q^2\pm 6lqPQ}{h}g$; cùm igitur idem ſpatium conceſsâ inertiâ, ſit $\frac{3gp^2q^2}{h(1-8g)} \pm \frac{6grpPQ}{h(1-2g)} + \frac{3gP^2Q^2(1-8g)}{h(1-2g)^2}$, erit exceſſus hujus ſpatii ſuper illud $= \frac{24g^2p^2q^2}{h(1-8g)} - \frac{-12g^2P^2Q^2(1+g)}{h(1-2g)^2} \pm \frac{12gpqPQ}{h(1-2g)}$. Fieri ergo poteſt ut ſpatium, in quo æſtus Maris continetur, majus ſit ſublatâ inertiâ, quàm ſi ea aquæ tribuatur, id quod eveniet ſi $\frac{P^2Q^2(1+g)}{(1-2g)^2} > \frac{2p^2q^2}{1-8g}$ vel $\frac{PQ}{pq} > \frac{(1-2g)\sqrt{2}}{\sqrt{(1+g)(1-8g)}}$, hoc eſt $\frac{PQ}{pq} > \sqrt{\frac{256}{95}}$, poſito $g = \frac{1}{18}$; quod verò ſi evenit, Luna ne quidem horizontem in curſu diurno attingit, ac propterea aquam non deprimit. Ex quo ſequitur æſtum ubique ab inertiâ aquæ augeri: erit autem ad uſum magis accommodatè ſpatium $AB$, per quod Mare agitatur, ita expreſſum ut ſit $AB = \frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq \pm \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, ubi ſignorum ambiguorum ſuperius tranſitum Lunæ per meridianum ſuper horizonte, inferius verò ſub horizonte reſpicit.

§. 87. Cùm ſit $\frac{3g}{h} = 3{,}372$ pedum, Lunâ mediocrem à Terrâ diſtantiam tenente, atque $g$ ſit circiter $\frac{2}{25}$ vel $\frac{1}{18}$; erit poſito $g = \frac{2}{25}$ ſpatium $AB = \frac{25}{9}(pq \pm \frac{3}{7}PQ)^2$, 3,372 ped. at facto $g = \frac{1}{18}$ erit ſpatium $AB = \frac{9}{5}(pq \pm \frac{5}{8}PQ)^2$. 3,372 ped. Ex his colligitur æſtum fore maximum pro eadem elevatione poli, ſi fuerit tangens declinationis Lunæ $= \frac{3}{7}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{2}{25}$, vel $= \frac{5}{8}\frac{P}{p}$ caſu $g = \frac{1}{18}$: horum autem caſuum prior veritati magis videtur conſentaneus, atque hanc ob rem valorem $g = \frac{2}{25}$ retineamus: hinc igitur ſequitur ſub æquatore æſtum fore maximum ſi Luna nullam habeat declinationem, atque ſimul pro quaque regione declinatio Lunæ poterit aſſignari, cui maximus æſtus reſpondeat: uti ex adjecto laterculo apparet:

| Elevatio Poli. | Declinatio ☽ | | Elevatio Poli. | Declinatio ☽ | | Elevatio Poli. | Declinatio ☽ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0°. | 0°, | 0′ | 30°. | 13°, | 54′ | 60°. | —— |
| 5°. | 2°, | 8′ | 35°. | 16°, | 42′ | 65°. | —— |
| 10°. | 4°, | 19′ | 40°. | 19°, | 46′ | 70°. | —— |
| 15°. | 6°, | 33′ | 45°. | 23°, | 11′ | 75°. | —— |
| 20°. | 8°, | 52′ | 50°. | 27°, | 3′ | 80°. | —— |
| 25°. | 11°, | 18′ | 55° | maxima. | | 85°. | —— |

In locis ergo ultra 45°. ab æquatore remotis æſtus erit maximus, ſi Luna maximam obtineat declinationem, ſi quidem fuerit $g = \frac{2}{25}$: ac ſi per obſervationes conſtet cuinam Lunæ declinationi maximus æſtus reſpondeat, tum inde valor litteræ $g$ innoteſcet: quoniam autem ſub elevatione poli 50°. æſtus maximi nondum maximæ declinationi reſpondere obſervantur, ponamus id evenire ſub elevatione poli 60°, reperietur $\frac{1-8g}{1-2g} = \frac{1}{4}$ atque $g = \frac{1}{10}$, unde ipſius $g$ tutò hi limites conſtitui poſſe videntur $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{18}$; ex hâc verò hypotheſi valor $\frac{1}{10}$ multo propiùs ad veritatem accedit; interim tamen etiammum nil definimus, ſed obſervationes hunc in finem ſollicitè inſtitutas expectamus.

§. 88. Quòd ſi autem ponamus $g = \frac{1}{10}$, tum bini æſtus ſucceſſivi, dum Luna in maximâ declinatione verſatur, eò magis ad æqualitatem perducentur, quò ipſo theoria ad experientiam propiùs accedit; cùm enim ſit horum binorum æſtuum major ad minorem uti $\left(pq + \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$ ad $\left(pq - \frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)$, hæc ratio eò propiùs ad æqualitatem accedet, quò minor fuerit fractio $\frac{1-8g}{1-2g}$, fit autem hæc fractio $= \frac{1}{4}$ ſi ponatur $g = \frac{1}{10}$. Hâc itaque hypotheſi erit quantitas æſtûs majoris $= (pq + \frac{1}{4}PQ)^2 . 16,86$ ped. minoris verò $= (pq - \frac{1}{4}PQ)^2 . 16,86$ ped. At inter hos binos æſtus aqua humillima non medium interjacet, ſed minori eſt vicinior, neque tamen tantâ inæqualitate binos Fluxus dirimit, quàm fieret, ſi ima aqua Lunæ horizontali reſponderet. Si enim tempus medium inter binos Fluxus ponatur $z$, erit cof. $z = 0$, at temporis, quo Refluxus Fluxum majorem inſequitur, coſinus eſt $= \frac{-PQ}{4pq}$, ejuſque ergo intervalli à tempore medio ſinus eſt $= \frac{PQ}{4pq}$, quæ expreſſio adeo ſub elevatione poli 60°, pro maxima Lunæ declinatione 28°, tantum fit $= 13°$, unde Refluxus

fluxus à tempore inter Fluxus medio circiter 54' aberrabit: minor verò erit aberratio, quò propiùs cùm regio Terræ tùm Luna ad æquatorem versentur, id quod cum experientiâ mirificè convenit. Quoniam autem hæc ex valore ipsius *g* assumto consequuntur, imprimis notari oportet, litteram *g* non posse absolutè determinari, sed ejus quantitatem, quippe quæ mobilitatem totius Oceani spectat, cùm ab extensione tùm etiam profunditate Maris pendere; ex quo variis in locis hæc eadem littera *g*, varias significationes sortietur.

§. 89. Ex solutione horum duorum problematum, quæ quidem in se spectata non solum sunt attentione digna, sed etiam cùm analysin tùm etiam motûs scientiam amplificant, quamvis ea casum propositum non penitus exhauriant, tamen motus in præcedentibus capitibus definitus multò magis cum experientiâ conciliatur, id quod theoriæ nostræ jam insigne addit firmamentum. Simili autem modo vis à Sole profecta cum inertiâ aquæ potest conjungi, atque æstus Maris definiri, quâtenus à solâ vi Solis oritur, quibus duobus effectibus conjungendis judicare licebit, quantus æstus quovis tempore & quovis loco debeat evenire. In hoc quidem capite cogitationes adhuc ab omnibus obstaculis à Terrâ & littoribus oriundis prorsus abstrahimus, atque universam Terram undiquaque aquâ circumfusam ponimus; ex quo regulas hinc natas præcipuè ejusmodi observationibus, quæ in ampliſſimo Oceano apud exiguas insulas sunt institutæ, conferri conveniet. Quoniam autem nondum motûs aquæ progressivi, quo alternativè ad loca, in quibus Fluxus & Refluxus accidit, progreditur & recedit, rationem habuimus, necesse est ut etiam hunc motum & Phænomena inde orta contemplemur. Ac primò quidem facilè intelligitur, cùm ob inertiam aquæ tùm etiam alia impedimenta motui opposita, aquam tam tardiùs elevari quàm deprimi oportere, quàm ex allatis hactenus consequitur: unde Fluxus non ad transitus Lunæ per meridianum contingent, sed aliquanto seriùs evenient, omnino uti experientia testatur.

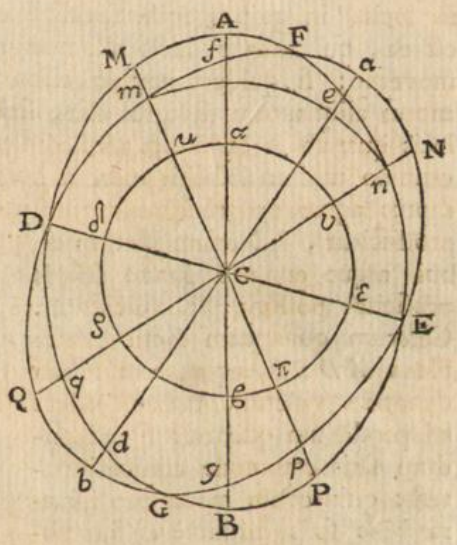
§. 90. Hæc autem retardatio præcisè ad calculum revocari non potest, quia à motu aquæ ejusque profunditate plurimum pendeat, prouti etiam videmus in diversis locis eam vehementer esse diversam, atque aliis locis Fluxum contingere post Lunæ culminationem tribus horis nondum elapsis, aliis verò locis plus quàm duodecim horis tardiùs venire, quæ quidem insignis retardatio terrarum positioni est adscribenda; interim tamen hinc sufficienter constat motum Maris admodum posse impediri. Pro eodem verò loco satis luculenter perspicitur, quò major atque altior Fluxus evenire debeat, eò tardiùs eundem accidere oportere. Quòd si enim æstus contingat infinitè parvus, dubium est nullum, quin is statotempore adveniat, cùm impedimentis hoc casu ne locus quidem concedatur agendi; unde dilucidè sequitur æstus eò tardiùs advenire debere, quò

ſint majores. Atque hoc ipſum experientia confirmat, quâ conſtat æſtus majores, qui circa novilunia ac plenilunia contingunt, tardiùs inſequi tranſitum Lunæ per meridianum, quàm æſtus minores, qui circa quadraturas contingunt. Cùm enim Luna in quadraturis circiter 6 horis tardiùs reſpectu Solis per meridianum tranſeat, quàm in ſyzygiis, æſtus tamen non 6 horis tardiùs, ſed tantum circiter 5 $\frac{1}{4}$ horis tardiùs accidit. Videtur verò etiam calculus, qui pro utraque vi Solis ac Lunæ conjunctim inſtitui poteſt ſimili modo, quo pro ſolâ vi Lunæ fecimus, ejuſmodi retardationem majorem in ſyzygiis quàm in quadraturis indicare, etiamſi eum ob ſummas difficultates ad finem perducere non valuerimus; interim tamen ſatis planum eſt præcipuam ejus cauſam in ipsâ naturâ aquæ eſſe quærendam. Hæc autem allata ratio retardationis à Flamſtedio maximè probatur, quippe qui obſervavit maximam retardationem non tam ſyzygiis luminarium, neque minimam quadraturis reſpondere, ſed iis tempeſtatibus, quibus æſtus ſoleant eſſe maximi & minimi, id quod demum poſt ſyzygias & quadraturas contingit.

§. 91. Ad hanc autem Fluxuum à ſyzygiis ad quadraturas acceleratìonem, reſpectu tranſitûs Lunæ per meridianum, ac retardationem à quadraturis ad ſyzygias, plurimùm quoque vis Solis conferre videtur. Suprà enim jam indicavimus poſt ſyzygias Fluxum tranſitum Lunæ per meridianum antecedere debere, ob Solem tum jam versùs horizontem declinantem; unde etiam, ſtabilitâ inertiâ, diebus novilunia ac plenilunia ſequentibus æſtus Maris citiùs inſequi debet tranſitum Lunæ per meridianum, quàm in ipſis ſyzygiis, id quod etiam obſervationes mirificè confirmant; inter Fluxum enim quintum & ſextum poſt ſyzygias retardatio reſpectu Solis tantum 17 minut. deprehenditur, cùm tamen Luna 24′ retardetur. Hanc ob rem à Sole determinatur æſtus ad actionem virium magis exactè ſequendam, quæ determinatio cùm duret uſque ad quadraturas, mirum non eſt, quòd æſtus tùm reſpectu Lunæ citiùs contingant, magiſque ad calculum accedant. Contrarium evenit in progreſſu à quadraturis ad ſyzygias, quo tempore æſtus à Sole continuò retardantur; hocque neceſſariò efficitur, ut tandem in ipſis ſyzygiis Fluxus tardiùs inſequatur Lunæ culminationem quàm in quadraturis. Hanc autem rationem cum magnitudine æſtûs conjungendam eſſe putamus ad hæc phænomena perfectè explicanda, ſæpiſſimè enim in hâc quæſtione plures cauſæ ad eundem effectum producendum concurrunt; hoc autem eſt id ipſum quod calculus ille ſummoperè implicatus & moleſtus quaſi per tranſennam oſtendere viſus eſt.

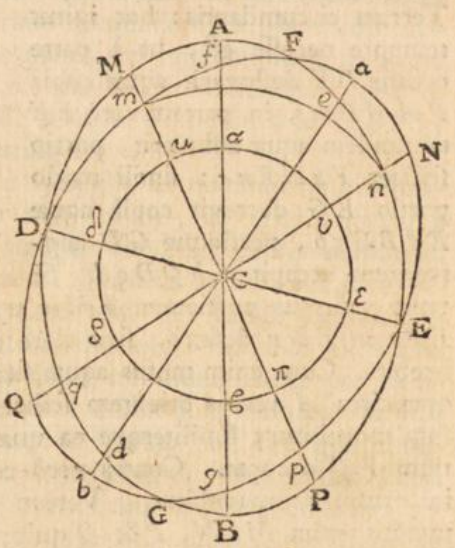
§. 92. Quò autem tam de his Phænomenis quàm reliquis certiùs & ſolidiùs judicare queamus, ipſum motum progreſſivum, quem aqua ab æſtu recipit, inveſtigabimus. Cùm enim aqua eodem loco nunc elevetur nunc ſubſidat, neceſſe eſt ut priori caſu aqua aliunde affluat, poſteriori

riori verò ab eodem loco defluat, unde nomina Fluxûs ac Refluxûs originem traxerunt. Repræsentet igitur tempore quocunque figura *ADBE* statum aquæ totam Terram ambientis, ita ut in locis *A* & *B* aqua maximè sit elevata, in locis verò mediis ab *A* & *B* æquidistantibus, maximè depressa. Post aliquod tempus transferatur æstus summus ex *A* & *B* in *a* & *b*, sitque *aDbE* figura aquæ Terram circumdantis: hoc igitur tempore necesse est, ut à parte oceani *DF* defluxerit aquæ copia *FAMDmf*, in partem verò *FE* tantundem aquæ affluxerit, portio scilicet *FaNEne*: simili modo portio *EG* decrevit copiâ aquæ *EPBGgp*, portioque *GD* augmentum accepit *GbQDqd*. Si nunc ponamus portionem *FMm* transire in locum *FNn*, ac portionem *EPp* in *ENn* deferri, satis clarè motum aquæ progressivum intelliget licebit. Cùm enim motus aquæ summæ *A* fiat ab ortu in occasum, aqua quæ circa *A* versùs orientem scilicet ab *M* ad *N* usque est sita, in occasum movebitur; similiterque ea quæ huic è diametro est opposita & spatium *PQ* occupat. Contrà verò reliqua aqua in *MQ* & *NP* contenta in ortum promovebitur. Verùm celeritas ubique non erit eadem; in punctis enim *M*, *N*, *P* & *Q* quippe limitibus inter motus versùs ortum & obitum, celeritas erit nulla, deinde ab *M* usque ad *F* crescet ubique ita ut incrementa celeritatis in punctis mediis ut *A* sint differentiis *Af* proportionalia: ab *F* verò usque ad *N* celeritas decrescere debet, & decrementum celeritatis in *e* erit ut *ae*; similique modo comparatus erit motus in reliquis portionibus figuræ propositæ.




§. 93. Si hæc diligentiùs prosequamur ac punctum *a* ipsi *A* proximum ponamus, reperiemus in loco quocunque *M* fore intervallum *Mm* sinui dupli anguli *MCA* proportionale. Quare si anguli *ACM* sinus ponatur $= x$, cosinus $= y$, ac celeritas quam aqua in *M* habet, versùs occasum $= u$ erit $du$ ut $2xy$. Cùm autem elementum arcûs *AM* sit ut $\frac{dx}{g}$; nam figuram instar circuli considerari licet: erit $du$ ut $2x\,dx$, atque $u$ proportionale erit ipsi $2xx-1$ ejusmodi adjecta constante, ut ubi *Mm* est maximum, ibi celeritas evanescat. Hanc ob rem erit celeritas in loco quo-

quocunque *M*, quam aqua versùs occidentem habebit, uti cosinus dupli anguli *MCA*. Maxima igitur aquæ celeritas versùs occidentem erit in iis locis, in quibus aqua maximè est elevata; huicque celeritati æqualis est ea, quâ aqua in locis ubi maximè est depressa, versùs orientem promovetur; si quidem hæc in circulo fieri concipiamus, nam in sphæra motus aliquantum diversus erit, sed tamen hinc intelligi poterit. At in locis quæ ab A & *B* 45 grad. distant, ob cosinum dupli anguli = 0, aqua omnino nullum habebit motum horizontalem. Ex his igitur non solum motus aquæ progressivus cognoscitur, quo alterna elevatio ac depressio producitur, sed etiam luculenter perturbationes, quæ à Terris, littoribus atque etiam à fundo Maris proficisci possunt, perspiciuntur. Ceterum quanquam sectio nostra plana *ADBE* æquatorem solum denotare videtur, tamen eadem ad parallelum quemvis significandum satis commodè adhiberi potest: quin etiam motus pro sphæra hinc satis distinctè colligi poterit, operæ enim pretium non judicamus, per solidorum introductionem hanc rem cognitu tantò difficiliorem reddere.



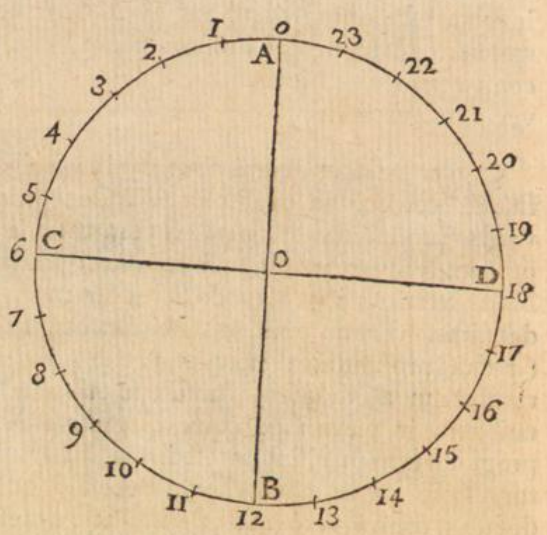

§. 94. Eò minus autem hujus accuratæ inquisitioni insistemus, quòd celeritas progressiva insuper à profunditate maris pendeat. Quòd si enim ponamus *mn* jam esse Maris fundum, ita ut profunditas Maris in *M* major non esset quàm *Mm*; tum isti aquæ tantus motus inesse deberet, quo ea, dum Fluxus ex *A* in *a* transit, ex situ *n F M m* in situm *m F N n* transferri posset. Hic autem motus quamvis sit difformis & per totam massam inæquabilis, tamen si tota translatio spectetur, totus motus ex spatio à centro gravitatis interea percurso est æstimandus. Hoc igitur casu, quo Terræ superficiem solidam ad *m n* usque pertingere ponimus, reperietur centrum gravitatis massæ *n F M m* ferè æquè celeriter promoveri debere ac punctum *A*, ex quo ejus celeritas tanta esse deberet, quâ tempore unius horæ spatium ferè 15 graduum percurrere posset, quæ celeritas undique foret enormis ac stupenda. At si Mari profunditatem majorem tribuamus, scilicet ad $\mu\nu$ usque, tum illa celeritas multò fiet minor, decrescet namque in eadem ratione in qua profunditas crescit. Cùm igitur celeritas Maris, quæ antè in se spectata inventa

inventa est cosinui dupli anguli $MCA$ proportionalis, eò fiat minor, quò majorem Mare habeat profunditatem, tenebit ea in quoque loco rationem compositam ex ratione directâ cosinûs dupli anguli $MCA$ atque ex inversâ profunditatis.

§. 95. Datur autem alius modus celeritatem Maris horizontalem, positâ scilicet ubique profunditate eâdem, determinandi, qui tamen ad diversas profunditates patet, si cum ratione inveniendâ conjungamus reciprocum profunditatum uti fecimus; deduciturque hic modus ex motu Maris verticali, quo modò ascendit modò descendit, qui jam suprà est definitus. Primò enim manifestum est, si Mare ubique eâdem celeritate, (positâ profunditate ubique æquali) in eandem plagam promoveretur, tum etiam altitudinem mansuram esse eandem ubique, neque ullam mutationem in elevatione aquæ orturam esse. At si aqua motu inæquabili progrediatur, manifestum est iis in locis, ubi celeritas diminuitur, aquam turgescere atque adeo elevari debere, quoniam plus aquæ affluit quàm defluit; contrà verò ubi celeritas aquæ crescat, ibi aquam subsidere oportere. Quare cùm elevatio & depressio Maris à motûs progressivi horizontalis inæqualitate pendeat, licebit pro quovis loco hanc inæqualitatem definire, ex motu ascensûs & descensûs cognito. Cùm enim celeritas ascensûs sit decremento celeritatis progressivæ æqualis, celeritas descensûs verò incremento celeritatis progressivæ, ex dato motu verticali ratio motûs horizontalis definiri poterit. Invenimus autem suprà §. 84, si Luna à meridiano versùs occasum jam recessit angulo $z$, hoc est cùm regio proposita ab eâ, in quâ aqua est summa, versùs orientem secundùm longitudinem distet angulo $z$, fore celeritatem quâ aqua ascendit $= \frac{-6gpqPQ\,sin.\,z}{h(1-2g)} - \frac{3gp^2q^2\,sin.\,2z}{h(1-8g)}$. Quare cùm huic celeritati ascensûs proportionale sit decrementum motûs horizontalis, erit ipsa celeritas horizontalis versùs occasum ut $\frac{g(3p^2q^2+6P^2Q^2-2)}{2h} + \frac{6gpqPQ\,cos.\,z}{h(1-2g)} + \frac{3gp^2q^2\,cos.\,2z}{2h(1-8g)}$; hujus enim differentiale negativè sumtum & per $dz$ divisum dat ipsam celeritatem ascensûs. Quoniam autem hæc expressio simul exhibet spatium, quo Mare supra libellam elevatur, erit celeritas Maris in quovis loco versùs occidentem proportionalis elevationi supra libellam, & inversè profunditati Maris, quæ est vera regula pro motu Maris, tam verticali quàm horizontali, definiendo; atque ita priori modo insufficienti supersedere potuissemus.

§. 96. Consideremus ergo motum, quo aqua tàm verticaliter quàm horizontaliter promovetur à Fluxu usque ad Refluxum, indeque ad sequentem Fluxum, idque sub æquatore, dum Luna pariter in æquatore versatur: erit itaque celeritas ascensûs

ut – ſin. 2z, celeritas autem horizontalis versùs occaſum ut 15 coſ. 2z + 1 poſito $g = \frac{1}{10}$, cui expreſſioni ſimul altitudo aquæ ſupra libellam eſt proportionalis. Quòd ſi ergo ſuperficies Terræ ſeu perimeter æquatoris in 24 partes æquales dividatur, atque in locis *A* & *B* aqua ſit maximè elevata, in *C* & *D* verò minimè, numeri 1, 2, 3, &c. deſignabunt ea Terræ loca in quibus ante unam vel duas vel tres vel &c. horas lunares aqua maximè fuit elevata, tribuendo uni horæ Lunari 62 minuta. In Tabulâ ergo annexâ exhibetur motus tàm verticalis, quàm horizontalis, ad ſingulas horas poſt Fluxum elapſas.




| *Horæ poſt Fluxum.* | *Celeritas Maris verticalis.* | | *Celeritas Maris horizontalis.* | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,000 | deſcendit. | 1,067 | in occaſum. |
| 1 | 0,500 | deſcendit. | 0,927 | in occaſum. |
| 2 | 0,860 | deſcendit. | 0,567 | in occaſum. |
| 3 | 1,000 | deſcendit. | 0,067 | in occaſum. |
| 4 | 0,860 | deſcendit. | 0,432 | in ortum. |
| 5 | 0,500 | deſcendit. | 0,792 | in ortum. |
| 6 | 0,000 | aſcendit. | 0,932 | in ortum. |
| 7 | 0,500 | aſcendit. | 0,792 | in ortum. |
| 8 | 0,860 | aſcendit. | 0,432 | in ortum. |
| 9 | 1,000 | aſcendit. | 0,067 | in occaſum. |
| 10 | 0,860 | aſcendit. | 0,567 | in occaſum. |
| 11 | 0,500 | aſcendit. | 0,927 | in occaſum. |
| 12 | 0,000 | deſcendit. | 1,067 | in occaſum. |

Facilè autem intelligitur pro regionibus ab æquatore remotis, præcipuè ſi Luna habeat declinationem, tum utrumque motum magis fore irregularem, atque mox aſcenſum citiùs abſolvi mox verò deſcenſum; totus autem motus faciliùs ex ipſis formulis datis cognoſcetur. Hìc denique profunditatem ubique eandem poſuimus; quòd ſi enim eſſet diver-

ſa,

ſa, motus horizontalis ſimul rationem inverſam profunditatis tenebit.

§. 97. Denique antequam hoc caput finiamus, notari oportet, neque maximos æſtus iis ipſis temporibus evenire poſſe, quibus vires Solis & Lunæ maximè vigent, nec minimos æſtus tum, cùm vis à Luna & Sole nata eſt debiliſſima, ſed aliquanto tardiùs. Æſtûs enim magnitudo non ſolum à quantitate virium ſollicitantium pendet, uti id uſuveniret, ſi aqua inertiâ careret, ſed inſuper à motu jam antè concepto. Quòd ſi enim antè Mare omnino quieviſſet, tum primus certè æſtus oriundus admodum futurus eſſet exilis, etiamſi vires ſollicitantes eſſent maximæ; ſequentes verò æſtus continuò creſcerent, donec tandem poſt tempus infinitum magnitudinem aſſignatam obtinerent, ſi quidem vires ſollicitantes idem robur perpetuò ſervarent: atque hoc idem evenire debet, ſi æſtus præcedentes tantum fuerint minores, quàm is qui viribus ſollicitantibus convenit. Quare cùm æſtus novilunia ac plenilunia præcedentes ſint minores, ii quidem his temporibus ab auctis viribus augebuntur, non verò ſubitò totam ſuam quantitatem conſequentur, atque hanc ob rem æſtus etiamnum poſt ſyzygias augmenta accipient, donec ob tum ſecutura virium decrementa, æſtus iterum decreſcere incipiant. Ita tempore noviluniorum & pleniluniorum non tam ipſi æſtus quàm incrementa eorum cenſenda ſunt maxima, quatenus ſcilicet æſtus præcedentes maximè deficiunt, ab iis qui ſequi deberent; ex quo manifeſtum eſt non illos æſtus, qui in ipſis ſyzygiis luminarium contingunt, eſſe maximos, ſed ſequentes eſſe majores. Hocque idem intelligendum eſt de æſtibus minimis, qui non in ipſas quadraturas incidunt, ſed tardiùs ſequuntur: unde ratio luculenter perſpicitur, cur æſtus tàm maximi quàm minimi non ipſis ſyzygiarum & quadraturarum tempeſtatibus reſpondeant, ſed ſeriùs obſerventur, tertii ſcilicet demum vel quarti poſt hæc tempora.

## CAPUT SEPTIMUM.

### *Explicatio præcipuorum Phænomenorum circa Æſtum Maris obſervatorum.*

§. 98. IN præcedentibus capitibus fuſiùs expoſuimus effectus, qui in Mari à viribus illis duabus, quarum altera versùs Lunam eſt directa, altera versùs Solem, produci debent; eoſque cùm per calculum analyticum, tùm per ſolida ratiocinia ita determinavimus, ut de eorum exiſtentiâ dubitari omnino non liceat, ſi quidem illæ vires admittantur. At verò iſtas vires in mundo exiſtere non ſolum per alia phæ-

nomena evidentiſſimè probavimus, ſed etiam earum cauſam phyſicam aſſignavimus, quam in binis vorticibus, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam ſit conſtitutus, poſuimus, quippe quæ eſt unica ratio cùm gravitatem tùm etiam vires, quibus planetæ in ſuis orbitis circa Solem continentur, explicandi. Quin etiam hæc ipſa phænomena internam vorticum ſtructuram & indolem commonſtrarunt; ob eaque vortices ita comparatos eſſe ſtatuimus, ut vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris eorumdem. Quare cùm in his viribus nihil gratuitò aſſumſerimus, ſi effectus ex iis oriundi cum phænomenis æſtûs Maris conveniant, certiſſimè nobis perſuadere poterimus, in aſſignatis viribus veram æſtûs Maris cauſam contineri; abſonumque omninò fore, ſi cauſam æſtûs Maris in aliis viribus imaginariis anquirere vellemus. Quamobrem in hoc capite conſtituimus omnes effectus, qui in ſuperioribus capitibus ſparſim ſunt eruti, conjunctim & ordine proponere, ſummumque eorum conſenſum cum experientiâ declarare. Quoniam autem nondum impedimentorum à littoribus terriſque oriundorum rationem habuimus, facilè intelligitur, hinc excludi adhuc debere ejuſmodi anomalias æſtûs Maris, quæ evidentiſſimè à Terris contingentibus ortum habeant, cujuſmodi ſunt æſtus vel vehementer enormes vel vix ſenſibiles, uti in Mari Mediterraneo, vel inſignes retardationes eorum, quibus rebus explicandis ſequens caput ultimum deſtinavimus: ita in hoc capite tantum ea æſtûs Maris phænomena explicanda ſuſcipimus, quæ in portubus ampliſſimum Oceanum reſpicientibus vel inſulis obſervari ſolent in Oceano ſitis.

§. 99. Si omnes proprietates, quibus Fluxus ac Refluxus Maris præditus eſſe obſervatur, diſtinctè enumerare atque exponere velimus, deprehendemus eas ad tres claſſes revocari debere. Ad primam ſcilicet claſſem referenda ſunt phænomena, quæ in uno æſtu in ſe ſpectato conſpiciuntur, cùm ratione temporis tùm etiam ratione quantitatis; hæcque phænomena commodiſſimè ſub varietatibus diurnis comprehendi poſſunt, quâtenus ea ſe offerunt obſervatori, qui per integrum tantum diem obſervationes inſtituit, neque ea cum aliis phænomenis aliis temporibus occurrentibus comparat. Secunda claſſis complectitur varietates menſtruas, quæ ſeſe obſervatori per integrum menſem æſtum Maris contemplanti offerunt, quorſum pertinent æſtus maximi minimique, item retardationes modò majores modò minores. Tertia denique claſſis comprehendit varietates annuas ac pluſquam annuas, quæ ſequuntur vel varias Lunæ à Terra diſtantias, vel Solis; vel etiam luminarium declinationem. Hanc ob rem phænomena uniuſcujuſque claſſis recenſebimus, atque quomodo ſingula cum theoriâ traditâ congruant, oſtendemus. Hìc verò, ut jam eſt monitum, à perturbationibus quæ à Terris ac littoribus provenire poſſunt, animum prorſus abſtinemus, eas ſequenti capiti reſervantes. Multò minùs

nùs verò ad ventum hìc reſpicimus, quo æſtus Maris cùm ratione magnitudinis tùm temporis plurimum affici obſervatur; ſed tantùm ejuſmodi phænomena explicare hìc conabimur, quæ memoratis perturbationibus minimè ſint obnoxia.

§. 100. Quod igitur ad primam claſſem attinet, præcipuum Phænomenum in hoc conſiſtit, quòd ubique in ampliſſimo Oceano quotidie bini Maris Fluxus ſeu elevationes, binique Refluxus ſeu depreſſiones obſerventur, atque tempus inter binos Fluxus ſucceſſivos circiter 12. h. 24′. deprehendatur. Huic verò Phænomeno, ſi ulli alii, per theoriam noſtram pleniſſimè eſt ſatisfactum, ubi oſtendimus maximam aquæ elevationem deberi tranſitui Lunæ per meridianum tam ſupra quàm infra Terram: ex quo cùm Luna unâ revolutione diurnâ bis ad ejuſdem loci meridianum appellat intervallo temporis circiter 12. hor. 24′, neceſſariò ſequitur unâ revolutione Lunæ circa Terram binos Fluxus tanto tempore à ſe invicem diſſitos oriri debere, quemadmodum hoc ipſum calculus tam pro hypotheſi aquæ inertiâ carentis, quàm admiſsâ inertiâ, clariſſimè indicavit. Simul autem ex iiſdem determinationibus intelligitur ſub ipſis polis nullum omnino æſtum dari diurnum, in regionibus verò à polis non procul remotis, ubi luminaria vel non oriuntur vel non occidunt; quotidie unum tantum Fluxum unicumque Refluxum contingere debere; quæ conſequentia theoriæ, etſi obſervationibus nondum ſatis eſt comprobata, tamen quia ex iiſdem principiis ſequitur quæ inſtitutis obſervationibus ſatisfaciant, nulli ampliùs dubio ſubjecta videtur. In locis autem æquatori propioribus, quibus quotidie bini Fluxus totidemque Refluxus eveniunt, momentum, quo aqua maximè deprimitur non ſatis exactè medium interjacere obſervatur inter Fluxuum momenta, ſed mox priori mox poſteriori eſt propius, quod Phænomenum cum noſtrâ theoriâ apprimè congruit; oſtendimus enim momentum Refluxûs non exactè tempori medio inter Fluxus reſpondere, niſi vel locus ſitus ſit ſub æquatore, vel Lunæ declinatio fuerit nulla, ſed modò priori modò poſteriori Fluxui eſſe propius.

§. 101. Secundum Phænomenum huc redit, ut ubique locorum Fluxus poſt tranſitum Lunæ per meridianum venire obſervetur, idque aliquot horarum ſpatio, in portubus versùs apertum Oceanum patentibus. Nam in regionibus quæ cum Oceano non liberrimè communicantur, ſed ad quas aqua juxta littora deferri debet, multo tardiùs æſtus advenit, quæ retardatio ſi ferè ad 12 horas aſcendit, in cauſa eſſe ſolet, ut hujuſmodi in locis Fluxus ante tranſitum Lunæ per meridianum venire videatur. Ita ad Portum Gratiæ videri poſſet Fluxus 3 horis Lunæ culminationem antecedere, cùm tamen, re benè conſideratâ, à præcedente culminatione oriatur, atque adeo eam 9 ferè horis demum ſequatur, uti apparebit ſi æſtuum momenta, quæ ſucceſſivè ad littoræ Britannia minoris

& Normanniæ obſervantur continuóque magis retardantur, attentiùs inſpiciantur. Deberet quidem ubique Fluxus in ipſos Lunæ tranſitus per meridianum incidere, imò quandoque ob Solem præcedere, non ſolum demtâ inertiâ, ſed etiam eâ poſitâ, ſi tantum aquæ motus verticalis ſpectetur; at ſi etiam motûs horizontalis ratio habeatur, tum dilucidè oſtendimus, Fluxum perpetuò retardari, ac demum poſt Lunæ tranſitum per meridianum evenire debere. Tempus quidem hujus retardationis, cùm ſit admodum variabile pluribuſque circumſtantiis ſubjectum, non definivimus, interim tamen id ex §. 82. colligi poterit, remotis externis impedimentis: cùm enim invenerimus aquam propriâ vi gravitatis ſeſe in ſitum æquilibrii recipere tempore $\frac{12}{n}$ horarum, ac numerum $n$ eſſe circiter 5 vel 6, manifeſtum eſt tanto etiam tempore opus eſſe, quo aqua eum ſitum quem vires intendunt, induat, ex quo Fluxus circiter 2 horas vel 2 $\frac{1}{2}$ hor. poſt tranſitum Lunæ per meridianum contingere debebit, id quod cum obſervationibus in Oceano libero inſtitutis egregiè convenit; hancque idcireo præcipuam hujus retardationis cauſam meritò aſſignamus.

§. 102. Tertium Phænomenon ſuppeditat æſtûs magnitudo, quæ autem tam diverſis locis quàm diverſis tempeſtatibus maximè eſt mutabilis. Interim tamen exceptis enormibus illis æſtubus, qui nonnullis in portubus obſervari ſolent, reliqui cum noſtrâ Theoriâ egregiè conſentiunt; inertiâ enim ſublatâ, invenimus ſub æquatore maximum æſtum fore per ſpatium circiter 4 pedum, ab inertia autem hoc intervallum augeri ita ut duplo, vel triplo, vel etiam quadruplo & plus fiat majus, prout valor ipſius $g$ (vid. §. 82.) minor fuerit vel major, quippe qui à facultate Oceani ſeſe propriâ ſuâ vi in ſtatum æquilibrii reſtituendi pendet; ex quo ſub æquatore ſpatium per quod maximus æſtus agitatur ad 8., 12, 16 & plures pedes exſurgere poteſt. In regionibus autem ab æquatore remotis invenimus magnitudinem æſtûs tenere rationem duplicatam coſinuum elevationis poli, unde ſub elevatione poli 45°., magnitudo æſtûs circiter duplo erit minor quàm ſub ipſo æquatore; cujus veritas in locis à littoribus aliquot milliaria remotis per experientiam eximiè comprobatur. Deprehenditur enim ubique in locis à littoribus remotis æſtus multò minor quàm ad littora; cujus diſcriminis cauſa in ſequenti capite dilucidè indicabitur. Quinetiam in medio Mari plerumque æſtus adhuc minor obſervatur, quàm hæc regula requirit; id autem oſtendetur à non ſatis amplâ Oceani extenſione ſecundùm longitudinem proficiſci, quemadmodum in Oceano Atlantico qui versùs Occidentem littoribus Americæ; versùs Orientem verò littoribus Africæ & Europæ terminatur, quæ amplitudo non eſt ſatis magna, ut integram æſtûs quantitatem ſuſcipere queat.

§. 103.

§. 103. Quartum Phænomenon varietates menſtruas reſpicit, atque oſtendit æſtus, qui circa plenilunia & novilunia contingunt, inter reliquos ejuſdem menſis eſſe maximos, æſtus verò circa quadraturas luminarium minimos; quæ inæqualitas cum theoriâ noſtrâ ad amuſſim quadrat. Cùm enim æſtus Maris non ſolum ab eâ vi, quæ vortici Lunam ambienti competit, oriatur, ſed etiam à vi Solem ſpectante pendeat, quæ ceteris paribus circiter quadruplo minor eſt vi Lunæ, manifeſtum eſt æſtum Maris maximum eſſe debere, ſi ambæ vires inter ſe conſpirent, atque aquam ſimul vel elevent vel deprimant, id quod accidere oſtendimus tam pleniluniis quàm noviluniis. Deinde ſimili modo, quoniam iſtæ vires inter ſe maximè diſcrepant in quadraturis, quibus temporibus dum aqua à Lunâ maximè elevatur, ſimul à Sole maximè deprimitur ac viciſſim, perſpicuum eſt iiſdem temporibus æſtum minimum eſſe debere. Præterea verò ipſum diſcrimen cum theoriâ exactè convenit; in pluribus enim portubus æſtus maximos & minimos ad calculum revocavimus, atque ex relatione eorum relationem inter vires Lunæ ac Solis inveſtigavimus; hincque perpetuò eandem ferè rationem inter vires Solis ac Lunæ abſolutas elicuimus, quemadmodum id fecit Newtonus ex obſervationibus Briſtolii & Plymouthi, nos verò in Portu Gratiæ inſtitutis, concluſionibus mirificè inter ſe congruentibus: qualis conſenſus profectò expectari non poſſet, ſi theoria veritati non eſſet conſentanea. Neque etiam aliæ theoriæ adhuc productæ, cujuſmodi ſunt Galilæi, Walliſii atque Carteſii, qui cauſam in preſſione Lunæ collocavit, huic phænomeno perfectè ſatisfaciunt, ſed potiùs prorsùs evertuntur.

§. 104. Quintum Phænomenon in hoc conſiſtat, quòd unius menſis intervallo maximi æſtus non ſint ii, qui novilunia ac plenilunia proximè inſequuntur, ſed ſequentes tertii ſcilicet circiter vel quarti, ſimilique intervallo æſtus minimi demum poſt quadraturas contingunt. Hujus autem Phænomeni ratio in §. 97. fuſiùs eſt expoſita, ubi oſtendimus, cùm æſtus ante ſyzygias incidentes eſſent minores, maximam vim à Sole & Lunâ ortam non ſubitò æſtum maximum producere valere, ſed tantùm Mare ad eum ſtatum ſolicitare. Cùm igitur poſt ſyzygias vis æſtum efficiens ſenſibiliter non decreſcat, æſtus etiamnum poſt hoc tempus incrementa capiet, atque ideo demum poſt ſyzygias fiet maximus; ſimiliſque eſt ratio diminutionis æſtuum, quæ etiamnum poſt quadraturas contingere debet, ita ut æſtus minimi demum poſt quadraturas eveniant. Hujuſmodi autem retardationes effectuum à viribus in mundo exiſtentibus provenientium quotidie abundè experimur: ob ſimilem enim rationem ſingulis diebus maximum calorem non in ipſo meridie ſentimus, etiamſi hoc tempore vis Solis calefaciens ſine dubio ſit maxima, ſed demum aliquot horis poſt meridiem, atque propter eandem cauſam neque ſolſtitii æſtivi momento maximus calor annuus ſentitur, neque tempore ſolſtitii hyberni frigus ſummum, ſed utrumque notabiliter tardiùs.

§. 105.

§. 105. Sextum Phænomenon in hoc ponimus, quòd momenta Fluxuum tempore ſyzygiarum multo ſtrictiùs ordinem tenere obſervantur, quàm circa quadraturas. Hìc verò ante omnia animadvertendum eſt præcipuam ſenſibilem anomaliam in momentis æſtuum inde originem trahere, quòd hæc momenta ex tempore ſolari atque à vero meridie ſeu tranſitu Solis per meridianum ſoleant computari, cùm ea potiùs à tranſitu Lunæ per meridianum pendeant. Quòd ſi autem ad has obſervationes tempus lunare à tranſitu Lunæ per meridianum computandum adhibeatur, irregularitates apparentes maximam partem evaneſcent, hoc verò multo magis in fluxubus circa ſyzygias quàm quadraturas: in quadraturis enim quoniam, dum Luna per meridianum tranſit, Sol non ſemper in horizonte verſatur, ſed vel ad horizontem demum accedit vel jam ab eo recedit, neceſſe eſt ut illo caſu Fluxus citiùs, hoc verò tardiùs contingat: quod diſcrimen cùm partim ab elevatione poli partim à declinatione luminarium pendeat, momenta Fluxuum in quadraturis magis irregularia reddit: interim tamen habitâ harum circumſtantiarum ratione ſatis propè definiri poteſt. Circa tempora Fluxuum autem, qui in noviluniis ac pleniluniis incidunt, hæc ſola correctio ſeu reductio ad tranſitum Lunæ per meridianum omnem ferè anomaliam tollit, quorſum ſpectat regula à celeb. Caſſino in Mem. 1710. tradita, quâ pro totidem horis, quibus plenilunium ſeu novilunium vel ante meridiem vel poſt incidit, totidem bina minuta ad tempus Fluxûs medium vel addere vel ab eo ſubtrahere jubet, quippe quæ ex motu Lunæ eſt petita. Interim tamen hâc correctione adhibitâ aliqua anomalia ſupereſſe deprehenditur, cujus autem ratio ex noſtrâ theoriâ ſponte ſequitur. Quando enim ſyzygia ante meridiem celebratur, tum dum Luna per meridianum tranſit, Sol jam ante eum eſt tranſgreſſus, atque ideo jam horizonti appropinquat, ex quo neceſſe eſt ut Fluxus citiùs eveniat, quàm prima regula ſola adhibita indicat. Atque etiam idem in tabulis Fluxuum Dunkerquæ & in Portu Gratiæ obſervatorum, Mem. 1710. inſertis, manifeſtò conſpicitur: quando enim novilunium pleniluniumve pluribus horis ante meridiem accidit, tum Fluxus citiùs adveniſſe obſervatur, quàm calculus Caſſinianus indicabat; contrà verò tardiùs ſi ſyzygiæ demum pluribus horis poſt meridiem inciderint, cujus majoris retardationis cauſa in Sole tum adhuc ab horizonte recedente eſt quærenda.

§. 106. Septimum Phænomenon ſuppeditat diverſa retardatio Fluxuum in ſyzygiis luminarium & quadraturis reſpectu appulſûs Lunæ ad meridianum; tardiùs ſcilicet ubique locorum Fluxus, qui in ſyzygiis contingunt, inſequuntur culminationem Lunæ, quàm ii, qui circa quadraturas veniunt. Hujus autem Phænomeni duplex cauſa poteſt aſſignari, quarum prima à ſolâ quantitate æſtuum petitur, quia enim æſtus ſyzygiarum multò ſunt majores quàm æſtus quadraturarum, conſentaneum vide-

videtur illos tardiùs venire quàm hos. Altera verò causa quæ hoc Phænomenon multò distinctiùs explicat, nullique dubio locum relinquit, nostræ theoriæ omnino est propria, priorique longè est præferenda. Ponamus enim $t$ esse tempus, quo in noviluniis ac pleniluniis Fluxus post appulsum Lunæ ad meridianum venire solet; sequentibus igitur diebus hoc tempus $t$ continuò diminuetur, quia tum Sol, dum Luna in meridiano versatur, Mare jam deprimit; quæ diminutio cùm duret ferè usque ad quadraturas, necesse est ut his temporibus Fluxus multò citiùs post culminationem Lunæ sequantur, viribusque sollicitantibus magis obtemperent, uti hoc fusiùs §. 91. explicavimus, unde tempus retardationis in quadraturis tantum erit $t - \theta$. Post quadraturas autem Sol exerit contrarium effectum, atque adventum Fluxûs continuò magis retardat, idque æquali modo, quo antè acceleraverat, ex quo usque ad sequentem syzygiam intervallum $t - \theta$ iterum ad $t$ usque augebitur. Hujusque Phænomeni solius explicatio sufficere posset ad veritatem theoriæ nostræ evincendam, cùm id omnibus aliis theoriis explicatu sit insuperabile; neque à nemine adhuc saltem probabilis ejus causa sit assignata.

§. 107. Octavum Phænomenon petamus ex inæqualitate duorum Fluxuum sese immediatè insequentium, quorum alter transitui Lunæ superiori per meridianum respondet, alter inferiori, quæ inæqualitas maximè observatur in regionibus ab æquatore multum remotis, ac tum cum Lunæ declinatio est maxima. Theoria quidem declarat Lunam, etiamsi in ipso æquatore versetur, tamen majori vi gaudere ad Mare movendum, quando super horizonte meridianum attingit, quàm infra horizontem; at discrimen sub æquatore tam est exiguum, ut vix in sensus occurrere queat, integrum enim digitum non attingit (§. 41.); atque in regionibus ab æquatore remotis fit multò minus. Vera igitur hujus Phænomeni ratio in altitudine Lunæ meridianâ seu distantiâ ab horizonte continetur; hinc enim sequitur quò major fuerit differentia inter distantias Lunæ ab horizonte, dum per meridianum transit tum super horizonte tum sub horizonte, eò majorem esse debere differentiam inter binos Fluxus successivos, ex quo perspicuum est istam differentiam versùs polos continuò crescere debere, si quidem Luna habeat declinationem. Quòd si ergo Luna habuerit declinationem borealem, tum in regionibus septentrionalibus Fluxus erit major qui transitum Lunæ per meridianum superiorem sequitur, alter verò sequens, qui transitui inferiori respondet, minor. Contrà autem si Lunæ declinatio fuerit australis, appulsui Lunæ ad meridianum superiori Fluxus succedet minor, inferiori verò major; hancque differentiam Flamstedius observavit diligenter, nullumque est dubium, quin ea per copiosissimas observationes, quas Academia Celeberrima Regia Parisina collegit, omnino confirmetur. In hoc autem negotio indoles Fluxuum probè est inspicienda, quoniam aliquibus in-

portibus tantopere retardantur, ut ſequentibus Lunæ tranſitibus per meridianum ſint propiores, quàm illi, cui ſuam originem debent; ita Dunkerquæ circa ſyzygias Fluxus circiter meridie obſervari ſolet, neque verò illi ipſi tranſitui Lunæ per meridianum eſt tribuendus qui eodem tempore fit, ſed præcedenti, prouti ſucceſſiva retardationis incrementa ad littora Galliæ & Belgii borealia evidentiſſimè teſtantur. Quare ſi verbi gratiâ Dunkerquæ quis hujuſmodi obſervationes perluſtrare voluerit, is quemque Fluxum non cum tranſitu Lunæ per meridianum proximo comparet, ſed cum eo qui propemodum 12 horis antè contigit; alioquin enim contraria Phænomena eſſet deprehenſurus.

§. 108. Commodus hîc nobis præbetur locus explicandi tranſitum à binis æſtubus, qui quotidie in regionibus extra circulos polares ſitis eveniunt, ad ſingulos æſtus, qui ſecundùm theoriam noſtram in regionibus polaribus contingere debent. Quoniam enim theoria noſtra monſtrat, in zonis temperatis & torridâ quotidie duos Fluxus obſervari debere, in zonis frigidis autem unum tantum, tranſitio ſubitanea à binario ad unitatem maximè mirabilis ac paradoxa videri poſſet. Sed quia ſi Fluxus bini ſucceſſivi inter ſe ſunt inæquales, Refluxus aquæ ſeu maxima depreſſio Fluxui minori eſt vicinior, bini æſtus quoque ſucceſſivi ratione temporis inter ſe erunt inæquales, ſi quidem voce æſtûs intelligamus motum aquæ à ſummâ elevatione ad imam depreſſionem uſque, ac viciſſim. Quò magis itaque ab æquatore versùs polos recedatur, eò major deprehendetur inter binos æſtus ſucceſſivos inæqualitas, cùm ratione magnitudinis tùm temporis, major enim diutiùs durabit quàm minor, ambo verò ſimul ubique abſolventur tempore 12 horarum, cum 24′ circiter: quòd ſi itaque in eas regiones uſque perveniatur, in quibus Luna utrâque vice vel ſuper horizonte vel ſub horizonte meridianum attingit, æſtus minor omnino evaneſcet, ſoluſque major ſupererit, qui tempus 12 h. 24′. adimplebit. Ex quibus perſpicuum eſt, ſi Luna habeat declinationem, inæqualitatem binorum æſtuum ſucceſſivorum ad polos accedendo continuò fieri majorem, atque tandem minorem omnino evaneſcere debere, quod cùm evenit, bini æſtus in unum coaleſcunt.

§. 109. Explicatis anomaliis æſtûs Maris menſtruis, pervenimus ad anomalias annuas vel pluſquam annuas, ac nonum quidem Phænomenon deſumimus ex variatione æſtûs, quæ à diverſis Lunæ à Terra diſtantiis proficiſcitur. Obſervantur enim æſtus ubique majores ceteris paribus, in iiſdem ſcilicet luminarium aſpectibus iiſdemque declinationibus, ſi Luna in ſuo perigæo verſetur, minores verò, Lunâ in apogæo exiſtente. Egregiè autem hæc conveniunt cum noſtrâ theoriâ, quâ demonſtravimus Lunæ vires ad Mare movendum decreſcere in triplicatâ ratione diſtantiarum Lunæ à Terra: quòd ſi igitur Luna verſetur in perigæo Fluxus debebunt eſſe majores, quàm ſi Luna apogæum occupat. Præterea etiam

tabula

tabula quam Celeb. Caſſini in Mem. 1713. pro diverſis Lunæ à Terrâ diſtantiis ex plurimis obſervationibus Breſtiæ inſtitutis collegit, ſatis accuratè cum theoriâ noſtrâ conſpirat, etiamſi enim pro Luna perigæa minorem elevationem aquæ tribuat, quàm iſta ratio requireret, tamen diſcrimen valde eſt exiguum: quin etiam facilè concedetur Lunam perigæam totum ſuum effectum non tam citò conſequi poſſe, quem conſequeretur, ſi Luna perpetuò in perigæo verſaretur. Aliter autem Luna apogæa eſt comparata, quæ ad diminuendum æſtum Maris tendit, cùm enim Mare ob inertiam & impedimenta ipſum ad diminutionem æſtûs ſit proclive, ſine ullâ reſiſtentiâ Luna in apogæo conſtituta effectum ſuum exeret. Huc etiam pertinet, quod pariter Celeb. Caſſini ſe obſervaſſe teſtatur, ſimilem differentiam etſi multò minorem à variis Solis à Terrâ diſtantiis produci, id quod noſtræ theoriæ non ſolum eſt conſentaneum, ſed inde etiam ipſa quantitas hujus differentiæ poteſt definiri.

§. 110. Denique decimum Phænomenon ſeſe nobis contemplandum offert, quo vulgò ſtatui ſolet æſtus tam noviluniorum quàm pleniluniorum, qui contingunt circa æquinoctia, cæteris eſſe majores, etiamſi obſervationes hanc regulam non penitùs confirment; quamobrem videamus quomodo æſtus cæteris paribus comparatus eſſe debeat pro diverſis Lunæ declinationibus. Ac primò quidem ex noſtrâ theoriâ (§. 87.) æſtus dum Luna in æquatore verſatur, maximos eſſe non poſſe, niſi in locis ſub ipſo æquatore ſitis; atque eodem loco tabellam adjecimus, ex quâ patet, cuinam Lunæ declinationi maximi æſtus reſpondeant. Ita pro elevatione poli 50°, æſtus maximi incidunt Lunæ declinationi 27°, ſi quidem $g$ ponatur $= \frac{2}{35}$; at poſito $g = \frac{1}{16}$, quod probabilius videtur, prodit Lunæ declinatio maximum æſtum producens circiter 16°, id quod mirificè convenit cum obſervationibus ad Littora Galliæ Septentrionalia inſtitutis, quibus conſtat maximos ſyzygiarum æſtus menſibus Novembri & Februario accidere ſolere, quibus temporibus Luna ferè aſſignatam obtinet declinationem. At quod fortè illi regulæ, quâ Lunæ in æquatore verſanti maximi æſtus adſcribi ſolet, anſam præbuiſſe videtur, eſt modus æſtuum quantitates definiendi peculiaris ac ſatis perverſus; cùm enim crederent plerique obſervatores cauſis alienis tribuendam eſſe inæqualitatem, quæ inter binos æſtus ſucceſſivos intercedat, veram aquæ elevationem accuratiùs definire ſunt arbitrati, ſi ſumerent medium inter binos Fluxus ſucceſſivos. Quòd ſi autem hoc modo quique æſtus æſtimentur, tum utique maximi æſtus in æquinoctia incidere obſervabuntur, id quod etiam noſtræ theoriæ maximè eſt conforme, exceptis tantum regionibus polis vicinioribus. Cùm enim poſitis ſinu elevationis poli $= P$, coſinu $= p$, ſinu declinationis Lunæ $= Q$, coſinu $= q$, major æſtus fiat per ſpatium $\frac{3g}{b(1-8g)}\left(pq+\frac{PQ(1-8g)^2}{1-2g}\right)$, minor verò per ſpatium $=$

$\frac{3g}{h(1-8g)}\left(pq-\frac{PQ(1-8g)}{1-2g}\right)^2$, §. 86.) erit per hunc æſtum Maris menſurandi modum quantitas æſtûs $=\frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right)=\frac{3g}{h(1-8g)}\left(p^2-p^2Q^2+\frac{(1-8g)^2P^2Q^2}{(1-2g)^2}\right)$; ex quâ expreſſione perſpicitur maximos æſtus ubique, ſi quidem modo recenſito menſurentur, Lunæ in ipſo æquatore degenti reſpondere, niſi ſit $\frac{(1-8g)^2P^2}{(1-2g)^2}>p^2$, hoc eſt niſi tangens elevationis poli major ſit quàm $\frac{1-2g}{1-8g}$: his ſcilicet regionibus etiam Luna declinans ab æquatore majores æſtus producet. At ſi ponatur $g=\frac{2}{15}$, prodit elevatio poli, ubi regula prolata fallere incipit, 66°; ſin autem ponatur $g=\frac{1}{18}$, fit elevatio poli major quàm 58°; at poſito $g=\frac{1}{10}$, provenit poli elevatio 76°. Cùm igitur in locis polis tam vicinis obſervationes inſtitui non ſoleant, ſatis tutò affirmare licet, maximos æſtus menſtruos accidere circa æquinoctia, ſi quidem quantitas æſtûs quotidie menſuretur per medium arithmeticum inter ſpatia, quæ duo æſtus ſucceſſivi conficiunt.

§. 111. Quid nunc aliud de theoriâ noſtrâ ſit ſentiendum, niſi eam veram & genuinam æſtûs Maris cauſam, qualis ab Illuſtriſſima Academia Regia in propoſitâ quæſtione deſideratur, in ſe complecti, non videmus? Non ſolum enim omnia Phænomena, quæ in æſtu Maris obſervantur, clarè & diſtinctè explicavimus, ſed etiam exiſtentiam actualem earum virium, quibus hos effectus adſcribimus evidentiſſimè demonſtravimus; ex quo efficitur cauſam à nobis aſſignatam, non tantum omnibus Phænomenis ſatisfacere, ſed etiam eſſe unicam quæ cum verâ conſiſtere queat. Quòd ſi enim quiſpiam alias vires excogitet, quibus æquè omnia Phænomena explicare poſſet, etiamſi hoc fieri poſſe minimè concedamus, ejus certè explicatio ſubitò concideret & everteretur à viribus noſtræ theoriæ, quas aliunde in mundo exiſtere abundè conſtat; quoniam ab illis viribus imaginariis hiſque realibus conjunctim effectus duplicatus conſequi deberet, quem experientia averſatur. Nunc igitur nobis ſummo jure aſſerere poſſe videmur, veram æſtûs Maris cauſam in duobus vorticibus eſſe poſitam, quorum alter circa Solem, alter circa Lunam agitetur, atque uterque ejus ſit indolis, ut vires centrifugæ decreſcant in duplicatâ ratione diſtantiarum à centris utriuſque vorticis: quæ proprietas obtinetur, ſi celeritas materiæ ſubtilis gyrantis in quoque vortice teneat rationem reciprocam ſubduplicatam diſtantiarum. Neque verò hi duo vortices ad libitum ſunt excogitati, ſed ille qui Solem circumdat eſt is ipſe, qui omnes planetas in ſuis orbitis continet; alter verò Lunam circumdans, etſi ejus vis niſi in æſtu Maris non ſentitur, tamen ſine ullâ hæſitatione admitti poteſt, cùm certò conſtet

Ter-

Terram, Jovem ac Saturnum ſimilibus vorticibus eſſe cinctos, unde ejuſmodi vortices nulli omnino corpori mundano denegari poſſe videntur. Parciùs quidem hîc materiam de vorticibus tractavimus, etiamſi in illis veram æſtûs Maris cauſam ponamus; hoc autem de induſtriâ fecimus, cùm hoc argumentum jam toties ſit tractatum ac ferè exhauſtum; neque nobis perſuadere poſſumus, ſi hâc occaſione doctrinam de vorticibus etiam meliùs, quam etiamnum à quoquam eſt factum, expediremus, ob eam rem præmium nobis tributum iri.

---

## CAPUT OCTAVUM.

*De Æſtûs Maris perturbatione à Terris ac littoribus oriundâ.*

§. 112. PERVENIMUS tandem ad ultimam noſtræ diſquiſitionis partem, quæ præcipua eſt, in quâ Theoriam expoſitam ad ſtatum telluris, in quo reverâ reperitur, debito modo accommodabimus. Hactenus enim, quò ardua iſta diſquiſitio facilior redderetur, ab omnibus circumſtantiis externis quibus effectus à viribus Solis ac Lunæ oriundis vel turbari vel determinatu difficiliores reddi poſſent, cogitationem abſtraximus. Primò ſcilicet non ſolum totam Terram ex aquâ conflatam poſuimus, ſed etiam inertiam aquæ mente ſuſtulimus, ut eò pauciores res in computum ducendæ ſupereſſent. Deinde inertiæ quidem habuimus rationem, ac præcedentes determinationes debito modo correximus; verùm totam Terram aquâ undiquaque circumfuſam aſſumſimus, ſeu etiamnum anomalias à Terris negleximus. Nunc itaque noſtra theoria eò eſt perducta, ut nihil ampliùs adjicere neceſſe foret, ſi quidem æſtus Maris à Terris littoribuſque ſenſibiliter non afficeretur; niſi fortè anomaliæ quædam à ventis oriundæ commemorari deberent, quæ autem motu aquæ perſpecto facilè adjudicantur, atque ad omnes theorias æquè pertinent. Quamobrem ultimum hoc caput deſtinavimus explicationi Phænomenorum quorumdam ſingularium, quorum cauſa non tam in ipsâ aquâ viribuſque eam ſollicitantibus, quàm in Terrâ continenti littoribuſque eſt quærenda: hac enim parte abſolutâ nihil ampliùs reſtare videtur, quod vel ad Theoriæ noſtræ confirmationem, vel ad omnium Phænomenorum adæquatam explicationem deſiderari queat. Quamvis enim Illuſtriſſima Academia totum hoc argumentum non penitùs exhauriri jubeat, cùm adhuc nonnullas quæſtiones de eodem in poſterum proponere conſtituiſſet, tamen quia hoc tempore vera cauſa phyſica deſideratur, veritatem noſtræ theoriæ non ſatis confirmari arbitramur, niſi ejus convenientiam cum omnibus Phænomenis dilucidè oſtenderemus, cùm ſi vel

unicum Phænomenon refragaretur, eo ipſo tota theoria ſubverteretur; quam ob cauſam prolixitatem noſtræ tractationis, atque tranſgreſſionem limitum præſcriptorum nobis ſine difficultate condonatum iri confidimus.

§. 113. Primùm autem perſpicuum eſt motum Maris horizontalem quo vel versùs orientem vel occidentem progreditur, ob Terram interpoſitam non ſolum perturbari, verùm etiam quandoque prorſus impediri debere. Suprà enim oſtendimus, ſi tota Terra aquâ eſſet circumfuſa, tum ubique ad Fluxum formandum aquam ab oriente advehi debere, ante refluxum autem versùs ortum defluere. Quòd ſi ergo Oceanus versùs orientem Terris terminetur, fieri omnino nequit tempore Fluxûs ad hæc littora aqua ab oriente affluat, quo ipſo curſus aquæ naturalis penitùs impedietur. Quoniam autem vires Solis ac Lunæ nihilominùs his in regionibus Mare attollere conantur, effectum conſequi non poterunt, niſi aqua ab Occidente afferatur: ſic quando ad littora Europæ aqua à viribus Solis ac Lunæ elevatur, aqua ab Occidente eò deferatur neceſſè eſt, ab iis ſcilicet regionibus, ubi aqua eodem tempore deprimetur; quod idem fieri debet ad littora Africæ & Americæ occidentalia. Contrà verò ad littora Aſiæ & Americæ orientalia aqua naturali motu feretur, atque in Fluxu ab oriente adveniet, in Reſluxu verò versùs orientem recedet. Vires namque Solis ac Lunæ motum aquæ horizontalem non per ſe determinant, ſed eâtenus tantum, quâtenus aliis in locis aquam attollunt, aliis verò eodem tempore deprimunt; atque aqua ob propriam gravitatem eum ſeligit motum, quo facillimè à locis quibus deprimitur, ad loca quibus attollitur promoveatur: quamobrem iſte motus maximè à Terris oceanum includentibus determinetur neceſſe eſt. Hinc igitur perſpectâ poſitione littorum cujuſvis Maris facilè definiri poterit, à quanam plagâ aqua in Fluxu venire, quorſumque in Refluxu decedere debeat, ſi modò elevationes & depreſſiones aquæ per totum Mare attentè conſiderentur: tota enim hæc quæſtio pertinebit ad hydroſtaticam.

§. 114. Cùm igitur ad littora Europæ aqua elevari nequeat, niſi affluxus ab occidente fiat copioſus, ad littora quæ versùs occidentem reſpiciunt aqua directè ab occidente adveniet, quæ autem littora ad aliam plagam ſunt diſpoſita, aquæ curſus versùs orientem directus inflectetur juxta littora, priuſquam eò pertingat, omnino uti inſpectio mapparum docebit. Quoniam verò iſte aquæ juxta littora Fluxus tantam celeritatem, quantam habet Luna, recipere nequit, neceſſe eſt, ut Fluxus ad littora magis ad orientem ſita tardiùs advehatur. Hæc autem versùs littora orientaliora retardatio maximè perſpicua eſt in portubus Galliæ, Belgii, Angliæ & Hiberniæ; cùm enim ad oſtia fluviorum Garumnæ & Ligeris, quæ versùs Oceanum ampliſſimum patent, tempore pleniluniorum

niorum ac noviluniorum Fluxus adveniunt horâ tertiâ pomeridianâ, quæ retardatio naturalis cenſeri poteſt, neque littoribus adhuc turbata; hinc aqua demum ad littora Britanniæ minoris ac Normanniæ progreditur; atque idcirco his in regionibus Fluxus tardiùs evenire obſervantur. Sic ad Portum S. Malo tempore ſyzygiarum Fluxus demum horâ ſextâ ſequitur, ad oſtia verò Sequanæ uſque ad horam nonam retardatur: atque ita porro retardatio augetur, donec tandem in freto Gallico Dunkerquæ & Oſtendæ mediâ nocte incidat. Ex hac verò retardatione innoteſcit celeritas aquæ, quâ juxta littora progreditur, eaque tanta deprehenditur quâ unâ horâ ſpatium circiter (†) 8. milliarium conficiat. Denique aqua tantam fere viam abſolvere debet uſque ad Dublinum, quantam ad fretum Gallicum, ex quo Fluxus etiam Dublini horâ circiter decimâ pomeridianâ obſervari ſolet. Atque ſimili modo retardatio Fluxuum ad littora aliarum regionum ſine ullâ difficultate explicari poterit.

§. 115. Quod autem ad quantitatem æſtûs Maris ad littora attinet; facilè intelligitur æſtum Maris ad littora majorem eſſe debere, quàm in medio mari. Primò enim aqua cum impetu ad littora allidit, ex quo allapſu ſolo jam intumeſcentia oriri debet. Deinde quoniam aqua eâdem celeritate, quam habebat Oceano, ubi maxima eſt profunditas, progredi conatur, ad littora locaque vadoſa vehementer inturgeſcet, tantum enim fere aquæ ad littora affertur, quantum ſufficeret ad ſpatium, quod Terra occupat, inundandum. Tertiò iſte aquæ affluxus in ſinibus vadoſis multò adhuc magis increſcere debet, eò quòd aqua his in locis jam multum appulſa ad latera diffluere nequit, ſi quidem ſinus directè versùs eam plagam pateat, unde aqua advehitur. Ex his igitur non ſolum ratio patet, cur aqua fere ubique ad littora ad multo majorem altitudinem elevetur, quàm in medio Mari, ſed etiam cur Briſtolii tam enormis Fluxus circa ſyzygias luminarium obſervetur; cùm enim in hâc regione littus ſit valdè ſinuoſum ac vadoſum, aqua maximâ vi appellitur, neque ob ſinuoſitatem tam citò diffluere poteſt. Atque ex his principiis non erit difficile rationem inconſuetorum æſtuum, qui paſſim in variis portubus animadvertuntur, indicare atque explicare; quamobrem hujus generis Phænomenis explicandis diutiùs non immoramur, cùm conſideratio littorum & Fluxûs aquæ eò ſponte quaſi manuducat.

§. 116. Quamvis autem tam Affluxus aquæ ex Oceano Atlantico; quàm Refluxus per fretum Galliam ab Anglia dirimens, ingenti fiat celerita-

(†) Ita legitur in exemplari Pariſino, procul dubio mendosè, ſed locum reſtituere non ſumus ausi; ab oſtio Garumnæ ad Dublinum quingenta circiter Italica milliaria numerantur via rectiſſima, quæ horis 7 à fluxu percurruntur qui ideo 70 milliaria ſingulis horis ad minimum emetiretur, unde 80 milliaria pro 8 milliaribus ſcribenda conjectamur.

leritate, tamen cùm versùs Belgium fœderatum Mare mox vehementer dilatetur, ab iſto alterno Fluxu ac Refluxu altitudo Maris in Oceano Germanico ſenſibiliter mutari nequit. Atque hanc ob cauſam ſtatui oportet, in hoc Mari æſtum proficiſci maximam partem ab affluxu & refluxu aquæ circa Scotiam, ubi communicatio hujus Maris cum Oceano Atlantico multo major patet; quam ſententiam magnopere confirmat ingens æſtuum retardatio ad littora Belgii & Angliæ orientalia obſervata, ad Oſtia ſcilicet Thamiſis pertingit Fluxus elapſis jam duodecim horis poſt tranſitum Lunæ per meridianum, atque Londinum uſque tribus ferè horis tardiùs defertur; quod Phænomenon conſiſtere non poſſet ſi aqua per fretum Gallicum ſolùm moveretur, cùm jam in ipſo freto duodecim horis retardetur Fluxus. Interim tamen negari non poteſt quin communicatio Maris Germanici cum Oceano Atlantico per fretum Gallicum æſtum quoadmmodo afficiat, atque Fluxum qui circa Scotiam advehitur vel adjuvet vel turbet, prout hi ambo motus ad Mare elevandum ac deprimendum vel magis inter ſe conſpirent vel minus. Simul autem hinc intelligitur æſtum Maris ex Oceano Atlantico neque cum Mari Mediterraneo neque cum Mari Baltico communicari poſſe, cùm intervallo ſex horarum per freta Herculea & Oreſundica tantum aquæ in hæc maria neque affluere queat neque inde refluere, ut ſenſibilis mutatio in altitudine aquæ oriri queat. Quamobrem in iſtiuſmodi maribus quæ à vaſto Oceano tantum anguſtis fretis ſeparantur, æſtus omnino nullus contingere poteſt, niſi forte talia maria Terris incluſa ipſa tam ſint ampla, ut vires Solis ac Lunæ æſtum peculiarem in iis producere queant; quâ de re mox videbimus.

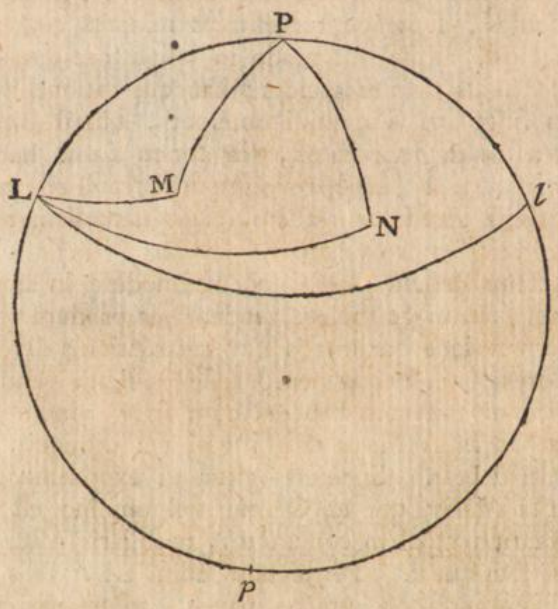
§. 117. Quemadmodum autem vidimus in Mari Germanico duplicem æſtum, quorum alter, qui quidem longè eſt minor, per fretum Gallicum, alter circa Scotiam advehitur ex eodem Oceano Atlantico: ita propter ſingularem littorum quorumdam ſitum mirabilia Phænomena in æſtu Maris evenire poſſunt. Quòd ſi enim littus quodpiam ita fuerit comparatum, ut æſtus in id duplici viâ vel ex eodem Oceano, vel ex diverſis communicetur, ratione temporis, quo bini iſti æſtus adveniunt inſignes diſcrepantiæ oriri poterunt. Nam ſi per utramque viam Fluxus eodem tempore advehatur, atque adeo ſimul Refluxus congruant, æſtus multo majores exiſtere debebunt. Sin autem eo tempore, quo per alteram viam Fluxus advenit, ex alterâ viâ Refluxus incidat, tum æſtus omnino deſtruetur ſi quidem per utramque viam aqua æquali vel affluat vel defluat. Ad hoc verò non ſufficit ambæ viæ ſint æquales, ſed etiam requiritur ut bini æſtus ſucceſſivi ſint æquales, id quod evenit ſi Luna vel non habeat declinationem, vel littus in æquatore fuerit poſitum. Quòd ſi autem eadem duplici communicatione poſitâ, tam Luna habeat declinationem, quàm littus notabiliter ab æquatore ſit motum, tum ob

inæ-

inæqualitatem binorum æſtuum ſeſe inſequentium, Fluxus majores ex alterâ viâ advenientes, ſuperabunt Refluxus minores eodem tempore per alteram viam factos, atque hoc modo in tali littore ſingulis diebus non bini Fluxus, ſed unus tantum accidet; hancque rationem allegat Newtonus æſtûs illius ſingularis Tunquini obſervati, ubi ſi Luna in æquatore verſatur nullus æſtus deprehenditur, ſin autem Luna habeat declinationem unicus tantum unâ Lunæ revolutione circa Terram. Nos autem mox hujus mirabilis Phænomeni aliam magis naturalem noſtræque theoriæ conformem indicabimus cauſam.

§. 118. Hactenus æſtum Maris, quemadmodum in ampliſſimo Oceano à viribus ad Lunam ac Solem tendentibus producatur, atque vario littorum ſitu cùm ratione quantitatis tùm retardationis diverſimodè turbetur, ſumus contemplati, neque neceſſe eſſe duximus ventorum Mariſque curſuum propriorum rationem habere, cùm ſatis pronum ſit perſpicere, quomodo his rebus æſtus Maris tam augeri vel diminui, quàm accelerari vel retardari debeat. Supereſt igitur ut exponamus, quomodo in ſatis amplo tractu Maris, qui ab Oceano vel omnino eſt ſejunctus, vel per anguſtum tantum canalem conjunctus, peculiaris æſtus à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Perſpicuum enim eſt ſi talis tractus ſecundùm longitudinem ultra 90 gradus pateat, æſtum pari modo generari debere, ac in ampliſſimo Oceano, qui totam tellurem ambire ponitur. Nam quoniam extenſio tanta eſt, ut vires Lunæ & Solis in eo tractu ſimul maximam ac minimam aquæ altitudinem inducere queant, neceſſe eſt etiam, ut aqua alio in loco tantum elevetur, inque alio tantum deprimatur, quantum fieret, ſi iſte tractus omnino non eſſet terminatus. At ſi iſte tractus tam fuerit parvus ut ſingulæ partes æqualibus fere viribus ſimul vel attollantur vel deprimantur, nulla ſenſibilis mutatio oriri poterit. Aqua enim uno in loco attolli nequit niſi in alio ſubſidat & contrà, ſi quidem eadem aquæ copia in eo tractu perpetuò conſervetur. Atque hæc eſt ratio ut in Mari Baltico, Caſpio, Nigro, aliiſque minoribus lacubus nullus omnino æſtus deprehendatur.

§. 119. Quòd ſi autem iſtiuſmodi Maris tractus tantum ſpatium occupet, ut vires attollentes & deprimentes in extremitatibus ſenſibiliter differant, tum neceſſe eſt ut non ſolum aqua in altero extremo elevetur in alteroque deprimatur, ſed etiam ut differentia inter aquæ altitudines tanta ſit, quanta in aperto Oceano eidem virium differentiæ reſpondet. Quamobrem definiri conveniet, quanta in diverſis Terræ locis eodem tempore in altitudinibus aquæ à viribus Lunæ ac Solis produci queat. Ne autem calculus nimium fiat prolixus, ſolam Lunæ vim in computum ducemus, quippe quæ vim Solis multum excedit; & quoniam effectu Lunæ cognito facile eſt Solis effectum æſtimando vel adjicere vel auferre.




Repræſentet ergo $PLpl$ ſuperficiem Terræ cujus poli ſint $P$ & $p$, atque $M$ & $N$ ſint duo termini in eodem Maris tractu aſſumti, in quibus quantum Maris altitudo quovis tempore differat, ſit inveſtigandum. Repræſentet porro $Ll$ parallelum, in quo Luna moveatur hoc tempore, ſitque Luna in $L$; atque exprimet angulus $LPM$ tempus, quod poſt Lunæ tranſitum per meridianum termini $M$ eſt præterlapſum, angulus verò $LPN$ tempus poſt tranſitum Lunæ per meridianum alterius termini $N$. Ductis autem circulis maximis $PM$ & $PN$, erit arcus $PM$ complementum latitudinis loci $M$, arcus $PN$ verò loci $N$; angulus verò $MPN$ dabit differentiam longitudinis locorum $M$ & $N$; quæ proinde omnia ponuntur cognita.

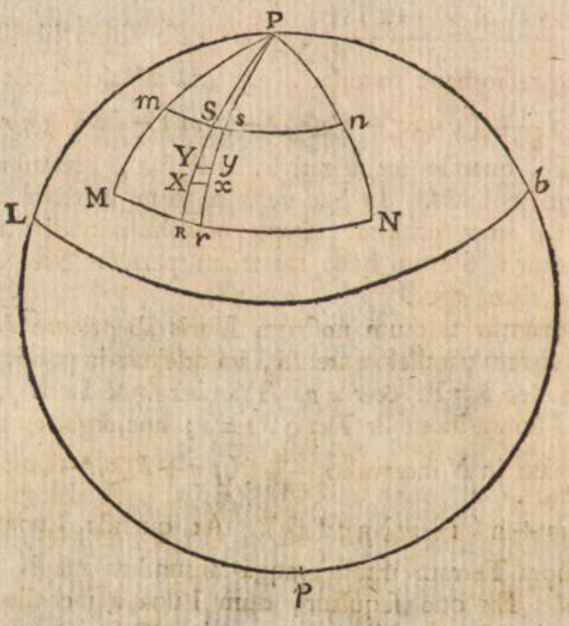
§. 120. Ducantur jam ex loco Lunæ $L$ ad terminos $M$ & $N$ circuli maximi $LM$ & $LN$, exhibebuntque iſti arcus complementa altitudinum, quibus hoc tempore Luna in locis $M$ & $N$ ſupra horizontem elevata conſpicitur. Ponatur arcûs $PL$ ſinus $= q$, coſinus $= Q$, erit $Q$ ſinus declinationis borealis Lunæ, ſi quidem $Q$ habeat valorem affirmativum, ac $P$ polum borealem denotet. Deinde ponatur arcûs $PM$ ſinus $= p$, coſinus $= P$, erit $P$ ſinus elevationis poli pro loco $M$; ſimilique modo ſit arcûs $PN$ ſinus $= r$ & coſinus $= R$, ita ut $R$ ſit ſinus elevationis poli loci $N$: denique ſit anguli $MPN$ ſinus $= M$ & coſinus $= m$, anguli verò $LPM$ ſinus $= T$, coſinus $= t$; unde erit anguli $LPN$ coſinus $= mt - MT$.

Ex

Ex his per trigonometriam ſphæricam reperietur ſinus altitudinis Lunæ ſupra horizontem loci $M$ ſeu coſinus arcûs $LM = tpq + QP$: pro loco $N$ verò erit altitudinis Lunæ ſinus $= (mt - MT)\,qr + QR$. Quare ſi, ut ſuprà, vis abſoluta ad Lunam urgens ponatur $= L$ & diſtantia Lunæ à Terra $= b$, erit altitudo ad quam aqua in $M$ elevari deberet $= \frac{L(3(tpq+PQ)^2-1)}{2b^3}$, & altitudo ad quam aqua in $N$ elevari deberet $= \frac{L(3((mt-MT)qr+QR)^2-1)}{2b^3}$, utroque caſu ſupra libellam naturalem. Si ergo illa expreſſio hanc excedat, aqua in $M$ altiùs erit elevata quàm in $N$ intervallo $\frac{3L}{2b^3}((tpq+PQ)^2-((mt-MT)qr+QR)^2)$, hæcque expreſſio, quando fiet negativa, indicabit, quantò aqua in $N$ altiùs conſiſtat quàm in $M$. In hoc verò negotio inertiam aquæ negligimus, quoniam tantum proximè Phænomena hujuſmodi caſibus oriunda indicare annitimur; ſi enim hanc materiam perfectè evolvere vellemus, integro tractatu foret opus.

§. 121. Ponamus tractum noſtrum Maris ab oriente $N$ versùs occidentem $M$ ſub eodem parallelo extendi, ita ut elevatio poli in locis $M$ & $N$ ſit eadem; erit adeo $R = P$, & $r = p$. Tranſeat nunc Luna per meridianum loci $M$ ſupra Terram ita ut ſit $T = 0$, $t = 1$; hoc ergo tempore magis erit elevata in $M$ quàm in $N$ intervallo $\frac{3L}{2b^3}((pq+PQ)^2-(mpq+PQ)^2) = \frac{3L}{2b^3}(M^2p^2q^2+2(1-m)pqPQ)$. At quando Luna per meridianum loci $N$ ſupra Terram tranſit, aqua tantundem magis erit elevata in $N$ quàm in $M$. Ex quo ſequitur, dum Luna à meridiano loci $N$ ad meridianum loci $M$ progreditur, aquam in $M$ ſenſim elevari per ſpatium $\frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq+2(1-m)PQ)$ interea verò in $N$ tantundem ſubſidere. Sin autem Luna infra Terram à meridiano loci $N$ ad meridianum loci $M$ progrediatur, aqua in $M$ elevabitur interea per ſpatium $= \frac{3Lpq}{2b^3}(M^2pq-2(1-m)PQ)$, per tantumque ſpatium aqua in $N$ ſubſidet. Ponamus nunc angulum $LPM$ eſſe 90 graduum, ſeu quæſtionem inſtitui, cùm Luna jam ante ſex horas meridianum loci $M$ ſit tranſgreſſa, atque obtinebitur differentia inter aquæ altitudines in locis $M$ & $N = \frac{3L}{2b^3}(P^2Q^2-(PQ-Mpq)) = \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ-M^2pq)$. Sex autem horis, antequam Luna ad meridianum loci $M$ appellit, aqua in $N$ magis erit elevata quàm in $M$ intervallo $= \frac{3Lpq}{2b^3}(2MPQ+M^2pq)$. Sequuntur hæc ſi inertia aquæ negligatur; at inertiâ admiſsâ ex præcedentibus ſatis clarum eſt, cùm has differentias majores eſſe debere, tùm tempora mutationum tardiùs ſequi debere.

§. 122. Quoniam verò in hoc Maris tractu perpetuò eadem aquæ quantitas contineri debet, neceſſe ut quantùm aquæ unâ parte ſupra libellam attollatur, tantundem ea in reliquâ parte infra libellam deprimatur. Quò igitur hinc altitudinem Maris quovis loco exactè determinemus, ponamus tractum noſtrum ſecundùm longitudinem terminari binis




meridianis $PM$ & $PN$, ſecundùm latitudinem verò binis parallelis $MN$ & $mn$, poſitâque Lunâ in $L$ ſit ſinus $PL = q$, coſinus $= Q$; ſinus $LPM = T$, coſinus $= t$. Porro ſit ſinus arcus $PM = p$, coſinus $= P$, ſinus $Pm = r$, coſinus $= R$, atque anguli $MPN$ ſinus $= M$ & coſinus $= m$. Præterea ſit elevatio in $M$ dum Luna in $L$ verſatur, ſupra libellam $= \alpha$, ita ut hoc loco ſuprema aquæ ſuperficies à centro Terræ diſtet intervallo $= 1 + \alpha$, unde cùm ſinus altitudinis Lunæ in $M$ ſit $= tpq + PQ$; erit gravitatio totius columnæ aqueæ ab $M$ ad centrum Terræ $= \frac{(1+\alpha)^{n+1}}{n+1} + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3} = \frac{1}{1+n} + \alpha + \frac{L(1-3(tpq+PQ)^2)}{2b^3}$, prouti ſuprà §. §. 43. & 44. demonſtravimus. Conſideretur jam locus quicunque $X$ in noſtro tractu, in quo aqua ſupra libellam ſit elevata ſpatio $= \varphi$; ac ducto per hunc locum meridiano $PR$, ſit anguli $LPR$ ſinus $= X$, coſinus $= x$; arcûs $PX$ ſinus $= z$ & coſinus $= Z$, unde gravitatio columnæ aqueæ ex $X$ ad centrum Terræ pertingentis erit $=$

$\frac{1}{1+n}+\varphi+\frac{L(1-3(xqz+QZ)^2)}{2b^3}$. Cùm igitur hæc gravitatio æqualis esse debeat illi, orietur $\varphi=\alpha+\frac{3L}{2b^3}((xqz+QZ)^2-(tpq+PQ)^2)$, ex quâ formulâ si modò constaret elevatio aquæ in $M$, simul innotesceret elevatio vel depressio in quovis loco $X$.

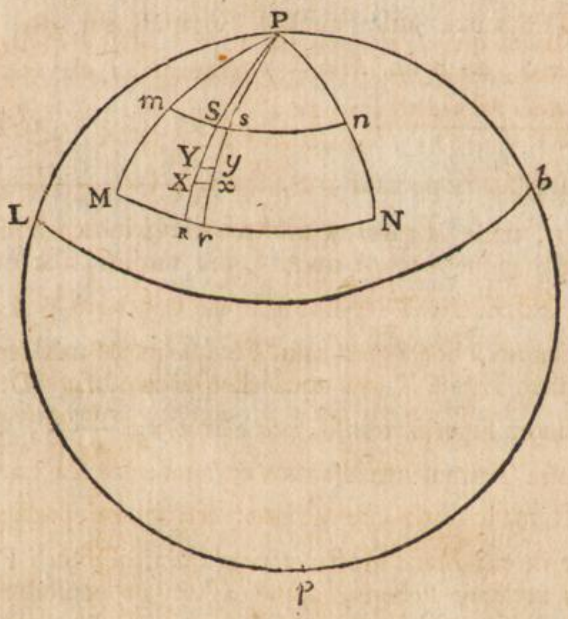
§. 123. Cùm ergo in $X$ aqua supra libellam elevetur spatio $\varphi$; in elemento tractûs infinitè parvo $XYyx$, plus inerit aquæ, quàm in statu naturali, & quidem quantitas $XY.Xx.\varphi$, cujus elementi integrale per totum tractum sumtum debet esse $=0$, ex quo valor ipsius $\alpha$ innotescet. Erit autem angulus $RPr=\frac{dY}{x}$, hincque arculus $Xx=\frac{z\,dX}{x}$, at elementum $XY=\frac{dZ}{z}$, ex quo infinitè parvum rectangulum $XYyx=\frac{dX\,dZ}{x}$, in quo ergo excessus aquæ supra statum naturalem est $=\frac{\varphi\,dX\,dZ}{x}=\frac{dX}{x}(\alpha\,dZ+\frac{3L\,dZ}{2b^3}((xqz+QZ)^2-(tpq+PQ)^2))$, quæ formula bis debet integrari. Ponatur primò $X$ constans, & integratione absolutâ reperietur in elemento $RSsr$ excessus aquæ supra statum naturalem $=\frac{dX}{x}(\alpha(R-P)+\frac{3L}{2b^3}(q^2x^2(R-P)-\frac{x^2q^2}{3}(R^3-P^3)-\frac{2xQq}{3}(r^3-p^3)+\frac{Q^2}{3}(R^3-P^3)-(tpq+PQ)^2(R-P)))$. Integretur hæc formula denuo ut integrale ad totum tractum $MNnm$ extendatur, prodibitque incrementum aquæ, quod toti tractui accessisse oporteret, $=\alpha(R-P)A\sin.M+\frac{3L}{2b^3}(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(Mm(1-2TT)-2M^2Tt)+\frac{2Qq(r^3-p^3)}{3}(T-Mt-mT)+\frac{q^2(R-P)}{2}A\sin.M+\frac{(3Q^2-1)(R^3-P^3)}{6}A\sin.M-(tpq+PQ)^2(R-P)A\sin.M)$, quæ adeo quantitas debet esse $=0$: unde oritur $\alpha=\frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3}+\frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3}-\frac{3Lq^2}{4b^3}+\frac{3L}{2b^3(R-P)A\sin.M}(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt-Mm(1-2TT))+\frac{2Qq(r^3-p^3)}{3}(T-Mt-mT))$.

§. 124. Cognitâ igitur verâ elevatione aquæ in $M$ supra libellam, quam antè posuimus $=\alpha$, hinc intelligetur vera aquæ elevatio supra libellam in loco quocunque $X$. Ponatur enim sinus anguli $MPX=S$ & cosinus $=s$, erit $\sin.LPR=X=Ts+tS$ & $x=ts-TS$, manentibusque arcûs $PX$ sinu $=z$ & cosinu $=Z$, erit elevatio aquæ in $X=\varphi=\alpha+\frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz+QZ)^2-\frac{3L}{2b^3}(tpq+PQ)^2$; quare loco $\alpha$ valore invento substituto, reperietur aqua in $X$ supra libellam attolli actu per spa-

ſpatium $= \frac{3L}{2b^3}((ts-TS)qz+QZ)^2+\frac{L(1-3Q^2)(R^2+PR+P^2)}{4b^3}$
$-\frac{3Lq^2}{4b^3}+\frac{3L}{2b^3(R-P)A\,\text{ſin. }M}\left(\frac{q^2(3(R-P)-(R^3-P^3))}{6}(2M^2Tt-Mm\right.$
$\left.(1-2TT))+\frac{2Qq(p^3-r^3)}{3}(T-Mt-mT)\right)$. Quòd ſi ergo ponatur tractus noſter ita augeri ut totam tellurem ambiat, orietur caſus jam ſuprà tractatus; quoniam enim fit $MN=360°$, ſeu $A$ ſin. $M=2\pi$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $M=0$ & $m=1$: præterea verò quia $M$ in polum auſtralem $p$, $m$ verò in borealem $P$ incidit, erit $p=0$, $P=-1$, $r=0$ & $R=+1$: ſi hi valores ſubſtituantur, prodibit elevatio aquæ in $X=\frac{L}{2b^3}(3((ts-TS)qz+QZ)^2-1)$, quæ, expreſſio, quia $ts-TS$ denotat coſinum anguli $LPX$ atque $(ts-TS)qz+QZ$ ſinum altitudinis Lunæ ſupra horizontem in $X$, cum ſuperioribus formulis exactiſſimè convenit: ſi quidem terminus $\frac{L}{b^4}$ negligatur. Hæc verò eadem ipſa expreſſio quoque emergit, ſi tantum alterum hemiſphærium vel boreale vel auſtrale ponatur aquâ totum circumfuſum, manent enim omnia ut antè, niſi quòd fiat $p=1$ & $P=0$: utroque enim caſu fit $R^2+PR+P^2=1$; ultimuſque terminus ob $M=0$ utroque caſu evaneſcit.

§. 125. Ponamus nunc tractum Maris ſecundùm longitudinem $MN$ uſque ad 180 gradus extendi, erit $M=0$ & $m=-1$ & $A$ ſin. $M=\pi$; denotat enim $A$ ſin. $M$ ſemper arcum circuli, qui menſura eſt anguli $MPN$: hinc ſi brevitatis gratiâ ponatur ſinus anguli, quo Luna in $X$ ſupra horizontem elevata apparet, $=v$, erit aquæ elevatio in $X$ ſupra libellam $=\frac{3Lv^2}{2b^3}+\frac{L(1-3QQ)(R^2+PR+P^2)}{4b^3}-\frac{3Lqq}{4b^3}+\frac{2LTQq(p^3-r^3)}{(R-P)b^3\pi}$. Ponamus porro integrum hemiſphærium $LPlp$ aquâ eſſe circumfuſum, fiet $p=0$, $P=-1$, $r=0$ & $R=1$; unde elevatio aquæ in $X$ erit $=\frac{L(3v^2-1)}{2b^3}$, omnino ac ſi tota Terra aquâ cincta eſſet, uti in præcedentibus capitibus poſuimus, vel quod eodem redit, dummodo omnis aqua ſuper Terra mutuam habeat communicationem ſatis amplam. Quòd ſi autem tractus noſter Maris tantum ad æquatorem uſque porrigatur à polo $P$, ita ut quartam ſuperficiei terreſtris partem ſolum obtegat, tum erit $p=1$, $P=0$, $r=0$ & $R=1$, hoc itaque caſu aqua in $X$ elevabitur ad altitudinem $=\frac{L(3v^2-1)}{2b^3}+\frac{2LTQq}{\pi b^3}$: ex quo perſpicitur hoc caſu elevationem in $X$ majorem, quàm ſi tota Terra aquâ eſſet circumdata, ſi expreſſio $TQq$ habeat valorem affirmativum, minorem verò ſi $TQq$ habeat valorem negativum. Sed limites huic quæſtioni præſcripti non permittunt hinc plura conſectaria deducere, cùm debita evolutio ſatis amplum tractatum requirat,

quirat; neque theoria ulteriori confirmatione indigeat. Quocirca coronidis loco duos tantum casus evolvemus, quorum altero latitudo tractûs ponetur infinitè parva, altero verò longitudo: quippe qui ad phænomena quædam singularia explicanda inservire poterunt.



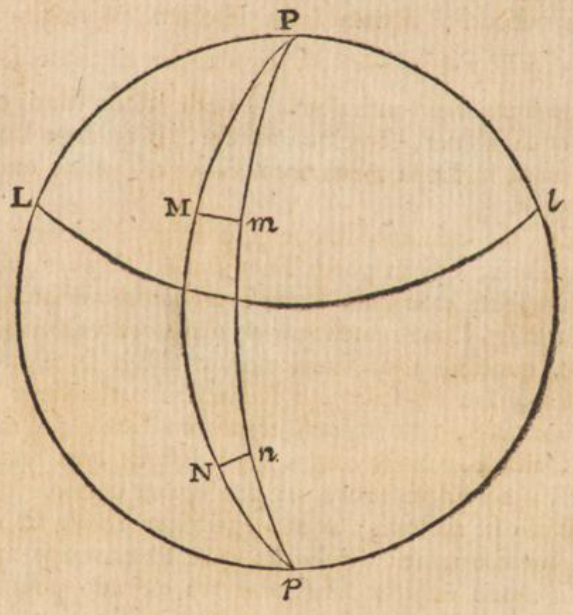

§. 126. Ponamus igitur latitudinem $Mm$ infinitè esse parvam, seu $R = P$ & $r = p$, reperietur aquæ in $X$ elevatio supra libellam $= \frac{3Lv^2}{2b^3} + \frac{3L(p^2-q^2-3P^2Q^2)}{4b^3} + \frac{3Lpq}{2b^3 A\,sin.\,M}\left(\frac{pq}{2}(2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + 2PQ(T-Mt-mT)\right)$. Consideremus autem elevationem in $M$, ubi cùm sit $v = tpq + PQ$, erit ea $= \frac{3Lpq(2ttpq+4tPQ-pq)}{4b^3}$ $+ \frac{3Lpq}{4b^3 A\,sin.\,M}(pq(2M^2Tt - Mm(1-2TT)) + 4PQ(T-Mt-mT))$. Transeat nunc Luna per meridianum loci $M$ supra Terram, erit $T = 0$, & $t = 1$, atque elevatio in $M$ prodibit $= \frac{3Lpq(pq+4PQ)}{4b^3}$ $\frac{3Lpq}{4b^3 A\,sin.\,M}(Mmpq + 4MPQ)$; at si per eundem meridianum infra Terram transeat, erit aquæ elevatio $= \frac{3Lpq(pq-4PQ)}{4b^3} - \frac{3Lpq}{4b^3 A\,sin.\,M}(Mmpq - 4MPQ)$. Quòd si autem Luna versùs ortum à meridiano distet angulo horario 90 graduum, seu circiter 6 horis ante appulsum Lunæ ad meridianum in $M$ superio-

periorem, erit $T=-1$ & $t=0$, unde elevatio erit $=\frac{-3Lp^2q^2}{4b^3}+\frac{3Lpq}{2b^3\,A\,sin.\,M}(pqMm-2PQ(1-m))$; sex verò horis post transitum Lunæ per meridianum loci $M$ versùs occasum, erit altitudo aquæ in $M$ supra libellam $=\frac{-3Lp^2q^2}{4b^3}+\frac{3Lpq}{2b^3\,A\,sin.\,M}(2pqMm-2PQ(1+m))$.

§. 127. Tribuamus huic tractui longitudinem 90 graduum, ut sit $M=1$, $m=0$, & $A$ sin. $M=\frac{\pi}{2}$, unde oritur elevatio aquæ in $M=\frac{3Lpq(2tt\,pq+4tPQ-pq)}{4b^3}+\frac{3Lpq}{2\pi b^3}(2pqTt+4PQ(T-t))$. Quæ si etiam declinatio Lunæ ponatur $=0$, fiet $=\frac{3Lp^2q^2(2tt-1)}{4b^3}+\frac{3Lp^2q^2Tt}{\pi b^3}$ existente $q=1$; unde apparet maximam elevationem non accidere cùm Luna per meridianum loci $M$ transit, sed tardiùs, & quidem si dupli anguli $LPM$ sinus fuerit $=\frac{2}{\pi}$, hoc est ferè unâ horâ post transitum Lunæ per meridianum, hoc igitur casu Fluxus in $M$ unâ ferè horâ tardiùs observetur, quàm si tota Terra aquâ esset circumfusa. Dum autem Luna per meridianum superius transit, erit elevatio $=\frac{3Lpp}{4b^3}$, quæ etiam valet si Luna infra Terram meridianum attingat; at sex horis vel antè vel post, quando Luna in horizonte versatur, erit aquæ depressio $=\frac{-3Lpp}{4b^3}$. Unde intelligitur in tali Maris tractu pariter quotidie binos Fluxus totidemque Refluxus accidere debere, atque æstum propemodum fore similem æstui generali, nisi quòd majoribus anomaliis sit obnoxius, præcipuè si Luna habeat declinationem.

§. 128. Hinc explicari potest ratio æstûs, qui in Mari Mediterraneo observatur, & qui in ipso hoc Mari generatur. Cùm enim longitudo hujus Maris ne 60 quidem gradus attingat, æstus erunt multò minores; decrescunt enim si cùm longitudo diminuatur, tum elevatio poli augeatur. Quòd si ergo in his formulis angulus $MPN$ ponatur fere 60 graduum, atque elevatio poli debita introducatur, reperientur quidem æstus bini quotidie evenire debere, qui autem futuri sint multò minores, quàm in medio Mari, & pluribus anomaliis subjecti, quas quidem omnes ex formulis definire licebit. Quoniam ergo tam exigui æstus à ventis & cursu aquæ, qui in hoc Mari notabilis deprehenditur, vehementer turbantur, ad pleraque Littora hujus Maris vix usquam æstus regularis observabitur. Excipi autem debet Mare Adriaticum, quod cùm sinum formet amplum, advenientem aquam meliùs colliget, atque elevationem multò sensibiliorem parietur, à quo æstus Maris Venetiis observatus originem habet. Tametsi enim Mare Mediterraneum non solum,

lum satis amplam habeat latitudinem, sed etiam vehementer inæqualem, tamen ejusmodi marium æstus admodum exquisitè ex præsenti casu, quo latitudinem omnino negligimus, colligi potest, quia extensio Maris in longitudinem præcipuam causam æstuum binorum singulis diebus evenientium continet, neque extensio latitudinis multum conferat.




§. 129. Ponamus nunc tractûs nostri Maris longitudinem evanescere, totumque tractum in eodem meridiano $Pp$ ab $M$ usque ad $N$ extendi, ita ut sit $M=0$, $m=1$; sinus autem elevationis poli in $M$ sit $=P$, cosinus $=p$, in $N$ verò sit sinus elevationis poli $=R$, cosinus $=r$. Ex his si Luna in $L$ versetur, ob $A$ sin. $M=M$, erit in $M$ elevatio aquæ supra libellam $= \frac{3L(tpq+PQ)^2}{2b^3} + \frac{L(1-3Q^2)(P^2+PR+R^2)}{4b^3} - \frac{3Lq^2}{4b^3} + \frac{L}{4b^3}$ $(q^2(3-P^2-PR-RR)(2TT-1) - \frac{4Qqt(t^3-r^3)}{R-P}) = \frac{L}{2b^3}((ttqq-QQ)$ $(R^2+PR-2P^2) + \frac{2Qqt(3PpR+r^3-3P^2p-p^3)}{R-P}$. Quòd si nunc ponatur alter terminus $N$ ultra æquatorem versùs austrum situs, ita ut sinus elevationis poli australis in $N$ duplo major sit quàm sinus elevationis borealis in $M$, seu $R=-2P$ & $r=\sqrt{(1-4P^2)}$, erit $R^2+PR-2P^2=0$, atque elevatio aquæ in $M$ supra libellam erit $= \frac{LQqt}{3b^3P}(9P^2$

$(9P^2p+p^3-r^3)$. Ex hâc igitur formulâ sequitur, si Lunæ declinatio sit nulla seu $Q=0$, tum nullum omnino æstum in $M$ observari debere. Quòd si autem Luna habeat borealem, tum ad transitum Lunæ per meridianum superiorem aquam attolli ad spatium $=\frac{LQq}{2b^3p}(9P^2p+p^3-r^3)$; at dum Luna in alterutro circulo horario sexto versetur, tum aquam ad libellam naturalem fore constitutam; Lunâ autem infra horizontem ad meridianum appellente, aquam infra libellam depressum iri per spatium $=\frac{LQq}{2b^3p}(9P^2p+p^3-r^3)$; contrarium denique fore æstum, si Luna habeat declinationem australem. In tali igitur Maris tractu quotidie semel tantum aqua affluet, semelque refluet, si quidem Luna habeat declinationem; nam si Luna æquatorem occupat, æstus omnino erit nullus.

§. 130. Ex hoc casu aptissimè explicari posse videtur Phænomenon illud æstûs singularis, qui in portu Tunquini ad Batsham observatur, ubi omninò ut in præsente casu dum Luna in æquatore versatur, Mare nullum æstum sentit, at dum Luna removetur ab æquatore vel versùs boream vel versùs austrum, quotidie aqua semel tantum affluit semelque refluit, prorsus ut calculus monstravit; scilicet si Lunæ declinatio fuerit borealis, aqua versùs Lunæ occasum, hoc est post transitum Lunæ per meridianum super horizonte, affluit, versùs ortum verò defluit, quæ retardatio ab inertiâ aquæ & motu ad littora provenire intelligitur ut suprà. Contrà verò si Lunæ declinatio sit australis, aqua deprimitur Lunâ ad occasum inclinante, Lunâ autem oriente, attollitur: quæ Phænomena apprimè conveniunt cum casu modò exposito. Est præterea elevatio poli Tunquini 20°, 50′, borealis, atque Mare utrinque cùm peninsulis tùm insulis ab utroque Oceano Pacifico & Indico fere prorsus separatur, saltem ut libera communicatio non adsit: præterea hic idem Maris tractus, qui versùs boream ad littora regni Tunquini terminatur extenditur ultra æquatorem ad gradus circiter 45, cujus latitudinis sinus circiter duplo major est, quàm sinus latitudinis borealis 20°, 51′: Quocirca ex his circumstantiis per nostram Theoriam eadem ipsa singularia Phænomena æstûs Maris observari debent, quæ actu observantur: atque hoc modo si ullum adhuc dubium circa nostram theoriam reliquum fuisset, id resolutione hujus mirabilis Phænomeni funditùs sublatum iri confidimus.

FINIS I. Part. TOMI III.

# PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUTORE ISAACO NEWTONO Eq. Aurato.

---

*TOMI TERTII CONTINUATIO,*

CONTINENS

## LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

# INTRODUCTIO
## AD
# LUNÆ THEORIAM
## NEWTONIANAM.

TRia ſunt in Lunæ Theoriâ ſpectanda, in quibus verſatur omnis quæſtio Aſtronomica quæ de ipſâ inſtitui poteſt; Primum ejus motus quâtenus è terrâ obſervatur; 2^do. Figura Lunaris orbitæ à circulo plùs minuſve recedens & apſidum ejus poſitio; ac tertiò ejus orbitæ ad Eclipticam inclinatio.

Si extrà Solis actionem Luna motus ſuos ageret; Luna Ellipſim quamlibet circa Terram deſcribere poſſet in Plano quovis, & ea Ellipſis perpetuò eadem maneret conſtantemque angulum cum Ecliptica efficeret; Itaque tota Theoria Lunæ circa hæc verſaretur Elementa, Primò, ut ex tempore quod Luna conſumeret ut à quâdam ſtellâ diſcedens ad eamdem rediret, obtineatur duratio ejus menſis Periodici ſiderei ſicque motus ejus medius determinetur, unde facile obtinebitur via quam Luna dato tempore per eum motum medium emetiri poteſt, ita ut, datâ Epochâ, hoc eſt, dato loco Cœli in quo Luna aliquando obſervata fuiſſet, inde quem in locum migrare debuiſſet, dato tempore, per medii motus calculum inveniri poſſet.

Poſtea; locus Apogæi Lunæ, quod in Cœlis eidem puncto ſemper reſponderet, foret requirendus, tum excentricitas ejus orbitæ; ſic enim figura Ellipſeos quam Luna deſcribit obtineretur, & quia, citra Solis actionem, Luna moveretur ſecundùm Legem Keplerianam, hoc eſt, ita ut tempora quibus durantibus Luna moveretur, non quidem ſint proportionalia angulis è Terrâ ſpectatis, ſed areis deſcriptis, hinc fiet ut differentia loci Lunæ per motum medium computati ab ejus loco vero, obtineatur ex orbitæ Lunaris figurâ per Methodos notas, quæ differentia dicitur Æquatio Lunæ ſoluta, hoc eſt, æquatio à Sole non pendens, & intelligetur quibus in locis illa æquatio ſit adhibenda ex ſitu cognito Apogæi Lunæ, pendet enim omninò ea differentia ex ſitu Lunæ in Orbe ſuo reſpectu Apogæi ſui.

Tertiò. Quærendum foret obſervationibus, quibus in locis Luna

Eclipticam ſecet, cui nempe Cœli loco reſpondeant ejus Nodi, qui in hac hypotheſi fixi forent, & quonam angulo Orbita Lunæ foret inclinata ad Eclipticam, unde, quoniam ea inclinatio conſtans eſſet, diſtantiâ Lunæ à plano Eclipticæ per perpendiculum menſurata, foret ſemper proportionata diſtantiæ perpendiculari Lunæ à Linea nodorum, itaque ex cognito loco Lunæ & Nodorum cognoſci poterit quonam ſub Angulo Luna ab Ecliptica diſtare videatur ex ipſâ terrâ; & ad quodnam punctum Eclipticæ referri debeat.

Si itaque Lunæ motus citra actionem Solis conſiderentur tabulæ Aſtronomicæ Lunares hæc continere debebunt

1°. Epocham Loci Lunæ dato aliquo tempore; tum obſervationem loci Apogæi quod fixum maneret, & obſervationem loci Nodorum pariter fixorum.

Poſtea continere debebunt tabulam motus medii, tum tabulam Æquationis Lunæ ſecundum ejus diſtantiam mediam ab Apogæo; tabulam latitudinis Lunæ ſecundùm variam diſtantiam Lunæ à Nodo & denique tabulam reductionis Lunæ ad Eclipticam, ſecundùm eam diſtantiam Lunæ à Nodo.

Poſſunt his addi, tabula diſtantiarum Lunæ à Terra ſecundum ejus diſtantiam ab ejus Apogæo, tabula Diametrorum ejus apparentium ſecundùm eamdem diſtantiam ab Apogæo, & denique Tabula Parallaxeos quâ deprimitur Luna reſpectu ſpectatoris in ſuperficie telluris collocati, prout diverſa eſt ejus à Terra diſtantia, & prout altitudo ſupra horizontem eſt diverſa.

Talis foret tota de Lunâ Theoria, citra Solis actionem; ſed jam à longo tempore intellexerunt Aſtronomi Lunares motus à Lunæ ſitu reſpectu Solis plurimum turbari, unde varias correctiones, ſive Æquationes variis titulis concinnare ſunt conati.

Quam luculenter ex Gravitatis Theoriâ, hæc non modò explicentur ſed etiam accurato calculo determinentur demonſtrare aggreſſus eſt Newtonus, & eas omnes Æquationes quæ ex Sole pendent, calculis ex Theoriâ ſuâ deductis ita feliciter ſtatuit ut motus Lunæ ejuſve Æquationes ex calculo repertæ in minuto ſecundo aut propè cum iis quæ ab accuratioribus obſervatoribus dererminari potuerunt conſentiant, quod autoritatem integram illi Theoriæ conciliat. Calculi autem illi, nec faciles ſunt, nec compendioſi, nec ſemper commodè ad ſyntheticam formam reducendi; Quos Newtonus hâc ultimâ ratione Lectori ſuo ſiſtere potuit eos enucleatè tradit, cæteros omittit & quod ex iis obtinetur ſtrictim in Scholio indicat, & primo quales ſint illæ æquationes juxta Aſtronomorum obſervationes dicit & quibuſnam Legibus ſecundum ipſos

ipſos obſervatores ſint adſtrictæ, mox tradit quales æquationes ex ſuis calculis emergant & quænam ſint earum Leges.

Ipſum tam obſervationibus ante ipſum inſtitutis, quam obſervationibus Flamſtedianis uſum eſſe conſtat, imo & ipſum exinde Tabulas Lunares ſibi conſtruxiſſe liquet, ex quibus multa profert quarum pleraque in Rudolphinis, aut in Ludoviceis Tabulis facile non comperiuntur, ſed quæ maximè conſentiunt cum novis Ill. Caſſini Tabulis, ita ut quo perfectiùs Cœli motus dignoſcunt Aſtronomi eo propiùs ad Newtonianas Theorias accedere deprehendantur.

Ut itaque Solis actionis in Lunam & ejus orbitam habeatur ratio; Primum fiat abſtractio excentricitatis Orbitæ tam Telluris quam Lunæ, deprehenditur quod ex Solis actione menſis Periodicus Lunæ longior evadat & ejus Orbita ex circulari in Ellipſim mutetur cujus axes per Prop. XXVIII. ſunt determinati.

Secundò, tam ex eâ figurâ quam Orbita Lunæ induit quam ex acceleratione Lunæ per eam partem actionis Solis quæ ſecundum Tangentem orbitæ Lunaris dirigitur, naſcitur Variatio quam Tycho primus obſervavit, & maximam in Octantibus $40'\frac{1}{2}$ ſtatuit, illam Ill. Caſſinus facit $33'. 40''.$ in Elementis Aſtronomiæ, eam verò ipſe Newtonus in hypotheſi orbitas Telluris & Lunæ eſſe circulares $35'. 10''.$ calculavit Prop. XXIX.

Tertiò ex eâ Solis actione naſcitur motus Apogæi Lunaris in conſequentia, cujus motus fundamentum indicat Newtonus Prop. XLV. Lib. I.

Quartò inde deducitur motus medius nodorum Prop. XXXII. obſervationibus proximè congruus; Quinto denique Inclinationis Orbitæ Lunaris mutatio explicatur Prop. XXXIV. & XXXV.

Nunc verò adjungatur conſideratio Excentricitatis Orbitæ Telluris, eâ fit ut actio Solis major ſit cum terra eſt in Perihelio ſuo quam in Aphelio; Inde orientur correctiones variæ his omnibus Lunæ erroribus adjungendæ; Primùm cùm menſis Periodicus Lunæ per Actionem Solis longior evadat & motus ejus medius augeatur, id incrementum quando terra eſt in Perihelio majus eſt quam cum eſt in Aphelio, hinc ea tardatio inæqualiter in motum Lunæ diſtributa, efficit ut hoc nomine locus ejus per medium motum inventus ab ejus vero loco diſſentiat, hinc itaque notis noſtris ad initium Scholii ad calcem Prop. XXXV. adjecti quod ad totam Lunæ Theoriam pertinet incrementum medium motus medii ex actione Solis ortum aſſignamus, tum poſtea aperimus rationem quâ obtineri poteſt æquatio ceu correctio motus medii adhibenda propter inæqualem Terræ à Sole diſtantiam, quæ quidem æquatio continetur in eâ quam Ill. Caſſinus, titulo *Primæ Æquationis Solaris*, tradit.

Eâ-

Eâdem ratione, variationes motus Apogæi & motus nodorum ex ſitu diverſo Terræ ad aphelium aut Perihelium ſuum ex utriuſque motu medio dato in ſecundo Paragrapho derivare docetur.

His ex Excentricitate orbitæ Telluris deductis adjungatur conſideratio Excentricitatis Orbitæ Lunaris, aut ejus inclinationis ad Eclipticam inde novæ irregularitates prioribus adnaſcuntur.

Primò menſis Periodicus paulo major fit cum Linea Apſidum per Solem tranſit quam cum ipſi eſt perpendicularis, hinc correctio nova Æquationi motus medii quæ in primo Scholii Paragrapho exponitur eſt facienda, hanc novam Æquationem Ill. Caſſinus exhibet in Tabella cujus titulus eſt *ſecunda Æquatio Solaris* & tertio Paragrapho Scholii traditur.

Itidem ſi linea nodorum per Solem tranſeat paulo major erit Solis actio & correctio nova exinde naſcetur eidem motui medio, hanc quarto Paragrapho Scholii indicat Newtonus.

Præterea excentricitas ipſa orbitæ Lunaris ex diverſo ſitu Apogæi reſpectu Solis mutatur, nunc major nunc minor evadit idque etiam inæqualiter pro diſtantiâ telluris à Sole.

Rurſus ipſe motus Apogæi prout Apogæum diverſimodè ſitum eſt reſpectu Solis mutatur, hinc Æquatio Apogæi naſcitur eaque duplex, prima ſupponendo telluris à Sole diſtantiam conſtantem, altera verò pendet ex mutatione diſtantiæ telluris à Sole.

Hinc tandem cum orbitæ Lunaris forma, excentricitas & Apogæi poſitio mutetur, omninò mutantur correctiones illæ quæ deducebantur ex Lunæ excentricitate mediocri, quæ æquationem ſolutam conſtituebant; ultimo autem Scholii Paragrapho Newtonus docet quâ ratione novæ illæ correctiones ſint inſtituendæ: Omnia verò in hoc Scholio ſine demonſtratione tradit nec indicato ſuorum calculorum artificio, ideoque noſtri putavimus officii, eam indagare viam cui Newtonus in iis reperiendis inſiſtere debuit, labore quidem non parvo, ſucceſſu qualicumque, utinam Lectoribus non ingrato.

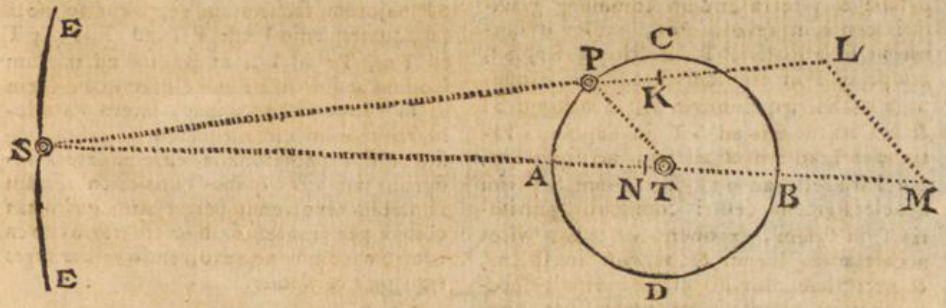
PHI-

# PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

## *LIBRI TERTII CONTINUATIO.*

### PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

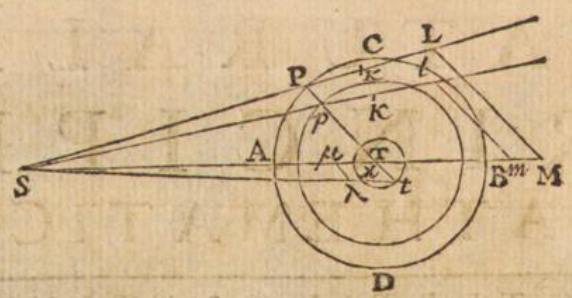
*Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.*




Designet *S* solem, *T* terram, *P* lunam, *CADB* orbem lunæ. In *SP* capiatur *SK* æqualis *ST*; sitque *SL* ad *SK* in duplicatâ ratione *SK* ad *SP*, & ipsi *PT* agatur parallela *LM*, & si gravitas acceleratrix terræ in solem exponatur per

DE MUNDI SYSTEMATE.

distantiam *ST* vel *SK*, erit *SL* gravitas acceleratrix lunæ in solem. Ea componitur ex partibus *SM*, *LM*, quarum *LM* & ipsius *SM* pars *TM* perturbat motum lunæ, ut in libri primi prop. LXVI. & ejus corollariis expositum est. (q) Quâtenus terra & luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quam motuum referre licet ad lunam, & summas virium per lineas ipsis analo-

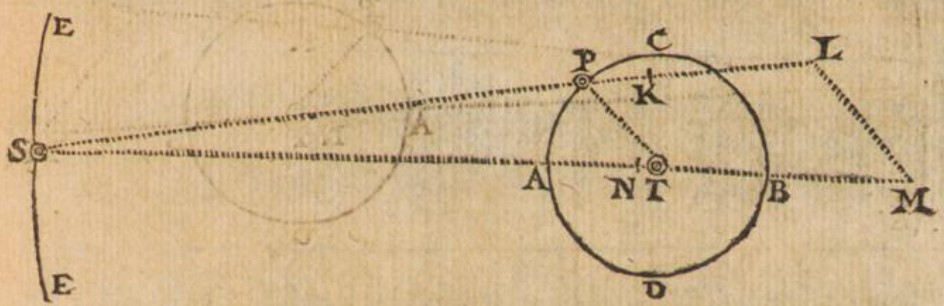



Sol.

(q) * *Quâtenus Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus consimilibus;* Designet ut prius S solem, sed sit T centrum commune gravitatis terræ & lunæ; sit itaque p luna & t terra circum commune gravitatis centrum revolventes, ita ut distantia p t sit æqualis P T, ductisque Sp, St, sumptisque in eis lineis productis si opus sit Sk, Sκ æqualibus ST, secatisque Sl & Sλ ita ut sint ad ST in duplicatâ ratione ST ad Sp & ad St, actisque lm, λμ Parallelis ad p t, si exponat ST vim acceleratricem centri communis gravitatis T in solem, exponent Sl & Sλ vires accelerantes lunam & terram in solem, & perturbabuntur utriusque motus respectu centri communis gravitatis per vires lm & λμ, Tm & Tμ; Quæ vires consimiles sunt viribus LM & TM quibus lunam solam perturbari dictum fuit in suppositione terram esse immotam; nam ob maximam distantiam puncti S, lineæ PL, pl, TM, tλ pro parallelis sunt habendæ; ideoque figuræ TPLM, Tplm, Ttλμ pro Parallelogrammis sunt habendæ, quæ angulum æqualem in T habent, præterea latera PT, TM; pT, Tm; Tt, Tμ, eamdem habent inter se rationem, demonstratur enim in notâ 500. lib. 1. (quæ ad majorem facilitatem repetitur in notâ (u) subsequente) esse PT ad TM, pT ad Tm, Tt ad Tμ ut Radius ad triplum Cosinus anguli ATP qui Cosinus cum idem sit in tribus hisce casibus, latera Parallelogrammorum circa æqualem angulum posita erunt proportionalia, ea verò latera designant tam vires quibus Luna circa terram immotam revolvendo perturbatur quam eas quibus perturbarentur luna & terrâ circa centrum commune revolvendo, illæ *Vires ergo sunt consimiles.*

*Sed summas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam.* Quippe in observationibus motus Lunæ respectu terræ quasi hæc immota esset consideratur, tunc autem summæ virium acceleratricium, ex quibus velocitates respectivæ nascuntur ipsi tribui debent, *& summas virium per li-*

analogas $TM$ & $ML$ designare. Vis $ML$ in (r) mediocri suâ quantitate est ad vim centripetam, quâ luna in orbe suo circa terram quiescentem ad distantiam $PT$ revolvi posset, in duplicatâ ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa solem (per corol. 17. prop. LXVI. lib. 1.) hoc est, LIBER TERTIUS. PROP. XXV. PROB. VI.



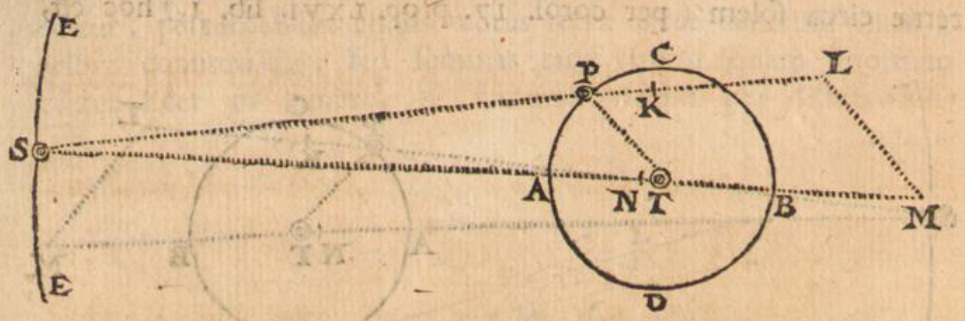

in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propositione quartâ quod, si terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium terræ

*mear TM & ML ipsis analogas designare.* Vires enim acceleratrices p T & T t simul junctæ æquales sunt soli vi PT & similem effectum edunt, admovent utique corpora p & t, secundum directionem p T t, si ergo vis acceleratrix P T summæ utriusque æqualis admoveat corpus P versus immotum T, planè idem erit effectus ex corpore t vel T spectatus: Vires MT, T $\mu$ divellunt corpora à se mutuo secundum directionem ST, idem verò præstat vis T M quæ summæ ambarum est æqualis, nam est pT : T t :: m T : T $\mu$ :: ergo pT : pT + Tt :: mT : mT + T $\mu$ & altermando p T : m T :: (PT : MT) :: p T + T t : m T + T $\mu$. Sed est p T + T t = P T ergo etiam m T + T $\mu$ = M T.

(r) * *Vis ML in mediocri suâ quantitate* &c. Ob magnam Solis distantiam figurâ P T M L est parallelogrammum ideoque M L est proximè æqualis lineæ P T, ergo vis M L erit ad vim quâ Sol agit in punctum T, ut P T ad S K sive S T, sed vires centrales qualescumque sunt inter se directè ut Radii circulorum qui per eas describuntur & inverse ut quadrata temporum Periodicorum, ergo ea vis quâ sol agit in punctum T, est ad vim quâ Lunâ in orbe suo retinetur (posito illam revolvi circa terram quiescentem) ut S T ad P T directè & ut quadratum temporis Periodici Lunæ circa terram ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem; Ergo compositis rationibus, vis M L est ad vim quâ Lunâ in orbe suo retinetur ut quadratum temporis Periodici Lunæ ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem hoc est in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, 43′ ad 365 dies, 6 hor. 9′ quæ est duratio anni siderei. 1092

DE MUNDI SYSTEMATE.

terræ quamproximè. Et (f) vis quâ luna in orbem circa terram quiescentem, ad distantiam *PT* semidiametrorum terrestrium 60, revolvi posset, est ad vim, quâ eodem tempore ad distantiam




semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & (t) hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad $60 \times 60$ quamproximè. Ideoque vis mediocris *ML* est ad vim gravitatis in superficie terræ,

109. (f) * *Et vis quâ Luna ad distantiam* $60\frac{1}{2}$ *semid. revolvi posset est ad vim quâ ad distantiam* 60 *semid. revolvi posset eodem tempore ut* 60 $\frac{1}{2}$ *ad* 60. Vires enim centrales sunt ut distantiæ directè & tempora Periodica inversè (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) cum ergo hîc tempora Periodica æqualia ponantur, Vires Centrales sunt ut distantiæ. Newtonus autem loco distantiæ $60\frac{1}{2}$ semid. terræ quæ revera intercedit inter terram & lunam, assumit distantiam 60 semid. tantùm, quia in præcedente ratiocinio vim qua Lunâ in orbe suo retinetur æstimaverat quasi terra immota esset & Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. à terrâ tempore 27. dier. 7 hor. 43. min. circa terram revolveretur; Verum cum terra revera circa centrum gravitatis commune Lunæ & Terræ revolvatur, ea vis quâ Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. tempore illo revolvi apparet, minor est ea quâ ad eamdem distantiam eodemque tempore circa terram immotam revolveretur, & est æqualis illi quâ, eodem quidem tempore Periodico, sed ad distantiam 60 semid. circa terram immotam revolveretur, ut constat ex Prop. LX. Lib. I. Eâ enim Propositione statuitur quod si duo corpora revolvantur circa centrum commune gravitatis, axis Ellipseos quam unum circa alterum motum describit est ad axem Ellipseos quam circa illud quiescens eodem tempore Periodico & eâdem vi describere posset, ut summa corporum amborum ad primam duarum medieproportionalium inter hanc summam & corpus alterum, quare cum Telluris corpus sit ad corpus Lunæ ut 42 ad 1, & prima duarum medieproportionalium inter 43 & 42 sit $42\frac{2}{3}$ sitque 43 ad $42\frac{2}{3}$ ut $60\frac{1}{2}$ ad 60 proximè, Vis quâ Luna in orbe suo retinetur, ea est quâ ad distantiam 60 semid. terræ eodem ipso tempore Periodico quod observatur circa terram immotam revolvi posset.

(t) * *Et hæc vis &c.* Per hujusce Libri Prop. IV.

terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, seu 1 ad 638092,6. Inde verò & ex proportione linearum $TM$, $ML$, datur etiam vis $TM$ (u): & hæ sunt vires solis quibus lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*



## PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

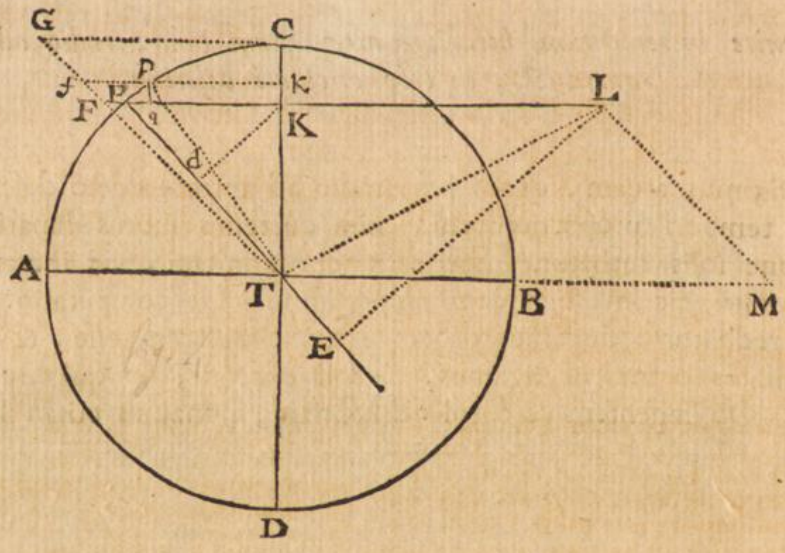
*Invenire incrementum horarium areæ quam luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari describit.*

Diximus aream, quam luna radio ad terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quâtenus motus lunaris ab actione solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, eâ solâ exceptâ, de quâ hic agitur. Ob ingentem verò solis distantiam, ponamus etiam lineas $SP$

(u) * *Datur etiam vis TM.* Ob parallelas PT, LM & ingentem puncti S distantiam, PL & TM sunt parallelæ, & figura PTLM est parallelogrammum, ideoque TM sumitur ut proxime æqualis PL; Est autem PL triplum Cosinus anguli ATP existente TP sive LM radio; Nam quia SK est æqualis ST, si centro S radio ST describatur arcus TK, erunt ST & SK in eum arcum perpendiculares, sed is arcus proxime coincidit cum rectâ TC perpendiculari lineæ ST in T (ob distantiam centri S) ergo punctum K in ea recta TC occurret & SK sive PK illi rectæ TC erit perpendicularis, ideoque PK erit Cosinus Anguli ATP; sed, per constructionem, est $SP^2$ ad $SK^2 - SP^2$ (sive quia $SK = SP + PK$) ad $2SP \times PK + PK^2$ ut SK (sive SP + SK) ad SL − SK (sive KL) ideoque est $KL = 2PK + \frac{3PK^2}{SP} + \frac{PK^3}{SP^2}$, sed omittendi sunt ultimi termini propter ingentem divisorem SP, ergo est $KL = 2PK$, & PK + KL sive $PL = 3PK$. Q. E. D. 109.

DE MUNDI SYSTEMATE.

$SP$, $ST$ ſibi invicem parallelas eſſe. (x) Hoc pacto vis $LM$ reducetur ſemper ad mediocrem ſuam quantitatem $TP$, ut & vis $TM$ ad mediocrem ſuam quantitatem $3PK$. Hæ vires (per legum corol. 2.) componunt vim $TL$; & hæc vis, ſi in radium $TP$ demittatur perpendiculum $LE$, reſolvitur in vires $TE$, $EL$, quarum $TE$, agendo ſemper ſecundum radium $TP$, nec accelerat nec retardat deſcriptionem areæ $TPC$ radio illo $TP$




factam; & $EL$ agendo ſecundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipſam, quantum accelerat vel retardat lunam. Acceleratio illa lunæ, in tranſitu ipſius à quadraturâ $C$ ad conjunctionem $A$, ſingulis temporis momentis facta, eſt ut (y) ipſa vis accelerans $EL$, (z) hoc eſt, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus

109. (x) * *Hoc pacto.* Vide notam (u) præcedentem.

(y) * *Ut ipſa vis accelerans* (13. lib. 1.).

(z) * *Hoc eſt ut* $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Nam Triangula PTK, PLE ſunt ſimilia propter angulum communem in P & angulos rectos K & E, ergo eſt TP : TK :: PL : $EL = \frac{PL \times TK}{TP}$, (ſed per notam u) eſt $PL = 3PK$ ergo eſt $EL = \frac{3PK \times TK}{TP}$,

tempus per motum medium lunarem, (a) vel (quod eodem ferè recidit) per angulum $CTP$, vel etiam per arcum $CP$. Ad $CT$ erigatur normalis $CG$ ipſi $CT$ æqualis. Et diviſo arcu quadrantali $AC$ in particulas innumeras æquales $Pp$, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi poſſint, ductâque $pk$ perpendiculari ad $CT$, jungatur $TG$ ipſis $KP$, $kp$ productis occurrens in $F$ & $f$; & erit $FK$ æqualis $TK$, & (b) $Kk$ erit ad $PK$ ut $Pp$ ad $Tp$, (c) hoc eſt in datâ ratione, (d) ideoque $FK \times Kk$ ſeu area $FKkf$, erit ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id eſt, ut $EL$; & compoſitè, area tota $GCKF$ ut ſumma omnium virium $EL$ tempore toto $CP$ impreſſarum in lunam, (e) atque ideo etiam ut velocitas hâc ſummâ genita, id eſt, ut acceleratio deſcriptionis areæ $CTP$, ſeu incrementum momenti. (f) Vis quâ luna circa terram quieſcentem ad diſtantiam $TP$, tempore

LIBER TERTIUS PROP. XXVI. PROB. VII.

110 (a) * *Quod eodem ferè recidit.* In hypotheſi orbem Lunarem eſſe circularem, angulus C T P vel arcus C P forent proportionales tempori, ſemotâ conſideratione perturbationis motus Lunæ ex Solis actione productæ; hæc vero perturbatio reſpectu ipſius motus Lunæ eſt exigua, itaque anguli C T P vel arcus C P tempori fere proportionales cenſeri poſſunt.

(b) * *Kk erit ad PK ut Pp ad Tp* ſive T P; Ex notiſſimâ circuli proprietate fluit hæc proportio, nam ſi ex puncto p ducatur lineola p q perpendicularis ad P K, ea erit parallela & æqualis lineæ K k, formabiturque Triangulum fluxionale P p q ſimile Triangulo P K T, nam cum anguli p P K & K P T rectum ſimul efficiant, & pariter anguli K P T & P T K, æquales ſunt anguli p P K & P T K unde eſt p q ſive K k ad P K ut P p ad T P.

(c) * *Hoc eſt in datâ ratione.* Ratio enim P p ad T p eſt data, quia ſingulæ partes P p ſumuntur æquales, ſunt itaque ſingulæ in eâdem ratione ad radium TP.

(d) * *Ideoque F K × K k ſeu area F K k f ut* $\frac{3PK \times TK}{TP}$; Cum ratio K k ad P K ſit data, data etiam erit ratio K k ad 3 P K, & hæc ratio manebit etiamnum data ſi conſequens 3 P K per quantitatem conſtantem T P dividatur, erit ergo data ratio K k ad $\frac{3PK}{TP}$, denique non mutabitur hæc ratio ſi ambo termini per quantitates æquales F K & T K multiplicentur, ergo ratio K k × F K (ſeu areæ F K k f) ad $\frac{3PK \times TK}{TP}$ eſt etiam data, hoc eſt, eſt area F K k f ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. 119.

(e) * *Atque ideo etiam ut velocitas* (13. lib. 1.).

(f) * *Vis quâ Lunâ circa terram ad diſtantiam T P tempore ſuo Periodico C A D B revolvi poſſet efficeret ut corpus libere cadendo tempore C T deſcriberet longitudinem* $\frac{1}{2}$ *C T* &c. Si corpus gyretur in circulo per vim ad ejus centrum tendentem, primum uniformiter girabitur; tum, quadratum arcûs quovis tempore deſcripti erit æquale circuli Diametro ducto in altitudinem quam corpus libere cadendo tempore eodem percurreret ſi uniformiter acce-

DE MUNDI SYSTEMATE.

re ſuo periodico *CADB* dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi poſſet, efficeret ut corpus, tempore *CT* cadendo, deſcriberet longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem ſimul acquireret æqualem velocitati, quâ luna in orbe ſuo movetur. Patet hoc per corol. 9. prop. IV. lib. I. Cum autem perpendiculum *Kd* in *TP* demiſſum (g) ſit ipſius *EL* pars tertia, & (h) ipſius *TP* ſeu *ML* in octantibus pars dimidia, vis *EL* in octantibus, (i) ubi maxima

110 acceleraretur per vim centripetam quâ circulus deſcribitur.

Nam ſi ſumatur arcus quam minimus altitudo quæ per vim centralem liberè percurreretur dum ille arcus quamminimus deſcriberetur, foret ejus arcus minimi ſinus verſus; ſed ex natura circuli, factum Diametri ducti in ſinum verſum arcûs, eſt æquale quadrato chordæ illius arcus, ſive quadrato arcus ipſius ſi adeo ſit exiguus ut pro ſuâ chordâ ſumi poſſit.

Spatia verò liberè cadendo per vim uniformiter accelerantem deſcripta, ſunt ut quadrata temporum, arcus verò interea percurſi ſunt ut tempora, quia corpus uniformi celeritate giratur, ergo ſpatium minimum per vim centripetam liberè deſcriptum eſt ad aliud quodvis ſpatium per eamdem vim centrifugam liberè deſcriptum (ideoque etiam facta horum ſpatiorum per Diametrum circuli) ſunt ut quadrata arcuum correſpondentibus temporibus deſcriptorum: ſed prius factum eſt æquale quadrato arcus correſpondentis, ergo & alterum factum erit æquale quadrato arcus correſpondentis, hoc eſt altitudo quæcumque cadendo liberè deſcripta in Diametrum ducta efficit factum æquale quadrato arcus eodem tempore revolvendo uniformiter percurſi.

Quod cum ita ſit, cadat libere corpus per $\frac{1}{2}CT$ h. e. per radii ſemiſſem, ducaturque hæc longitudo per Diametrum ſeu $2CT$ factum $CT^2$ ſive quadratum ipſius radii æquale erit quadrato arcus eodem tempore deſcripti, erit ergo is arcus æqualis radio CT, ſed velocitas acquiſita liberè cadendo per Radii ſemiſſem $\frac{1}{2}CT$ talis eſt ut corpus movendo uniformiter eâ celeritate acquiſitâ duplum ejus altitudinis Radium nempe integrum CT eodem tempore deſcribere poſſet, quæ eſt ipſa longitudo arcus quam corpus uniformiter revolvens deſcripſiſſet eodem tempore, ergo velocitas acquiſita lapſu per $\frac{1}{2}$ CT ea eſt quâ corpus in orbe ſuo revolvitur.

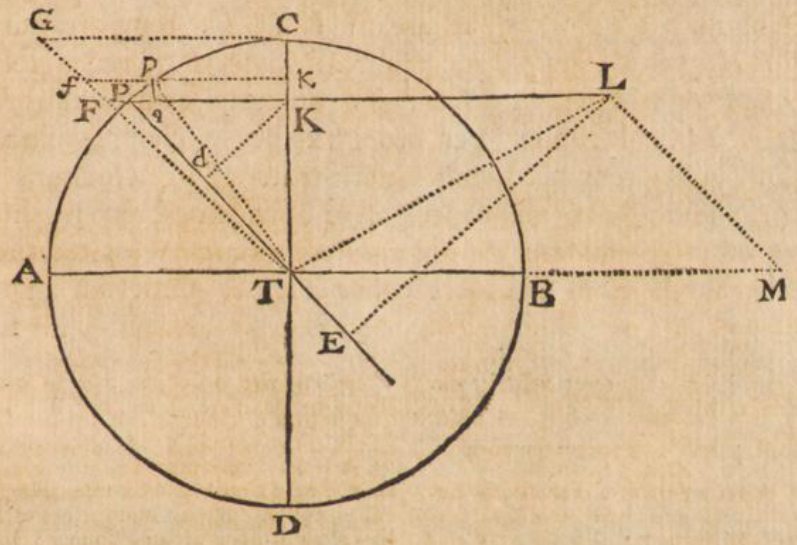
Ea denique longitudo $\frac{1}{2}$ CT percurretur tempore quod erit ad totum tempus Periodicum ut CT ad circumferentiam CADB, nam tempora ſunt ut arcus uniformiter deſcripti, ſed tempus quo corpus per $\frac{1}{2}$ CT labitur eſt æquale tempori quo arcus æqualis CT percurritur ergo eſt illud tempus ad totum tempus Periodicum ut CT ad totam peripheriam CADB.

(g) * *Kd ſit ipſius EL pars tertia.* Ob Triangula ſimilia PLE, PKd eſt EL ad Kd ut PL ad PK, ſed (per notam (u)) eſt PK tertia pars lineæ PL, eſt itaque pariter Kd tertia pars lineæ EL.

(h) * *Kd ipſius TP ſeu ML in octantibus pars dimidia*; Nam in octantibus anguli KTd, PKd, KPd ſunt omnes 45 grad. eſt itaque Td = Kd = dP eſt ergo Td ſive Kd ipſius TP pars dimidia in octantibus.

111 (i) * *Ubi maxima eſt.* Ut inveniatur punctum in quod vis EL ſive $\frac{3PK \times TK}{TP}$ eſt maxima, ſit TP = *r*, TK = *x*, PK = *y* erit EL = $\frac{3yx}{r}$ cujus fluxio eſt $\frac{3ydx+3xdy}{r}$, maxima eſt ergo EL ubi hæc fluxio æquatur nihilo, ideoque ubi $ydx = -xdy$, ſed cum in circulo ſit

maxima est, superabit vim $ML$ in (k) ratione 3 ad 2, ideoque erit ad vim illam, quâ luna tempore suo periodico circa terram quiescentem revolvi posset, (l) ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROB. VII.




seu 11915, & tempore $CT$ velocitatem generare deberet quæ (m) esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris, tempore autem $CPA$ velocitatem majorem generaret in ratione $CA$ ad $CT$ seu $TP$. Expo-

fit $y = \sqrt{rr - xx}$, & $dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ unde substitutis valoribus æquatio $ydx = -xdy$ in hanc mutatur $dx\sqrt{rr - xx} = \frac{xx\,dx}{\sqrt{rr - xx}}$ & reductis terminis fit $rr = 2xx$, unde est $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ & $dy = -dx$, & $y = x$; Ideoque in Triangulo PTK angulus T debet esse 45 grad. & P debet esse in octante Circuli.

(k) * *In ratione* 3 *ad* 2. Est EL ad Kd ut 3 ad 1 (not. g) est Kd ad TP sive ML ut 1 ad 2 (not. h) ergo EL ad ML ut 3 ad 2, ex æquo.

(l) * *Ut* 100 *ad* $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$. Vis EL est ad vim ML ut 3 ad 2; vis ML est ad vim quâ Lunâ in orbe suo circa terram quiescentem revolvi posset tempore suo Periodico ut 1000 ad 178725 (Prop. XXV. hujusce) sive ut 100 ad 17872 $\frac{1}{2}$; Ergo compositis rationibus vis EL est ad eam vim quâ Luna revolvitur ut 100×3 ad 2×17872 $\frac{1}{2}$ sive ut 100 ad $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$ hoc est ad 11915, ideoque vis EL est $\frac{100}{11915}$ vis Lunæ. III.

(m) *Quæ esset pars* $\frac{100}{11915}$ *velocitatis Lunaris.* Patet ex notâ (f) vim quâ Lunâ revolvitur efficere ut corpus ab eâ vi uniformiter acceleratum cadendo tempore

DE MUNDI SYSTEMATE.

Exponatur vis maxima $EL$ in octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo (n) $\frac{1}{2} TP \times Pp$ æqualem. Et (o) velocitas, quam vis maxima tempore quovis $CP$ generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor $EL$ eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto $CPA$, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CA$ & triangulum $TCG$, sive ut arcus quadrantalis $CA$ & radius $TP$. Ideoque (per prop. IX. lib. v. elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunæ. (p) Huic lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, (q) addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, sum-

XII. re CT eam ipsam acquireret velocitatem quâ Luna revolvitur, vis ergo quæ vis Lunaris est pars $\frac{100}{11915}$ eodem tempore generaret velocitatem quæ velocitatis Lunaris foret pars $\frac{100}{11915}$.

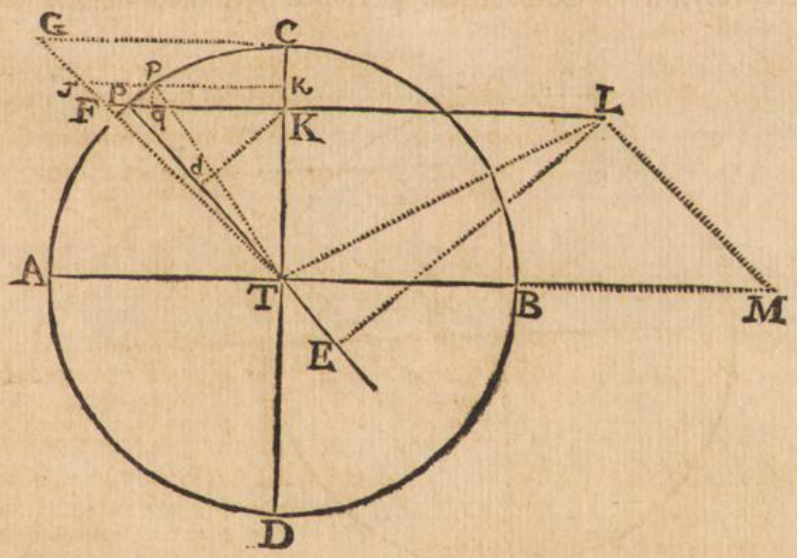
(n) * *Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream FK × Kk rectangulo* $\frac{1}{2} TP \times Pp$ *æqualem*, vis EL semper est proportionalis areæ FK × Kk ex demonstratis, sed in octantibus ubi ea vis est maxima est FK sive $TK = \frac{TP}{\sqrt{2}}$ & $Kk = \frac{Pp}{\sqrt{2}}$ ergo $FK \times Kk = \frac{TP \times Pp}{2}$.

(o) * *Et velocitas quam vis maxima tempore quovis CP generat ad velocitatem quam generant* vires veræ EL *eodem tempore agentes ut* $\frac{1}{2} TP \times CP$ *ad aream KCGF*; Velocitates genitæ sunt ut vires quibus generantur ductæ in tempus per quod generantur, cum itaque supponatur omnes arcus Pp temporibus quamproxime æqualibus describi, si ii arcus Pp æquales inter se sumantur (vid not. a præced.) velocitates genitæ dum arcus Pp percurruntur sunt ut ipsæ vires sive ut areæ FKkf, ideoque summa velocitatum genitarum tempore CP, sive dum arcus CP describitur, est ut tota area KCGF, sed vis in octantibus sive velocitas quæ in octante generatur durante tempore Pp, est $\frac{TP \times Pp}{2}$, quia eo in loco is est valor areæ FKkf, qui valor est ipse valor areæ PTp, ergo si singulis momentis Pp similis velocitas generaretur, summa velocitatum genitarum tempore CP foret area CTP sive $\frac{1}{2} TP \times CP$, ergo velocitas quam vis maxima generat est ad eam quam vires veræ generant, tempore utrinque eodem CP, ut $\frac{1}{2} TP \times CP$ ad KCGF.

(p) *Huic Lunæ velocitati quæ areæ momento mediocri est analoga.* Areæ momentum mediocre illud est quod Luna dato exiguo tempore verreret si uniformi velocitate toto suo tempore ferretur, cumque Luna per vim EL certis in locis plus minusve acceleretur, areæ momentum, seu ea areæ particula quæ dato exiguo tempore describitur, nunc major nunc minor est; sed cum orbis Lunaris circularis censeatur, areæ momenta sunt ut arcus qui sunt eorum bases, cumque iisdem temporibus illa momenta illique arcus describantur, sunt ut velocitates quibus describuntur. Hinc pro arearum momentis ipsæ velocitatum rationes assumuntur.

(q) * *Addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius.* Hic assumit Newtonus velocitatem mediocrem eam nempe quâ orbita Lunaris tempore suo Periodi-

ſumma 11915+50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in ſyzygiâ *A*, ac differentia 11915−50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in quadraturis. Igitur areæ tempo- LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROBL. VII.



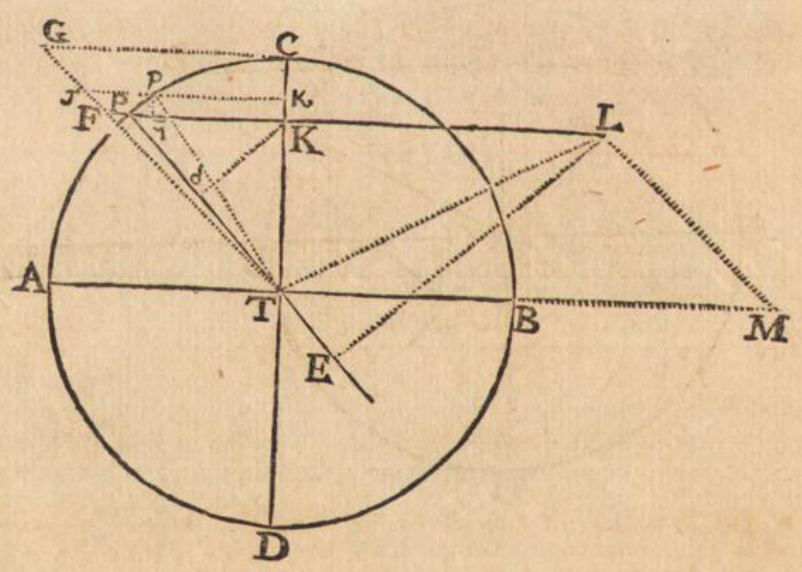

ribus æqualibus in ſyzygiis & quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut

eo uniformiter deſcriberetur eſſe mediam proportionalem Arithmeticè inter velocitatem minimam & maximam. Hanc tamen propoſitionem quaſi evidentem aſſumere non licuit, ſi enim v. gr. diutius durarent parvæ velocitates quam magnæ, velocitas mediocris propior foret parvis velocitatibus quam magnis, hinc exponenda eſt prius ratio quâ creſcunt illæ velocitates, ut poſſimus aſſerere mediocrem velocitatem Lunæ eſſe mediam Arithmeticè inter extremas. Quod quidem efficere conabimur Problemate huic propoſitioni mox ſubjungendo. 1114

DE MUNDI SYSTEMATE.

ut trapezium *FKCG* ad triangulum *TCG* vel (r) quod perinde eſt, ut quadratum ſinus *PK* ad quadratum radii *TP*, id (ſ) eſt, ut *Pd* ad *TP*) & ſumma exhibebit momentum areæ, ubi luna eſt in loco quovis intermedio *P*.

Hæc omnia ita ſe habent, ex hypotheſi quod ſol & terra quieſcunt, & luna tempore ſynodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus ſynodica lunaris verè ſit



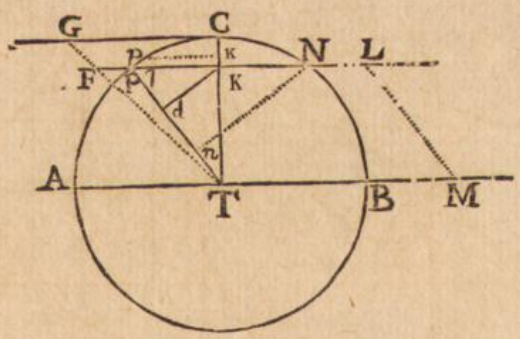

dierum 29. hor. 12. & min. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id eſt, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadraturâ lunæ erit ad ejus momentum in ſyzygiâ ut 11023−50 ad 11023+50, ſeu 10973 ad 11073,

112. (r) * *Vel quod perinde eſt ut quadratum ſinus PK ad quadratum radii TP* area TCG eſt aream TKF ut quad. TC ad quad. TK & dividendo TCG−TKF (ſive FKCG) ad TCG ut $TC^2-TK^2$ (ſive $PK^2$) ad $TC^2$.

(ſ) * *Id eſt ut Pd ad TP* eſt Pd ad PK ut PK ad TP propter ſimilitudinem Triangulorum PKd, PTK, ergo per compoſitionem rationum eſt Pd ad TP ut $PK^2$ ad $TP^2$.

11073, & ad ejus momentum, ubi luna in alio quovis loco intermedio $P$ verſatur, ut 10973 ad $10973 + Pd$, (t) exiſtente videlicet $TP$ æquali 100.

Area igitur, quam luna radio ad terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proximè ut ſumma numeri 219,46 & ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturâ proximâ, in (u) circulo cujus radius eſt unitas. Hæc ita ſe habent ubi variatio in octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin (x) variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui ſinus ille verſus in eâdem ratione.

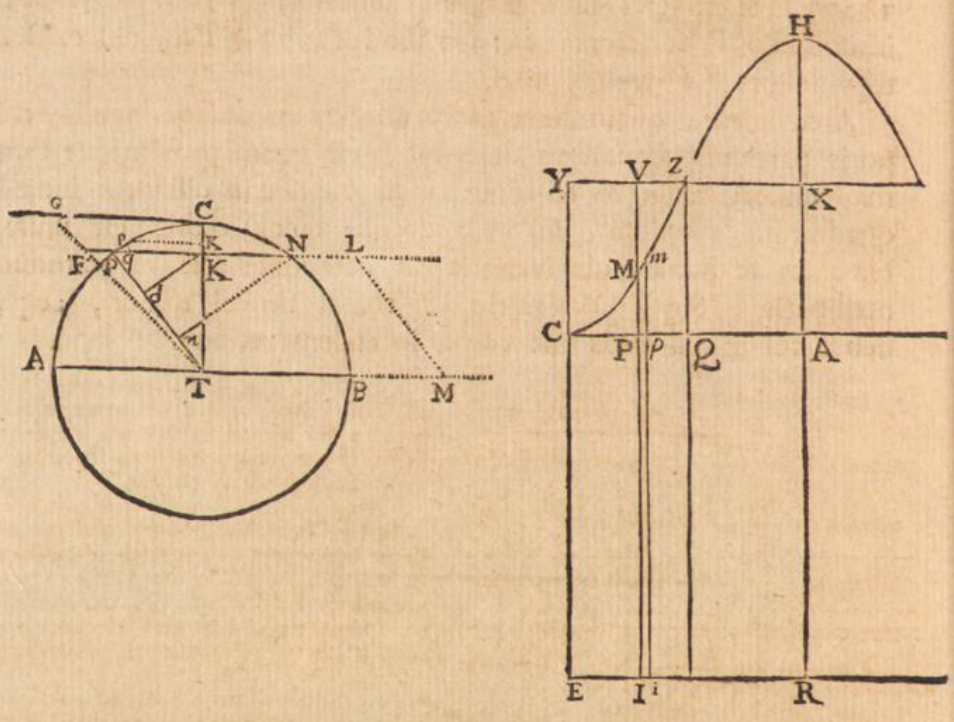



(t) * *Exiſtente videlicet TP æquali* 100, ſequitur ex præcedentibus quod illud quod debet addi ad momentum minimum 10973 eſt ad 100 ut eſt Pd ad PT, ſi ergo PT ſit æqualis numero 100 erit Pd æqualis illi numero qui debet addi ad momenti minimi valorem.

(u) * *Ut ſumma numeri 219.46 & ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ in circulo cujus radius eſt unitas;* Areæ momentum in puncto P eſt ut $10973 + Pd$, eſt autem Pd dimidium ſinus verſus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, nam dicatur N punctum in quo linea PKL ſecat circulum erit arcus PCN duplus diſtantiæ PC à quadraturâ proximâ ductaque Nn perpendiculari in radium PT erit Pn ſinus verſus duplicatæ illius diſtantiæ, ſed cum Nn & Kd ſint perpendiculares in eamdem lineam ideoque Parallelæ, & ſit punctum K medium lineæ PN erit etiam d medium lineæ Pn, eritque $Pd = \frac{1}{2} Pn$, ſive erit Pd dimidium ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, eſt ergo momentum areæ ut ſumma numeri $10973 + \frac{1}{2} Pn$ exiſtente Radio 100, ſeu ut hujus quantitatis duplum $21946 + Pn$ ideoque ſi Radius ſit 1 ut $219{,}46 + Pn$. 111

(x) * 112. *Sin variatio ibi major ſit* &c. Manente eâdem Hypotheſi, Lunæ orbem eſſe circularem & Lunam aliam non pati irregularitatem præter eam quæ ab eâ parte actionis Solis naſcitur quæ per lineam EL deſignatur, variatio Lunæ erit arcus interceptus inter locum in quo Luna eſſe deberet ſi velocitate ſuâ mediocri moveretur tempore dato CP, & locum in quo reverâ eſt tunc temporis, cujus quidem variationis conditiones ex Problemate ſequenti exponere facile erit.

DE MUNDI SYSTEMATE.




## PROBLEMA.

112 Ex hypothesibus & demonstratis in Propositione hâc XXVI. exponere rationem secundum quam describuntur areæ CTPA momenta.

Designet recta CA (in 2da. figurâ) tempus quo arcus CA describitur, erigantur per singula puncta P rectæ PM perpendiculares in CA & proportionales velocitati tempore CP per vim EL genitæ; Per ea quæ in hâc Propositione demonstrantur independenter ab his, illæ velocitates in punctis P arcus CP sunt ut Trapezia FKCG correspondentia, illa vero Trapezia sunt ut sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, sive ut sinus versus arcus dupli CP, (ut mox in notis explicabitur) fiant ergo illæ perpendiculares PM æquales sinui verso arcus 2CP, ultima perpendicularis AH erit æqualis ipsi Diametro AB, quia est sinus versus dupli quadrantis; ducatur curva CMH per omnium perpendicularium vertices transiens, ducatur etiam AR perpendicularis ad CA, sitque AH ad AR ut velocitas ultimò acquisita in A ad velocitatem uniformem quâ Lunâ ferretur si vis EL, omninò non ageret, absolvaturque Parallelogrammum ARKC, productâque lineâ MP usque ad lineam RE tota linea IM erit ut velocitas Lunæ tempore CP, & ducta linea quamproxima mpi erit area MPImpi ut area descripta tempore Pp, & tota area RECMH repræsentabit totam aream tempore CA descriptam; Denique secetur AH in X & ducatur XY parallela CA quæ secet curvam CMH in Z & ex puncto Z ducatur ordinata ZQ. Liquet quod si punctum X ita sit assumptum ut Parallelogrammum XREY sit æquale mixtilineo HARECMH, erit XR velocitas Lunæ mediocris, & CQ tempus quo Luna à quadraturâ profecta ad

ad eam velocitatem mediocrem perveniet, quod quidem ex ipsâ constructione liquet. Jam autem dico quod illud punctum X incidet in medio lineæ AH, ita ut hæc velocitas mediocris XR sit media proportionalis Arithmetica inter RA & RH & præterea quod punctum Q cadet in medio inter A & C ita ut ea celeritas mediocris in octante obtineatur, (saltem si medium arcus medio temporis respondeat quod proximè verum est juxta notam 110 præcedentem).

Ut obtineatur itaque area HAPCMH, dicatur $v$ arcus CP & dicatur $mv$ recta CP quæ arcui CP est proportionalis (saltem quam proximè per not. 110.) & Pp sit $m\,dv$, sinus rectus PK arcus CP dicatur $y$, sinus verò totalis sit $r$. Ex notis Trigonometriæ Principiis sinus versus dupli arcus CP est $\frac{2yy}{r}$, ergo ordinata PM ei æqualis est $\frac{2yy}{r}$, & elementum areæ sive MPpm est $\frac{2yy}{r}\,m\,dv$, sed ex notâ proprietate circuli est $\sqrt{rr-yy}$ ad $r$ ut $dy$ ad $dv$ est ergo $dv=\frac{r\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ itaque areæ elementum evadit $\frac{2\,m\,yy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ conferatur illud elementum cum elemento areæ circuli radio TC descripti dicatur CK, $z$, $Kk$, $dz$, Elementum PpkK est $y\,dz$, sed est TK ($\sqrt{rr-yy}$) ad PK ($y$) ut Pq ($dy$) ad $qp$ ($dz$) hinc $dz=\frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ & elementum areæ circuli fit $\frac{yy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ quod Elementum est ad Elementum correspondens areæ HAPCMH ut 1 ad $2m$, hinc tota hæc area est ad aream quadrantis TCPA ut $2m$ ad 1, sive si totus arcus CPA dicatur $c$ & recta CPA dicatur $mc$, area HAPCMH erit $mrc$. Ergo si linea AR quæ designat velocitatem uniformem Lunæ cum nulla foret vis EL, dicatur $l$, area AREC erit $mlc$ & tota area HARECH erit $mlc+mrc$, sive æqualis Parallelogrammo cujus unum latus foret $mc$ alterum $l+r$, sed RE ex constructione est æqualis $mc$, ergo si sumatur $RX=l+r$ Parallelogrammum XREZ erit æquale mixtilineo HARECMH, ideoque erit RX sive $l+r$ velocitas Lunæ mediocris, sed erat $AH=2r$, ideoque $RH=l+2r$ est ergo RX ($l+r$) media proportionalis Arithmeticè inter RA ($l$) & RH ($l+2r$), ergo velocitas mediocris Lunæ est media proportionalis Arithmeticè inter minimam velocitatem Lunæ ($l$) & maximam ($l+2r$). 112

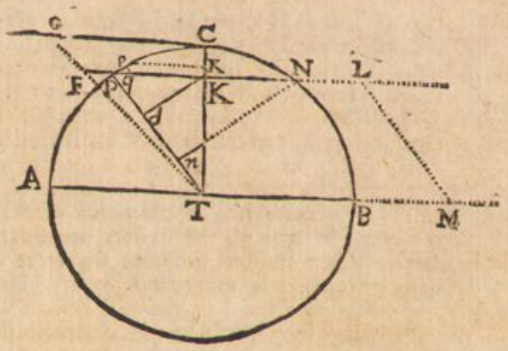
Quoniam verò ordinata $ZQ=AX=r$ est sinus versus arcus dupli CP, & est $r$ sinus versus arcus quadrantalis, ergo in hoc casu CP ejus dimidius est octans circuli, in octante itaque obtinetur velocitas quæ est æqualis velocitati mediocri Lunæ. Quæ quidem in notâ superiore q demonstranda esse dixeramus.

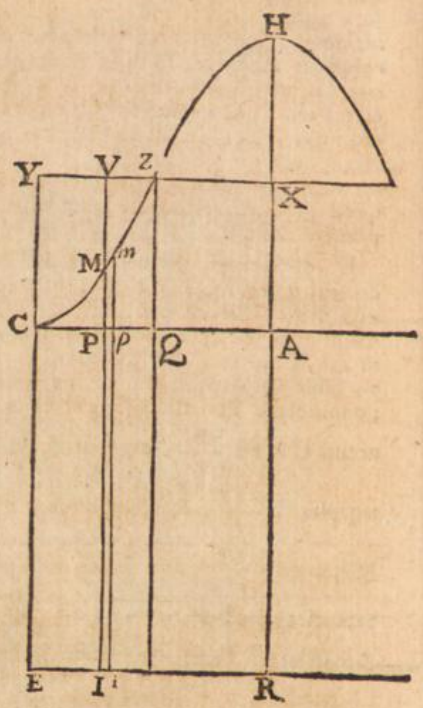
Ex hujus autem Problematis constructione liquet aream per velocitatem mediocrem Lunæ descriptam tempore CP, exprimi per aream YEIV, & ejus valorem esse $mlv+mrv$, dum area verè per Lunam descripta exprimetur per spatium mixtilineum CEIM; spatium CEIP est $mlv$, spatium verò CPM, est ad aream CPK ut $2m$ ad 1; tota area CTP est $\frac{rv}{2}$, spatium PKT est $\frac{y\times KT}{2}$, ergo area CPK est $\frac{rv-y\times KT}{2}$, est itaque spatium $CPM=mrv-my\times KT$ & tota area CEIM est $mlv+mrv-my\times KT$; Unde liquet differentiam inter aream per velocitatem mediocrem descriptam & aream reverâ descriptam esse $my\times KT$, quâ deficit area reverâ descripta, ab eâ quæ per mediocrem motum percursa censetur.

Hinc 1°. liquet variationem debere subtrahi ex motu medio à quadraturâ ad syzygiam, illam evanescere in syzygia A, quia illic $my\times KT=0$, à syzygiâ variationem addi debere motui medio, ut patet ex figuræ continuatione.

2°. Ut

DE MUNDI SYSTEMATE.




113. 2°. Ut quantitas $mlc + mrc$ est ad Rectangulum $yK \times TK$, ita est quadrans circuli CPAT ad aream quæ (propter variationem) detrahenda est ex areâ CTP motu mediocri descriptâ sive, quoniam CPAT est dimidium facti radii in arcum CPA, & ea area detrahenda est etiam dimidium facti radii in arcum variationis, erit etiam ut $mlc + mrc$ ad $my \times TK$ ita arcus quadrantalis CPA sive $c$ ad arcum variationis qui itaque erit $\frac{y \times TK}{l + r}$ sive $\frac{PK \times TK}{l + r}$.

3°. Quoniam quantitates $lc + rc$, & arcus quadrantalis CPA sunt quantitates constantes, manifestum est quod variationes in omnibus punctis P, sunt ut $PK \times TK$, sive ut factum sinus arcus CP in ejus Cosinum.

4°. Rectangulum $TK \times PK$ est maximum ubi punctum P est in octante, quod demonstratur eo modo quem in notâ 111. præcedente videre licet, hinc variatio maxima, est in octantibus, unde fluit hoc Paradoxum, ubi vis EL maxima est, illic maximè retardatur Luna respectu motus sui medii.

5°. *Si variatio maxima mutetur, augeri debet vel minui sinus ille versus, qui velocitatem genitam in* singulis punctis exprimit *in eâdem ratione;* Nam velocitas quæ generatur exprimitur per aream CKFG (vide figuram textus) in octantibus autem punctum F coincidit cum puncto P, & area CKFG illic evadit æqualis areæ PKT, ergo velocitas in octantibus genita est ut TK per PK, sed area quæ variationem illic exprimit est etiam ut TK per PK, (per hujusce notæ corol. 3.) ergo velocitas in octantibus est ut ipsa variatio in octantibus, sed velocitas in octanti-

## PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

*Ex motu horario lunæ invenire ipsius distantiam à terrâ.*

(y) Area, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius lunæ & quadratum distantiæ lunæ à terrâ conjunctim; & propterea distantia lunæ à terrâ est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione areæ directè & subduplicatâ ratione motus horarii inversè. *Q. E. I.*

*Corol.* 1. Hinc datur lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciprocè ut ipsius distantiâ à terrâ. (z) Tentent astronomi quam probè hæc regula cum phænomenis congruat.

*Corol.* 2. (a) Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri potest.

PRO-

octantibus est ad velocitatem in quovis alio puncto in ratione datâ Radii ad sinum versum duplicatæ distantiæ ejus dati puncti à quadraturâ proximâ, ergo hæc velocitas crescit ut velocitas in octantibus ideoque etiam ut variatio maxima, *ergo sinus ille versus* illi velocitati proportionalis debet augeri vel minui in eâdem ratione.

Verum ex actione TM aliam variationis portionem oriri ostenditur Prop. XXIX., illam autem portionem etiam futuram ut TK×PK per not. 114. mox adjiciendam constabit, ergo tota variatio erit ut TK×PK, sive, in octantibus, ut velocitas, quare manet hujus Corollarii veritas si agatur de totâ variatione.

(y) 113. *Area quam Luna singulis momentis describit est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ à terrâ.* Designet TPp aream descriptam à Lunâ quovis




tempusculo, sitque P p arcus curvæ cujuslibet; centro T radio T p describatur arcus circularis P q qui pro rectâ perpendiculari in lineam TP assumi potest ideoque area à Lunâ descripta erit ut TP×pq, gradus autem, aut minuta in arcu pq contenta mensurabunt motum angularem Lunæ dato tempore qui æqualis est motui horario Lunæ, ideoque longitudo absoluta ejus arcus pq erit ut ejus radius TP & motus horarius Lunæ conjunctim hinc area TP×pq erit ut TP² & motus horarius Lunæ conjunctim. 113.

(z) * *Tentent Astronomi.* Observando nempe motum horarium Lunæ in variis temporibus ejus Periodi & simul angulum inter Solem & Lunam interceptum ut inde habeatur ejus distantia PTC à quadraturâ proximâ C, inde enim poterunt colligi numeri proportionales distantiis PT Lunæ à Terrâ, nam, per præced. Prop. area à Lunâ descripta est ut summa numeri 219.46 & sinus versi dupli anguli PTC quæ si dividatur per motum horarium qui observatione obtinetur, radix quadrata ejus quotientis erit ut distantiæ PT, & inverse ut Lunæ Diametri apparentes; Quare si hi etiam observati fuerint, collatio observationum cum numeris sic inventis Regulam Newtonianam illustrabit.

(a) * *Hinc etiam orbis Lunaris accuratiùs quam antehac definiri potest.* Or-

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROBLEMA

## PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA IX.

*Invenire diametros orbis in quo luna, ſine eccentricitate, moveri deberet.*

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. (b) Curvaturas linearum pono eſſe inter ſe in ultimâ proportione ſinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ipſius in terram ſupra (c) vim ſolarem $2PK$ quâ gravitas acceleratrix lunæ in ſolem ſuperat gravitatem acceleratricem terræ in ſolem vel

113. bis Lunaris figura definiri poteſt per obſervationes Diametrorum apparentium Lunæ in datis angulis à puncto quodam fixo, ſicque cum diſtantiæ Lunæ ſint his Diametris apparentibus reciprocæ, longitudines diſtantiis Lunæ proportionales in lateribus eorum angulorum ſecari poſſunt & per eas extremitates duci poteſt curva orbi Lunari ſimilis: Sed obſervatio Diametri cujuſlibet corporis lucidi eſt nimis lubrica ut ſatis tuta eſſe poſſit hæc Methodus, facilius tutiuſque obſervabuntur motus horarius Lunæ ejuſque diſtantia à quadraturâ proxima, hinc itaque accuratius cognita ratione diſtantiarum Lunæ à terrâ in datis angulis accuratius definietur quam antehac orbis Lunaris.

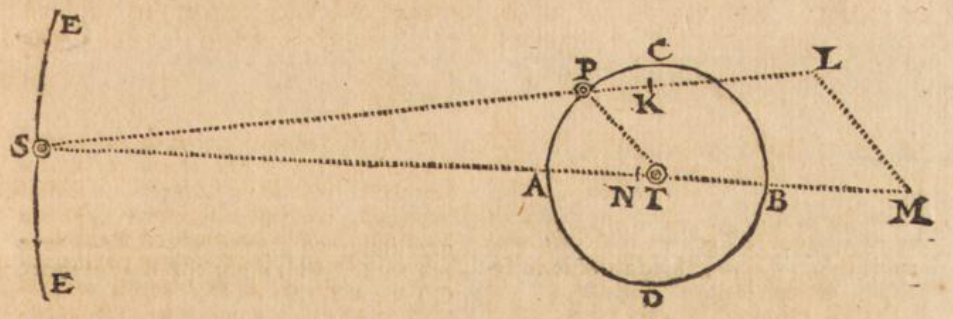
(b) *Curvaturas linearum* &c. Curvatura lineæ eſt ejus deflexio à Tangente, & æſtimari debet per Angulum inter Tangentem curvæ & curvam naſcentem interceptum; illi anguli ſunt ſemper quamminimi, ideoque, juxta principia Trigonometrica, ſui ſinubus, ſuiſve Tangentibus ſunt proportionales, hinc Newtonus ponit curvaturas linearum eſſe in ultimâ proportione Tangentium angulorum contactus, ſi Tangentes illæ ad æquales radios referantur.

Radii illi æquales ad quos referuntur Tangentes illæ, deſcriberentur per continuationem velocitatis corporis uniformis ſecundum Tangentem curvæ, ideoque quantulicumque ſumantur tempora quibus deſcribentur erunt inversè ut illæ velocitates, Tangentes verò anguli contactus quæ ad illos radios æquales referuntur ſunt attractionis effectus ſiquidem ſupponitur illam attractionem agere ſecundum perpendiculum ad curvam, is verò attractionis effectus eſt ſemper ut ipſa vis & quadratum temporis per quod agere concipitur ſaltem ſi tempus exiguum intelligatur in quo attractio uniformiter ad modum gravitatis agere cenſenda ſit; Ergo illæ Tangentes ſunt ut attractio directe & quadratum velocitatis inversè, & in eâdem ratione ſunt anguli contactus ſive curvaturæ linearum.

(c) *Attractio lunæ in terram in ſyzygiis eſt exceſſus gravitatis ſupra vim ſolarem* $2PK$. Ex iis quæ in Propoſitione XXV. demonſtrata ſunt, liquet per actionem Solis, Lunam à terrâ diſtrahi ubicumque ſita ſit per vim TM, ad illam verò attrahi per vim LM, vis TM ſive PL eſt ſemper æqualis $3PK$ (vid. not. (u) ad Prop. XXV.) & eſt PL Coſinus anguli ATP

qui

vel ab eâ ſuperatur. In (d) quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis lunæ in terram & vis ſolaris $KT$, quâ luna in terram trahitur. Et hæ (e) attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proximè; ſeu ut $178725\,N \times CTq - 2000\,ATq \times CT$ & $178725\,N \times ATq + 1000\,CTq \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix lunæ in terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris $ML$, quæ in quadraturis eſt $PT$ vel $TK$ & lunam trahit in terram, erit 1000, & vis mediocris $TM$ in ſyzygiis erit




qui Coſinus in ſyzygiis eſt æqualis Radio, ita ut PT ſive LM eo in caſu ſit æqualis PK, ergo Luna attrahitur ad terram in ſyzygiis per vim gravitatis & per vim LM ſive PK, & diſtrahitur ab ea per vim 2PK, ſupereſt itaque attractioni Lunæ in terram in ſyzygiis exceſſus gravitatis ſupra vim Solarem 2PK.

(d) *In quadraturis* autem evaneſcit vis TM, attractio ergo Lunæ in terram eſt ſumma ejus gravitatis & vis LM ſive CT ſive KT quia in quadraturis puncta K & C coincidunt.

(e) * *Et hæ attractiones ſi* $\frac{AT+CT}{2}$ *dicatur* N &c. Ex Propoſitione XXV. conſtat vim gravitatis quâ Luna retinetur in orbe ſuo in mediocri ſua diſtantia N eſſe ad vim ſolarem mediocrem TM ut 178725 ad 1000, ideoque ad vim 2PK in ſyzygiis æqualem 2TM ut 178725 ad 2000, ſed diſtantiis AT, CT inæqualibus evadentibus variant iſtæ vires, eſt enim vis gravitatis in diſtantia N ad vim gravitatis in diſtantia AT ut $\frac{1}{N^2}$ ad $\frac{1}{AT^2}$ ideoque ſi prior exprimatur per 178725 erit poſterior $\frac{178725\,N^2}{AT^2}$, & ſimili ratiocinio vis gravitatis in diſtantia CT erit $\frac{178725N^2}{CT^2}$; Vires verò Solares 2PK, KT, creſcunt ut ipſæ diſtantiæ quare ſi vis 2PK in diſtantia N ſit 2000 in diſtantiâ AT erit $\frac{2000AT}{N}$, & ſi vis TM in quadraturis ſit 1000 in eâ diſtantiâ N, erit ea vis in diſ-

De Mundi Systemate.

erit 3000; de quâ, si vis mediocris $ML$ subducatur, manebit vis 2000 quâ luna in syzygiis distrahitur à terrâ, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas (f) autem lunæ in syzygiis $A$ & $B$ est ad ipsius velocitatem in quadraturis $C$ & $D$, ut $CT$ ad $AT$ & momentum areæ quam luna radio ad terram ducto describit in syzygiis ad momentum ejusdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut $11073\,CT$ ad $10973\,AT$. (g) Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior semel directè, & fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\,ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\,ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\,ATq \times CTq \times N + 122611329 \times 1000\,CTqq \times AT$, i. (h) e. ut $2151969\,AT \times CT \times N - 24081\,AT$ *cub.* ad $2191371\,AT \times CT \times N + 12261\,CT$ *cub.*

Quo-

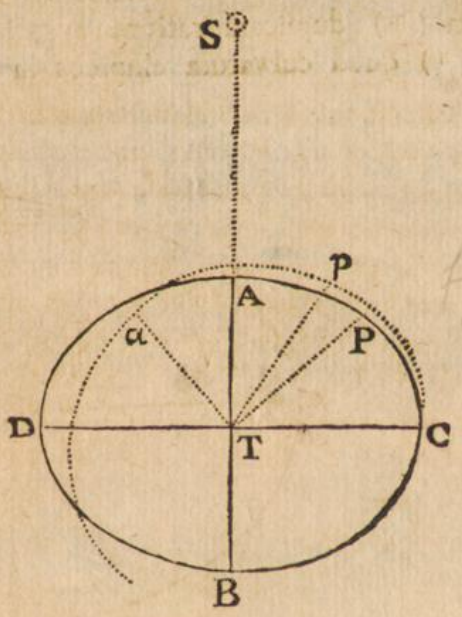
113. tantia CT, $\frac{1000\,CT}{N}$; hinc attractio in syzygiis fit $\frac{178725\,N^2}{N} - \frac{2000\,AT}{N}$, & in quadraturis $\frac{178725\,N^2}{CT^2} + \frac{1000\,CT}{N}$, sive omnia dividendo per $N^2$ est attractio in syzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000\,AT}{N^2 \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000\,CT}{N^2 \times N}$; quoniam verò N est medium Arithmeticum inter AT & CT quorum differentia est exigua, pro medio Geometrico inter eas quantitates proximè sumi potest, ita ut sit $N^2 = AT \times CT$, quo valore substituto loco $N^2$ fit attractio in syzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$ & reductione facta ad eosdem denominatores fiunt istæ quantitates ut $178725\,N \times CT^2 - 2000\,AT^2 \times CT$ ad $178725\,N \times AT^2 + 1000\,CT^2 \times AT$.

(f) * *Velocitas Lunæ* &c. Quoniam in syzygiis & quadraturis arcus quos Luna describit sunt perpendiculares radiis AT, CT, areæ momenta dato tempore illic descripta sunt ut illi arcus & Radii AT, CT conjunctim, ii arcus dato tempore descripti sunt ut velocitates, ergo velocitates in syzygiis & quadraturis sunt ut arearum descriptarum momenta & Radii inversè.

(g) * *Sumatur* ratio duplicata velocitatum *inversè & ratio* simplex attractionum *directè*, factâque multiplicatione ut fractiones deleantur *fiet curvatura orbis Lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis* &c.

(h) * *i. e. ut.* Dividendo per $AT \times CT$, numeros signo × conjunctos in se invicem multiplicando neglectisque quatuor ultimis productorum cifris.

LIBER TERTIUS. PROP. XXVIII. PROB. IX.



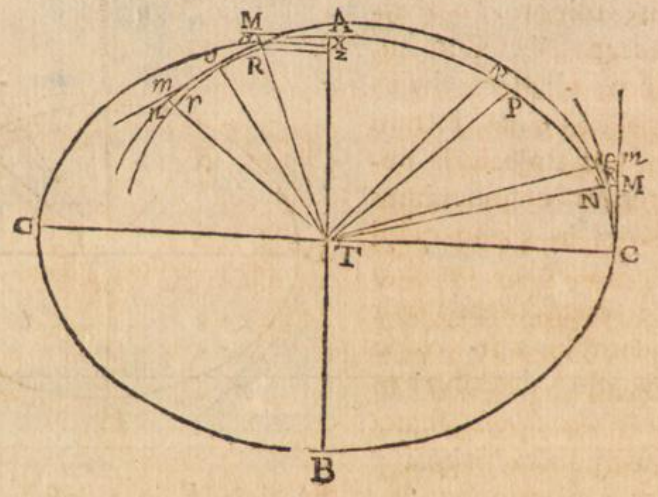

Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice assumamus ellipsin $DBCA$, in cujus centro $T$ terra collocetur, & cujus axis major $DC$ quadraturis, minor $AB$ syzygiis interjaceat. (i) Cum autem planum ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur, & trajectoria cujus curvaturam consideramus describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam luna in ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est figura $Cpa$, cujus puncta singula $p$ inveniuntur capiendo punctum quodvis $P$ in ellipsi, quod locum lunæ repræsentet, & ducendo $Tp$ æqualem $TP$, eâ lege ut angulus $PTp$ æqualis sit motui apparenti solis à tempore quadraturæ $C$ confecto; vel (quod (l) eodem ferè recidit) ut angulus $CTp$ sit ad angulum $CTP$ ut tempus revolutionis synodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ seu $29^d.\ 12^h.\ 44'$, ad $27^d.\ 7^h.\ 43'$. Capiatur igitur angulus $CTa$ in eâdem ratione ad angulum rectum $CTA$; & sit longitudo $Ta$ æqualis longitudini $TA$; & erit $a$ apsis ima & $C$ apsis summa orbis hujus $Cpa$. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis $Cpa$ in vertice $a$, & curvaturam circuli centro $T$ intervallo $TA$ descripti, sit ad differentiam inter curva

(i) * *Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur.* Axis enim minor hujus Ellipseos ad Solem perpetuò dirigitur, ideoque eodem motu quo sol circa terram revolvitur axis iste sive planum Ellipseos circa terram fertur. 113.

(l) * *Quod eodem ferè recidit* quia Lunæ motus medius ab ipsius motu vero non multùm discrepat.

DE MUNDI SYSTEMATE.

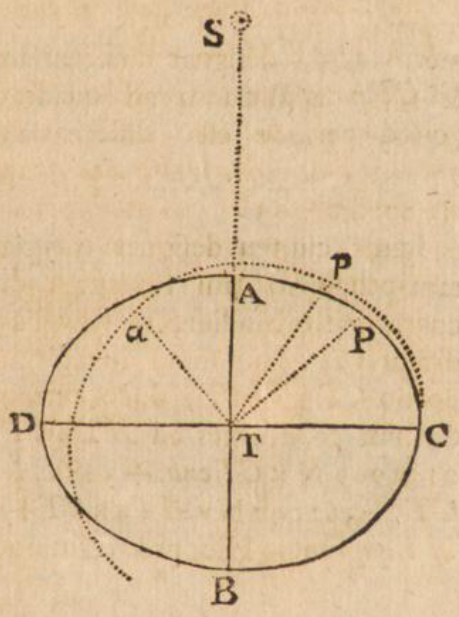
vaturam ellipſeos in vertice *A* & curvaturam ejuſdem circuli; in (m) duplicatâ ratione anguli *CTP* ad angulum *CTp*; & (n) quod curvatura ellipſeos in *A* ſit ad curvaturam circuli illius,




213. (m) * *In duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp.* Centro T intervallo TA deſcribatur circuli arcus ARar, ſit arcus AR ad arcum ar in ratione datâ anguli CTP ad angulum CTp, ducantur Radii TR, Tr & producantur ita ut Tangentibus in A & a ductis occurrant in M & m, occurrant vero Ellipſi in N, & curvæ Cpa in n; erit NR = nr, quia ex conſtructione Tn ſumitur æqualis TN, & radii TR, Tr ſunt æquales; Evaneſcentibus autem arcubus ra & RA curvatura orbis Cpa in a erit ad curvaturam circuli radio TA deſcripti, ut mn ad mr, & ideo differentia inter curvaturam orbis Cpa in a & curvaturam circuli radio TA deſcripti eſt ad curvaturam ejuſdem circuli ut mr − mn ſive nr aut RN ad mr, ſimili modo patet quod curvatura circuli radio TA deſcripti eſt ad differentiam inter curvaturam Ellipſeos in vertice A & curvaturam ejuſdem circuli ut MR ad NR. Ideoque compoſitis rationibus differentia inter curvaturam orbis Cpa in a & curvaturam circuli radio TA deſcripti, eſt ad differentiam inter curvaturam Ellipſeos in A & curvaturam ejuſdem circuli ut MR ad mr, hoc eſt, (Cor. I. Lem. XI. Lib. I.) in ratione duplicatâ arcus RA ad arcum ra, ſive (per conſt.) in ratione duplicata anguli CTP ad angulum CTp.

(n) * *Et quod curvatura Ellipſeos in A &c.* Curvatura Ellipſeos in A eſt ad curvaturam circuli radio TA deſcripti in ratione MN ad MR; Ducatur vero NX tangenti parallela, & axi occurrens in X, & pariter RZ, erit per proprietatem Ellipſeos AX × XB ad NX² ut TA² ad TC, & per proprietatem circuli erit AZ × ZB = RZ², ſed quia ſumuntur quantitates naſcentes eſt AX = MN, AZ = MR, XB = AB = ZB & NX = RZ, quibus valoribus ſuo loco ſubſtitutis prima proportio evadit MN × AB : MR × AB :: TA² : TC² ideoque eſt MN ad MR, ſive curvatura Ellipſeos ad curvaturam circuli in duplicatâ ratione TA ad TC.

lius, in duplicatâ ratione *TA* ad *TC*; & (o) curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro *T* intervallo *TC* descripti, ut *TC* ad *TA*; (p) hujus autem curvatura ad curvaturam ellipseos in *C*, in duplicatâ ratione *TA* ad *TC*; & (q) differentia inter curvaturam ellipseos in vertice *C* & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Cpa* in vertice *C* & curvaturam ejusdem circuli, in duplicatâ ratione anguli *CTp* ad angulum *CTP*. Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His (r) autem inter se collatis, prodit curvatura figuræ




(o) * *Curvatura circuli* &c. Nam circulorum curvaturæ sunt inverse ut eorum radii (not. 121. lib. 1.).

(p) * *Hujus autem curvatura*, potest demonstrari eo ipso modo quo demonstravimus rationem curvaturæ Ellipseos in A ad curvaturam circuli radio TA descripti (not. n).

(q) * *Et differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice C* &c. Demonstratio ferè eadem est ac in notâ (m): Centro C intervallo TC describatur circuli arcus CR r, sit arcus CR ad arcum Cr, in ratione anguli CTP ad angulum CTp ducatur Tangens CM m, & Radii TRM, Trm quorum prior occurrat Ellipsi in N, posterior curvæ Cpa in n, erit NR = nr propter æquales TN, Tn per curvæ const. & Radios æquales TR, Tr; Evanescentibus arcubus CN, Cn, curvatura Ellipseos in C est ad curvaturam circuli radio TC descripti ut MN ad MR, ideoque curvaturarum Ellipseos & circuli differentia est ad curvaturam circuli ut RN ad MR, simili modo curvatura circuli est ad curvaturam orbis Cpa ut mr ad mn, ideoque curvatura circuli ad differentiam curvaturarum orbis Cpa & circuli ut mr ad rn: itaque compositis rationibus erit curvaturarum Ellipseos & circuli differentia ad curvaturarum orbis Cpa & circuli differentiam ut mr ad MR hoc est in ratione duplicata arcus rC ad arcum RC, sive in ratione duplicatâ anguli CTp ad angulum CTP. 113.

(r) *His autem inter se collatis* &c. Ut pateat ordo quo istæ rationes componuntur, dicatur *s* tempus revolutionis Synodicæ, & *t* tempus revolutionis Periodicæ, eritque angulus CTP ad angulum CTp ut *t* ad *s*.

De Mundi Systemate.

guræ $Cpa$ in $a$ ad ipſius curvaturam in $C$, ut $\overline{AT}$ *cub.* $+\frac{16824}{100000}\,CTq\times AT$ ad $\overline{CT}$ *cub.* $+\frac{16824}{100000}\,ATq+CT$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum $CTP$ & $CTp$ applicatam ad quadratum anguli minoris $CTP$, ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum $27^d.\ 7^h.\ 43'$, & $29^d.\ 12^h.\ 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^d.\ 7^h.\ 43'$.

Igitur cum $a$ deſignet ſyzygiam lunæ, & $C$ ipſius quadraturam proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ orbis lunæ in ſyzygiis ad ejuſdem curvaturam in quadraturis, quam ſupra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio $CT$ ad $AT$, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad $AT\times CT$ applicati, fiunt $2062{,}79\ CTqq-2151969\,N\times CT$ *cub.* $+368676\,N\times AT\times CTq+36342\,ATq\times CTq-362047\,N\times ATq\times CT+2191371\,N\times AT$ *cub.* $+4051{,}4\,ATqq=0$. Hic pro terminorum $AT$ & $CT$ ſemiſumma N ſcri-

113. (1) Differentia curvaturarum orbis Cpa in a & circuli radio TA deſcripti, eſt ad differentiam curvaturarum Ellipſeos in A & ejuſdem circuli ut $ss$ ad $ss$ (not. m).

(2) Curvatura Ellipſeos in A ad curvaturam circuli radio TA deſcripti ut $TA^2$ ad $TC^2$ (not. n).

(3) Hinc dividendo, differentia curvaturarum Ellipſeos in A & circuli eſt ad curvaturam ejuſdem circuli ut $TC^2-TA^2$ ad $TC^2$: & per compoſitionem 1ᵐ. & 3ᵐ. proportionis

(4) Eſt differentia curvaturarum orbis Cpa in a & circuli radio TA deſcripti ad curvaturam ejuſdem circuli ut $ss\times\overline{TA^2-TC^2}$ ad $ss\times TC^2$.

(5) Hinc, convertendo curvatura orbis Cpa in a ad curvaturam circuli radio TA deſcripti ut $ss\,TC^2-ss\times\overline{TC^2-TA^2}$ ad $ss\times TC^2$.

(6) Curvatura circuli radio TA deſcripti, ad curvaturam circuli radio TC deſcripti ut TC ad TA.

(7) Curvatura circuli radio TC deſcripti ad curvaturam Ellipſeos in C ut $TA^2$ ad $TC^2$.

(8) Hinc, convertendo curvatura circuli radio TC deſcripti ad differentiam curvaturarum ejus circuli & Ellipſeos in C ut $TA^2$ ad $TC^2-TA^2$.

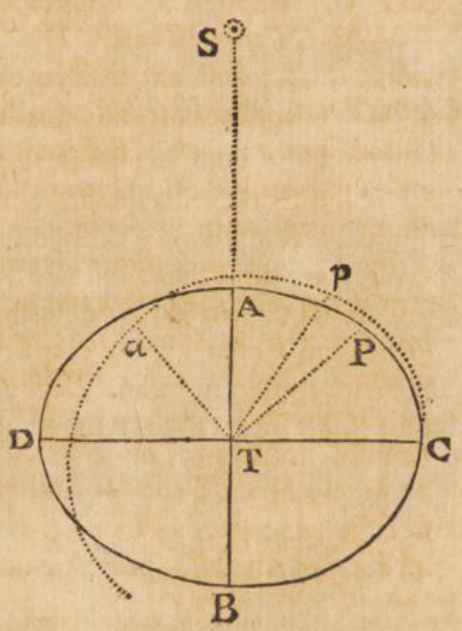
(9) Differentia curvaturarum ellipſeos in C & ejus circuli radio TC deſcripti ad differentiam curvaturarum figuræ Cpa in C & ejuſdem circuli ut $ss$ ad $tt$, & per compoſitionem 8ᵐ. & 9ᵐ. proportionis eſt

(10) Curvatura circuli radio TC deſcripti ad differentiam curvaturarum figuræ Cpa in C & ejuſdem circuli ut $TA^2\times ss$ ad $tt\times\overline{TC^2-TA^2}$.

(11) Et convertendo curvatura circuli radio TC deſcripti ad curvaturam figuræ Cpa in C ut $TA\times ss$ ad $TA^2\times ss+tt\times\overline{TC^2-TA^2}$.

Hinc tandem ex æquo & per compoſitionem 5ᵐ. 6ᵐ. & hujus 11ᵐ. proportionis, eſt curvatura orbis Cpa in a, ad ejus curvaturam in C ut $ss\times TC^2-tt\times\overline{TC^2-TA^2}\times TC$

scribo 1 ; & pro eorundem semidifferentia ponendo $x$, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: (r) quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur $x$ æqualis 0,00719, & inde semidiameter $CT$ fit 1,00719, & semidiameter $AT$ 0,99281, qui numeri sunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proximè. (s) Est igitur distantia lunæ à terrâ in syzygiis ad ipsius distantiam in quadraturis (sepositâ scilicet eccentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.




PRO-

$\times TC \times TA^2 \times s^2$ ad $s^2 \times TC^2 \times TA \times (TA^2 \times s^2 + tt \times (TC^2 - TA^2))$ quæ divisa per $s^2 \times TC \times TA$ fiunt ut $s^2 - tt \times TC^2 \times TA + t^2 \times TA^3$ ad $s^2 - tt \times TA^2 \times TC + tt \times TC^3$, omnibusque divisis per $tt$ & inverso terminorum ordine fiunt ut $TA^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TC^2 \times TA$ ad $TC^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TA^2 \times TC$. Q. E. I.

(r) *Quibus in æquatione scriptis.* Hæc æquatio fit $42456.19\ x^4 - 5082017.44\ x^3 + 148262.14\ x^2 - 12307251.44\ x + 88487.19 = 0$, sed cum $x$ debeat esse quantitas exigua omnes terminos præter duos ultimos negligit, & ex æquatione $12307251.44\ x = 88487.19$ valorem obtinet $x = \frac{88487.19}{12307251.44} = 0.00719$.

(s) * *Est igitur distantia Lunæ à Terrâ* &c. Astronomis est cognitum, quod si distantia mediocris Lunæ à Terra incidat in tempus syzygiarum, ea distantia mediocris minor erit quam si incidat in tempus quadraturarum; Clar. Halleius ex observationibus Astronomicis deduxit distantiam mediocrem Lunæ à Terrâ in Syzygiis esse ad ipsius distantiam mediocrem in quadraturis ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$; quod si vel tantillùm propter observationum lubricitatem de hoc ultimo numero detrahatur facile accedit hæc ratio ad eam quam Newtonus deprehendit suo calculo.

De Mundi Systemate.

## PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

*Invenire variationem lunæ.*

(u) Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam luna radio ad terram ducto describit. Si luna *P* in ellipsi *DBCA* circa terram in centro ellipseos quiescentem moveretur, & radio *TP* ad terram ducto describeret aream *CTP* tempori proportionalem; esset autem ellipseos semidiameter maxima *CT* ad semidiametrum minimam *TA* ut 70 ad 69: (x) foret tangens anguli *CTP* ad tangentem anguli motus medii à quadraturâ *C* com-

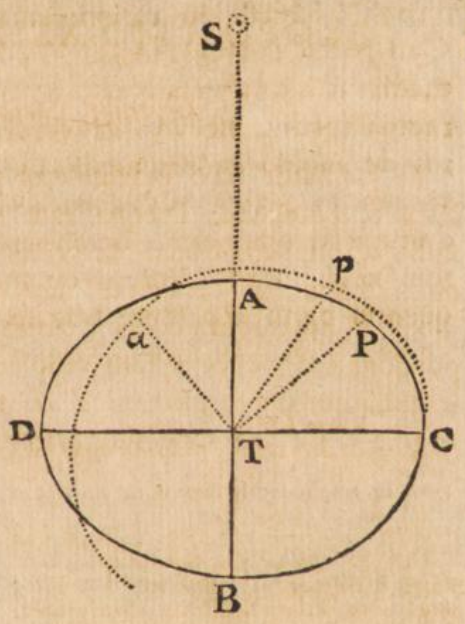
113. (u) * *Oritur hæc inæqualitas*, &c. Pergit Newtonus in hypothesi quod semotâ Solis actione orbis Lunæ circularis foret; in præcedenti verò Propositione, determinavit quamnam mutationem induceret illi circulo vis Solis, quâtenus ea ejus portio assumitur quæ ad centrum terræ spectat & cum gravitate Lunæ versus terram sociatur; itaque, sumpto novam figuram orbis Lunaris ad Ellipsim posse revocari, demonstrat in Prop. præcedente eam Ellipsim talem esse ut axis major sit ad minorem ut 70 ad 69; Motus autem Lunæ in tali Ellipsi debet fieri ita ut areæ descriptæ circa centrum terræ sint temporibus proportionales, quia vires quæ assumuntur ad id centrum diriguntur; cumque areæ illæ Ellipticæ, angulis in centro factis proportionales non sint, sequitur illos angulos in centro factos temporibus proportionales non esse, ideoque aliquid corrigendum esse motui medio Lunæ, in quo Anguli in centro terræ facti proportionales temporibus assumuntur, ut habeatur Lunæ motus Verus; & hæc correctio constituet partem variationis, quæ est, in hâc hypothesi, arcus interceptus inter locum medium Lunæ & locum ejus verum & hæc pars variationis *ex formâ ellipticâ* quam assumit *orbis Lunaris* per Solis actionem *oritur*.

Altera pars variationis oritur ex eâ actionis Solis parte quam consideravit Newtonus Prop. XXVI. & quâ fit ut ipsæ areæ à Lunâ descriptæ temporibus non sint proportionales, area itaque tempori proportionalis corrigenda est, idque detrahendum vel addendum quod debetur illi actioni, quodque per constructionem Probl. nostri n. 110. determinare facillimum erit, quam quidem constructionem non dedit Newtonus, quasi mediocribus uteretur quantitatibus ex æquo, ut aiunt, & bono assumptis, verum vix dubitandum quin ad hanc vel similem constructionem respexerit, ii enim non erant casus quibus hæc media sine demonstratione assumi possent à Viro summe accurato & perspicace.

(x) * *Foret Anguli Tangens.* Sit C A D B ellipsis quam Luna describit, ita ut areæ circa centrum T sint temporibus proportionales, describatur circulus eodem centro, radio T C, in ejus circuli circumferentia moveatur Luna motu medio, sumaturque in eo circulo arcus C Π tempori cuivis dato proportionalis, ducta ordinata Π P K, dico quod area Elliptica T C P erit tempori proportionalis hoc est quod tota area Elliptica erit ad eum sectorem T C P ut est tempus Periodicum Lunæ ad tempus datum.

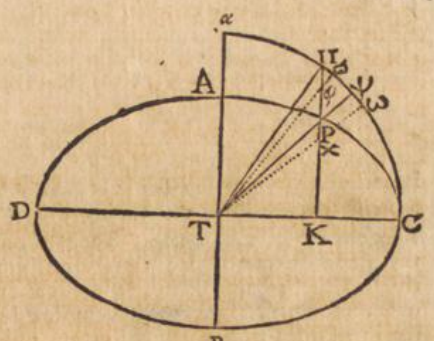
Est enim tota circuli circumferentia ad arcum C Π, sive totus circulus ad aream C T

computatì, ut ellipſeos ſemimidiameter *TA* ad ejuſdem ſemidiametrum *TC* ſeu 69 ad 70. (y) Debet autem deſcriptio areæ *CTP*, in progreſſu lunæ à quadraturâ ad ſyzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in ſyzygiâ lunæ ſit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque exceſſus momenti in loco quovis intermedio *P* ſupra momentum in quadraturâ ſit ut quadratum ſinus anguli *CTP*. Id quod ſatis accuratè fiet, ſi tangens anguli diminuatur in ſubduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073,




C T Π, ut tempus Periodicum totum ad tempus datum ex conſtructione, ſed ex notâ circuli & Ellipſeos proprietate, eſt tota area elliptica ad totam aream circuli ut T A ad C T, & pariter eſt ſector C T P ad C T Π ut T A ad C T (nam Triangula Rectilinea T P K, T Π K ſunt ut baſes P K, Π K; areæ curvilineæ C P K, C Π K ſunt etiam, ex notâ Ellipſeos & circuli proprietate ut P K ad Π K, ergo toti ſectores C T P, C T Π ſunt ut P K ad Π K, quæ ſunt ut T A ad C T,) ergo tota area Elliptica eſt ad aream circuli ut ſector C T P ad C T Π, & alternando, tota area Elliptica ad ſectorem C T P, ut eſt circuli area ad C T Π, ſeu ut eſt Tempus Periodicum, ad tempus datum.

Si ergo area C T P ſit tempori proportionalis, motus Lunæ qui à terrâ videri debuiſſet ſub angulo C T Π ſi Luna motu medio fuiſſet lata, videbitur ſub angulo C T P, & ſi linea T K pro radio aſſumatur erit K P tangens anguli C T P, &

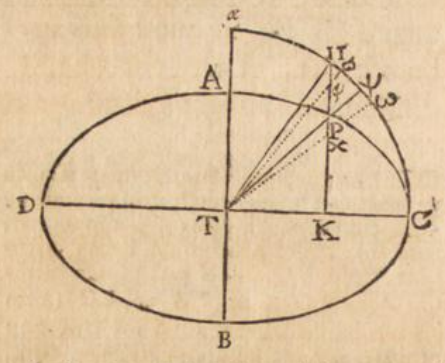



K Π tangens Anguli C T Π, ſed eſt P K ad Π K ut T A ad C T, ergo *tangens anguli C T P eſt ad tangentem anguli motus medii ut T A ad T C ſeu 69 ad 70.* 113.

(y) * *Debet autem deſcriptio areæ* &c. Manentibus iis omnibus quæ in notis 112. & 113., expoſita fuerunt, arcus variationis erit $\frac{PK \times TK}{l+r}$ (per cor. 2. not. 113.) ſumatur ergo in arcu C Π verſus C arcus

11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli *CTP* jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus *CTP* in octantibus, ubi motus medius est 45gr. invenietur 44gr. 27′. 28″. qui subductus de angulo motus medii 45gr. relinquit (z) variationem maximam 32′. 32″. Hæc ita sè haberent si luna, pergendo à quadraturâ ad syzygiam, describeret angulum *CTA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum terræ, quo sol in consequentia motu apparente transfertur, luna, priusquam solem assequi-

114 $\Pi\varpi = \frac{PK \times TK}{l+r}$ sive (quia in hâc figura $\Pi$ respondet litteræ P in not. 110 assumptæ) $= \frac{\Pi K \times TK}{l+r}$, ducatur $\varpi T$ quæ secet lineam $\Pi K$ in $\varphi$ Triangulum $\Pi\varpi\varphi$ simile erit Triangulo $TK\varphi$, sive propter exiguitatem anguli $\Pi T \varpi$ Triangulum $\Pi\varpi\varphi$ simile erit Triangulo $T K \Pi$, hinc erit $TK$ ad $T\Pi$ (*r*) sicut $\Pi\varpi$ $\left(\frac{\Pi K \times TK}{l+r}\right)$ ad $\Pi\varphi$ quod erit itaque $\frac{r \times \Pi K}{l+r}$, ideoque erit $K\varphi (= \Pi K - \Pi\varphi) = \frac{\overline{l+r} \times \Pi K - r \times \Pi K}{l+r} = \frac{l \times \Pi K}{l+r}$, unde habetur hæc proportio $l+r : l :: \Pi K : \varphi K$; si verò sumatur $TK$ pro radio, erit $\Pi K$ Tangens motus medii & $\varphi K$ Tangens motus medii imminuti hac variationis portione; Debet minui in eadem ratione quam proximè, Tangens $PK$ motus Lunæ in Ellipsi spectatæ aut saltem in ratione paulo minore; cum itaque $l+r$, sit medium Arithmeticum inter $l+2r$ sive 11073 & *l* sive 10973, & ratio medii Arithmetici ad minimum extremorum sit paulo major quam medii Geometrici ad eum extremum, satis accurate fieri dicit si sumatur Tangens $PK$ ad Tangentem anguli motus veri Lunæ ut medium Geometricum inter 11073 & 10973 ad 10973, sive in subduplicatâ ratione 11073 ad 10973; quæ est æqualis rationi 69 ad 68.6877 cum ergo sit $\Pi K$ ad $PK$ ut 70 ad 69, & cum sit $PK$ ad Tangentem motus Lunæ ultimò correcti ut 69 ad 68.6877 erit ex æquo Tangens motus medii ad Tangentem motus veri ut 70 ad 68.6877. Q. E. D.




(z) 114. *Relinquit variationem maximam.* Ex Cor. 4. not. 113. arcum variationis quæ pendet ex inæqualitate momentorum areæ, maximum esse in octantibus constat; Eam autem variationis portionem quæ pendet ex formâ Elliptică orbis Lunaris etiam maximam esse in octantibus hoc modo patet, producatur $TP$ in $\Psi$ & cum arcus $\Pi\Psi$ vix excedat semigradum ubi maximus est pro recta sumatur, erit Triangulus $\Pi\Psi P$ similis Triangulo $TKP$, sive $TK\Pi$ ideoque est $T\Pi$ ad $TK$ ut $\Pi P$ ad $\Pi\Psi$ qui erit ergo ubivis æqualis $\frac{\Pi P \times TK}{T\Pi}$, sed quoniam est ubivis 70 ad 69 ut $\Pi K$ ad $PK$, erit dividendo 70 ad 1 ut $\Pi K$ ad

quitur, describit angulum *CTa* angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris synodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id est, in ratione $29^d.\ 12^h.\ 44'.$ ad $27^d.\ 7^h.\ 43'.$ Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *T* dilatantur in eâdem ratione, & variatio maxima quæ secus esset $32'.\ 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'.\ 10''$.

Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantiâ solis à terrâ, (a) neglectis differentiis quæ à curvaturâ orbis magni majorique solis actione in lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, oriri possint. In (b) aliis distantiis solis à ter-

ad $\Pi P$ ideoque est $\Pi P = \frac{\Pi K}{70}$ & arcus $\Pi \Psi$ erit $\frac{\Pi K \times TK}{70\, T\, \Pi}$, jam autem demonstratum est nota III. quod maximum hujus quantitatis $\Pi K \times TK$ est in octantibus, ergo arcus $\Pi \Psi$ sive ea variationis portio quæ pendet ex formâ Elliptică orbis Lunaris est maxima in Octantibus sicut & altera portio, ergo Variatio tota est maxima in Octantibus.

(a) * *Neglectis differentiis quæ à curvatura orbis magni oriri possint.* Hactenus supposítum est, lineam DTC repræsentare orbis magni portionem, & fieri quadraturas in punctis D & C; quod quidem absolutè verum non est, quippe semi-Diameter orbis Lunaris sub Angulo 10 circiter minutorum à Sole videtur, unde arcus DC est 20′ circiter & aliquam habet curvaturam, hinc revera utraque quadratura est circiter 20′ propior conjunctioni quam oppositioni, quæ consideratio hic neglecta est.

*Majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam*, si vis Solis in punctum T exprimatur per $\frac{1}{ST^2}$ erit vis in Lunam novam & falcatam ut $\frac{1}{(ST-TA)^2}$ & vis in Lunam plenam & gibbosam ut $\frac{1}{(ST+TA)^2}$ revocentur omnia ad communem denominationem erit vis in punctum T ut $\overline{ST-TA^2 \times ST+TA^2}$ sive $ST^4 - 2ST^2 \times TA^2 + TA^4$, vis in Lunam novam $ST^4 + 2ST^3 \times TA + TA^2 \times ST^2$, vis in Lunam plenam $ST^4 - 2ST^3 \times TA + ST^2 \times TA^2$; Hinc excessus vis in Lunam novam supra vim mediocrem est $2ST^3 \times TA + 3ST^2 \times TA^2 - TA^4$; Et excessus vis mediocris supra vim in Lunam plenam est $2ST^3 \times TA - 3ST^2 \times TA^2 + TA^4$, qui quidem excessus differunt, & prior posteriorem superat quantitate $6ST^2 \times TA^2 - 2TA^4$; Verum propter magnitudinem lineæ ST præ linea TA, evanescit ferè hæc excessuum differentia respectu quantitatis communis $2ST^3 \times TA$, ideo pro æqualibus fuerunt habiti. 114.

(b) *In aliis distantiis Solis à Terrâ.* Duplex est causa quæ errores ab actione Solis pendentes mutet, primum vis solis mediocris mutatur inversè ut quadrata distantiarum & præterea cum Sol celerior vel tardior fiat prout propior est vel remotior à Terra, Luna é converso ipsum tardius vel celerius attingit, unde mensis Synodicus in Perigæo Solis fit longior quam idem mensis Synodicus in Apogæo; ex hac ultimâ causâ, si sola consideretur, fiet ut variatio maxima in ratione duplicatâ temporis revolutionis Synodicæ crescat, quod quidem separatim demonstrandum de utraque variationis portione $\Pi \Psi$ & $\Psi \omega$; Et quidem in octantibus cum Triangulum $\Pi P \Psi$ sit Rectangulum Isosceles, est $\Pi \Psi = \frac{\Pi P}{\sqrt{2}}$, est verò $\Pi P = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$, nam ex naturâ circuli & Ellipseos

tâ, variatio maxima eſt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis ſynodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, & triplicatâ ratione diſtantiæ ſolis à terrâ inversè. (c) Ideoque in apogæo ſolis, variatio maxima eſt $33'.\ 14''$, & in ejus perigæo $37'.\ 11''$, ſi modo eccentricitas ſolis ſit ad orbis magni ſemidiametrum tranſverſam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000.

Hac-

114. eſt $\alpha T$ ad $AT$ ut $IIK$ ad $PK$ & dividendo $\alpha T$ ad $\alpha A$ ut $IIK$ ad $IIP = \frac{\alpha A \times IIK}{\alpha T}$ ſed in octante eſt $IIK = \frac{\alpha T}{\sqrt{2}}$ ergo $IIP = \frac{\alpha A \times \alpha T}{\alpha T \sqrt{2}} = \frac{\alpha A}{\sqrt{2}}$ hinc $II\Psi = \frac{\alpha A}{2}$, eſt autem $\alpha A$ effectus virium Solis Lunam retrahentium à ſuo circulo, durante quartâ parte temporis revolutionis Synodicæ Lunæ, ergo ſi id tempus creſcat manentibus iiſdem viribus ſimiliter agentibus, effectus totus $\alpha A$ erit ut quadratum temporis per quod illæ vires egerunt per Cor. I. Lem. X. lib. I. ideoque $II\Psi$ creſcit ſecundum quadrata temporum.

Idem demonſtrabitur de portione variationis $\Psi\omega$ quæ pendet ex acceleratione deſcriptionis areæ; Quippe manentibus omnibus ut in not. 111. & fig. 3ª. recta CA majus tempus deſignare cenſeatur, & partes Pp tempuſcula in eadem ratione longiora, lineæ PM deſignant velocitates genitas durante momento Pp, ſi ergo id momentum creſcat viribus generatricibus iiſdem manentibus, velocitates genitæ PM creſcent in proportione temporis, & quia Pp M m deſignat ſpatiolum illâ velocitate percurſum, creſcuntque & PM & Pp in ratione temporum, creſcet PM m p in ratione duplicatâ temporum, cumque ſingula elementa curvæ in eâ proportione creſcant, & tota area CAH, & ei æqualis CAXY, ejuſque dimidia CQZY in eâdem proportione creſcent; ex quâ ſi detrahatur CQZ quod in eâdem proportione crevit, reliquum CZY quod areæ variationi maximæ $\Psi T\omega$ eſt proportionale creſcet etiam in eâdem duplicatâ ratione temporum, manente itaque radio $T\omega$, ipſe arcus $\Psi\omega$ creſcet in duplicatâ ratione temporum.

Hinc cum $II\Psi$ creſcat in duplicatâ ratione temporum tum etiam $\Psi\omega$, ſumma itaque $II\omega$ ſive tota variatio creſcet in eâdem duplicatâ temporum ratione.

Dico præterea quod ſi ſpectetur imminutio actionis Solis propter auctam diſtantiam variatio maxima decreſcet in ratione triplicatâ diſtantiarum, nam deſignetur vis mediocris Solis per $\frac{1}{SK^2}$, eſt ex conſtructione SK ad TM ut vis Solis ſive ut $\frac{1}{SK^2}$ ad vim TM ergo ea vis TM eſt ut $\frac{TM}{SK^3}$ manente ergo TM quæ eſt æqualis PT; vis TM ex actione Solis pendens decreſcit ut diſtantiarum cubus augetur, Manente ergo tempore, ſed vi mutatâ ſecundum rationem triplicatam, eadem ferè ratione ac prius oſtendetur utramque variationis maximæ partem $II\Psi\omega$ & $\Psi\omega$ forè inversè in ratione triplicatâ diſtantiarum Solis; *Hincque in variis Solis à terrâ diſtantiis quæ in* datis anni temporibus recurrunt *variationes maximæ erunt inter ſe in ratione duplicatâ durationis menſis Synodici eo tempore, & triplicatâ inversè diſtantiæ ſolis à terrâ.*

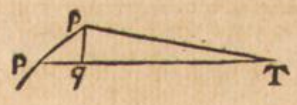
(c) * *Ideoque* &c. Ex his & præcedentibus facile intelligitur Newtoni calculus, ſi prius hæc Principia revocentur.

1°. Si dicatur $m$ diſtantia mediocris Solis, ſit $\pm e$ exceſſus vel defectus ejus diſtantiæ à mediocri diſtantiâ in loco quovis dato; denique dicatur $s$ ſolis motus horarius mediocris, dico quod ſolis motus

Hactenus variationem inveſtigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique luna in octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſuâ diſtantiâ à terrâ. Si luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat à terrâ quam ſi locaretur in hoc orbe, variatio

tus horarius in loco quovis ſuæ orbitæ exprimetur per quantitatem $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e^2}}$.

Sit enim T Terra; P, Sol; T P p area horæ tempore deſcripta, ejus areæ valor ubivis erit ſemper idem, ſit p q arcus ra-




dio T p deſcriptus, qui ob exiguitatem ſumi poteſt ut ipſum perpendiculum in baſim P T demiſſum, ideoque ob areas ubivis æquales is arcus erit ubivis inverſe ut baſis T P, ſed numerus graduum ejus arcus p q eſt directe ut is ipſe arcus & inverſe ut ejus radius T p ſive T P, ergo numerus graduum ejus arcus p q eſt in ratione duplicatâ inverſa radii T P, is verò numerus exprimit motum Solis horarium, ergo Solis motus horarius, eſt inverſe ut quadratum radii T P; cum ergo in diſtantiâ mediocri eſt T P = $m$, in quâvis aliâ diſtantiâ eſt T P = $m \pm e$, ergo eſt $\frac{1}{m^2}$ ad $\frac{1}{(m \pm e)^2}$ ut $s$ ad $\frac{s m^2}{(m \pm e)^2}$ quod exprimit motum horarium Solis in quâvis diſtantiâ T P.

In diſtantiâ mediocri evaneſcit quantitas $\pm e$ ideoque motus horarius illic evadit $\frac{m^2 s}{m^2} = s$ ſecundum hypotheſim.

2°. Poſito Lunam ſemper moveri motu ſuo horario mediocri, qui dicatur $l$, ſitque $p$ ejus tempus Periodicum inter fixas, Duratio menſis Synodici quovis in loco orbitæ telluris circa Solem, exprimetur per quantitatem $\frac{\overline{m \pm e^2} \times l p}{\overline{m \pm e^2} l - m^2 s}$ ſive divisâ hâc quantitate per conſtantem $\frac{l p}{m^2}$ fiet 114.

menſis Synodicus ut $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2 l e}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$

Nam dicatur $x$ numerus graduum quem Sol emetitur durante quovis menſe Synodico, numerus graduum quem Luna eodem tempore emetietur erit $360 + x$, erit ergo motus horarius Lunæ $l$ ad motum horarium Solis $\frac{m^2 s}{\overline{m \pm e^2}}$ ut $360 + x$ ad $x$, & dividendo $m^2 l \pm 2mel + e^2 - m^2 s$ ad $m^2 s$ ut 360 ad $x$, itaque erit $x = \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$. Hinc cùm Lunâ percurrat 360 gr. tempore $p$, abſolvet $360^{gr}. + \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2mel + e^2 - m^2 s}$ tempore $p + \frac{m^2 s p}{m^2 l \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$ ſive reductione facta, tempore $\frac{m^2 l p \pm 2mel p + e^2 l p - m^2 s p + m^2 s p}{m^2 \pm 2mel + e^2 l - m^2 s}$ ſive $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{l p}{m^2}$ quæ quantitas diviſa per conſtantem $\frac{l p}{m^2}$, relinquit quantitatem $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ quæ erit ut duratio menſis Synodici in diſtantiâ quavis $m \pm e$. Q. E. D.

In diſtantia mediocri evaneſcente quantitate $\pm e$ menſis Synodicus erit $\frac{m^2 l p}{m^2 l - m^2 s} = \frac{l p}{l - s}$ & erit ad menſes Synodicos in

aliis

tio paulo major esse potest vel paulo minor quam pro regulâ hîc allatâ: sed excessum vel defectum ab astronomis per phænomena determinandum relinquo.

114. aliis quibusve distantiis ut $\frac{m^2}{l-s}$ ad $\frac{\overline{m \pm e}^2}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$.

3°. Variatio maxima erit ubivis ut $\frac{m \pm e}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$: Nam, ex hâc ipsâ Propositione variatio maxima est directè ut quadratum temporis Synodici & inversè ut cubus distantiæ sive in ratione compositâ quantitatum $\frac{\overline{m \pm e}^4}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$ & $\frac{1}{\overline{m \pm e}^3}$ ideoque ut $\frac{m \pm e}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$.

Coroll. In distantiâ mediocri variatio maxima exprimitur per quantitatem $\frac{m}{\overline{l-s}^2}$ & eam superius determinavit Newtonus fere 35″ 10‴ sive 2110‴; Hinc itaque ut habeatur variatio maxima in quovis orbitæ Solaris puncto fiat ut $\frac{m}{\overline{l-s}^2}$ ad $\frac{m \pm e}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$ ita 2110‴ ad variationem maximam quæsitam, quæ itaque erit $\frac{\overline{l-s}^2}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}} \times \frac{m \pm e}{m} \times 2110'''$, (sive accuratius × 2109‴.8.)

Ratio autem motus horarii Lunæ $l$ ad motum horarium Solis $s$ obtinetur ex tempore Periodico utriusque inter stellas fixas, itaque cum tempus Periodicum Lunæ sit $27^d.\ 7^h.\ 43'$ & annus sidereus Solis $365^d.\ 6^h.\ 9'$ & velocitates mediocres sive motus horarii mediocres sint inversè ut ista tempora Periodica erit $l$ ad $s$ ut 1.081 ad 0.81 ideoque erit $l - s = 1$, & Variationis maximæ expressio fiet $\frac{1}{\overline{1 \pm \frac{2.162\,e}{m} + \frac{1.081\,e^2}{m^2}}^2} \times \frac{m \pm e}{m} \times$ 2109.8‴. Cumque $m$ sit 1000 & in Apogæo $\frac{m+e}{m}$ sit $1.016\frac{15}{16}$ in Perigæo vero sit $\frac{m-e}{m} = .983\frac{15}{16}$ hæc ducta in 2109.8‴ efficiunt in Apogæo 2145.5‴ & in Perigæo 2074‴, sed cum sit $e = 16\frac{15}{16}$ quantitas $\frac{2.162\,e}{m}$ evadit .036618375 & $\frac{1.081\,e}{m^2}$ est .00031027. Unde quantitas $1 + \frac{2.162e^2}{m} + \frac{1.081\,e^2}{m^2}$ fit 1.03665 & $1 - \frac{2.162e}{m} + \frac{1.081e^2}{m^2}$ fit .9637.

Dividatur ergo bis 2145′.5‴ per 1.037 quotiens dabit variationem maximam in Apogæo 1994‴ sive 33″. 14‴, & dividatur bis 2074‴ per .964 quotiens dabit variationem maximam in Perigæo quam proximè 2231 sive 37″ 11‴.

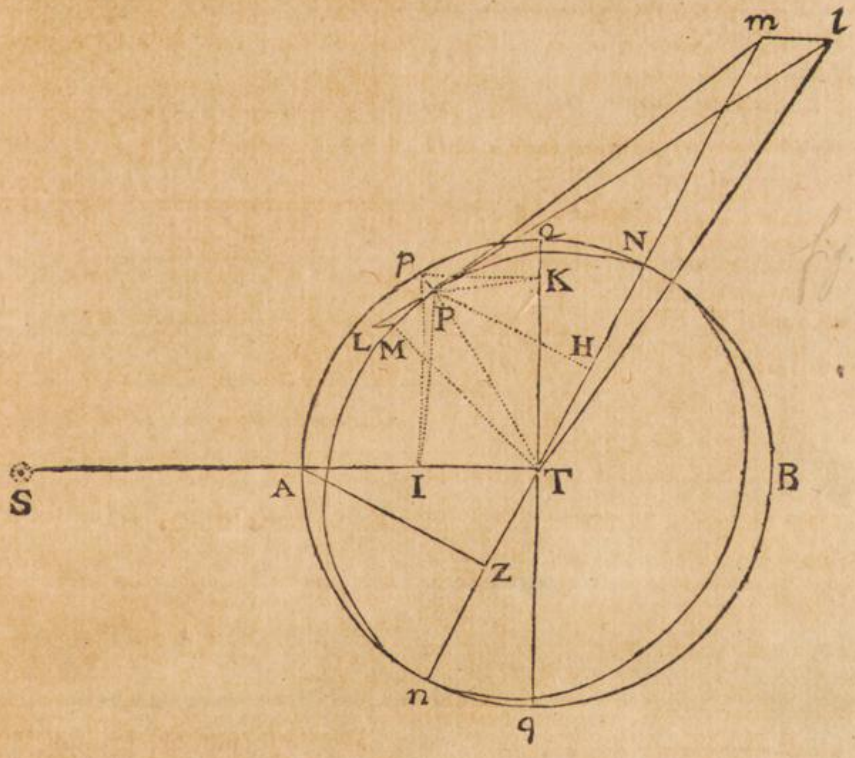
PRO-

## PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.



*Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe circulari.*

Designet *S* solem, *T* terram, *P* lunam, *NPn* orbem lunæ, *Npn* (d) vestigium orbis in plano ecliptícæ; *N*, *n* nodos,



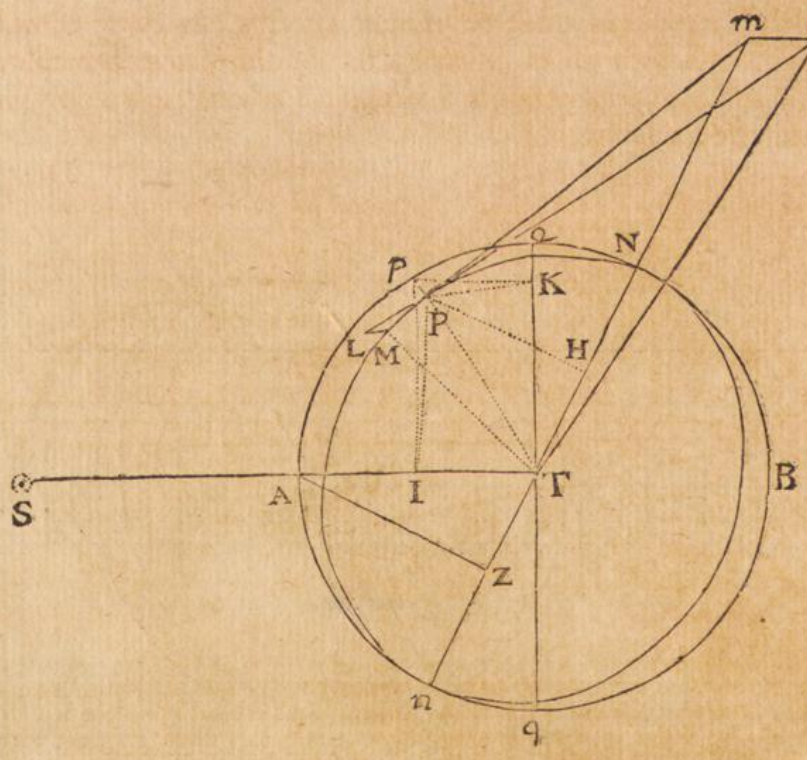

*nTNm* lineam nodorum infinitè productam; *PI*, *PK* perpendicula demissa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demissum in planum ecliptícæ; *A*, *B* syzygias lunæ in plano ecliptícæ; *AZ* perpendiculum in lineam nodorum *Nn*; *Q*, *q* quadraturas lunæ in plano ecliptícæ, & *pK* perpendiculum in lineam

*Qq*

(d) * *Vestigium orbis in plano Ecliptícæ.* Hoc est orbis genitus demittendo ex singulis punctis orbitæ Lunaris perpendicula ad planum Ecliptícæ.

DE MUNDI SYSTEMATE.

*Q q* quadraturis interjacentem. Vis ſolis ad perturbandum motum (per prop. xxv.) duplex eſt, altera lineæ *L M* in ſchemate propoſitionis illius, altera lineæ *MT* proportionalis. Et luna vi priore in terram, poſteriore in ſolem ſecundum lineam rectæ *ST* à terrâ ad ſolem ductæ parallelam trahitur. Vis prior




*L M* agit ſecundum planum orbis lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior *MT* quâ planum orbis lunaris perturbatur eadem (e) eſt cum vi 3 *P K* vel 3 *IT*. Et (f) hæc vis (per prop. xxv.) eſt ad vim

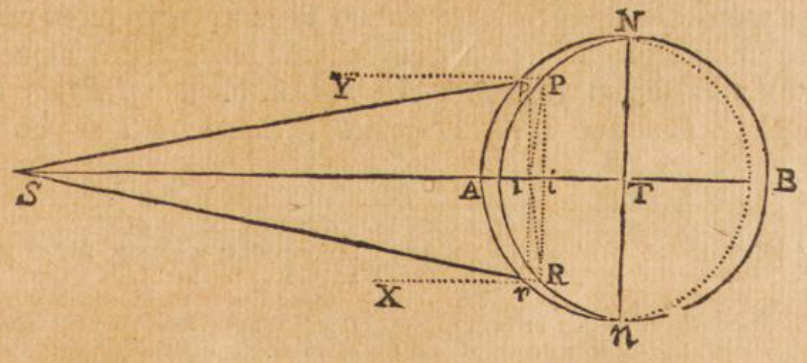
314.

(e) * *Eadem eſt cum vi* 3 *PK* (Prop. XXV. not. u).

(f) * *Et hæc vis eſt ad vim qua Lunâ in circulo circa terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet.* Vis TMT eſt ad vim ML ut eſt 3 PK ſive 3 IT ad Radium, (Prop. XXVI. not. x); vis ML eſt ad vim quâ Luna circa terram tempore ſuo Periodico revolvi poſſet ut eſt 3 IT ad Radium circuli multiplicatum per 178.725.

quâ lunâ in circulo circa terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut $3IT$ ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut $IT$ ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo, & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à lunâ ad solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à terrâ ad solem ducitur, (g) propterea quod inclinatio tantum ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantùm auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Designet




(g) * *Propterea quod Inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus quantùm auget in aliis.* Exempli gratiâ, sint nodi in quadraturis, spectetur-que Luna in punctis P & R æqualiter à quadraturis N & n distantibus & vis obliqua Solis SP, SR in ipsam agere concipiatur, quæ in duas dividatur, unam Parallelam lineæ ST, secundum directiones PY, RX agentem, alteram huic perpendicularem secundum directiones PI, RI; de effectu vis secundum directiones PY, RX agentis in hoc Problemate actum est; directiones verò PI, RI sese mutuo compensant; dividatur enim rursus vis PI, RI in duas vires unam Pi, Ri secundum planum orbitæ Lunaris agentem ideoque nodorum positionem non turbantem, alteram P p, R r ipsi perpendicularem; hæc nodorum positionem, planique inclinationem afficiet, sed cum de plani inclinatione hic non agatur, manere plani inclinationem fingatur, itaque vis P p, R r dum admovet puncta P & R ad Eclipticam efficit ut nodis viciniores videantur seu ut nodi versus puncta illa moveri censeantur, ideoque actio in punctum P efficit ut nodus N in consequentia feratur & actio in punctum R efficit ut nodus n in antecedentia fertur, ideoque, Solis actio obliqua in punctum P motum retrogressivum nodi natum ex vi P Y parallela lineæ S T tantùm minuit quantùm eadem actio obliqua in punctum R auget eum motum retrogressivum natum ex vi R X. 1141

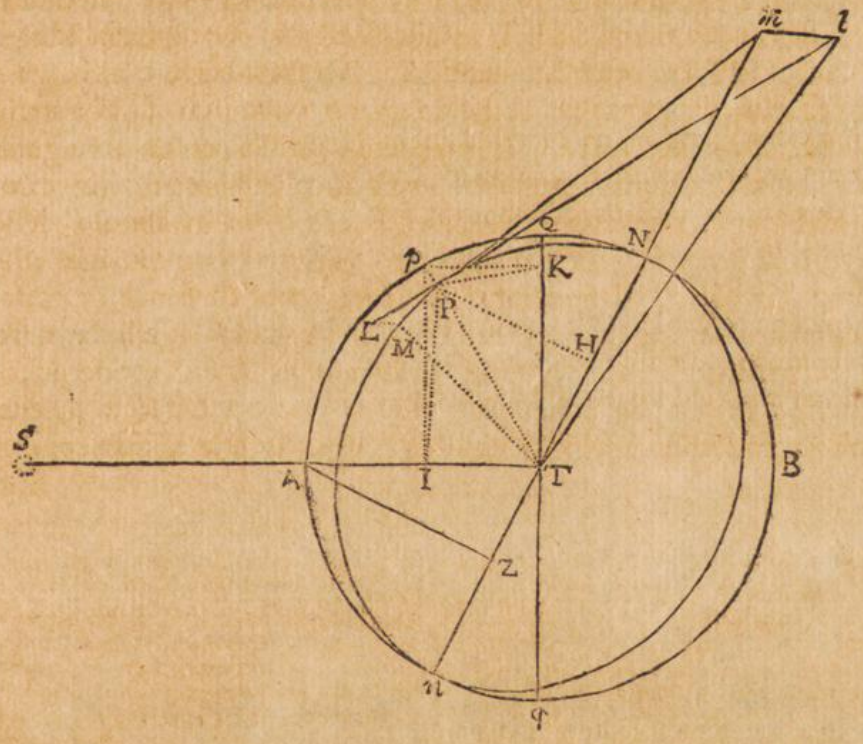
DE MUNDI SYSTEMATE.

Designet jam $PM$ arcum, quem luna dato tempore quam minimo describit, & $ML$ lineolam cujus dimidium luna, impellente vi præfatâ $3IT$, eodem tempore describere posset. (h) Jungantur $PL$, $MP$, & producantur eæ ad $m$ & $l$, ubi secent planum eclipticæ; inque $Tm$ demittatur perpendiculum $PH$. Et quoniam recta $ML$ parallela est plano eclipticæ, ideoque cum rectâ $ml$ quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LMPml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula $LMP$, $lmP$. Jam cum $MPm$ sit in plano orbis, in quo luna in loco $P$ movebatur, incidet punctum $m$ in lineam $Nn$ per orbis illius nodos $N$, $n$ ductam. Et quoniam vis quâ dimidium lineolæ $LM$ generatur, si tota simul & semel in loco $P$ impressa esset, generaret lineam illam totam; & efficeret ut luna moveretur in arcu, cujus chorda esset $LP$, atque ideo transferret lunam de plano $MPmT$ in planum $LPlT$; motus angularis nodorum à vi illâ genitus, æqualis erit angulo $mTl$. Est

114. (h) * *Et ML lineolam cujus dimidium Luna, impellente vi 3IT* describeret tempore quo Luna arcum PM percurreret; Assumit utique Newtonus ut rei conceptus facilior fiat, actiones omnes vis 3IT quæ exercitæ fuerunt dum arcus PM percurritur *simul & semel in loco P impressas esse*, sicque motum Lunæ ex P motæ, esse compositum ex velocitate acquisitâ secundum Tangentem, & ex velocitate ultimo genitâ per actionem vis 3IT agentem tempore æquali illi quo describitur arcus PM, ita ut Lunâ sequatur Diagonalem Parallelogrammi cujus unum latus sit PM alterum vero Parallelum & æquale lineæ LM; cum autem vis 3IT exiguo temporis intervallo sensibiliter non mutetur, toto tempore quo describeretur lineola PM ea vis pro uniformi adsumi potest, hinc via quæ describitur per velocitatem uniformiter crescentem ab eâ vi 3IT genitam est dimidia ejus viæ quæ describeretur per ultimam velocitatem in fine temporis PM genitam, & uniformem manentem toto tempore PM, quod eâdem ratione probari potest ac probatum fuit de gravitatis actione n. 30. Lib. I.

Quod si quis objiciat hinc fieri ut punctum L male repræsentet locum Lunæ, & locum ejus veriorem fore in medio inter M & L, respondemus solutionem hujus Problematis ex eâ positione Lunæ neutiquam pendere, hæc enim solutio duabus constat partibus, priori statuitur ratio motus nodorum in quibusvis punctis P orbitæ Lunaris, & hæc ratio eadem est sive ubique sumatur tota ML aut ubique ejus dimidium, dimidia enim sunt totis proportionalia; In secunda solutionis parte determinatur quantitas motus nodorum in syzygiis ipsis, respectu motus Lunæ in suâ orbita, & in hâc determinatione nihil deducitur ex magnitudine lineæ LM, sed tota hæc solutionis pars pendet ex proportione ipsius vis 3IT ad vim centripetam Lunæ, unde nullus error metuendus est in hoc calculo ex hâc falsâ suppositione Lunam in puncto L versari cum in medio inter L & M collocanda fuisset,

Est autem $ml$ ad $mP$ ut $ML$ ad $MP$, ideoque cum $MP$ ob datum tempus data sit, est $ml$ ut rectangulum $ML \times mP$, id est, (i) ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus $mTl$, si (k) mo- LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.




do angulus $TMl$ rectus sit, est ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id est (ob proportionales $Tm$ & $mP$, $TP$ & $PH$) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideo-

(i) * *Ut Rectangulam* $IT \times mP$. Linea $ML$ est duplum viæ quæ dato tempore per actionem $3IT$ percurritur, vis illa $3IT$ dato illo tempore uniformis manere censetur, itaque in diversis punctis $P$, viæ eodem dato tempore per actiones $3IT$ percursæ sunt ut illæ vires $3IT$, sive ut $IT$, ergo $ML$ ejus viæ duplum est etiam ut $IT$, & $MI \times mP$ est ut $IT \times mP$.

(k) * *Si modo angulus* $Tml$ *sit rectus* cum angulus $mTl$ sit admodum exiguus, si angulus $Tml$ sit rectus, usurpari poterit recta $ml$ pro arcu circuli cujus radius est $Tm$ ideoque (154. lib. 1.) angulus $mTl$ est ut $\frac{ml}{Tm}$. 114

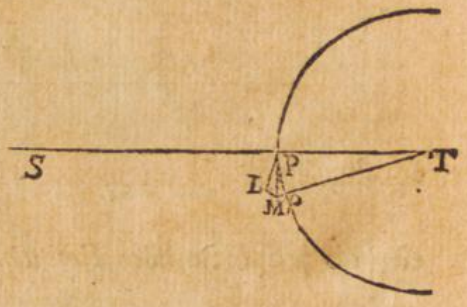
DE MUNDI SYSTEMATE.

que ob datam $TP$, ut $IT \times PH$. Quod si angulus $Tml$, seu $STN$ obliquus sit, (l) erit angulus $mTl$ adhuc minor, in ratione sinus anguli $STN$ ad radium, seu $AZ$ ad $AT$. Est igitur velocitas nodorum ut $IT \times RH \times AZ$, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum $TPI$, $PTN$ & $STN$.

Si anguli illi, nodis in quadraturis & luna in syzygiâ existentibus, recti sint, lineola $ml$ abibit in infinitum, & angulus $mTl$ evadet angulo $mPl$ æqualis. Hoc autem in casu, angulus $mPl$ est ad angulum $PTM$, quem luna eodem tempore motu suo apparente circa terram describit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus $mPl$ æqualis est angulo $LPM$, id est, angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem sola vis præfata solaris $3IT$, si tum cessaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare posset; (m) & angulus $PTM$ æqualis est angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem vis illa, quâ luna in orbe suo retinetur, si tum cessaret vis solaris $3IT$, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575.

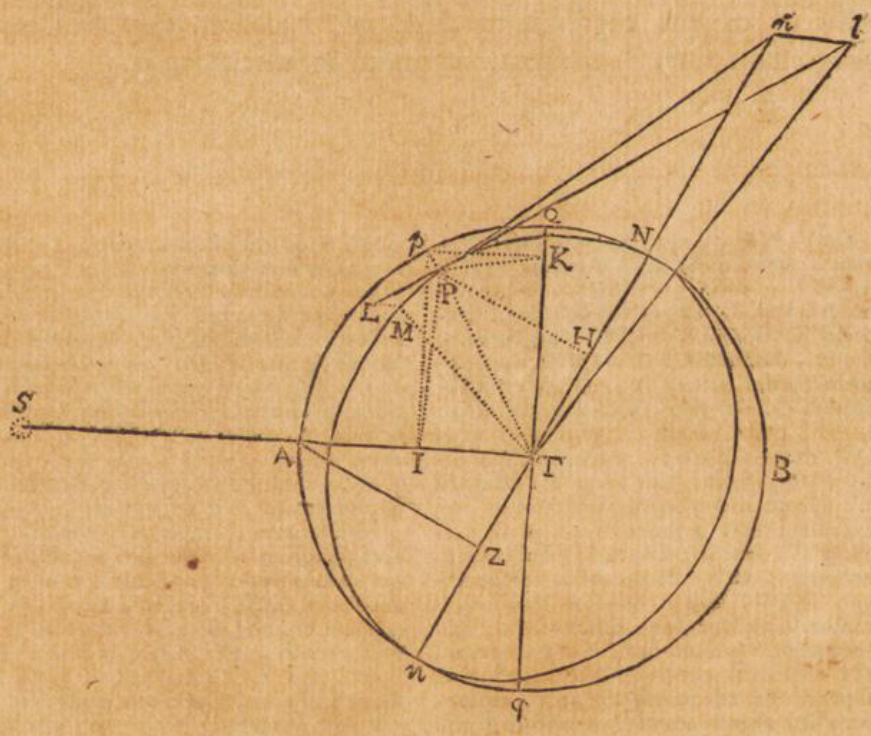
Ergo

114. (l) * *Erit angulus mTl, in ratione sinus anguli STN ad radium* in Triangulo $Tml$, est sinus anguli $mTl$ ad sinum Anguli $Tml$ ut latus $ml$ ad latus $Tl$; Sed propter exiguitatem lateris $ml$ respectu lateris $Tl$, ratio $ml$ ad $Tl$ eadem semper manere censetur qualiscumque sit angulus $Tml$, manentibus lineis $ml$ & $Tm$; in angulo enim maximo linea $Tl$ evadit $Tm + ml$, in minimo $Tm - ml$, est verò $ml$ quantitas evanescens respectu $Tm$, hinc illius incrementi aut decrementi $ml$ ratio nulla est habenda; Itaque manente quantitate $ml$ qualiscumque sit angulus $Tml$, ratio $ml$ ad $Tl$ eadem est, itaque etiam manet ratio sinus anguli $mTl$ ad sinum anguli $Tml$, sive etiam, cum anguli minimi, sint ut eorum sinus, anguli $mTl$ in variâ inclinatione lineæ datæ $ml$ ad lineam datam $Tm$ sunt inter se ut sinus Angulorum $Tml$, est ergo angulus $mTl$, in quâvis magnitudine anguli $Tml$ ad eum angulum $mTl$ quando angulus $Tml$ est rectus ut sinus anguli $Tml$ (vel, ut sinus anguli $ITn$ ipsi æqualis ob parallelas $ST$, $ml$) ad sinum anguli recti, hoc est ut sinus anguli $STN$ qui idem est cum sinu anguli $STn$ ad Radium. Q. E. O.




(m) * *Et angulus PTM æqualis est angulo deflexionis.* Angulus $MPp$ est angulus deflexionis de quo nunc agitur Triangula verò $MPp$, $MPT$ sunt similia ob angulum communem $PMT$, & angulos rectos $TPM$ & $PpM$, hinc anguli residui $PTM$, $MPp$ sunt æquales.

(n) Ergo cum motus medius horarius lunæ reſpectu fixarum ſit $32^{I}. 56^{II}. 27^{III}. 12^{IV\frac{1}{2}}$, motus horarius nodi in hoc caſu erit $33^{II}. 10^{III}. 33^{IV}. 12^{V}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33^{II}. 10^{III}. 33^{IV}. 12^{V}$. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (ſeu diſtantiarum lunæ à quadraturâ, lunæ à nodo, & nodi à ſole) ad cubum radii. LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROB. XI.




(n) * *Ergo* &c. Iſti anguli deflexionis debent eſſe ut vires illas deflexiones producentes, in hoc enim caſu, utráque vis agit perpendiculariter ad Tangentem PM hinc lineolæ Mp, ML per eas vires genitæ tempore eodem, eo nempe quo percurretur Tangentis portio PM, debent eſſe ut ipſæ illæ vires; eæ verò lineolæ ſumpto PM pro radio ſunt Tangentes angulorum deflexionis pPM, MPL, & anguli quam minimi ſunt ut ipſorum Tangentes, ergo anguli illi deflexionis ſunt ut vires illas producentes, motus autem horarii Lunæ & nodorum ſunt ipſi anguli PTM & mTl, qui ſunt ex demonſtratis æquales angulis deflexionum MPp, MPL, ergo motus horarii ſunt ut vires illas deflexiones producentes. Q. E. O. 114.

DE MUNDI SYSTEMATE.

(o) Et quoties ſignum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum verſatur. Aliis in caſibus regrediuntur, & per exceſſum regreſſus ſupra progreſſum ſingulis menſibus feruntur in antecedentia.

*Co-*

114. (o) * *Et quoties ſignum alicujus Anguli de affirmativo* &c. Angulos Q T P & N T P, poſitivos vocat Newtonus, quando punctum P eſt in conſequentia reſpectu punctorum Q vel N ad quæ referuntur, hoc eſt Angulus Q T P eſt poſitivus quoties arcus Q P, ab ultimâ quadraturâ Q numeratus in conſequentia non excedit 180gr. negativus verò cum arcus Q P excedit 180gr.; angulus N T P pariter eſt poſitivus cum arcus N P à nodo aſcendente in conſequentia numeratus non excedit 180gr. negativus verò eſt cum is arcus N P excedit 180gr. Quando enim arcus Q P, N P excedunt 180gr. tunc anguli Q T P, N T P non amplius numerantur ſecundum Lunæ directionem, ſeu ſecundum viam quam Luna eſt emenſa, ſed ſecundum viam quæ ipſi deſcribenda ſupereſt ut ad puncta Q & N redeat, hinc illi anguli negativi dicuntur, eorum reſpectu qui ſecundum viam à Lunâ deſcriptam menſurantur.

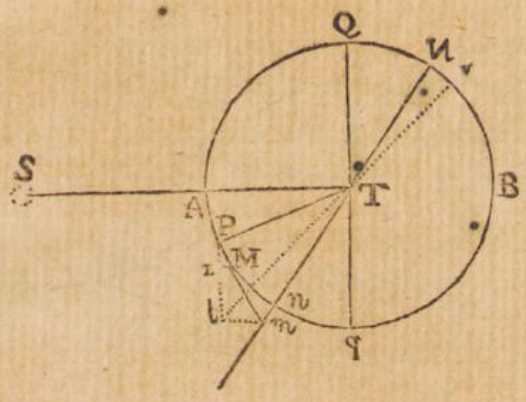
Angulus verò S T N poſitivus dicitur quando arcus A N à loco conjunctionis Lunæ cum Sole uſque ad nodum contra ordinem ſignorum numeratus, eſt minor 180gr., negativus verò dicitur cum excedit 180gr., quia, cum nodi moveantur contra ordinem ſignorum ſive in antecedentia, angulus S T N primo caſu exprimit viam nodi à ſyzygia, ſecundo caſu viam quam emetiri debet ut ad ſyzygiam redeat.

Probandum autem 1°. quod ſi tres illi Anguli Q T P, N T P, S T N ſint poſitivi motus nodorum eſt regreſſivus: 2°. Quod ſi unus eorum ſit negativus reliqui poſitivi motus nodorum eſt progreſſivus. 3°. Quod ſi unus eorum ſit poſitivus duo negativi, motus nodorum eſt regreſſivus. 4°. Denique quod ſi omnes ſint negativi motus nodorum iterum ſit progreſſivus, ſic enim *quoties ſignum alicujus anguli de affirmativo in negativum deque affirmativo in negativum mutatur debebit motus regreſſivus in progreſſivum & progreſſivus in regreſſivum mutari.*

*Art.* 1. Si tres Anguli ſint Poſitivi nodorum motus erit regreſſivus.

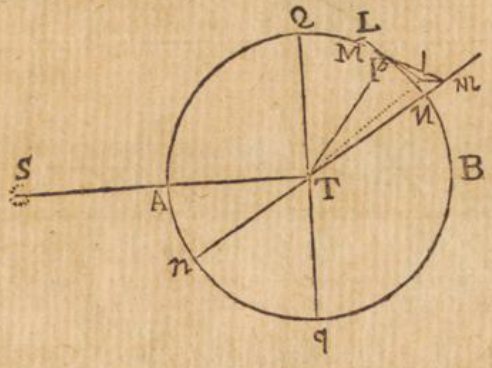
In hoc caſu, Arcus A N contra ordinem ſignorum ſumptus non excedit ſemicirculum ideoque punctum N erit in ſemicirculo A Q B; Præterea arcus Q P ſecundum ordinem ſignorum ſumptus, 180gr. non excedit, erit itaque punctum P in ſemicirculo Q A q; Denique arcus N P ſemicirculo major eſſe non debet, ſed poteſt vel quadrante minor vel quadrante major, ſit N P quadrante minor ut in figurâ Textus, in quâ reliquæ hujus caſus conditiones occurrunt, ex ipsâ hujuſce propoſitionis conſtructione liquet quod ductâ M L quæ exprimit actionem Solis, productâ M P quæ lineæ nodorum occurrit in m, productâ L P quæ occurrit plano Eclipticæ in l, ita ut m l ſit parallela lineæ M L, cum L ſit verſus Solem reſpectu puncti M & lineæ M P m, L P l ſeſe decuſſent punctum l erit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus A T l major erit quam angulus A T m ergo nodus promotus eſt contra ordinem ſignorum, hoc eſt ejus motus eſt regreſſivus.

Sit



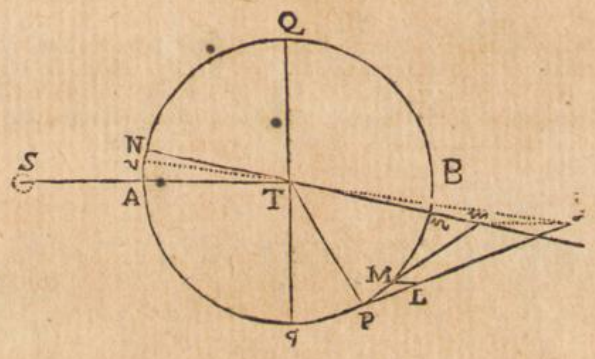

Sit NP quadrante major, tum lineæ PM, PL non amplius erunt retroproducendæ ut cum lineâ TN concurrant, sed antrorsum productæ concurrent cum ejus productione Tn, & quoniam sese non decussant, manebit punctum l propius Soli quam punctum m, & angulus ATl minor erit angulo ATm, ideoque productâ lineâ lT in V, angulus ATV complementum ad duos rectos anguli ATl, major erit angulo ATN complemento ad duos rectos anguli ATm, ergo nodus N promotus est contra ordinem signorum ut prius; Ergo ubicumque sit punctum P si tres anguli QTP, NTP, STN sint positivi motus nodi est regressivus. 114.

Art. 2. Mutetur horum Angulorum quivis ex positivo in negativum manentibus positivis angulis duobus reliquis motus nodorum ex regressivo progressivus fiet.

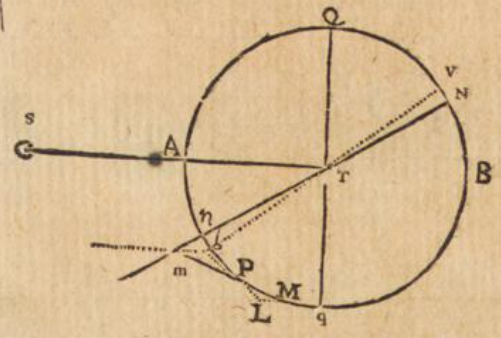


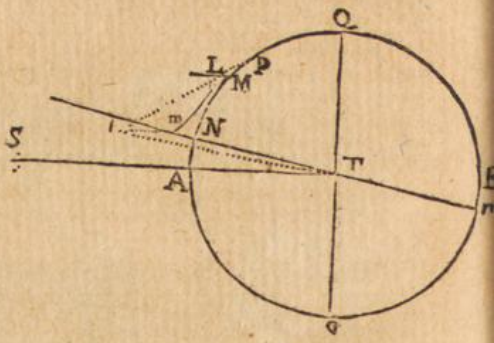

Cas. 1. Fiat angulus QTP negativus, hoc est, punctum P sit in semicirculo QBq, manente positivo angulo STN ita ut N sit in semicirculo AQB, & pariter manente positivo angulo NTP; observandum quod lineolâ ML in semicirculo QBq positionem habet oppositam illi quam habebat in semicirculo QAq ut constat ex Prop. LXVI. lib. 1. ita ut punctum L sit à Sole remotius quam punctum M; Itaque si PN sit minor quadrante, lineæ LP retroproducendæ erunt, & punctum l erit propius Soli quam punctum m; ideoque angulus ATl minor erit angulo ATm, ergo (cum diminuatur angulus ATN qui sumitur contra ordinem signorum) nodus secundum ordinem signorum est promotus ejusque motus progressivus est.

De Mundi Systemate.




114. Si verò NP sit major quadrante antrorsum productis lineis PM, PL punctum l manebit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus ATl major erit angulo ATm, productâ itaque lT in V, angulus lTV anguli AT lcomplementum minor erit angulo ATN, nodus ergo ab N versus A in consequentia processerit itaque motus nodi est ut prius progressivus.




Cas. 2. Sit angulus NTP negativus; hoc est sit punctum N in consequentia respectu puncti P, sit vero QTP positivus hoc est sit punctum P in semicirculo QAq & pariter sit STN positivus ita ut N sit in semicirculo AQB, si NP (secundum consequentia) sit minor tribus quadrantibus, P distabit à puncto n minus quadrante, ideoque retroproductis lineis MP, LP in m & l, cum l sit soli propius quam M, erit l à sole remotius quam m, ideoque angulus ATl major erit angulo ATn, & angulus ATV prioris complementum minor erit angulo ATN qui est anguli ATm complementum; processit ergo nodus ab N versus A, motus ergo nodi est progressivus.

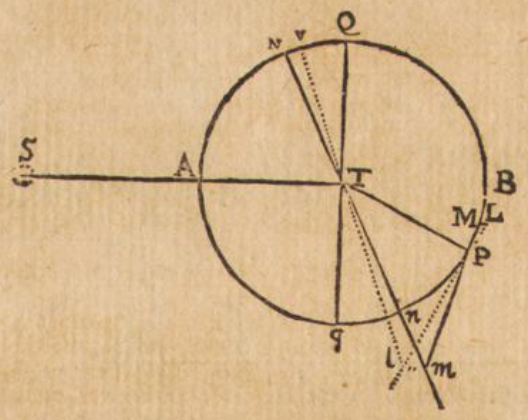
Si NP sit major tribus quadrantibus, P minus quadrante à puncto N distabit, cumque N sit in consequentia respectu puncti P ut & puncta M & L antrorsum producendæ sunt lineæ PM, PL ut plano Ecliptica occurrant in m & l, & cum L sit Soli vicinius quam M pariter l erit Soli vicinius quam m, hinc angulus ATl minor erit angulo ATN, nodus ergo ab N versus A processit & motus nodi est progressivus.

Cas. 3. Sit angulus STN negativus positivis existentibus angulis QTP, NTP. Sit NP minor quadrante, retroproducendæ sunt lineæ PM, PL ideoque l erit remotior à Sole, quam m, & angulus

lus ATl major erit quam ATm; vel ATN, cum ergo N sit in consequentia respectu puncti A, quia angulus STN est negativus, punctum l magis adhuc in consequentia processerit, motus ergo nodi erit progressivus. Sit NP major quadrante, antrorsum producendæ erunt lineæ PM, PL ut cum Ecliptica concurrant, à parte nodi n ideoque L erit propius Soli quam m, & angulus ATl minor erit angulo ATn; ideoque angulus ATV major erit quam ATN, ergo processit nodus ex N in V, secundum consequentia.

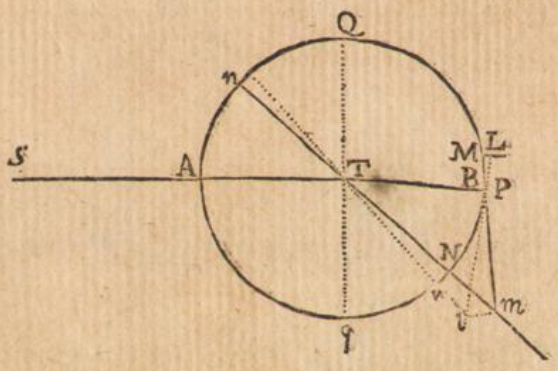
Art. 3. Sint duo ex tribus Angulis QTP, NTP, STN negativi, tertius positivus, motus nodorum ex progressivo regressivus fiet.

114.




Casus 1us. Sint QTP & NTP negativi, solus STN sit positivus, distet P à nodo N minus tribus quadrantibus, sive minus quadrante à puncto n, idque in consequentia, retro producendæ erunt lineæ PM, PL, ut PM lineæ nodorum occurrat in m, & LP in l vicinius Soli, hinc ATl minor erit ATm & ideo ATV major quam ATN sed punctum N est in antecedentia respectu puncti A, ergo V est in antecedentia respectu puncti N, ergo nodus regreditur; Distet P ab N plus tribus quadrantibus, antrorsum producendæ sunt lineæ PM, PL ut occurrant lineæ nodorum & l manebit à Sole remotius quam m & angulus ATl major erit angulo ATN regreditur ergo Nodus.

Cas. 2. Sint QTP & STN negativi, solus vero NTP positivus, sit NP minor quadrante, retroproductis lineis, cum L sit remotius à Sole quam M, erit l ob decussationem linearum propius Soli & angulus ATl sive ATV minor angulo ATN, sed quia hic angulus est negativus, complementa ad quatuor rectos erunt sumenda, & arcus AQPV major erit arcu AQPN ergo nodus regreditur.



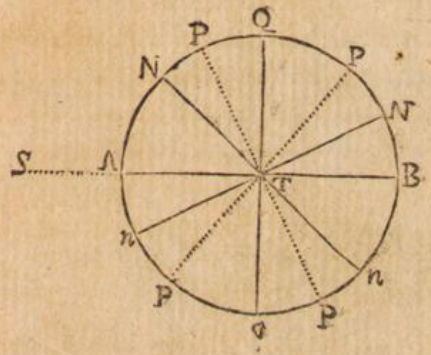

214. Sit N P major quadrante, lineis P M, P L productis occurrent Ecclipticæ à parte puncti n, & propter angulum Q T P negativum cum P sit in semicirculo q B Q erit l ut & L remotius à Sole quam m & M, ideo angulus A T n minor est angulo A T l & complementum prioris anguli A T N major est angulo A T V, sed A est in antecedentia respectu puncti N, ergo etiam V est in antecedentia respectu puncti N regreditur ergo nodus.

Cas. 3. Sint S T N & N T P negativi, Q T P vero positivus, punctum L est ubivis propius Soli quam M, si P minus tribus quadrantibus distet ab N retro producendæ sunt lineæ P M, P L, à parte puncti n & erit A T l majus quam A T n, sed quia S T N est negativus, n est in semicirculo superiori A Q B, & n est in antecedentia respectu A, ideoque l est in antecedentia respectu n, ut etiam V respectu N, regreditur ergo nodus; sit N P tribus quadrantibus major, lineæ P M, P L antrorsum sunt producendæ, l erit propius soli quam m & A T l sive A T V minor quam A T N, sed quia A T N est negativus, ideoque A est in Antecedentia respectu puncti N erit etiam V in Antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Art. 4. Si tres anguli Q T P, N T P, S T N sint negativi motus ex regressivo progressivus fiet; ut Hypothesis hujus articuli obtineat, oportet ut nodus N & Luna P sit in quadrante q B; nam cum angulus Q T P sit negativus, P debet esse in semicirculo q B Q; cum S T N sit negativus, N debet esse in semicirculo A q B, & cum N T P sit negativus N debet esse in consequentia respectu P; ergo, N non potest versari in quadrante A q, nec P in quadrante B Q: Antrorsum ergo erunt producendæ lineæ P M, P L ut Ecclipticæ occurrant, erit l remotius à Sole quam m, & angulus A T V major angulo A T N, sed hic angulus est negativus, sive est N in consequentia respectu A, erit ergo etiam V in consequentia respectu puncti N, nodus itaque progreditur.

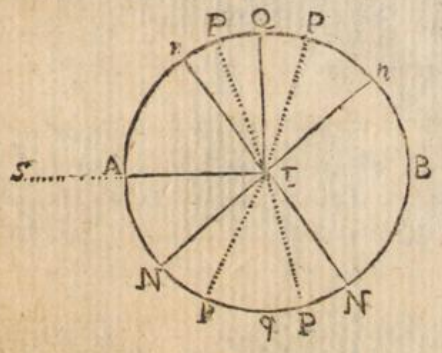
His positis dico, quod motus nodi progressivus evadit dum Luna versatur inter alterutrum nodum & quadraturam ipsi proximam; quadraturam nodo proximam vocat Newtonus, si quadraturæ à nodo distantia quadrante major non sit.

Si




Sit enim angulus ATN positivus, quoniam Luna sive punctum P est inter puncta Q & N vel q & n ex Hypothesi, alteruter ex angulis QTP, NTP erit positivus alter negativus; nam sit N vel n in semicirculo QBq, tum quia P est inter Q vel q & N vel n, erit P in eodem semicirculo QBq, ideoque angulus QTP erit negativus, sed angulus NTP erit positivus, nam quia P est inter N & Q aut q & n, & Q est in consequentia respectu N, erit etiam P in consequentia respectu puncti N, & pariter dum n versatur in semicirculo QBq, n est in consequentia respectu puncti q & arcus Nq in consequentia sumptus nec non arcus NP singuli minores erunt arcu Nn sive minores semicirculo, ergo utroque casu angulus NTP erit positivus.

Manente ATN positivo sint N vel n in semicirculo QAq, tum quia P est inter Q & N aut n & q, erit etiam P in semicirculo QAq, ideoque angulus QTP erit positivus, sed angulus NTP erit negativus, nam quia Q est in antecedentia respectu puncti N, P inter Q & N positum erit in antecedentia respectu N; & in casu quo P foret inter n & q quia q est in hac Hypothesi in consequentia respectu n, P foret etiam in consequentia respectu n, ideoque plus semicirculo à puncto N distaret utroque ergo casu angulus NTP negativus foret.

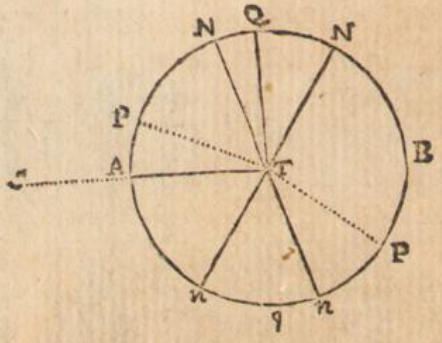



Sit angulus ATN negativus, sitque N in quadrante qA, vel n in quadrante AQ, & Lunâ P inter N & q vel n & Q, liquet angulum QTP fore positivum, quia est P in semicirculo QAq; angulus autem NTP erit etiam positivus, nam sit N in quadrante qA, q est in consequentia respectu N, ergo P quod est inter N & q est etiam in consequentia respectu N; sit n in quadrante AQ, cum n sit in consequentia respectu Q, erit etiam in consequentia respectu P, hinc arcus NP in consequentia minor erit semi-circulo, utroque ergo casu angulus NTP est positivus. 2114.

Itaque si angulus ATN sive STN sit positivus, ubivis sit N in semicirculo AQB & si angulus STN sit negativus sed ita ut sit N in quadrante qA, quando Luna erit posita inter Nodum utrumvis N vel n, & quadraturam proximam unus è tribus angulis duntaxat erit negativus duo reliqui erunt positivi, itaque per articulum 2um. motus nodi progressivus erit.

Existente verò angulo STN negativo, & N in quadrante qB vel n in quadrante BQ Luna verò posita inter utrumvis nodum & quadraturam proximam reliqui duo anguli QTP, NTP negativi erunt; liquet enim facile punctum P in hâc hypothesi versari in semicirculo qBQ ideoque angulum QTP esse negativum, præterea quia q est in antecedentia respectu N ex hypothesi, P est etiam in antecedentia respectu N, & quia Q est in consequentia respectu n, erit etiam P in consequentia respectu n, ideoque punctum N plus semicirculo à puncto P distabit, itaque sive sit P inter q & N sive inter n & Q in semicirculo qBQ tres anguli erunt negativi, sed per

DE MUNDI SYSTEMATE.



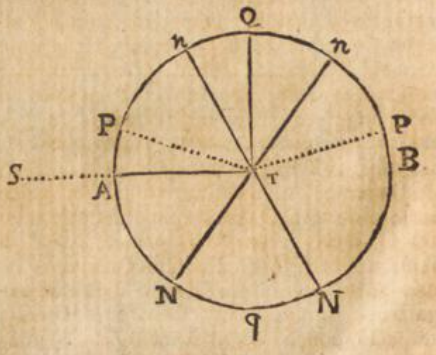

114. Art. 4. eo caſu motus nodi eſt progreſſivus; Ergo in omni caſu, ſi Luna ſit inter nodum & quadraturam proximam nodi progrediuntur.

In omnibus aliis caſibus motus nodi eſt regreſſivus; Nam quando omnes anguli ſunt poſitivi, vel quando duo anguli ſunt negativi & tertius poſitivus motus nodi regreſſivus eſt per Art. 1. & 3., alterutrum autem evenire neceſſe eſt cum P non eſt inter nodum & quadraturam proximam; Hoc enim poſito, ſit ut prius angulus STN poſitivus & N in quadrante QTA, & P ubivis inter N & remotiorem quadraturam q, vel inter n & remotiorem quadraturam Q; ſi P ſit inter N & q angulus QTP eſt poſitivus ſiquidem P eſt in ſemicirculo QAq, & quia N eſt nunc inter P & Q, & N eſt in conſequentia reſpectu Q, erit P in conſequentia reſpectu N ergo angulus NTP eſt poſitivus; ſi P ſit inter n & Q angulus QTP eſt negativus, ſed & pariter angulus NTP, nam cum P ſit in conſequentia reſpectu n plus ſemicirculo à puncto N diſtabit.

Sit N ubivis in quadrante BTQ, & P inter Q & n vel inter q & N primo caſu omnes angulos fore poſitivos, altero angulos QTP & NTP fore negativos ut in præcedenti demonſtrabitur.

Denique angulus STN ſit negativus, & P non ſit inter quadraturam & nodum ſed alibi ubivis, alteruter ex angulis QTP, NTP poſitivus erit negativus alter; ſit N in quadrante ATq & P in arcu QAN (quadrante major) erit QTP poſitivus & NTP negativus, ſiquidem P eſt in antecedentia reſpectu N, ſit P in arcu qBn erit QTP negativus, ſed NTP poſitivus nam arcus NP in conſequentia ſumptus ſemicirculo minor erit.

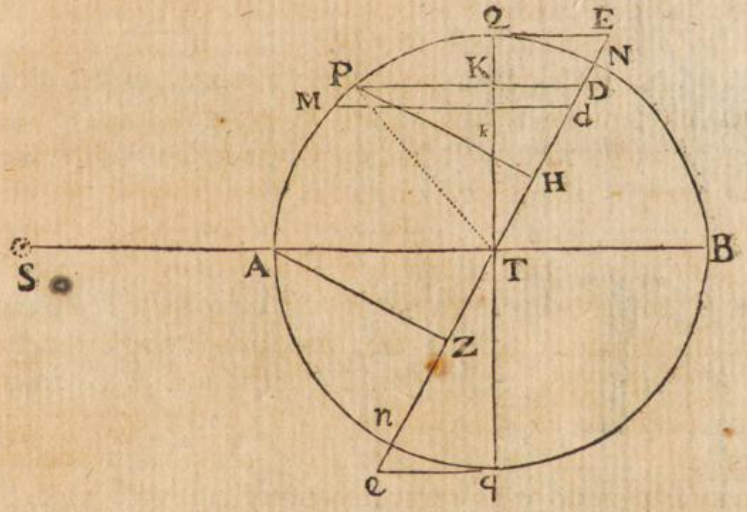
Sit N in quadrante qTB, ſi P ſit in arcu nq, angulus QTP poſitivus eſt ſed angulus NTP negativus quia arcus Nn+nP ſemicirculo major eſt, ſi P ſit in arcu NQ angulus QTP eſt quidem negativus, ſed quia P eſt in conſequentia reſpectu N minuſque ſemicirculo diſtat, ergo angulus NTP eſt poſitivus; Hinc ubivis ſit P ſi modo non ſit inter nodum & quadraturam proximam, vel omnes anguli




erunt Poſitivi, vel duo ſimul negativi alter verò poſitivus.

Cum ergo arcus inter N vel n & quadraturam proximam, numquam excedat quadrantem, eoque ſit ſæpe minor; è contra verò, arcus inter N vel n & quadratu-

*Corol.* 1. Hinc si à dati arcus quam minimi $PM$ terminis $P$ & $M$ ad lineam quadraturas jungentem $Qq$ demittantur perpendicula $PK$, $Mk$, eademque producantur donec secent lineam nodorum $Nn$ in $D$ & $d$; erit motus horarius nodorum




ut area $MPDd$ & quadratum lineæ $AZ$ conjunctim. Sunto enim $PK$, $PH$ & $AZ$ prædicti tres sinus. Nempe $PK$ sinus distantiæ lunæ à quadraturâ, $PH$ sinus distantiæ lunæ à nodo, & $AZ$ sinus distantiæ nodi à sole: & erit velocitas nodi ut con-

draturam remotiorem numquam sit minor quadrante & sæpe eo major, majori parte revolutionis Lunæ, Nodi regrediuntur & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus nodi feruntur in Antecedentia.

Potuissent Articuli 4. supra demonstrati, ex solâ vi signorum Algebricorum deduci, eamque demonstrationis speciem adhibere videtur Newtonus; at alicui negotium facessere potuissent horum signorum mutationes in angulis spectatæ, in quibus cum angulus ad semicirculum creat & maximus fit, mox negativus evadit, quod sane non eveniſſet si viæ descriptæ, non verò anguli considerati fuissent; Juvant Algebricæ illæ consequentiæ, in retegendis prompte Propositionibus iisque ad generalissimas expressiones revocandis, sed in nonnullis quæstionibus ad certitudinem plenam idearumque claritatem requiritur ut, per casuum enumerationem, illæ Algebricæ consequentiæ, velut ad lapidem Lydium explorentur. Cæterum, quamvis figuras unicuique casui proprias non delineaverimus, facile erit ex iis quæ sculptæ sunt, figuras deficientes imaginari aut describere. *114.

DE MUNDI SYSTEMATE.

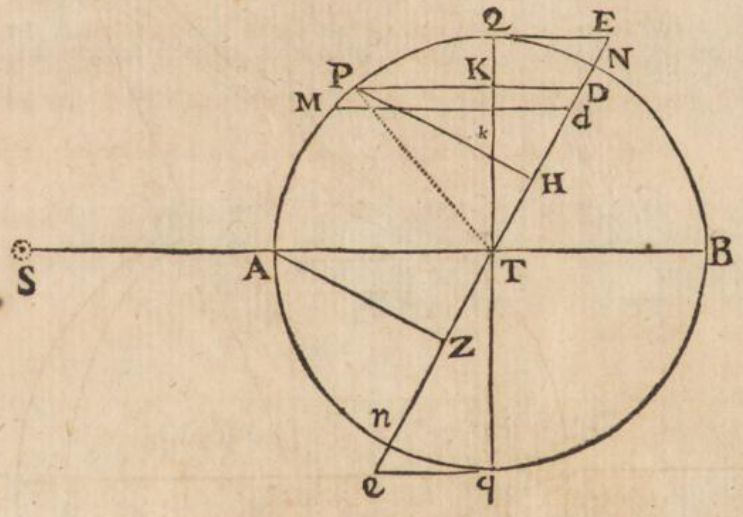
contentum $PK \times PH \times AZ$. Est (p) autem $PT$ ad $PK$ ut $PM$ ad $Kk$, ideoque ob datas $PT$ & $PM$ est $Kk$ ipsi $PK$ proportionalis. Est & $AT$ ad $PD$ ut $AZ$ ad $PH$, & propterea $PH$ rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id est, ut area $PDdM$ & $AZ$ *qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

*Corol.* 2. In datâ quâvis nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in syzygiis lunæ, ideoque est ad $16^{II}.\ 35^{III}.\ 16^{IV}.\ 36^{V}.$ ut quadratum sinus distantiæ nodorum à syzygiis ad quadratum radii, sive ut $AZ$ *qu.* ad $AT$ *qu.* Nam si luna uniformi cum motu perambulet semicirculum $QAq$, summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna pergit à $Q$ ad $M$, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem $QE$ terminatur; & quo tempore luna attingit punctum $n$, summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea $PD$ describit, dein lunâ pergente ab $n$ ad $q$, linea $PD$ cadet extra circulum, & aream $nqe$ ad circuli tangentem $qe$ terminatam describet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, subduci debet de areâ priore, & cum æqualis sit areæ $QEN$, relinquet semicirculum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore luna circulum describit est area circuli totius. At area $PDdM$, ubi luna versatur in syzygiis, est rectangulum sub arcu $PM$ & radio $PT$; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentiâ totâ & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in syzygiis lunaribus, spatium duplo majus describerent quam reverâ describunt; & propterea motus mediocris quocum, si

(p) * *Est autem* PT *ad* PK *ut* PM *ad* Kk ex notissimâ circuli proprietate Ra- dium esse ad ordinatam ut est fluxio arcus ad fluxionem abscissæ.

114.

si uniformiter continuaretur, spatium à se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semissis motus quem habent in syzygiis lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si nodi in quadraturis versantur, sit $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{iv}.\ 12^{v}$, motus mediocris horarius in hoc casu erit $16^{II}.\ 35^{III}.\ 16^{iv}.\ 36^{v}$. Et (q) cum motus horarius nodorum semper sit ut *AZ qu.* &



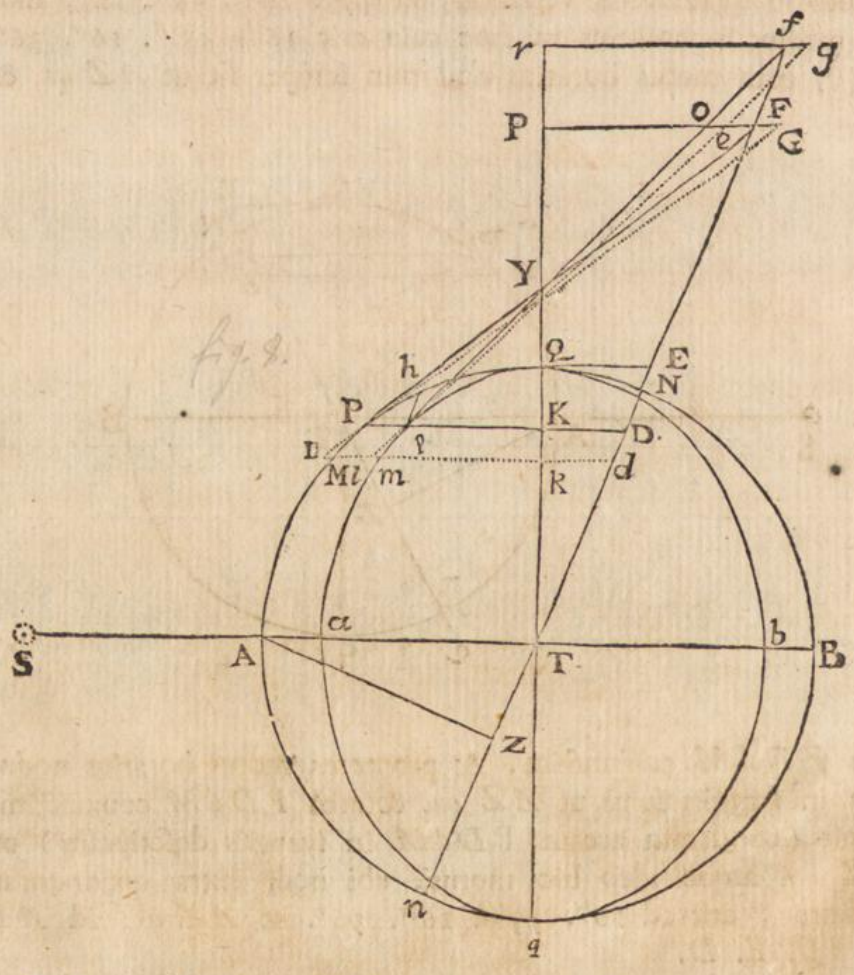

area *PDdM* conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in syzygiis lunæ ut *AZ qu.* & area *PDdM* conjunctim, id est (ob datam aream *PDdM* in syzygiis descriptam) ut *AZ qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas versantur, erit ad $16^{II}.\ 35^{III}.\ 16^{iv}.\ 36^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.* *Q. E. D.*

(q) * *Et cum motus horarius nodorum sit &c.* per Corollarium præcedentem. 614

DE MUNDI SYSTEMATE.

## PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

*Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe elliptico* (r).




Defignet $Qpmaq$ ellipfin, axe majore $Qq$, minore $ab$ defcriptam, $QAqB$ circulum circumfcriptum, $T$ terram in utriufque centro communi, $S$ folem, $p$ lunam in ellipfi motam, & $pm$

114. (r) * *In orbe Elliptico* illo nempe orbe in quem figura circularis orbitæ Lunaris mutatur per actionem Solis, quique axem habet majorem ad axem minorem in ratione 70. ad 69. per Prop. XXVIII. hujufce.

$pm$ arcum quem datâ temporis particulâ quam minimâ describit, $N$ & $n$ nodos linea $Nn$ junctos, $pK$ & $mk$ perpendicula in axem $Qq$ demissa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in $P$ & $M$, & lineæ nodorum in $D$ & $d$. (f) Et si luna, radio ad terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipsi ut area $pDdm$ & $AZq$ conjunctim.

Nam si $PF$ tangat circulum in $P$, & producta occurrat $TN$ in $F$ & $pf$ tangat ellipsin in $p$ & producta occurrat eidem $TN$ in $f$, (t) conveniant autem hæ tangentes in axe $TQ$ ad $Y$; & si $ML$ designet spatium quod luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum $PM$, urgente & impellente vi prædictâ $3IT$, seu $3PK$ motu transverso describere posset, & $ml$ designet spatium quod luna in ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$ seu $3pK$, describere posset, & producantur $LP$ & $lp$ donec occurrant plano ecliptiæ in $G$ & $g$; & jungantur $FG$ & $fg$, quarum $FG$ producta secet $pf$,

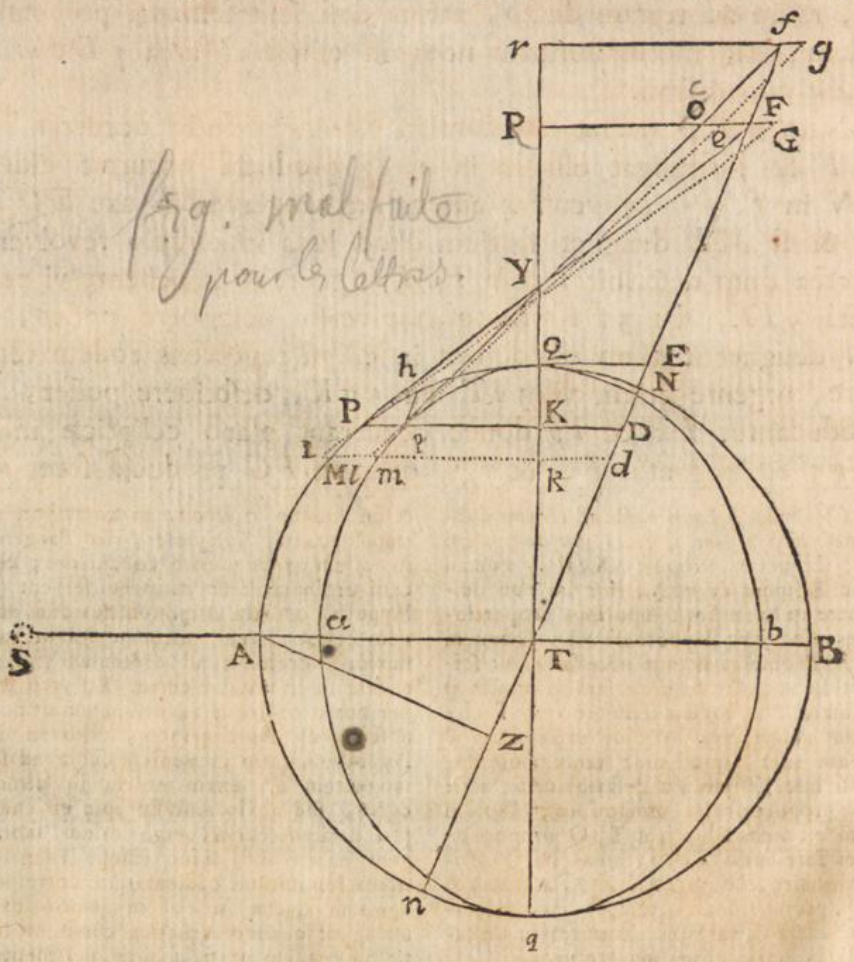
(f) * *Et si Luna radio ad terram ducto describat aream tempori proportionalem* &c. Liquet ex Propos. XXVIII. Lunam hanc Ellipsim de quâ agitur ita non describere ut areæ sint temporibus proportionales, sed hæc Hypothesis ad solutionem hujus Problematis erat necessaria, ut scilicet Luna possit fingi versari in puncto p ordinatæ P K eodem tempore quo si circulum describeret in ejus extremitate P versata esset, quod tunc tantùm obtineret si hæc Ellipsis ita describatur ut areæ sint proportionales temporibus; Notum enim est areas Ellipticas T p Q proportionales fore areis T P Q, areas T P Q proportionales esse arcubus P Q, arcus verò P Q proportionales temporibus, si quidem Luna citra Solis actionem in circulo lata, uniformiter moveretur.

Verum hæc falsa Hypothesis corrigitur in eâ solutionis hujus Problematis parte quæ post Corollarium adjicitur.

(t) * *Conveniant autem hæ Tangentes in axe T Q ad Y.* Liquet ex not. 257. Lib. I. Quod si duæ curvæ communem axem habentes, sint tales ut ipsarum ordinatæ datam inter se rationem servent, & in summo ordinatarum correspondentium ducantur Tangentes, illæ Tangentes in eodem axeos puncto concurrunt; Nam cum ordinatæ datam rationem servent (ex Hypoth.) oportet ut ipsarum fluxiones eamdem etiam servent rationem ita ut ratio fluxionis ordinatæ ad ordinatam ipsam, eadem sit in utrâque curvâ. Est verò semper fluxio ordinatæ ad ordinatam ut fluxio abscissæ ad subtangentem, ergo in hâc Hypothesi, ratio fluxionis abscissæ ad subtangentem est etiam eadem in utraque curva, sed fluxio abscissæ ipsa est eadem pro utrâque curvâ, ergo etiam subtangens eadem est, hinc itaque Tangentes in extremitatibus ordinatarum correspondentium ductæ in eodem puncto axem attingunt quando utriusque curvæ ordinatæ ad eadem axeos puncta pertinentes, constantem rationem servant: Notum autem est, ex not. 247 Lib I, Quod si circulus describatur super axim Ellipseos, ordinatæ circuli & Ellipseos erunt inter se in ratione datâ axeos communis circulo & Ellipsi ad alterum axem, sive esse P K ad p K ut A T ad a T, hinc ergo Tangentes in punctis P & p ductæ axi occurrent in eodem puncto Y. 114

De Mundi Systemate.

$pg$ & $TQ$ in $c$, $e$ & $R$ respectivè, & $fg$ producta secet $TQ$ in $r$. Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in ellipsi, ut $PK$ ad $pK$, seu $AT$ ad $aT$; erit spatium $ML$ vi priore genitum, ad spatium $ml$ vi posteriore ge-




nitum, ut $PK$ ad $pK$, id est, ob similes figuras $PYKp$ & $FYRc$, ut $FR$ ad $cR$. Est autem $ML$ ad $FG$ (ob similia triangula $PLM$, $PGF$) ut $PL$ ad $PG$, hoc est (ob parallelas $Lk$, $PK$, $GL$) ut $pl$ ad $pe$, id est (ob similia triangula $plm$, $cpe$) ut $lm$ ad $ce$; & inversè ut $LM$ est ad $lm$, seu $FR$ ad $cR$, ita est $FG$ ad $ce$. Et propterea si $fg$ esset ad $ce$ ut $fY$ ad $cY$, id est, ut $fr$ ad $cR$ (hoc est, ut $fr$ ad $FR$

& $FR$ ad $cR$ conjunctim, id est, ut $fT$ ad $FT$ & $FG$ ad $ce$ conjunctim) quoniam ratio $FG$ ad $ce$ utrinque ablata relinquit rationes $fg$ ad $FG$ & $fT$ ad $FT$, foret $fg$ ad $FG$ ut $fT$ ad $FT$; atque ideo anguli, quos $FG$ & $fg$ subtenderent ad terram $T$, (u) æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente propositione exposuimus) sunt motus nodorum, quo tempore luna in circulo arcum $PM$, in ellipsi arcum $pm$ percurrit: & propterea motus nodorum in circulo & ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo $fg$ esset ad $ce$ ut $fY$ ad $cY$, id est, si $fg$ æqualis esset $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verùm ob similia triangula $fgp$, $cep$, est $fg$ ad $ce$ ut $fp$ ad $cp$; ideoque $fg$ æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & (x) propterea angulus, quem $fg$ reverâ subtendit, est ad angulum priorem quem $FG$ subtendit, hoc est, motus nodorum in ellipsi ad motum nodorum in circulo, ut hæc $fg$ seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem $fg$ seu $\frac{ce \times fY}{cY}$, id est, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, seu $fp$ ad $fY$ & $cY$ ad $cp$, hoc est, si $ph$ ipsi $TN$ parallela occurrat $FP$ in $h$, ut $Fh$ ad $FY$ & $FY$ ad $FP$; hoc est, ut $Fh$ ad $FP$ seu $Dp$ ad $DP$, (y) ideoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum (per corol. 1. prop. xxx.) area posterior & $AZq$ conjunctim proportionalia sint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior & $AZq$ conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipsi. *Q. E. D.*

LIBER TERTIUS. PROP. XXXI. PROB. XII.

*Co-*

(u) * *Atque ideo anguli quos FG & fg subtenderent ad terram T æquarentur inter se*, nam cum lineæ FG & fg sint inter se Parallelæ & proportionales lineis TF, Tf, recta TG producta transibit etiam per g, ideoque per eundem angulum videbuntur lineæ FG & fg ex terrâ T.

(x) * *Et propterea angulus quem fg reverâ subtendit est ad angulum priorem ut hæc fg ad priorem fg.* Cum enim linea fg sit minima, respectu lineæ Tg linea Tg eadem manere censenda est in utrâque magnitudine lineæ fg hic assumpta; sed in Triangulo utroque Tfg. Sinus anguli f est ad lineam Tg, ut sinus anguli fTg ad lineam fg; ergo cum maneat angulus f, & linea Tg; ratio sinus anguli fTg ad lineam fg erit data, sive quia anguli minimi sunt ut sui sinus, erit angulus quem fg reverâ subtendit ad angulum quem ficta fg subtendebat, ut vera fg ad fictam fg. LEM. IV.

(y) * *Ideoque ut area Dpmd ad aream DPMd.* nempe propter communem altitudinem Kk, nam Trapezia pDdI, PDdL, pro Parallelogrammis assumi possunt quæ sunt ut Bases Dp, DP, & altitudines Kk conjunctim.

DE MUNDI SYSTEMATE.

*Corol.* Quare cum, in datâ nodorum positione, summa omnium arearum $pDdm$, quo tempore luna pergit à quadraturâ ad locum quemvis $m$, sit area $mpQEd$, quæ ad ellipseos tangentem $QE$ terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, sit area ellipseos totius: motus mediocris nodorum in ellipsi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipsis ad circulum; id est, ut $Ta$ ad $TA$, seu 69 ad 70. Et propterea, cum (per corol. 2. prop. xxx) motus mediocris horarius nodorum in circulo sit ad $16^{''}. 53^{'''}. 16^{iv}. 36^{v}$. ut $AZ\ qu.$ ad $AT\ qu.$ si capiatur angulus $16^{''}. 21^{'''}. 3^{iv}. 30^{v}$. ad angulum $16^{''}. 35^{'''}. 16^{iv}. 36^{v}$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipsi ad $16^{''}. 21^{'''}. 3^{iv}. 30^{v}$. ut $APq$ ad $ATq$; hoc est, ut quadratum sinus distantiæ nodi à sole ad quadratum radii.

(z) Cæterum luna, radio ad terram ducto, aream velocius describit in syzygiis quam in quadraturis, & eo nomine tempus in syzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & unà cum tempore motus nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis lunæ ad ejus momentum in syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in octantibus est ad excessum in syzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus lunæ in singulis orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad excessum temporis in quadraturis, ac defectum in syzygiis, ab hâc causâ oriundum, ut 11023 ad 50 quam proximè. (a) Pergendo autem à quadraturis ad syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in quadraturis, sit ut quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturis quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque

114. (z) * *Cæterum Luna*, &c. Hæc omnia ex Prop. 26. hujusce deducuntur. Vide not. r Prop. 26. & locum ad quem refertur.

(a) * *Pergendo autem à quadraturis.*

que & momentum mediocre in octantibus, eſt ut differentia inter quadratum ſinus diſtantiæ lunæ à quadraturis & quadratum ſinus graduum 45, ſeu ſemiſſem quadrati radii; & incrementum temporis in locis ſingulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & ſyzygias, eſt in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore luna percurrit ſingulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. Eſt enim (b) motus iſte, dum luna percurrit $PM$ (cæteris paribus) ut $ML$, & $ML$ eſt in duplicatâ ratione temporis. Quare (c) motus nodorum in ſyzygiis, eo tempore confectus quo luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; eſtque (d) decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100

(b) * *Eſt enim motus iſte (cæteris paribus) ut ML, & ML eſt in duplicatâ ratione temporis*, motus nodorum generatur per actionem vis Solaris 3 I T quæ uniformis manere cenſetur dum deſcribitur arcus P M, hinc creſcit L M in duplicatâ ratione temporis Lem. X. Lib. I., expreſſit autem Newtonus motum nodorum fingendo in puncto ipſo P, à Sole ſimul & ſemel eam actionem imprimi quæ toto tempore quo arcus P M deſcribitur ab ipſo exercita fuiſſet, & lineam L M eſſe ſpatium quod velocitate ita productâ ipſo eo tempore quo arcus P M percurritur deſcriberetur, hinc itaque conſtat eam lineam fore in duplicatâ ratione temporis, (vid. not. 28. & 30. lib. 1.) hæc autem linea L M eſt proportionalis verò effectui actionis Solis (vid. not. h Prop. XXX. hujuſce).

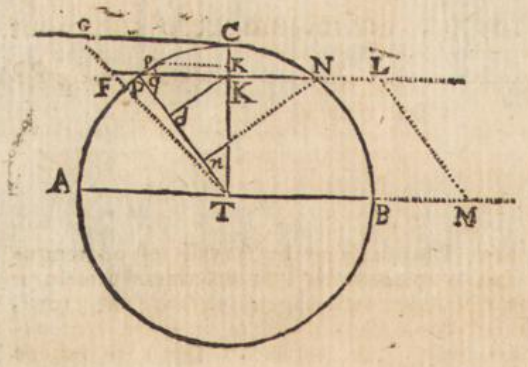
(c) * *Quare motus nodorum.* Momentum areæ in ſyzygiis ſive velocitas Lunæ in ſyzygiis eſt ad velocitatem mediocrem in octantibus ut 11073 ad 11023 ergo tempus quo Luna æquales arcus P M deſcribet in ſyzygiis eſt ad tempus quo eos arcus P M deſcribere cenſebatur velocitate mediocri ut 11023 ad 11073, motus ergo nodorum in ſyzygiis fit minor quàm adſumptus fuerat in ratione duplicatâ numerorum 11023 & 11073. 114.

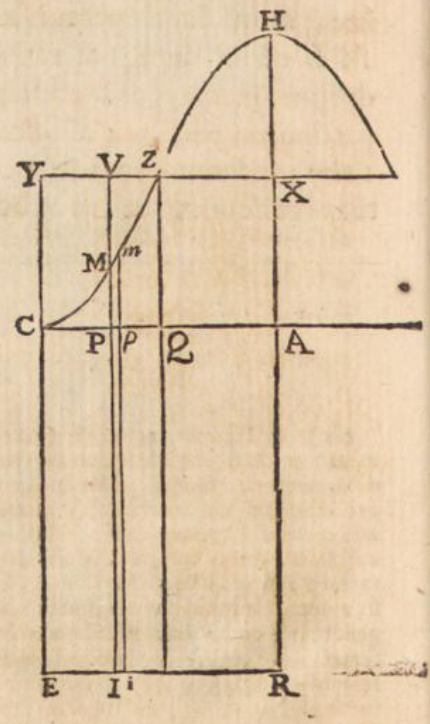
(d) * *Eſtque decrementum ad motum reliquum ut* 100 *ad* 10973, *ad motum totum ut* 100 *ad* 11073. Motus reliquus eſt ad motum totum ut $\overline{11023}^2$ ad $\overline{11073}^2$ ſive ut $\overline{11073-50}^2$ ad $\overline{11073}^2$; ſive priorem quantitatem ad quadratum evehendo ſecundum formulam vulgarem dignitatum ut $\overline{11073}^2-2\times50\times11073+\overline{50}^2$ ad $\overline{11073}^2$ negligatur terminus $\overline{50}^2$, cæterorum enim reſpectu evaneſcit fiet motus reliquus ad totum ut $\overline{11073}^2-2\times50\times11073$ ad $\overline{11073}^2$, & dividendo per 11073, ut $11073-2\times50$ ad 11073.

Eſt ergo differentia motûs reliqui & motus totius h. e. motûs decrementum ad motum totum, ut $2\times50$ ſive 100 ad 11073, ideoque etiam eſt motus decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973.

DE MUNDI SYSTEMATE.

100 ad 11073 quam proximè. (e) Decrementum autem in locis inter octantes & syzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, est quam proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in syzygiis & differentia inter quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturâ & semissem quadrati radii ad semissem quadrati radii conjunctim. Unde



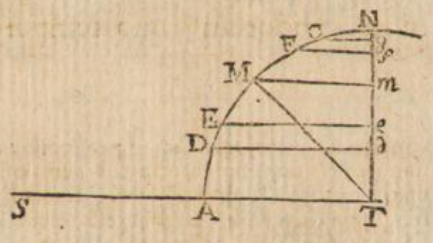




114. (e) * *Decrementum inter octantes & syzygias & incrementum inter octantes & quadraturas est quam proximè &c.* Resumptis iis quæ in Prop. XXVI. not. 112. sunt dicta, designet CP distantiam Lunæ à quadraturâ, lineâ IM exprimet ejus velocitatem & IV exprimet velocitatem mediocrem, idcircò tempus quo describitur arcus PM hâc velocitate IM, est ad tempus quo velocitate mediocri IV describeretur, ut IV ad IM, ideoque motus nodorum verus foret ad eorum motum si Luna mediocri suâ velocitate ferretur ut $\overline{IV}^2$ ad $\overline{IM}^2$ sive ut $IV^2$ ad $\overline{IV \pm VM}^2$ aut ut $IV^2$ ad $IV^2 \pm 2IV \times VM + VM^2$ & neglectâ quantitate $\overline{VM}^2$ divisisque terminis per IV ut IV ad $IV \pm 2VM$; & convertendo differentia motus veri nodorum & motus inventi, est ad motum inventum ut $\pm 2VM$ ad $IV \pm 2VM$, hinc illa differentia, sive incrementum aut

(f) Unde si nodi in quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde distantia, & alia duo à syzygiâ & quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter syzygiam & octantem, sub-

aut decrementum motus nodorum est semper æquale motui nodorum qualis inventus fuerat ducto in 2 V M & diviso per J V ± V M, ideoque cum J V ± 2 V M pro constanti assumi possit quia 2 V M ferè evanescit respectu quantitatis J V, est illud incrementum aut decrementum ut motus nodorum qualis inventus fuerat & V M conjunctim; est verò V M differentia inter Z Q & M P, & sunt Z Q & M P ut quadrata sinuum arcuum C Q & C P, arcus verò C Q est 45gr. ex demonstratis ad Prop. XXVI. & quadratum ejus sinus est semissis quadrati radii; C P verò est distantia Lunæ à quadraturâ; Ergo, incrementum aut decrementum motus nodorum est ut motus nodorum qualis inventus fuerat & differentia inter quadratum sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissem quadrati radii conjunctim: In syzygiis quadratum sinus distantiæ Lunæ à quadratura est ipsum quadratum radii, unde differentia quadrati sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissis quadrati radii, est in hoc casu ipse semissis quadrati radii, hinc erit decrementum aut incrementum motus nodorum in loco quovis ad decrementum ejus motus in syzygiis ut sunt motus nodorum iis in locis ad motum nodorum in syzygiis (quales citra hanc correctionem inventi fuerant,) & ut differentiæ quadratorum sinuum distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissis quadrati radii ad eum semissem quadrati radii conjunctim. Q. E. O.

(f) * *Unde si nodi* &c. Versentur nodi in Quadraturis, capiantur loca F & E ab octante M hinc inde æqualiter distantia, & alia duo D & G à syzygiâ A & quadraturâ N distantia intervallis D A, G N quæ æqualia sint inter se, & eadem ac intervalla M E, M F, sumantur decrementa motus nodorum in punctis E & D & ex summa eorum decrementorum subducatur summa incrementorum in punctis G & F, & residuum erit ipsum decrementum in syzygia A. 114.




Etenim, per præcedentia, decrementa sive incrementa; sunt ut motus totus nodorum & differentia quadrati sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissis radii conjunctim; est verò motus totus nodorum, ut contentum sub sinubus distantiarum Lunæ à quadraturâ, Lunæ à nodo, & nodi à Sole (per Prop. XXX.) sinus autem distantiæ nodi à Sole, in hoc casu est ipse Radius, estque constans pro omnibus incrementis decrementisque assumendis, distantia verò Lunæ à nodo eadem est ac distantia Lunæ à quadraturâ, cum nodi sint in quadraturis; Ergo motus totus nodorum est ut quadratum sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ, & decrementa sive incrementa sunt ut contentum sub quadrato sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & sub differentiâ ejusdem quadrati & semissis radii.

Dicatur itaque Radius $r$, sinus arcus N G dicatur $s$, erit incrementum motus nodorum in G ut $ss \times \frac{1}{2}rr - ss$ sive $\frac{1}{2}r^2 s^2 - s^4$.

Ut obtineatur incrementum motus nodorum in F, observandum, quod siquidem arcus F M est æqualis arcui N G cujus sinus est $s$, & N F + F M est æqualis octanti cujus sinus est $r\sqrt{\frac{1}{2}}$ & per Principia Trigonometrica, sinus arcus qui est differentia duorum arcuum quorum sinus sunt dati, est æqualis differentiæ factorum

DE MUNDI SYSTEMATE.

ſubducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ ſunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in ſyzygiâ: uti rationem ineunti facile conſtabit. (g) Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet, eſt pars quarta decrementi in ſyzygia. Motus totus horarius nodorum in ſyzygiis, ubi luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem deſcribere ſupponebatur, erat $32^{II}.\ 42^{III}.\ 7^{iv}$. Et decrementum motus nodorum, quo tempore luna jam velocior deſcribit idem ſpa-

§ 14. ctorum ſinûs majoris arcus per coſinum minoris & ſinus minoris arcus per coſinum majoris, diviſæ per Radium, hinc ſinus arcus F N eſt æqualis $\frac{r\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{rr-ss}-s\sqrt{\frac{1}{2}}}{r}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{rr-ss}-s\sqrt{\frac{1}{2}}$, itaque incrementum nodorum in F erit $\frac{1}{2}\times\overline{rr-ss}-s\sqrt{rr-ss}+\frac{ss}{2}\times\frac{1}{2}rr-\frac{1}{2}\sqrt{rr-ss}+s\sqrt{rr-ss}-\frac{ss}{2}$ ſive deletis terminis æqualibus & oppoſitis $\frac{1}{2}\overline{rr-s\sqrt{rr-ss}}\times s\sqrt{rr-ss}$, & multiplicatione factâ $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}-r^2s^2+s^4$. Ideoque ſumma incrementorum in G & F eſt $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}r^2s^2$.

Sinus autem in E & D ſunt coſinus arcuum F & G, ergo quadratum ſinus arcus N E eſt $rr-\frac{1}{2}\times\overline{rr-ss}+s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}ss=\frac{1}{2}rr+s\sqrt{rr-ss}$; Ideoque decrementum motus nodorum in E eſt $\frac{1}{2}rr+s\sqrt{rr-ss}\times\frac{1}{2}rr+s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}rr=\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}+r^2ss-s^4$.

Quadratum ſinus arcus N D eſt $rr-ss$, ideoque decrementum motus nodorum in D eſt $rr-ss\times rr-ss-\frac{1}{2}rr=\frac{1}{2}r^4-\frac{3}{2}r^2s^2+s^4$; Sicque ſumma decrementorum eſt $\frac{1}{2}r^4+\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}r^2s^2$.

Denique in ipſâ ſyzygiâ quadratum ſinus arcus N D eſt $rr$, ideoque decrementum motus nodorum in ſyzygia eſt $r^2\times r^2-\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{2}r^4$.

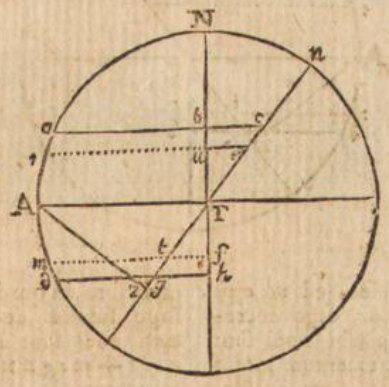
Si ergo ex ſumma decrementorum quæ inventa eſt $\frac{1}{2}r^4+\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}r^2s^2$ detrahatur ſumma incrementorum quæ inventa eſt $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}r^2s^2$ decrementorum reſiduum eſt ipſum $\frac{1}{2}r^4$ quod decrementum motus nodorum in ſyzygia exprimet. Q. E. D.

(g) * *Proindeque decrementum mediocre* &c. In toto arcu N A, puncta aſſumantur quam proxima quotquot lubebit quæ quaternatim ſumantur, ita ut quatuor quæ ſimul aſſumuntur ita diſponantur ut duo ab octante æqualiter diſtent hinc inde & alia duo tantumdem à ſyzygia & quadratura diſtent; Decrementum motus nodorum in duobus punctis quæ ſunt inter ſyzygiam & octantem ſuperat incrementum ejus motus in aliis duobus punctis quantitate æquali decremento in ipſâ ſyzygiâ; ſi itaque motus mediocris aſſumendus ſit, id decrementum quadrifariam dividi debet & de motu mediocri ſingula quarta pars detrahi debet, ſic enim motus mediocris ille æquipollebit motui vero peracto in illis quatuor punctis ſimul ſumptis; ille decrementi exceſſus idem eſt pro quibuſvis punctis ita quaternatim ſumptis itaque motus mediocris nodorum in omnibus punctis adjectâ conſideratione inæqualitatis motus Lunæ ex actione Solis ortæ erit motus mediocris nodorum prius inventus, multatus quartâ parte illius decrementi.

Cum

ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideoque decrementum illud eſt $17^{'''}.\ 43^{iv}.\ 11^{v}$, cujus pars quarta $4^{'''}.\ 25^{iv}.\ 48^{v}$ motui horario mediocri ſuperius invento $16''.\ 21^{'''}.\ 3^{iv}.\ 30^{v}$ ſubducta, relinquit $16''.\ 16^{'''}.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$ motum mediocrem horarium correctum.

(h) Si nodi verſantur extra quadraturas, & ſpectentur loca bina à ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum nodorum, ubi luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et (i) decrementa motuum, à cau-



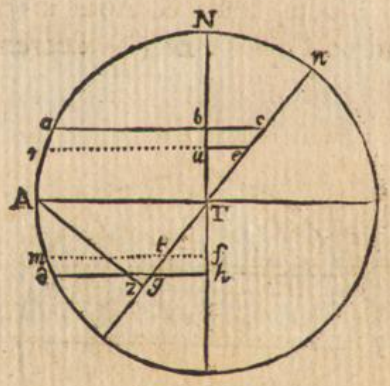

Cum ergo ille exceſſus decrementorum ſuper incrementa ſit ipſum decrementum motus in ſyzygiâ Seorſim conſideratâ, & id decrementum in ſyzygiâ ſeorſim inventum ſit, *decrementum mediocre quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet eſt pars quarta decrementi in ſyzygiâ.*

(h) * *Si nodi verſantur extra quadraturas* putà in locis n & *ſpectentur loca bina a & d à ſyzygiâ A hinc inde diſtantia* erit motus nodorum in loco *a* ut Elementum *acer* & quadratum lineæ AZ conjunctim (cor. 1. prop. 30.); ſimiliter motus nodorum in loco *d* erit ut elementum *mtgd* & quadratum lineæ AZ conjunctim; ſi verò nodi verſentur in quadraturis erit (ibid.) ſumma motuum in binis locis *a* & *d* ut $abru + mfdh$, vel $2abrv$ & quadratum radii AT conjunctim; ſed ob æqualia intervalla Tb, Th ſumma arearum $acer + mtgd = 2abru$. Quare ſumma motuum nodorum ubi Luna verſatur in locis *a*, *d* nodis exiſtentibus extra quadraturas, erit ad ſummam motuum ubi Luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur ut $2abru \times AZ^2$ ad $2abru \times AT^2$ hoc eſt ut $AZ^2$ ad $AT^2$. 1143

(i) * *Et decrementa motuum* in loco *a* quando nodi ſunt extra quadraturas, & quando nodi ſunt in quadraturis, ſunt ut ipſi motus; Nam cum arcus *ar* in utroque caſu æquali tempore percurratur, differentia ejus temporis à tempore mediocri utrinque eadem erit, ac per conſequens error nodi, à loco in quo eo tempore

DE MUNDI SYSTEMATE.

cauſis jam expoſitis oriunda, erunt ad invicem ut ipſi motus, ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut *AZ qu.* ad *AT qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Eſt itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum ſitu, ad $16^{II}$. $16^{III}$. $37^{iv}$. $42^{v}$. ut *AZ qu.* ad *AT qu.*; id eſt, ut quadratum ſinus diſtantiæ nodorum à ſyzygiis ad quadratum radii.



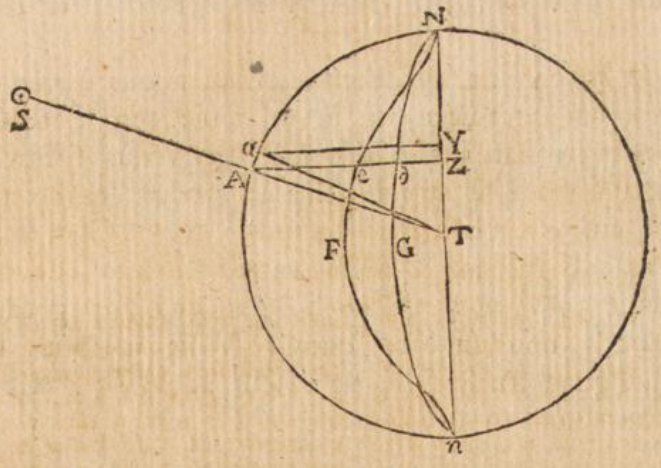

114. mediocri procedere debuiſſet, eſt ut ejus motus horarius in eo loco; ergo decrementum motus nodi in *a* ubi nodi ſunt in quadraturis eſt ad decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas verſantur ut $abru \times AT^2$ ad $acer \times AZ^2$, & pariter decrementum motus nodi in *d* ubi nodi ſunt in quadraturis eſt ad decrementum motus in *d* cum nodi ſunt extra quadraturas, ut $mfhd \times AT^2$ ad $mtgd \times AZ^2$; decrementa autem motus in *a* & *d* æqualia ſunt quando nodi ſunt in quadraturis, ob æquales diſtantias à ſyzygiâ, & $mfhd = abru$; hinc decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas verſantur eſt ad $acer \times AZ^2$ ut decrementum motus in *d* cum nodi extra quadraturas verſantur eſt ad $mtgd \times AZ^2$, & etiam ut decrementum in *a*, aut *d* cum nodi ſunt in quadraturis ad $abru \times AT^2$; Ergo ſumma decrementorum in *a* & *d* cum nodi ſunt extra quadraturas eſt ad $acer + mtgd \times AZ^2$ ut ſumma decrementorum in *a* & *d* cum nodi ſunt in quadraturis ad $2abru \times AT^2$, ſed $acer + mtgd = 2abru$ per notam præcedentem, ergo, ſumma decrementorum in binis locis à ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantibus cum nodi ſunt extra quadraturas eſt ad ſummam decrementorum in iiſdem locis cum nodi ſunt in ſyzygiis, ut $AZ^2$ ad $AT^2$, cum ergo ſummæ motuum ipſorum in eâ ſint ratione, reliqui motus erunt in eâ ipſâ ratione ideoque & motus mediocres; *Eſt itaque &c.*

PRO-

## PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

*Invenire motum medium nodorum lunæ.*

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad ſtellas fixas. Interea verò ſolem *S*, per motum terræ, progredi




à nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad ſolem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut *AZq*, id eſt (ob (1) proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum ſub *AZ* & *ZY*, hoc eſt, ut area *AZYa*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium

(1) * *Ob proportionales AZ, ZY* eſt enim TA:Aa::AZ:ZY, ideoque ob conſtantes TA & Aa, quantitates AZ, ZY ubique eamdem habent inter ſe rationem, ducatur utraque in AZ facta AZ×AZ, & ZY×AZ datam rationem ubique habebunt, erit itaque *AZq ut rectangulum ſub AZ & ZY.* FIG.

DE MUNDI SYSTEMATE.

crium ab initio, ut ſumma omnium arearum $aYZA$, id eſt, ut area $NAZ$. Eſt (m) autem maxima $AZYa$ æqualis rectangulo ſub arcu $Aa$ & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentiâ totâ & radio, id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, (n) erat $16^{II}$. $16^{III}$. $37^{IV}$. $42^{V}$. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit $39^{gr}$. $38'$. $7''$. $50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}$. $49'$. $3''$. $55'''$. eſt motus medius nodorum circulo toti reſpondens. Et motus nodorum, quo tempore ſol pergit ab $N$ ad $A$ eſt ad $19^{gr}$. $49'$. $3''$. $55'''$. ut area $NAZ$ ad circulum totum.

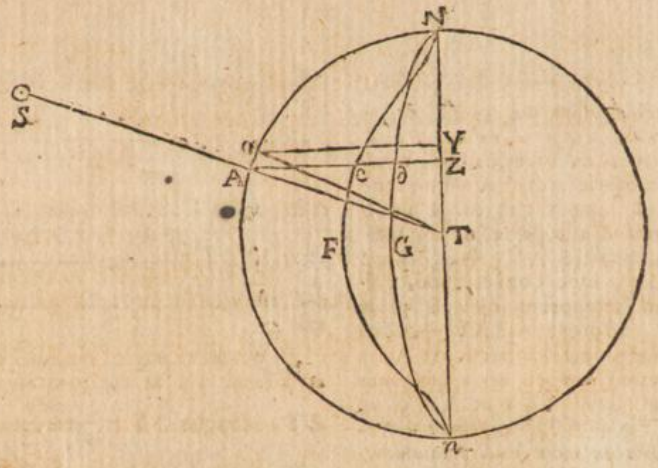
Hæc ita ſe habent ex hypotheſi, quod nodus horis ſingulis in locum priorem retrahitur, ſic ut ſol anno toto completo ad nodum eundem redeat à quo ſub initio digreſſus fuerat. Verùm per motum nodi fit ut ſol citius ad nodum revertatur, & computanda jam eſt abbreviatio temporis. (o) Cum ſol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr}$. $38'$. $7''$. $50'''$, ſeu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis $N$ ſit ad ipſius motum mediocrem in quadraturis ſuis, ut $AZq$ ad $ATq$: erit motus ſolis ad motum nodi in $N$, ut 360 $ATq$ ad 39,6355 $AZq$; id

114. (m) * *Eſt autem maxima AZYa* &c. Nam quando T A eſt perpendicularis in N n, A Z evadit T A & Z Y evadit æqualis A a, ſicque A Z Y = A T × A a, in omnibus autem aliis punctis T A eſt major quam A Z, & A a major quam Z Y, maxima itaque A Z Y a eſt *æqualis rectangulo ſub arcu A a & radio circuli.*

(n) * *Erat* $16''$ $16'''$ $37^{IV}$ $42^{V}$, is enim erat motus horarius mediocris, cum nodi erant in Quadraturis, per Prop. præced. ideoque in hâc Propoſ. cum S A T eſt perpendicularis in N n.

(o) * *Cum Sol* &c. Velocitas ſolis eſt ad velocitatem nodi cum nodi ſunt in quadraturis ut $360^d$. quæ eſt via ſolis toto anno ad 39. $38'$. $7''$. $50'''$ ſeu 39.6355 gradus quos nodus toto anno conficeret, ſi toto anno maximâ ſua celeritate moveretur; Velocitas nodi cum nodi ſunt in quadraturis, eſt ad nodi velocitatem cum nodi diſtant à Sole arcu A N ut $ATq$ ad $AZq$ per Prop. præced. Ergo ex æquo & compoſitis rationibus, velocitas ſolis eſt ad velocitatem nodi cum nodi diſtant à Sole arcu A N ut 360 $ATq$ ad 39.6355 $AZq$; id eſt, dividendo 360 per 39.6355 ut 9.0827667 $ATq$ ad $AZq$. Sed dividendo 360 per $39^{gr}$. $38'$ $7''$ $50'''$ prodit numerus 9.0827646 loco hujuſce 9.0827667 collocandus.

id est, ut 9,0827646 $ATq$ ad $AZq$. Unde si circuli totius circumferentia $NAn$ dividatur in particulas æquales $Aa$, tempus quo sol percurrat particulam $Aa$, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus unà cum nodis circa centrum $T$ revolvatur, reciprocè ut 9,0827646 $ATq$ ad 9,0827646 $ATq+AZq$. Nam tempus est reciprocè ut velocitas quâ particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum solis & nodi. Igitur si tempus, quo sol sine motu nodi percurreret arcum $NA$, exponatur per sectorem $NTA$, & particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum $Aa$, exponatur per sectoris particulam $ATa$; & (perpendiculo $aY$ in $Nn$ demisso) si in $AZ$ capiatur $dZ$, ejus longitudinis (P) ut sit rectangulum $dZ$ in $ZY$ ad sectoris parti-




(P) * *Ut sit Rectangulum dZ in ZY ad sectoris particulam ATa.* Sectoris particula ATa est semper æqualis dimidio Rectanguli AT in Aa, est verò ZY ad Aa ut AZ ad AT, ducantur antecedentes in dZ & consequentes in $\frac{1}{2}$AT erit rectangulum dZ in ZY ad $\frac{1}{2}$AT×Aa sive ad sectoris particulam ATa ut dZ in AZ ad $\frac{1}{2}$ATq sive ut dZ in 2AZ ad ATq, sed sumitur esse dZ in ZY ad ATa ut AZq ad 9.0827646 ATq+AZq ergo etiam dZ in 2AZ est ad ATq ut AZq ad 9.0827646 ATq+AZq & vicissim dZ in 2AZ est ad AZq ut ATq ad 9.0827646 ATq+AZq & dividendo duos priores terminos per 2AZ est dZ ad $\frac{1}{2}$AZ ut ATq ad 9.0827646 ATq+AZq. 1714.

DE MUNDI SYSTEMATE.

particulam $ATa$ ut $AZq$ ad 9,0827646 $ATq+AZq$, id est, ut sit $dZ$ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut $ATq$ ad 9,0827646 $ATq+AZq$; (q) rectangulum $dZ$ in $ZY$ designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus $Aa$ percurritur. Et si punctum $d$ (r) tangit curvam $NdGn$, area curvilinea $NdZ$ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus $NA$ per-

114. (q) * *Rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum*; Nam, ex superioribus, tempus quo sol percurrit arcum A a sine motu nodi, est ad tempus quo sol à nodo discedet eo arcu A a si (ipse nodus moveatur) ut 9.0827646 $ATq+AZq$ ad 9.0827646 $ATq$; hinc convertendo, differentia eorum temporum est ad prius tempus ut $AZq$ ad 9.0827646 $ATq+AZq$, sed, ex hypothesi, sectoris particula $ATa$ designat prius tempus, ea ergo quantitas $dZ \times ZY$ quæ est ad $ATa$ ut $AZq$ ad 9.0827646 $ATq+AZq$ *exprimet decrementum temporis ex motu nodi oriundum.*

(r) * *Et si punctum d tangit curvam NdGn.* Numerus 360 designetur per $a$ numerus 39.6355 dicatur $b$, ideoque 9.0827646 sit $\frac{a}{b}$, AT dicatur $r$, & AZ, $y$ eritque $dZ=\frac{\frac{1}{2}r^2y}{\frac{a}{b}r^2+y^2}=\frac{\frac{1}{2}br^2y}{ar^2+by^2}$ & in puncto T ubi AZ evadit AT sive ubi fit $y=r$ est $dZ=\frac{\frac{1}{2}br}{a+b}=\frac{r}{20.1655292}$; ita ut $dZ$ ad vicesimam radii partem nusquam assurgat.

Est autem ex naturâ circuli $TZ=\sqrt{rr-yy}$, & TZ ad AZ ut fluctio ordinatæ AZ ad ZY, ideoque $ZY=\frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$, hinc elementum $dZ \times ZY=\frac{\frac{1}{2}br^2y^2\,dy}{(ar^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ & elementum segmenti NAZ est $\frac{y^2\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$.

Est verò $\sqrt{rr-yy}$ æqualis seriei $r-\frac{y^2}{2r}-\frac{y^4}{8r^3}-\frac{y^6}{16r^5}-\frac{5y^8}{128r^7}-\frac{7y^{10}}{256r^9}$ &c.

& $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ æqualis ferei $\frac{y^2}{r}+\frac{y^4}{2r^3}+\frac{3y^6}{8r^5}+\frac{5y^8}{16r^7}+\frac{35y^{10}}{128r^9}+\frac{63y^{12}}{256r^{11}}$ &c.

quæ series parùm convergit quando $y$ accedit ad valorem $r$ unde prudenter est adhibenda.

Multiplicetur verò hæc series per $dy$ & fiat integratio, obtinetur sequens series quæ exprimit segmentum NAZ, $\frac{y^3}{3r}+\frac{y^5}{10r^3}+\frac{3y^7}{56r^5}+\frac{5y^9}{144r^7}+\frac{35y^{11}}{1408r^9}$ &c.

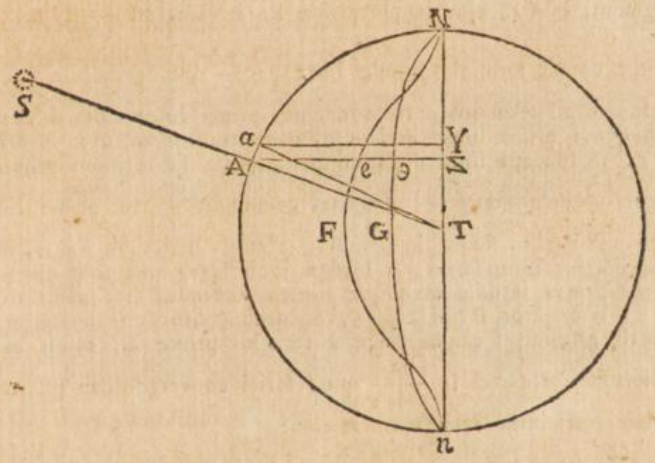
quæ series parum convergit quando $y=r$ sed tunc segmentum NAZ est quadrans circuli qui per alias commodiores approximationes obtinetur.

Dividatur $\frac{1}{2}br^2$ per $ar^2+by^2$, fit series $\frac{b}{2a}\times 1-\frac{by^2}{ar^2}+\frac{b^2y^4}{a^2r^4}-\frac{b^3y^6}{a^3r^6}+\frac{b^4y^8}{a^4r^8}$ &c.

quæ plurimum convergit propter dignitates crescentes fractionis $\frac{b}{a}$ quæ est circiter $\frac{r}{9}$.

Mul-

percurritur; & propterea exceſſus ſectoris $NAT$ ſupra aream $NdZ$ erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore




Multiplicetur itaque per hanc ſeriem, ſeries $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ ſuperius inventa & obtinebi- 115.

tur hæc ſeries $\frac{b}{2a} \times \frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3} + \frac{3y^6}{8r^5} + \frac{5y^8}{16r^7} + \frac{35y^{10}}{128r^9} + \frac{63y^{12}}{256r^{11}}$ &c.

$- \frac{b^2}{2a^2} \times \quad \frac{y^4}{r^3} + \frac{y^6}{2r^5} + \frac{3y^8}{8r^7} + \frac{5y^{10}}{16r^9} + \frac{35y^{12}}{128r^{11}}$ &c.

$+ \frac{b^3}{2a^3} \times \quad \frac{y^6}{r^5} + \frac{y^8}{2r^7} + \frac{3y^{10}}{8r^9} + \frac{5y^{12}}{16r^{11}}$ &c.

$- \frac{b^4}{2a^4} \times \quad \frac{y^8}{r^7} + \frac{y^{10}}{2r^9} + \frac{3y^{12}}{8r^{11}}$ &c.

&c.

& multiplicetur hæc ſeries per $dy$ & integretur, fiet ſeries quæ exhibebit valorem areæ $NdZ$

$\frac{b}{2a} \times \frac{y^3}{3r} + \frac{y^5}{10r^3} + \frac{3y^7}{56r^5} + \frac{5y^9}{144r^7} + \frac{35y^{11}}{1408r^9} + \frac{63y^{13}}{3208r^{11}}$ &c.

$- \frac{b^2}{2a^2} \quad \frac{y^5}{5r^3} + \frac{y^7}{14r^5} + \frac{3y^9}{72r^7} + \frac{5y^{11}}{176r^9} + \frac{35y^{13}}{1664r^{11}}$

$+ \frac{b^3}{2a^3} \times \quad \frac{y^7}{7r^5} + \frac{y^9}{18r^7} + \frac{3y^{11}}{88r^9} + \frac{5y^{13}}{208r^{13}}$

$- \frac{b^4}{2a^4} \times \quad \frac{y^9}{9r^7} + \frac{y^{11}}{22r^9} + \frac{3y^{13}}{104r^{11}}$

pore minore minor eſt in ratione temporis, debebit etiam area *AaYZ*

115. Termini variabiles primæ lineæ hujuſce ſeriei, ſeriem ipſam illam conſtituunt quæ eſt valor ſegmenti NAZ, ejus itaque primæ lineæ valor eſt $\frac{b}{2a}$ NAZ.

Si dividantur omnes termini ſecundæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, obſervabitur quotientes hanc habere relationem ad terminos correſpondentes primæ lineæ, ut, ſi exponens litteræ $y$ in termino quovis primæ lineæ dicatur $\ell$, quantitas eadem quæ in prima linea dividitur per $\ell$, in ſecunda linea dividatur per $\ell+2$; ſic termino primo ſecundæ lineæ diviſo per $\frac{y^2}{r^2}$ ut evadat $\frac{y^3}{5r}$, quantitas communis $\frac{y^3}{r}$ in prima linea dividitur per 3, in ſecunda per 5, ſicque in omnibus terminis utriuſque lineæ, ut facile conſtabit ex ipsâ origine iſtius ſeriei, & Integrationis lege; hinc ſi ad communem denominatorem reducantur termini utriuſque lineæ, ducendus erit numerator primæ lineæ in $\ell+2$, numerator ſecundæ in $\ell$, & denominator communis erit $\ell\times\ell+2$; quare ſubductis terminis ſecundæ lineæ à terminis primæ differentia exprimetur per terminos primæ ſeriei ductos in $\frac{2}{\ell+2}$ quod ſeriei convergentiam plurimum augebit; ideoque termini variabiles ſecundæ lineæ erunt

$$\frac{y^2}{r^2}\times NAZ-\frac{y^2}{r^2}\times\frac{2y^3}{15r}+\frac{2y^5}{70r^3}+\frac{6y^7}{504r^5}+\frac{10y^9}{1584r^7}$$ &c. dicatur ad brevitatem ſeries horum terminorum $D$ & valor verus iſtius ſecundæ lineæ eſt $-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}$ NAZ $+\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times D$.

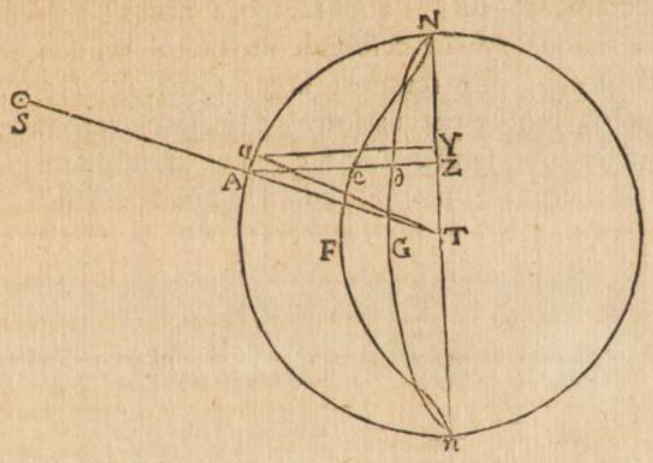
Simili ratiocinio, ut referantur termini variabiles tertiæ lineæ ad ſecundam, dividantur omnes termini tertiæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, & ſi dicantur $y$ exponentes terminorum, differentia terminorum ſecundæ & tertiæ lineæ exprimetur per terminos ſecundæ ſeriei ductos in $\frac{2}{y+2}$, ideoque termini variabiles tertiæ lineæ erunt $\frac{y^4}{r^4}\times NAZ-\frac{y^4}{r^4}\times D-\frac{y^2}{r^2}\times\frac{2y^5}{35r^3}+\frac{2y^7}{126r^5}+\frac{6y^9}{792r^7}$ dicatur E ſeries horum terminorum & valor verus tertiæ lineæ erit $+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times NAZ-\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times D-\frac{b^3y^2}{2a^2r^2}$ E

ex quibus facile intelligitur valorem areæ NdZ exprimi poſſe hac ratione

$$\begin{aligned}&\frac{b}{2a}\times NAZ.\\&-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times NAZ+\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}D\\&+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times NAZ-\frac{b^3y^2}{2a^3r^4}D-\frac{b^3y^2}{2a^3r^2}E\\&-\frac{b^4y^6}{2a^4r^6}\times NAZ+\frac{b^4y^6}{2a^4r^6}D+\frac{b^4y^4}{2a^4r^4}E+\frac{b^4y^2}{2a^4y^2}F\ \&c.\end{aligned}$$

Unde

*AaYZ* diminui in eâdem ratione. Id quod fiet ſi capiatur in *AZ* longitudo *eZ*, quæ ſit ad longitudinem *AZ* ut *AZq* ad




Unde ſummæ coefficientium quantitatum NAZ, D, E, F, qui progreſſiones Geometricas formant juxta regulas vulgares obtineri poſſunt, ideoque tandem area NdZ 1151

eſt $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}NAZ+\frac{\frac{1}{2}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}D-\frac{\frac{1}{2}b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}E+\frac{\frac{1}{2}b^4y^2}{a^4r^4+a^3by^2}F$ &c.

Cor. 1. Primus terminus ſeriei quæ exprimitur per D eſt $\frac{2}{5}$ primi termini ſeriei quæ exprimit ſegmentum NAZ, & reliqui termini ſeriei D ſunt minores reſpectu reliquorum terminorum ſeriei quæ exprimit id ſegmentum, ergo D minor eſt quam $\frac{2}{5}$ NAZ, & pariter E minor eſt quam $\frac{3y^2}{7r^2}$ D, & F minor quam $\frac{5y^2}{9r^2}$ &c. hinc valor NdZ major eſſe nequit quantitate $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}NAZ+\frac{\frac{1}{5}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}NAZ$, = $\frac{bNAZ}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2+\frac{b}{5a}y^2$ nec minor eſſe poteſt quantitate $\frac{bNAZ}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2$.

Cor. 2. Hinc ubi $r=y$ & NAZ eſt quadrans circuli valor areæ NdZ major non eſt quantitate $NAZ\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}+\frac{b}{5a}$, nec minor quam $NAZ\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}$; ſive major non eſt quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}+\frac{1}{457.8068865}$ ſive quadrantis $\frac{1}{19.3147492}$ nec minor quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad 9,08276 $ATq + AZq$. (f) Sic enim rectangulum $eZ$ in $ZY$ erit ad aream $AZYa$ ut decrementum temporis, quo arcus $Aa$ percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: & propterea rectangulum illud respondebit decremento motus nodi. Et si punctum $e$ tangat curvam $NeFn$, area tota $NeZ$, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus $AN$ percurritur; & area reliqua $NAe$ respondebit motui reliquo, qui verus est nodi motus, quo tempore arcus totus $NA$ per solis & nodi conjunctos motus percurritur. (t) Jam vero area semicirculi est ad aream figuræ $NeFn$, per methodum serierum infinitarum quæsitum, ut 793 ad 60 quamproximè. Motus autem qui respondet circulo toti erat $19^{gr}. 49^{l}. 3^{ll}. 55^{lll}.$ & prop-

116. Cor. 3. In casibus in quibus $y$ est quam minima, ita ut $ar^2 + by^2$ pro $ar^2$ sumi possit, valor $\frac{b\,NAZ}{ar^2} \times \frac{1}{2} r^2$ ad verum valorem satis accedet fietque valor areæ $NdZ = \frac{1}{18.1655292}$ segmenti $NAZ$, unde habentur velut limites valoris areæ $NdZ$ in variis punctis curvæ.

(f) * *Sic enim rectangulum eZ in ZY erit ad aream AZYa*, &c. Ex præcedentibus, area $AZYa$ motum nodorum mediocrem exprimit posito solem sine motu nodi percurrere arcum $Aa$, si itaque cæteris manentibus celerius percurratur is arcus, motus nodorum sive spatium à nodis percursum minus erit, prout tempus erit brevius; cum ergo tempus quo sol percurrit $Aa$ sine motu nodi, sit ad tempus quo percurreretur $Aa$ posito motu nodi ut $9.0827646\,ATq + AZq$ ad $9.0827646\,ATq$ si fiat $AZ$ ad $Ae$ in eâ ratione & utrumque ducatur in $ZY$, erunt areæ $AZ \times ZY$, ad $Ae \times ZY$ ut motus nodorum in Hypothesi priori ad eorum verum motum; & convertendo erit $eZ \times ZY$ ad $AZ \times ZY$ ut differentiâ motuum ad motum priorem sive ut $AZq$ ad $9.0827646\,ATq + AZq$.

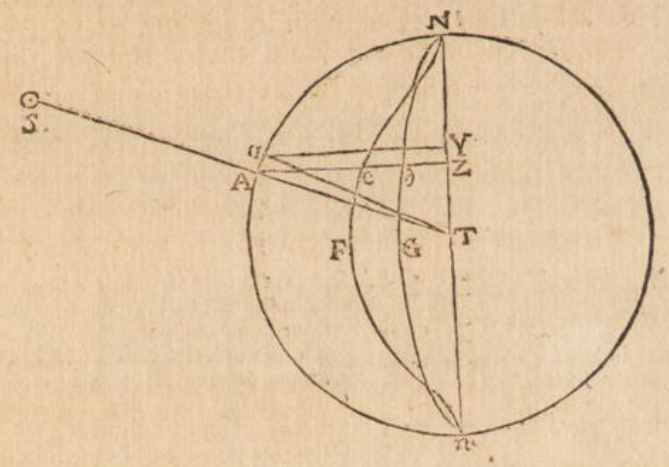
(t) 116. * *Jam verò area semicirculi est ad aream NeFn.* Commodius calculi ducentur si prius quæramus aream $NAneN$ inter semiperipheriam $NAn$ & curvam $Nen$ contentam, quàm detrahemus ex semicirculi area; tumque residuum erit area $NeFn$, quam cum semicirculi area conferre licebit.

Sit ergo ut prius $360^{s} = a$, $39^{o}.6355 = b$, $AT = r$ & $ATr$ & $AZ = y$; erit ex notâ præcedenti $9.0827646\,ATq + AZq$ (sive $\frac{ar^2}{b} + y^2$ ad $9.0827646\,ATq$ (sive $\frac{ar^2}{b}$) ut $AZ$ (sive $y$) ad $Ae$ quod erit itaque $\frac{ar^2y}{ar^2+by^2}$; est verò $ZY = \frac{ydy}{\sqrt{rr-yy}}$; hinc Elementum areæ $aAe$ est $\frac{ar^2y^2dy}{ar^2+by^2\sqrt{rr-yy}}$ sed elementum areæ curvæ $NdGn$ notâ superiore 115 inventum erat $\frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(a^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ ergo elementum areæ curvilineæ $NAnFN$ est ad elementum areæ $NdGn$ in ratione datâ $a$ ad $\frac{1}{2}b$; Unde si valor hujus areæ $NdGn$ in notâ $r$ inventus per $\frac{1}{2}$ dividatur & multiplicetur per $a$ habebitur valor areæ $NAnFN$ qui itaque prodibit

$ar^2$

propterea motus, qui figuræ *NeFn* duplicatæ respondet, est $1^{gr}.\ 29^{l}.\ 58^{ll}.\ 2^{lll}.$ Qui de motu priore subductus relinquit $18^{gr}.\ 19^{l}.\ 5^{ll}.\ 53^{lll}.$ motum totum nodi respectu fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum sole; & hic motus de solis motu






annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{gr}.\ 40^{l}.\ 54^{ll}.\ 7^{lll}.$ motum solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum $360^{gr}.$ ut nodi motus jam inventus $18^{gr}.\ 19^{l}.\ 5^{ll}.\ 53^{lll}.$ ad ipsius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr}.\ 18^{l}$

$$\frac{ar^2}{ar^2+by^2}\,NAZ+\frac{by^2}{ar^2+by^2}\,D-\frac{b^2y^2}{a^2r^2+by}\,E+\frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}\,F\ \&c.$$

Tollatur verò hæc area ex segmento NAZ, sive ex $\frac{ar^2+by^2}{ar^2+by^2}\,NAZ$ residuum erit

$$\frac{by^2}{ar^2+by^2}\,NAZ-\frac{by^2}{ar^2+by^2}\,D+\frac{b^2y^2}{a^2r^2+bay^2}\,E-\frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}\,F\ \&c.$$

idque residuum est area quæsita NeZ; quod brevius expressum fit $\frac{by^2}{ar^2+by^2}\times$

$$NAZ-D+\frac{b}{a}\,E-\frac{b^2}{a^2}\,F\ \&c.$$

1164

Jam autem ut habeatur ratio semicirculi ad aream NeFn, sive quod idem est quadrantis circuli ad NFT ejus areæ NeFn dimidium; dicatur $c$ quadrans peripheriæ cujus radius est $r$; sitque $m$ ad $n$ ut $c$ est ad $r$; valor quadrantis est $\frac{rc}{2}$, & cum NAZ est quadrans tum

DE MUNDI SYSTEMATE.

$18'.\ 1''.\ 23'''$. Hic eſt motus medius nodorum in anno ſidereo. (u) Idem per tabulas aſtronomicas eſt $19^{gr}.\ 21'\ 21''.\ 50'''$. Differentia minor eſt parte trecenteſimâ motus totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum eclipticæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem viciſſim retardatur aliquantulum, & ad juſtam velocitatem reducitur.

PRO-

116. $y = r$ ergo valor dimidii areæ NeFn eſt $\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - D + \frac{b}{a}E - \frac{b^2}{a^2}F + \frac{b^3}{a^3}G$ &c. ex iis autem quæ in notâ (r) dicta ſunt, valor D (ponendo $r$ loco $y$) eſt $r^2 \times \frac{2}{15} + \frac{2}{70} + \frac{6}{504} + \frac{10}{1584} + \frac{70}{18304}$; qui termini ad decimales reducti faciunt $.184\, r^2$ Omittantur reliqui termini quantitatis D ut & quantitates E, F de quâ omiſſione poſtea dicemus, & quoniam eſt $r = \frac{nc}{m}$ ideoque $r^2 = \frac{nrc}{m} = \frac{2n}{m} \times \frac{rc}{2}$. Valor areæ evadit $\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - \frac{rc}{2} \times \frac{2n}{m} \times .184$ qui valor eſt ad valorem quadrantis $\frac{rc}{2}$, ut $\frac{b}{a+b} \times 1 - \frac{2n}{m} \times .184$ ad 1, ſubſtituendo autem loco $b$ & $a$, eorum valores, eſt $\frac{b}{a+b} = .099$; & ex naturâ circuli eſt $2n$ ad $m$, ſive Diameter ad quartam peripheriæ partem ut 1.274 ad 1 ideoque $\frac{2n}{m} \times .184 = 1.27 \times .184 = .23$, quod detractum ex unitate relinquit .766; Quod tandem ductum in $\frac{b}{a+b}$ ſive .099 efficit .0758 qui valor eſt ad 1; ut area quæſita ad quadrantem; manebit eadem ratio ſi uterque terminus per 793 ducatur ſed .0758 in 793 efficit 60.10. Ergo eſt area quæſita NeFn ad ſemicirculum ut 60. proximè ad 793. Q. E. I.

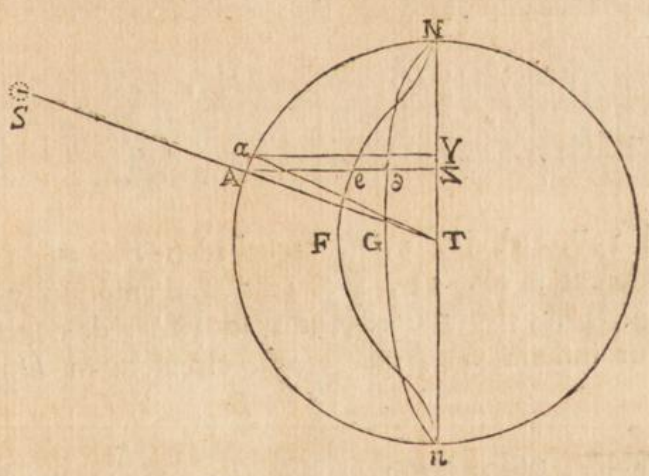
Omiſimus terminos ſeriei D præter quinque priores, & terminos ſerierum E, F &c. facile enim deprehenditur ex Corollariis notæ (r) ultimos illos terminos ſeriei D, prope æquales fieri terminis ſeriei E ductæ in $\frac{a}{b}$ qui termini negativi ſunt, ſicque mutuò deſtrui reliquæ verò ſeries cum per dignitates fractionis $\frac{b}{a}$ ducantur brevi evaneſcunt ut quidem exploravimus calculo ad plures terminos producto.

(u) * *Idem per tabulas Aſtronomicas.* Caſſinus ex antiquis obſervationibus nodorum motum determinat in anno communi $19^{o}.\ 19'.\ 45''$. quibus additis $49''$ pro motu nodi per $6^{h}.\ 10'\ 54'''$ quibus annus ſidereus excedit annum communem, motus ergo nodorum in anno ſidereo eſt $19^{o}.\ 20'.\ 34''.$, ita ut exiguâ duntaxat quantitate differat motus nodorum per calculum inventus, ab eo qui ex obſervationibus deducitur, & is diſſenſus eſt adeo parvus, ut neutiquam turbet argumentum quo confirmetur Newtoniana Theoria ex calculo motus nodorum cum obſervationibus collato; imo diſſenſus iſtius cauſas ex orbis Lunæ excentricitate & inclinatione fluere indicat Newtonus, ſed hæc hujus non ſunt loci.

## PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

*Invenire motum verum nodorum lunæ.*

In tempore quod eſt ut area $NTA - NdZ$, motus iſte eſt ut area $NAe$, & inde datur. (x) Verum ob nimiam calculi difficultatem, præſtat ſequentem problematis

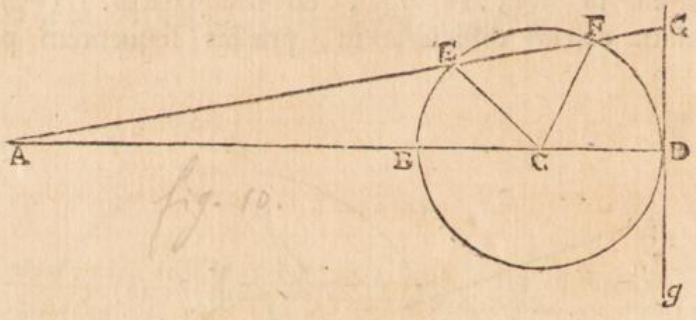



(x) 117. * *Verum ob nimiam calculi difficultatem.* Satis liquet maximam futuram calculi difficultatem ex ipſis ſeriebus in notis 115 & 116 adhibitis, quæ cum parum convergant, regreſſum non tantùm difficilem, ſed etiam parùm tutum habent; hinc alia artificia commodiora adhibet Newtonus quæ ut intelligantur duas Hypotheſes aſſumere liceat quibus pedetentim ad ipſam conſtructionem Newtonianam deveniemus.

Prior ergo Hypotheſis ea ſit quam in Prop. XXXII. fingit Newtonus, ſingulis horis retrahi nodum in locum ſuum priorem, ut nonobſtante motu ſuo proprio datum ſervet ſitum ad fixas, interea verò ſolem progredi à nodo: Eâ quippe in Hypotheſi, ex Prop. XXXII. tota area circuli repræſentat totum nodorum motum integro anno ſidereo, ideoque ſectores NAT repræſentabunt motum medium eo tempore quo Sol diſcedit à nodo arcu NA & ſegmenta NAZ repræſentabunt motum verum eo ipſo tempore, ideoque Triangulum ATZ repræſentabit differentiam motus medii à motu vero, quæ debebit ſubſtrahi à motu medio ut verus motus habeatur in primo quadrante, & tertio ut ex ipsâ figurâ liquet; addi autem in ſecundo & quarto: Cum itaque tota area circuli ſive factum totius Peripheriæ in $\frac{1}{2}r$, deſignet totum motum nodorum durante anno ſidereo, repræſentabit ATZ eam æquationem, quæ æquatio cum AZ ſit $y$ & $TZ = \sqrt{rr - yy}$ eſt 117.

De Mundi Systemate.

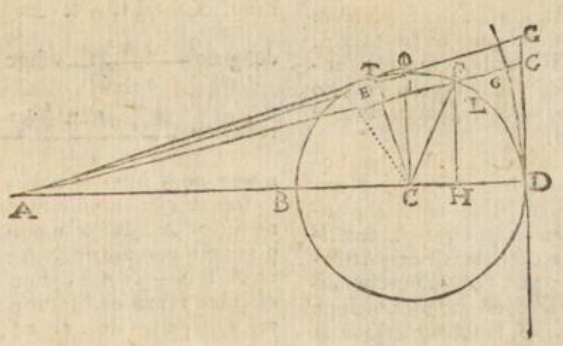
tis conſtructionem adhibere. Centro $C$, intervallo quovis $CD$, deſcribatur circulus $BEFD$. Producatur $DC$ ad $A$, ut ſit $AB$ ad $AC$ ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut $19^{gr.}\ 18'\ 1''$.




$23'''$. ad $19^{gr.}\ 49'\ 3''\ 55'''$, atque ideo $BC$ ad $AC$ ut motuum differentia $0^{gr.}\ 31'\ 2''\ 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr.}, 49'\ 3''\ 55'''$. hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum $D$ ducatur infinita $Gg$, quæ tangat circulum in $D$; & ſi capiatur

117. eſt $\frac{1}{2}y\sqrt{rr-yy}$: Dividatur ergo tam circuli valor quam areæ ATZ valor per $\frac{1}{2}r$, erit Peripheria tota ad $\frac{y\sqrt{rr-yy}}{r}$ ut totus motus nodi anno ſidereo ad Æquationem quæſitam, ſive primum conſequentem duplicando & ſecundi antecedentis dimidium ſumendo quod proportionem non turbat, erit Peripheria tota ad $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ut motus ſemeſtris nodi ad Æquationem quæſitam; Sed ex Principiis Trigonometricis, ſinus ejus arcus qui foret duplus arcus NA cujus ſinus eſt $y$ foret $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Ergo ſi deſcribatur circulus radio quocumque CB, & ſumatur arcus BF duplus, arcus NA, hoc, eſt duplus diſtantiæ Solis à nodo (quæ diſtantia per motus medios Solis & nodi haberi poteſt) erit Peripheria tota ad FH ſinum ejus arcus BF ut motus ſemeſtris nodi ad æquationem quæſitam; ideo producatur DCB in A, ita ut radius AD ſit ad radium CD ut Peripheria tota ad motum ſemeſtrem nodi ſive ut $a$ ad $\frac{1}{4}b$, & centro A radio AD deſcribatur arcus DG & ſumatur ejus arcus longitudo quæ ſit æqualis ſinui FH, numerus graduum ejus arcus DG erit ipſa æquatio quæſita; nam ſi ſumeretur in circulo cujus radius eſt CD arcus DL cujus longitudo eſſet æqualis FH, foret tota Peripheria ſeu 360s. ad numerum graduum in eo arcu DL contentorum ut numerus graduum motus ſemeſtris nodi ad numerum graduum æquationis quæſitæ, ſive alternando tota Peripheria ad numerum graduum motus ſemeſtris ut numerus graduum arcus DL ad numerum graduum æquationis quæſitæ; ſed ex conſtru-

piatur angulus $BCE$ vel $BCF$ æqualis duplæ distantiæ solis à loco nodi, per motum medium invento; & agatur $AE$ vel $AF$ secans perpendiculum $DG$ in $G$; & capiatur angulus qui sit ad motum totum nodi inter ipsius syzygias (id est, ad $9^{gr.}\ 11^{l.}\ 3^{ll.}$) ut tangens $DG$ ad circuli $BFD$ circumferentiam totam; atque angulus iste (pro quo angulus $DAG$ usurpari potest) ad




structione cum longitudo arcus DG sumatur æqualis sinui FH, sive arcui DL, numerus graduum in eo arcu DL contentorum est ad numerum graduum in arcu DG contentorum inverse ut eorum circulorum radii, hoc est ex constructione, ut 360° ad numerum graduum motus semestris nodi, ergo numerus graduum arcus DG est ipse numerus graduum æquationis quæsitæ; Satis liquet autem arcum DG paucorum graduum esse debere, & à lineâ rectâ parum differre, hinc si in puncto D erigatur tangens ad circulum cujus radius est CD, sumaturque DG in tangente æqualis ipsi sinui FH, perinde prope erit ac si sumeretur ea longitudo secundum arcum circuli radio AD descripti, & punctum G sive in Tangente sive in arcu sumatur eodem in loco ocurret quam proximè; ita ut ex hâc constructione, angulus GAD cujus arcus DG est mensura sit ipsa æquatio quæsita, substractiva in 1°. & 3°. quadrante, additiva in 2°. & 4^to^. & obtinebitur juxta Trigonometriæ Principia, dicendo ut AC, sive $360^{gr.} - 9^{gr.}\ 54'\ 31''\ 57'''$, ad CF sive CB, nempe $9^{d.}\ 54'\ 31''\ 57'''$.

hoc est, ut $a - \frac{1}{4}b$ ad $\frac{1}{4}b$, sive ut $35\frac{1}{3}$ ad 1. 117.
Ita sinus duplæ distantiæ Solis à nodo ad Æquationem quæsitam: Maxima autem erit æquatio in octantibus, quia area ATZ quæ æquationem repræsentat est major in octantibus quam in ullo alio loco.

His probè intellectis facile inde ad veriorem computum procedere licebit.

2°. Hyp. In constructione Newtonianâ Prop. XXXII. circulus integer NAnN designat annum sidereum, simulque motum nodorum in Hypothesi quòd Sol ipse describit id spatium quo nodi revera ab ipso discedunt; in hâc autem Hypothesi motus nodorum est $19^{gr.}\ 49'\ 3''.\ 55'''$. & in calculis nostris per quantitatem $\frac{1}{2}b$ fuit expressum.

Si autem revera arcus AN repræsentet recessum Solis à nodo, tàm per motum proprium Solis quàm per medium motum nodi, tempus quo tota circumferentia NAnN describetur non erit annus sidereus, sed tempus elapsum inter syzygiam Solis Nodique & syzygiam sequentem Solis cum eodem nodo, cumque uniformi-

De Mundi Systemate.

ad motum medium nodorum addatur ubi nodi tranſeunt à quadraturis ad ſyzygias, & ab eodem motu medio ſubducatur ubi tran-

117. ter deſcribatur ea circumferentia ſiquidem ad motus medios ſolis & nodorum refertur, ſectores circuli N A n N erunt proportionales motui medio nodorum; itaque ſi totus circulus repræſentet motum nodorum à tempore quo ſol & nodus fuere conjuncti uſque ad ſequentem Solis ſyzygiam cum eodem nodo, ſector A T N repræſentabit motum medium nodorum eo tempore quo motu medio Solis & nodi, nodus & Sol arcu N A à ſe mutuo receſſére.

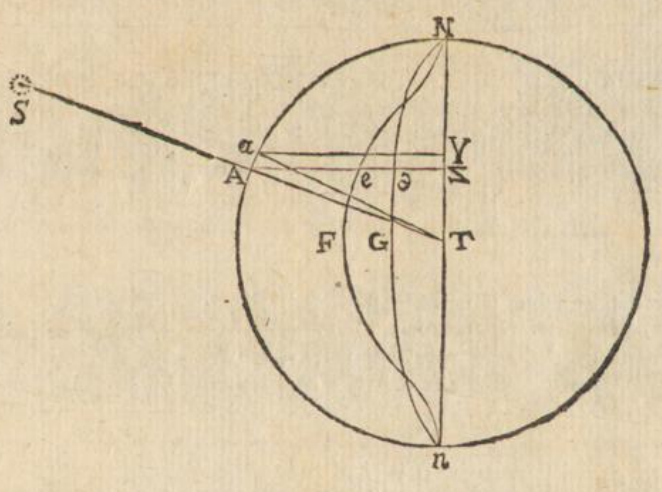
Tempus autem, inter duas ſyzygias Solis cum eodem nodo, hâc ratione à Newtono determinatur per obſervationes; anno ſidereo dum nempe ſol 360gr. emetitur motus nodi per obſervationes Aſtronomicas 19gr. 21′. 21″. 50‴ deprehenditur, in eâdem autem erunt proportione viæ Solis & nodi quæ ſimul deſcribuntur quocumque tempore, ideoque via Solis & via nodi inter duas ſyzygias Solis cum eodem nodo, erunt inter ſe ut 360 ad 19gr. 21′ 21″ 50‴, ſed illæ duæ viæ ſimul ſumptæ 360gr. efficiunt, itaque 360 gradus dividantur in duas partes quarum una ſit ad alteram ut 360gr. ad 19gr. 21′ 21″ 50‴. Hæc ultima pars quæ eſt 18gr. 22′. 6ª circiter, erit motus nodi inter duas ſyzygias Solis cum eodem nodo.

Idem motus ex calculo Prop. XXXII., hoc modo determinabitur, ſi ex toto circulo N A n N duplum areæ N F n tollatur reſiduum eſt verus motus nodi inter ſyzygias; ſed valor areæ N F T erat ad quadrantem ut $\frac{b \times .766}{a+b}$ ad 1. ſive proximè ut $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ad 1. In eâdem vero erit ratione duplum areæ N F n (quod eſt quadruplum areæ N F T) ad totum circulum, ut itaque 1. ad $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ita $\frac{1}{2}b$ qui eſt numerus graduum quem area circuli deſignat, ad numerum graduum deſignatum per duplum areæ N F n, qui erit itaque $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$; Cum ergo totus circulus numerum graduum $\frac{1}{2}b$ deſignet in Prop. XXXII., & duplum areæ N F n deſignet $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$, hoc ex $\frac{1}{2}b$ tollatur, reſiduum $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ eſt verus motus nodi inter ſyzygias.

Itaque cum motus medius nodorum ſit ut ſector A T N, & motus verus nodi exprimatur per aream N A e; Æquatio eſt ut A T N − N A e, hoc eſt, cum totus circulus repræſentet motum nodorum inter ſyzygias, eſt $2rc$ ad A T N − N A e ut $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad Æquat. $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (A T N − N A e), ſed in not. 116. valor areæ N A e fuit inventus $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ N A Z (omiſſis cæteris terminis qui per D, E &c. multiplicantur ut pote minimis). Itaque fiet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (N T A − $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ N A Z):

Eum autem caſum ſumamus in quo A N eſt peripheriæ octans, quia in primâ Hypotheſi liquet eo in caſu Æquationem fieri maximam, fiet $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, & eâ ſubſtitutione factâ & loco N T A poſito ejus valore T A Z + N A Z factâque reductione, evadet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (T A Z + $\frac{\frac{1}{2}b\,\text{N A Z}}{a+\frac{1}{2}b}$) & cum area circuli ſit .785 dum quadratum Diametri eſt 1, & octans circuli N T A ſit ad ejus quadrati octantem cujus dimidium eſt T A Z in eâdem ratione, eſt N T A ad T A Z ut .785 ad .5, ideo-

transeunt à syzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum

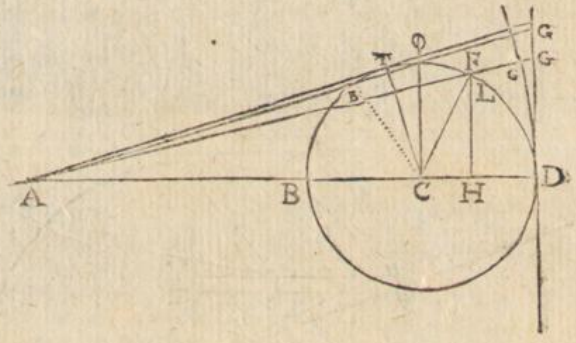



Ideoque dividendo est NAZ ad TAZ ut .285 ad .5, & est NAZ = .57 TAZ unde tandem æq. evadit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc\,(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)$ TAZ

Sed in hâc hypothesi est $TAZ=\frac{1}{4}r^2$; hinc æquatio fit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)r$ & ad hanc proportionem revocatur, 4c sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2\,(a+b)}$ quod est dimidium motus nodi inter syzygias ut $\frac{a+.78b^2}{a+\frac{1}{2}b}r$ ad Æquationem; hoc modo autem constituitur quantitas $\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}r$, sive simplicius $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+\frac{1}{2}b}r$, describatur circulus B C D cujus radius $BC=r=\frac{1}{4}b$; producatur C B in A ut fit $AB=a+\frac{1}{4}b$, ideoque $AC=a+\frac{1}{2}b$ & $AD=a+\frac{3}{4}b$, centro C erigatur per- 117

De Mundi Systemate.

cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream NTA




217. pendicularis $\phi$ ad circulum usque & pariter in extremo Diametri D ducatur tangens, ductaque linea A $\phi$ donec secet Tangentem in G, liquet quod A C sive $a + \frac{1}{2}b$ est ad A D sive $a + \frac{3}{4}b$ ut est C$\phi$ sive $r$ ad D G quæ erit $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+\frac{1}{2}b}r$, ideoque erit tota circumferentia ad dimidium motus inter syzygias ut D G ad Æquationem quæsitam: sive invertendo terminos omnes & alternando ut Newtoni expressio habeatur, est Æquatio ad motum nodi inter Syzygias proximas ut D G ad circuli B E D circumferentiam.

Illa autem Æquatio quæsita erit prope æqualis angulo D A G; nam in Triangulo D A G est D G ad sinum anguli D A G sive ad ipsum angulum D A G (nam in parvis angulis, angulos pro sinubus sumere licet) ut est A G vel A D, quod est $a + \frac{3}{4}b$, ad sinum totum sive ad radium C D quod est $\frac{1}{4}b$; sed si $a + \frac{3}{4}b$, & $\frac{1}{4}b$ dividantur per $a + b$, quod rationem non mutat, fiatque $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+b}$ ad $\frac{\frac{1}{4}b}{a+b}$ ita $a$ sive gradus 360 ad quartum, invenitur is quartus terminus $\frac{\frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{4}ab^2}{(a+\frac{3}{4}b)(a+b)}$; Divisione factâ per $a + \frac{3}{4}b$ Quotiens est $\frac{\frac{1}{4}ab + \frac{1}{16}b^2}{a+b}$ omissis, ut licet, dignitatibus altioribus $\frac{1}{4}b$, is verò quotiens est ipsa quantitas $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$ quæ exprimit dimidium motus nodi inter syzygias; Ergo resumendo cum sit D G ad angulum D A G ut $a + \frac{3}{4}b$ ad $\frac{1}{4}b$ sive ut circumferentia tota ad dimidium motus nodi inter syzygias in eâque ratione sit D G ad Æquationem, ipse angulus D A G est æqualis æquationi.

Idem alio modo constabit; In ipsâ Peripheriâ D $\phi$ B D, sumatur arcus D L æqualis D G, erit ut 360gr. ad dimidium motus nodi, ita numerus graduum in arcu D L contentorum ad numerum graduum æquationis; centro A radio A D describatur arcus & in eo sumatur longitudo D G æqualis D L, erit ut radius A D sive $a + \frac{3}{4}b$ ad radium C D sive $\frac{1}{4}b$, ita numerus graduum arcus D L ad numerum graduum arcus D G, numeri enim graduum in arcubus æqualibus sunt inverse ut eorum radii

*NTA–NdZ*, & motum nodi per aream *NAe*; ut rem perpendenti



radii ſed $a+\frac{1}{4}b$ eſt ad $\frac{1}{4}b$ ut 360gr. ſive $a$ ad dimidium motus nodi ſive ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$; Eſt ergo 360 ad dimidium motus nodi inter ſyzygias ut numerus graduum arcus DL ad numerum gradum arcus DG ſed ita etiam erat numerus graduum arcus DL ad numerum graduum æquationis quæſitæ, ergo numerus graduum arcus DG eſt ipſa æquatio quæſita, ſed AG ſecabit arcum DG in puncto tali ut arcus inter eam lineam & punctum D interceptus ſit proximè æqualis Tangenti DG, nam in parvis arcubus, Tangentes prope æquantur ſuis arcubus, ergo linea AG ſecabit arcum DG in G quamproximè, ſed arcus DG cujus gradus ſunt ipſa æquatio, eſt menſura anguli DAG, ergo angulus DAG pro æquatione uſurpari poteſt.

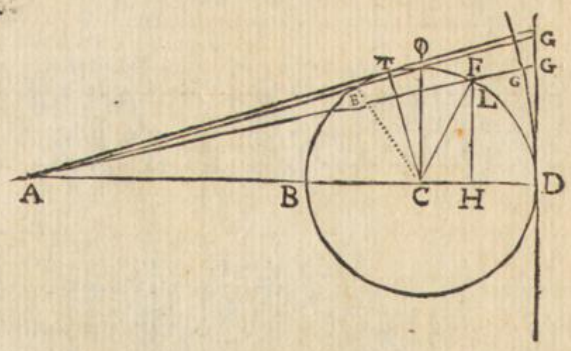
Dicit autem Newtonus lineam AB debere eſſe ad lineam AC ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris quando nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut 19gr. 18′. 1″. 23‴. ad 10gr. 49′. 3″. 55‴. In hâc autem conſtructione fecimus AB= $a+\frac{1}{4}b$ & AC= $a+\frac{1}{2}b$, res autem eodem redit, cum enim motus nodi inter ſyzygias ſit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ dematur ex $a$ habebitur motus Solis inter ſyzygias $\frac{aa+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}b^2}{a+b}$; iſte motus Solis erit ad ejus motum annuum 360gr. ſive $a$ ut motus nodi inter ſyzygias $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad motum annuum nodi qui itaque erit $\frac{\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{8}ab^2}{aa+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}ab^2}$ is itaque motus erit ad $\frac{1}{2}b$ quod exprimit ſemiſſem motus veri mediocris ubi nodi ſunt in quadraturis ut $\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{8}ab^2$ ad $\frac{1}{2}aab+\frac{1}{4}abb-\frac{1}{16}b^3$; ſive omiſſo termino $\frac{1}{16}b^3$, diviſis reliquis terminis per $ab$ & duplicatis ut $a+\frac{1}{4}b$ ad $a+\frac{1}{2}b$; Ergo in conſtructione noſtra eſt AB ſive $a+\frac{1}{4}b$ ad AC ſive $a+\frac{1}{2}b$ ut motus annuus nodi, ad ſemiſſem ejus quod toto anno deſcriberetur eo motu quem habent nodi in quadraturis; Itaque erit etiam $a+\frac{1}{4}b$ ad $a+\frac{1}{2}b$ ſive AB ad AC ut motus medius nodi ad ſemiſſem motus veri in quadraturis ut ſtatuit Newtonus; Obſervandum quidem ex hâc conſtructione æquationem futuram maximam quando linea AG tangit circulum, quod quidem incidit paulò ante punctum $\phi$, & ſi à puncto A ducatur tangens AT erit ut AC ad CT ita ſinus totus ad Coſinum anguli BCT, qui angulus, BCT deprehendetur eſſe 88°$\frac{1}{2}$. cujus dimidium 44$\frac{1}{4}$°. eſt verus locus medius in quo maxima fit æquatio, ab Octante adeo parum diſſitus ut in ſequentibus æquationem maximam fieri in Octantibus ſupponere liceat, tanto magis quod hæc æquatio quæ vere maxima foret ab ea quæ fit in Octantibus inſenſibiliter differret. 117.

3ª. *Hypoth.* Finximus arcum AN eſſe octantem Peripheriæ, & eo in caſu oſtendimus conſtructionem Newtonianam exhibere æquationem illi loco debitam, in aliis diſtantiis Solis à nodo paulo minus accurata eſt conſtructio, ſed errore exiguo; ubivis enim, æquatio erit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ $(TAZ+NAZ-\frac{ar^2}{ar^2+by^2}NAZ)=$ $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}(TAZ+\frac{by^2}{ar^2+by^2}NAZ)$ ſumatur NAZ eſſe ad TAZ ut $r-\sqrt{rr-yy}$ ad $\sqrt{rr-yy}$, quod quidem verum eſt de ſpatio Rectilineo NAZ non vero de curvilineo NAZ, ſed propter exiguitatem fractionis $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ erro-

De Mundi Systemate.

ti & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio semestris

117. rorem non magnum pariet, fit æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)$ TAZ sive numeratore & denominatore quadruplicato quod valorem non mutat, fit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)\frac{4TAZ}{r}$, quæ quantitas ad hanc proportionem revocatur, $4c$ sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$ quod est dimidium motus nodi inter syzygias ut $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+2by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$ ad Æquationem quæsitam.



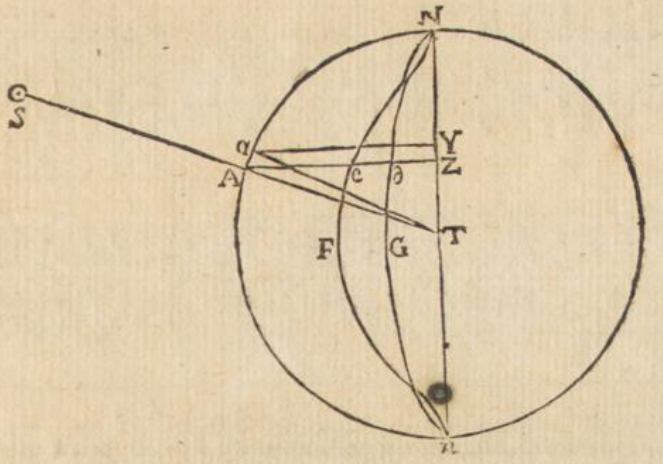

Ut construatur hæc quant. $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$, fiat ut prius circulus BFD cujus radius $BC=r=\frac{1}{4}b$, ideoque $b=4r$, producaturque CB in A ita ut sit $AB=a+\frac{1}{4}b$, sumatur arcus BF duplus arcus AN, ductoque perpendiculo FH, & tangente erectâ in D ductâque AFG erit DG propemodum æqualis quantitati $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$; est enim ex constructione AH ad AD ut FH ad DG ideoque $DG=\frac{AD}{AH}FH$ est autem $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}=\frac{AD}{AH}\times FH$, nam posito $4r$ loco $b$ & utroque termino diviso per $r^2$, fit $\frac{a+\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4y^2}{r}}$; Valor mediocris quadrati $y^2$ est $\frac{1}{2}r^2$, unde $\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}=\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}}$ est paulo major quam $\frac{2}{3}$ hinc $\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{6y^2}{r}=3r$; Præterea

$4y^2$

meſtris motus nodorum. Eſt & (y) æquatio menſtrua, ſed quæ



$\frac{2y^2}{r}$ valore ſuo medioci eſt $r$, eſt etiam $\frac{2y^2}{r}$ ſinus verſus arcus dupli ejus cujus ſinus eſt $y$, ideoque $\frac{2y^2}{r}$ eſt accuratè æquale BH unde $a+\frac{4y^2}{r}$ eſt $a+r+$BH, ſed $a+r$ per conſtructionem eſt AB, ergo $a+\frac{4y^2}{r}$ eſt AH, ideoque $\frac{a+\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4y^2}{r}}=\frac{a+3r}{AH}$ abſque errore ſenſibili, quia ſi $\frac{2y^2}{r}$ minus ſit aut majus quam $r$, quoniam idem valor in numeratore ac denominatore occurrit, & ea quantitas non eſt magna reſpectu totius AH, manebit idem fractionis valor; ſed $a+3r=$AD ideoque fractio $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-y^2}}}{ar^2+by^2}$ eſt proximè æqualis fractioni $\frac{AD}{AH}$.




Eſt vero accuratè $\frac{4TAZ}{r}=$FH, nam Triangulum $TAZ=\frac{AZ\times TZ}{2}$, eſt $AZ=y$, $TZ=\sqrt{rr-yy}$, ergo $\frac{4TAZ}{r}=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Sed, ex Principiis Trigonometricis, ſinus arcus dupli ejus cujus ſinus eſt $y$, eſt $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ergo ſinus arcus BF qui duplus eſt arcus AN cujus ſinus eſt $y$ eſt $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ſed ſinus arcus BF eſt FH ex conſtructione, ideoque $FH=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}=\frac{4TAZ}{r}$, & quantitas $\frac{AD}{AH}\times FH=\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$.

Quibus expoſitis, cætera, nempe angulum DAG pro æquatione ſumi poſſe, lineas AB ad AC ſumendas eſſe ut motus medius nodi ad ſemiſſem ejus motus in quadraturis, cætera, inquam, patent ut in Hypotheſi ſecundâ.

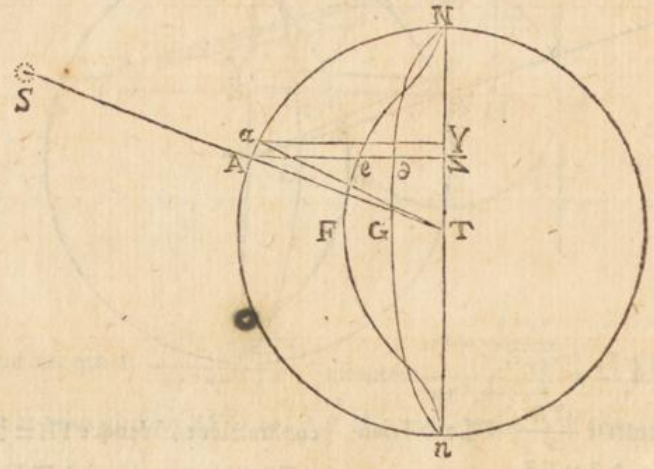
(y) * *Eſt & æquatio menſtrua*, ex iis quæ

De Mundi Systemate.

quæ ad inventionem latitudinis lunæ minime neceſſaria eſt. Nam cum variatio inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia ſit, alteri ſemeſtri, alteri autem menſtruæ; inæqualitas & æquatio menſtrua nodorum ita ſe mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda latitudine lunæ negligi poſſunt.

*Corol.* Ex hac & præcedente propoſitione liquet quod nodi in (z) ſyzygiis ſuis quieſcunt, in quadraturis autem regrediuntur

117. quæ in Prop. XXX. & XXXI. dicta ſunt, liquet quod dum Luna motu menſtruo circa terram fertur, nodi ſatis inæqualiter feruntur hinc ſi locus nodorum ex eorum motu medio æſtimaretur, locus ille medius à vero nonnihil differret, idque quod eſſet corrigendum ſecundum diverſam Lunæ ipſius diſtantiam à nodo Æquatio menſtrua meritò diceretur, ſed cum totus motus menſtruus Lunæ non ſit 28r. & compenſetur latitudinis error qui ex falsâ nodi poſitione oriretur per inclinationis Lunæ inæqualitates, operæ pretium non duxit Newtonus hanc Æquationem tradere, ſuo loco autem de eâ compenſatione agetur.




(z) * *Liquet quod nodi in ſyzygiis quieſcunt.* Etenim motus nodorum eſt ut area AZYa dempta area eZY, ubi verò nodi ſunt in ſyzygiis ideoque ubi punctum A incidit in N, evaneſcit linea AZ ac per conſequens area AZYa−eZY nullus itaque eſt nodorum motus. *In quadraturis autem regrediuntur motu horario* 16″ 19‴ 26ᴵᵛ. Si nodi diſtent 90gr. à Sole, AZ ſit æqualis AT, & ZY=Aa, ideoque area AZYa quæ eſt Parallelogrammum ejuſdem altitudinis ac baſeos ac Triangulum ATa eſt ejus duplum, cumque eZ ſit ad AZ ut AZ*q* ad 9.0827646 AT*q*+AZ*q* ſitque AZ=AT in hoc caſu, ſit eZ=$\frac{AT}{10.08276}$ & area eZY eſt $\frac{AT \times Aa}{10.0827646}$ ſive duplum Trianguli ATa diviſum per 10.0827646 hinc motus nodi qui exprimitur per aream AZYa−eZY, eſt in hoc caſu

tur motu horario $16''.\ 19'''.\ 26^{iv}.$ (a) Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit $18^{s}.\ 30'.$ Quæ omnia cum phænomenis cœlestibus probè quadrant.

## *Scholium.*

Aliâ ratione motum nodorum *J. Machin Astron. Prof. Gresham.* & *Hen. Pemberton* M D. seorsum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta est. Et utriusque chartæ, quas vidi, duas propositiones continebant, & inter se in utrisque congruebant. Chartam vero D. *Machin*, cum prior in manus meas venerit, hic adjungam.

DE

casu ad aream ATa ut $2 - \frac{2}{10.0827646}$ ad 1, sed quia tota area NAnN motum annuum designat $19^{s}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''.$ Triangulus ATa motum horarium repræsentans numerum graduum designabit qui obtineretur dividendo $19^{s}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''.$ per numerum horarum in anno fidereo comprehensarum & ea divisione facta numerus graduum quem repræsentat Triangulus ATa invenietur $8''.\ 8'''.\ 18^{iv}.\ 51^{v}.$ si itaque fiat 1. ad $\frac{18.0827646}{10.0827646}$ ita iste numerus ad quartum $8''.\ 8'''.\ 18^{v}.\ 51^{v}.$ invenietur $16''.\ 19'''.\ 26^{iv}.$ qui erit motus horarius quo nodi regrediuntur in quadraturis.

(a) * *Et quod Æquatio motus nodorum in octantibus sit* $18^{s}.\ 30'.$ Ex secundâ hypothesi notæ 117. Æquatio in Octantibus per hanc proportionem invenitur, ut tota circumferentia circuli BFDB ad dimidium motus nodi inter syzygias quod est $9^{s}.\ 11'.\ 3''.$ ita $\frac{a + .78b}{a + \frac{1}{2}b}\ r$ ad Æquationem quæsitam; est autem $b$ ad $a$ ut 1 ad 9 0827646, itaque $a + .78\,b$ est ut $9.8627646$ & $a + \frac{1}{2}b$ ut $9.5827646$ itaque fractio $\frac{a + .78b}{a + \frac{1}{4}b} = \frac{9.8627646}{9.5827646} =$ 1.0292191, quæ ducta in $r = \frac{1}{4}b = 9^{s}.\ 54'.\ 31''.\ 57'''.$ dat $10^{d}.\ 11'.\ 54''.\ 15'''.\ 8^{iv}.\ 11^{v}.$, ducta iterum in $9^{s}.\ 11'.\ 3''$, dat $93^{s}.\ 39'.\ 49''.\ 48'''.$, sed si radius $r$ circuli BFDB exprimatur per numerum $9^{s}.\ 54'.\ 31''.\ 57'''.$, longitudo circumferentiæ continebit tales gradus $628^{s}.\ 13'.\ 39''.\ 50'''.$ Diviso itaque numero $93^{s}.\ 39'.\ 49''.\ 48'''$ per $628^{s}.\ 13'.\ 39''.\ 50'''.$ Quotiens sive Æquatio quæsita est $18^{s}.\ 30'.\ 18''.$ &c. 117.

Calculum hunc integrum exhibuimus ut ostenderemus quomodo adhibendæ forent quantitates $4c$ & $r$ quæ circumferentiam totam ejusque radium exhibent, cum enim is radius æquipolleat $\frac{1}{4}b$, & $\frac{1}{4}b$ sit $9^{s}.\ 54'.\ 31''.\ 57'''.$, cavendum ne $4c$ sive circumferentia tota, $360^{s}.$ assumatur, sed debet assumi ejus numeri graduum qui sit ad $9^{s}.\ 54'.\ 31''.\ 57'''.$ ut est circumferentia ad Radium.

De hâc autem Æquatione semestri non agunt De La Hirius & Cassinus in Tabulis Astronomicis, nullius enim usus est ad calculum Eclipsium ad quem potissimum accommodantur pleræque Lunares Tabulæ; hanc autem Æquationem habent Tabulæ Rudolphinæ (pag. 87. Tabul.) & in Octantibus distantiæ Solis à nodo hanc faciunt $18^{s}.\ 39'.\ 46''.$, utrum accuratioribus Tabulis hæc æquatio ad $18^{s}.\ 30'.\ 18''.$ magis accederet ignoramus, at, qui probè

De Mundi Systemate.

## De Motu Nodorum Lunæ.

### Propositio I.

„*Motus ſolis medius à nodo, definitur per medium proportio-*
„*nale geometricum, inter motum ipſius ſolis medium, & motum*
„*illum mediocrem quo ſol celerrimè recedit à nodo in quadraturis.*

„Sit *T* locus ubi terra, *Nn* linea nodorum lunæ ad tempus „quodvis datum, *KTM* huic ad rectos angulos ducta, *TA* „recta circum centrum revolvens eâ cum velocitate angulari „quâ ſol & nodus à ſe invicem recedunt, ita ut angulus inter „rectam quieſcentem *Nn* & revolventem *TA*, ſemper fiat æ- „qualis diſtantiæ locorum ſolis & nodi. Jam ſi recta quævis „*TK* dividatur in partes *TS* & *SK* quæ ſint ut motus ſolis „horarius medius ad motum horarium mediocrem nodi in qua- „draturis, & ponatur recta *TH* media proportionalis inter par- „tem *TS* & totam *TK*, hæc recta inter reliquas proportiona- „lis erit motui medio ſolis à nodo.

„Deſcribatur enim circulus *NKnM* centro *T* & radio *TK*, „eodemque centro & ſemiaxibus *TH* & *TN* deſcribatur ellip- „ſis *NHnL*, & in tempore quo ſol à nodo recedit per ar- „cum *Na*, ſi ducatur recta *Tba*, area ſectoris *NTa* exponet „ſummam motuum nodi & ſolis in eodem tempore. Sit igitur „arcus *aA* quam minimus quem recta *Tba* præfatâ lege revol- „vens in datâ temporis particulâ uniformiter deſcribit, & ſector „quam minimus *TAa* erit ut ſumma velocitatum quâ ſol & „nodus tum temporis ſeorſim feruntur. Solis autem velocitas „ferè uniformis eſt, utpote cujus parva inæqualitas vix ullam „indu-

117. bè norunt quam difficile ſit obſervationes loci Nodi accuratiſſimas habere extrà Eclipſes, & quantùm parvus error in latitudine Lunæ & in verâ inclinatione orbitæ aſſignandâ locum nodi mutet, non invenient hoc diſcrimen ꝑ' obeſſe, quominus dici poſſit æquationem ita inventam cum Phænomenis cœleſtibus probè quadrare, & facile ſuſpicabuntur errorem hunc obſervationi potius quam calculo eſſe tribuendum.

„inducit in medio nodorum motu varietatem. Altera pars hu-
„jus ſummæ nempe velocitas nodi in mediocri ſuâ quantitate,
„augetur in receſſu à ſyzygiis in duplicatâ ratione ſinus diſtan-
„tiæ ejus à ſole; per Coroll. Prop. 31. Lib. 3^tii. Princip. &
„cum maxima eſt in quadraturis ad ſolem in *K*, (b) eandem
„rationem obtinet ad ſolis velocitatem ac ea quam habet *SK*

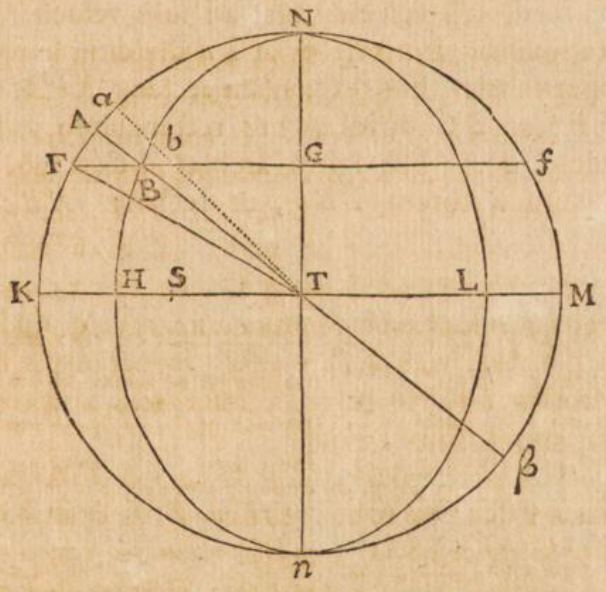



fig. 11.

„ad *TS* hoc eſt (c) ut (differentia quadratorum ex *TK* & *TH*
„vel) (d) rectangulum *KHM* ad *TH* quadratum. Sed ellip-
„ſis *NBH* dividit ſectorem *ATa* ſummæ harum duarum ve-
„locitatum exponentem, in duas partes *ABba* & *BTb* ipſis
„velocitatibus proportionales. Producatur enim *BT* ad circu-
„lum in β, & à puncto *B* demittatur ad axem majorem per-
„pen-

(b) * *Eamdem rationem obtinet* per conſtructionem.

(c) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH — ad TH quadratum.* Eſt ex conſtructione TK ad TH ut TH ad TS, eſt ergo $TK^2$ ad $TH^2$ ut TK ad TS, & dividendo $TK^2 - TH^2$ ad $TH^2$ ut TK — TS ſive SK ad TS. 117.

(d) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH vel rectangulum KHM.* Eſt enim $TK^2 - TH^2 = KH \times HM$, per 5^am. Lib. 2^i. Elem. Euclidis.

De Mundi Systemate.

„pendicularis *BG*, quæ utrinque producta occurrat circulo in „punctis *F* & *f*, & (e) quoniam ſpatium *ABba* eſt ad ſecto„rem *TBb* ut rectangulum *ABβ* ad *BT* quadratum (rectangulum „enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex *TA* & *TB* „ob rectam *Aβ* æqualiter & inæqualiter ſectam in *T* & *B*.) „Hæc igitur ratio ubi ſpatium *ABba* maximum eſt in *K*, ea„dem erit ac ratio rectanguli *KHM* ad *HT* quadratum, ſed „maxima nodi mediocris velocitas erat ad ſolis velocitatem in hâc „ratione. Igitur in quadraturis ſector *ATa* dividitur in partes velo„citatibus proportionales. Et (f) quoniam rectang. *KHM* eſt ad *HT* „quadr. ut *FBf* ad *BG* quad. (g) & rectangulum *ABβ* æqua„tur rectangulo *FBf*. Erit igitur areola *ABba* ubi maxima „eſt ad reliquum ſectorem *TBb*, ut rectang. *ABβ* ad *BG* „qua-

117.

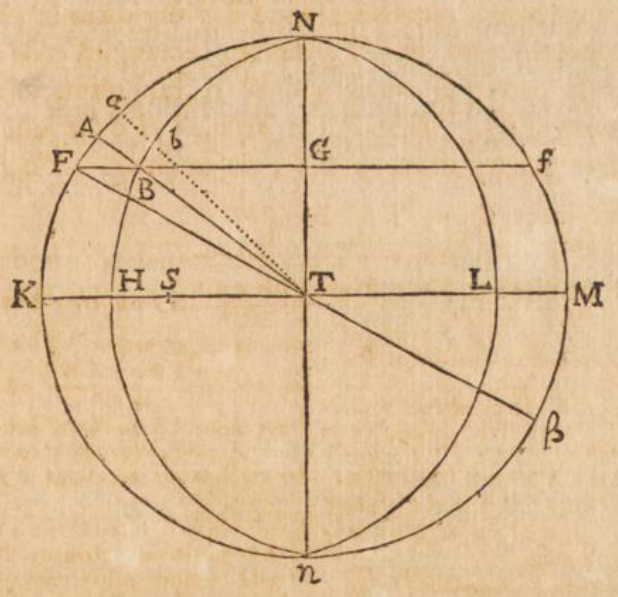
(e) * *Et quoniam ſpatium ABba* &c. Sector TAa eſt ad ſectorem TBb ut $AT^2$ ad $BT^2$, (quia propter parvitatem anguli ATa, non differt ſenſibiliter ſector BTb ab eo qui inter lineas AT, aT interciperetur & terminaretur arcu circuli centro T, radio TB deſcripti). Dividendo autem eſt $TAa - TBb$ ſive ABba ad TBb ut $AT^2 - BT^2$ ad $BT^2$; eſt verò $AT^2 - BT^2 = AB \times B\beta$ (per 5. 2^i. Lib. El.) ergo *ABba ad TBb ut* $AB\beta$ *ad BT quadratum.*

(f) * *Et quoniam rectangulum KHM eſt ad HT quad. ut FBf ad BG quad.* Ex natura Ellipſeos & circuli circumſcripti, eſt KT ad HT ut FG ad BG, & quadrando $KT^2$ ad $HT^2$ ut $FG^2$ ad $BG^2$, & dividendo $KT^2 - HT^2$ ad $HT^2$ ut $FG^2$ ad $BG^2$, ſed (per 5^am. Lib. 2^i. Elem.) $KT^2 - HT^2 = KH \times HM$ & $FG^2 - BG^2 = FB \times Bf$ ergo KHM ad $HT^2$ ut FBf ad $BG^2$.

(g) * *Et rectangulum* $AB\beta = FBf$ (per 35. 3^i. Elem.) hoc ratiocinium ita exprimi poteſt, area ABba ubi maxima eſt, eſt ad TBb ut $AB\beta$ ad $BG^2$ ergo ubi maxima eſt ABba eſt $\frac{TB \times AB\beta}{BG^2}$, in aliis verò locis area ABba eſt ad TBb ut $AB\beta$ ad $BT^2$, ergo illis in locis eſt $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$, eſt ergo area ABba ubi maxima eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$ ad $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$ ſive quia motus Solis qui per aream TBb exprimitur eſt ubique idem, eſt area ABba ubi maxima eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{1}{BG^2}$ ad $\frac{1}{BT^2}$ ſive ut $BT^2$ ad $BG^2$, ſed in Triangulo BTG eſt BT ad BG ut ſinus anguli recti G ad ſinum anguli BTG per Principia Trigonom. & diſtantia Solis à nodo ubi area ABba eſt maxima, nempe in K, menſuratur per angulum rectum, & ubi eſt in loco quovis A per angulum BTG, ergo area ABba ubi maxima eſt, eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut quadrata ſinuum diſtantiæ Solis à nodo in utrovis loco, ſed in eâ ſunt ratione motus nodorum in iis diſtantiis; Ergo ut eſt area ABba ubi maxima eſt ad motum nodi in eo loco, ita eſt area ABba in alio quovis loco ad motum nodi in eo loco, ſed ubi area ABba maxima eſt, eſt ad motum nodi ut BTb ad motum Solis, ergo cum areæ BTb & motus Solis ubique eadem maneant, eſt etiam in quovis loco area ABba ad motum nodi ut area BTb

ad

„quadr. Sed ratio harum areolarum ſemper erat ut *ABβ* re- LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROB. XIV.
„ctang. ad *BT* quadratum; & propterea areola *ABba* in lo-
„co *A* minor eſt ſimili areola in quadraturis, in duplicatâ ra-
„tione *BG* ad *BT* hoc eſt in duplicatâ ratione ſinus diſtantiæ
„ſolis à nodo. Et proinde ſumma omnium areolarum *ABba*
„nempe ſpatium *ABN* erit ut motus nodi in tempore quo ſol
„digreditur à nodo per arcum *NA*. Et ſpatium reliquum nem-




„pe ſector ellipticus *NTB* erit ut motus ſolis medius in eodem
„tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius,
„is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum ſuam abſolverit,
„motus nodi medius à ſole erit ad motum ipſius ſolis medium,
„ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut recta *TK* ad re-
„ctam *TH* mediam ſcilicet proportionalem inter *TK* & *TS*; vel
„quod eodem redit ut media proportionalis *TH* ad rectam *TS*.

PRO-

ad motum Solis ſive alternando eſt ubique *ABba* ad *BTb* ut motus nodi ad motum Solis. *Et proinde ſumma omnium ABba &c.* 357

DE MUNDI SYSTEMATE.

## PROPOSITIO II.

„*Dato motu medio nodorum lunæ invenire motum verum.*

„Sit angulus *A* distantia solis à loco nodi medio, sive motus „medius solis à nodo. Tum si capiatur angulus *B* cujus tangens „sit ad tangentem anguli *A* ut *TH* ad *TK*, hoc est in subdu„plicatâ ratione motus mediocris horarii solis ad motum me„diocrem horarium solis à nodo in quadraturis versante; erit „idem angulus *B* distantia solis à loco nodi vero. Nam jun„gatur *FT* & ex demonstratione propositionis superioris (h) erit „angulus *FTN* distantia solis à loco nodi medio, angulus au„tem *ATN* distantia à loco vero, & tangentes horum angu„lorum sunt inter se ut *TK* ad *TH*.

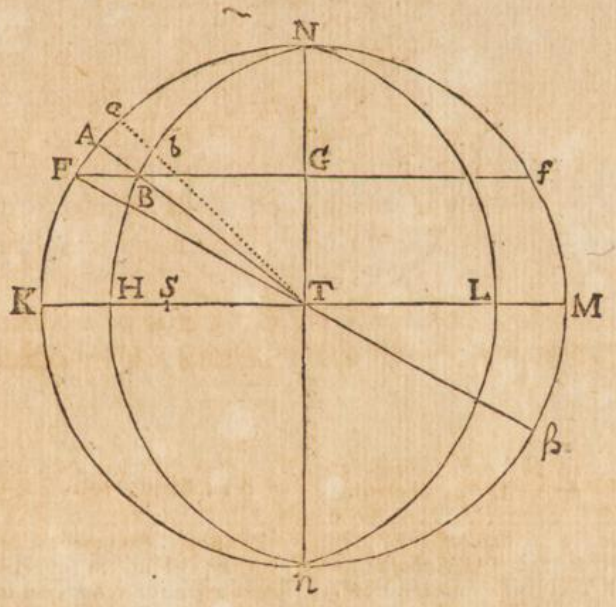
„*Coroll.* Hinc angulus *FTA* est æquatio nodorum lunæ, „(i) sinusque hujus anguli ubi maximus est in octantibus, est „ad

117. (h) * *Erit angulus FTN distantia Solis à loco nodi medio.* Cum circulus NKnM repræsentet totum motum Solis à nodo inter syzygias proximas cum eodem nodo, sectores ejus circuli ut FTN repræsentabunt motum medium Solis à Nodo, tempore quod erit ad totum tempus motus Solis inter syzygias cum eodem nodo, ut erit is sector assumptus ad totum circulum.

Ducatur verò FG quæ occurrat Ellipsi in B, cumque sectores Elliptici BTN repræsentent Solis motum qui uniformis supponitur, ii sectores BTN sunt proportionales tempori; sed sector Ellipticus BTN erit, ex natura Ellipseos & circuli circumscripti, ad totam Ellipsim ut sector circularis FTN ad totum circulum, ideoque tempus quo Solis motus repræsentabitur per BTN erit idem ac tempus quo Sol à nodis recesserit motu medio repræsentato per FTN, sed dum Sol describit sectorem BTN, vero motu recedit à nodo sectore NTA, per dem. prop. super. ergo sector FTN repræsentat medium motum Solis à nodo eo tempore quo verus ejus à nodo motus repræsentari debet per NTA, ergo medius motus est ad verum ut angulus TN ad angulum ATN, Tangentes autem horum angulorum, sumendo TG pro radio, sunt FG & BG, & FG est ad BG ut KT ad KH ex naturâ circuli & Ellipseos.

(i) * *Sinusque hujus anguli in octantibus est ad Radium ut KH ad TK+TH.* Ex Principiis Trigonometricis, est sinus hujus anguli FTA qui est æquatio nodorum Lunæ ad sinum anguli TFG, qui in hoc casu est 45gr. (cujus ergo sinus est $TA\sqrt{\frac{1}{2}}$) ut est FB ad BT, sive omnes terminos quadrando; est quad. sinus Æquationis ad $\frac{TA^2}{2}$ ut $FB^2$ ad $BT^2$ sive tollendo fractionem, est quadr. sinus Æquationis quæsitæ ad $TA^2$ ut $FB^2$ ad $2BT^2$, sed $BT^2 = BG^2 + TG^2$ & in octantibus est TG = FG sive BG + BF cujus quad. est $BG^2 + 2BG \times BF + BF^2$ hinc $BT^2 = 2BG^2 + 2BG \times DF + BF^2$ & $2BT^2 = 4BG^2 + 4BG \times BF + 2BF^2$, cujus Radix quadrata (negligendo $BF^2$) est

„ad radium ut $KH$ ad $TK+TH$. Sinus autem hujus æqua-
„tionis in loco (k) quovis alio $A$ est ad sinum maximum, ut
„sinus summæ angulorum $FTN+ATN$ ad radium: hoc est
„ferè ut sinus duplæ distantiæ solis à loco nodi medio (nempe
„$2FTN$) ad radium.




## *Scholium.*

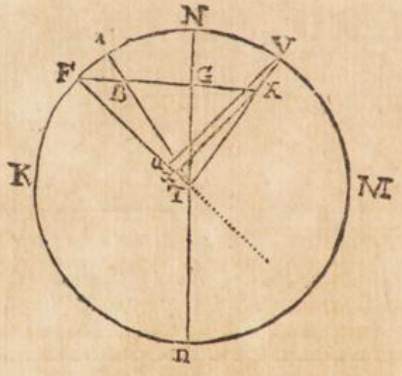
„Si motus nodorum mediocris horarius in quadraturis sit
„$16^{II}.\ 16^{III}.\ 37^{IV}.\ 42^{V}.$ hoc est in anno toto sidereo $39°.\ 38'.$
„$7''.$

est $2BG+BF=FG+BG$: Ergo tandem cum sit quad. sinus Æquationis quæsitæ ad $TA^2$ ut est $FB^2$ ad $2BT^2$; Radices quadratas omnium terminorum sumendo est sinus Æquationis ad $TA$ sive ad Radium ut est $FB$ ad $FG+BG$, sed est $BF$ ad $FG+BG$ ut $KH$ ad $TK+TH$, hinc tandem, sinus Æquationis maximæ est ad radium ut $KH$ ad $TK+TH$. 1170.

(k) * *Sinus autem Æquationis in loco quovis alio &c.* Ut hoc commode demonstretur hoc Lemma adhibendum est.

De Mundi Systemate.

„7′′′. 50′′′. erit (1) *TH* ad *TK* in ſubduplicatâ ratione numeri 9,082764 ad numerum 10,0827646, hoc eſt ut „18,




117. In circulo quovis N K n M ſumatur arcus N F ejuſque ſinus F G, ex centro ducatur recta T B A quæ ſecet hunc ſinum in B, dico quod ſinus ſummæ angulorum F T N, A T N erit ad T G Coſinum anguli aſſumpti F T N, ut ſumma linearum F G, B G, ad lineam B T.

Ex alterâ parte puncti N ſumatur arcus N V = N A, ducatur T V & producatur F G quæ occurrat radio T V in X, ductoque radio F T eoque producto ſi opus eſt, ducantur, in ipſum perpendiculares X x, V u.

Liquet ex conſtructione, lineam B T eſſe æqualem lineæ X T, lineam G X eſſe æqualem lineæ B G, ideoque totam F X eſſe æqualem ſummæ linearum F G, B G; liquet pariter lineam V u eſſe ſinum arcus F V qui eſt ſumma arcuum N F & N V ſive N A, & propter Triangula F X x, F T G ſimilia, ob angulum F communem & rectos x & G eſt T F ad T G ut F X ad X x, & propter Triangula ſimilia u V T, x X T eſſe V u ad T V ſive T F ut X x ad T X ſive B T; unde ex perturbato ordine fit V u ad T G ut F X ſive F G + B G ad B T; eſt itaque $BT = \frac{(FG+BG)TG}{Vu}$.

Ex hoc Lemmate facile probatur ſinum æquationis in quovis loco eſſe ad ſinum æquationis maximæ ut ſinus ſummæ angulorum F T N + A T N ad radium; nam ex Principiis Trigonometricis, eſt ſinus Æquationis quæſitæ ſive ſinus anguli F T B ad ſinum anguli F (qui eſt T G Coſinus nempe anguli F T N) ut eſt B F ad B T hoc eſt, ut eſt B F ad $\frac{(FG+BG)TG}{Vu}$ per Lemma; ducatur uterque conſequens in $\frac{Vu}{TG}$ fiet ſinus æquationis quæſitæ ad V u qui eſt ſinus ſummæ angulorum F T N + A T N ut B F ad F G + B G, ſed ex notâ præcedenti eſt B F ad B F + B G ut K H ad T K + T H, & eſt K H ad T K + T H ut ſinus æquationis maximæ ad Radium, hinc tandem, ſinus æquationis cujuſvis ad ſinum ſummæ angulorum F T N + A T N, ut ſinus æquationis maximæ ad Radium.

(1) * *Erit TH ad TK in ſubduplicatâ*

„18,6524761 ad 19,6524761. Et propterea *TH* ad *HK* ut „18,6524761 ad 1. hoc est ut motus solis in anno sidereo ad „motum nodi medium 19°. 18′, 1″. $23'''\frac{2}{3}$.

„At si motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis „sit 360°. 50′. 15″. sicut ex observationibus in theoriâ lunæ „adhibitis deducitur: motus medius nodorum in anno sidereo „erit 19°. 20′. 31″. 58‴. Et *TH* erit ad *HK* ut 360gr. „ad 19°. 20′. 31″. 58‴. hoc est ut 18,61214 ad 1. unde „motus mediocris horarius nodorum in quadraturis evadet „16″. 18‴. 48iv. Et æquatio nodorum maxima in octanti„bus 1°. 29′ 57″.

*ratione &c.* Est TS ad SK ut motus Solis ad motum horarium nodi in quadraturis, hoc est, ut 360. ad 39gr. 38′. 7″. 50‴. sive ut 9.0827646 ad 1, ergo componendo est TS ad TK ut 9.0827646 ad 10.0827646. ergo TH media proportionalis inter TS & TK, *est ad TK in subduplicatâ ratione &c.* Reliqua hujus scholii similibus calculis deducuntur, qui faciliores sunt quàm ut plenius explicentur. 117

De Mundi Systemate.

## PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

*Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum ecliptica.*

Designent *A* & *a* syzygias; *Q* & *q* quadraturas; *N* & *n* nodos; *P* locum lunæ in orbe suo; *p* vestigium loci illius in

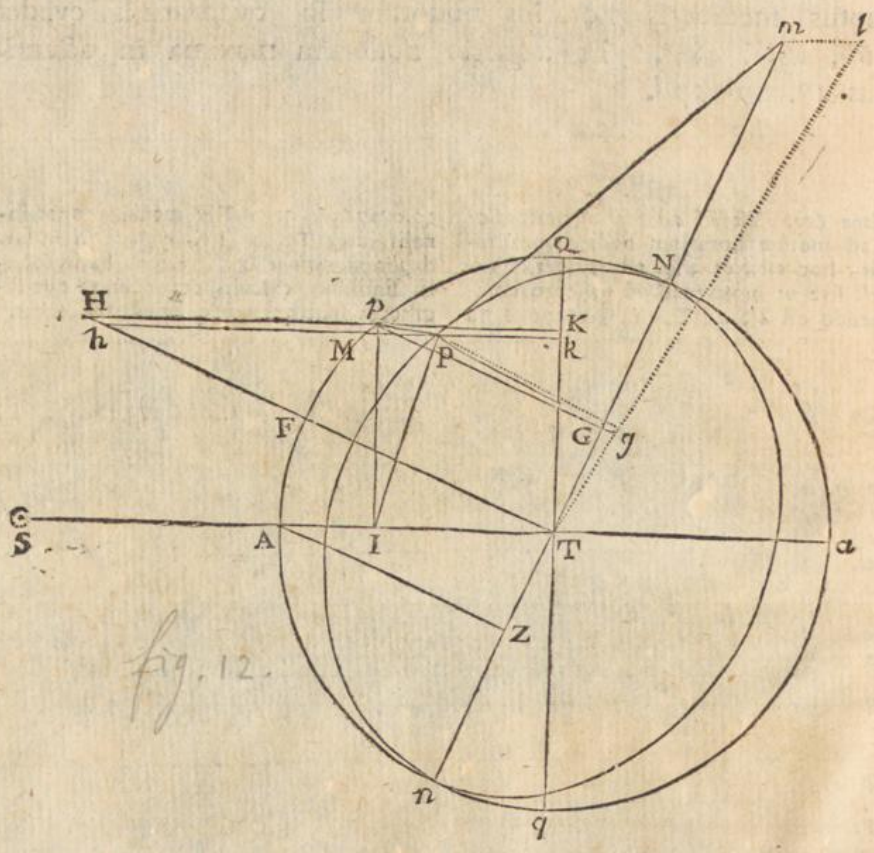



fig. 12.

plano ecliptica, & *mTl* motum momentaneum nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, *pG* & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis lunaris ad planum ecliptica,

ticæ, ubi luna versatur in $P$; & angulus $PgP$ inclinatio ejusdem post momentum temporis completum; ideoque angulus $GPg$ variatio momentanea inclinationis. Est (m) autem hic angulus $GPg$ ad angulum $GTg$ ut $TG$ ad $PG$ & $Pp$ ad $PG$ conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus $GTg$ (per prop. xxx.) sit ad angulum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{iv}.$ ut $IT \times PG \times AZ$ ad $AT$ *cub.* erit angulus $GPg$ (seu inclinationis horariæ variatio) ad angulum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 3^{vi}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT$ *cub.* *QEI.*

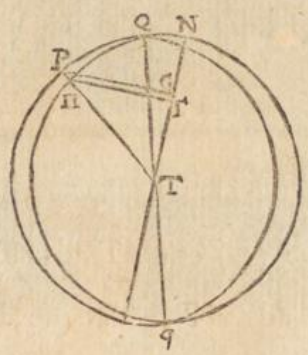
Hæc ita se habent ex hypothesi quod luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille ellipticus sit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. (n) Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

*Co-*

(m) *Est autem angulus GPg ad angulum.* In Triangulo PGg, sinus anguli GPg est ad lineam Gg, ut sinus anguli PGg ad Pg (sive PG, nam Pg & PG quam minimum differunt) si verò PG assumatur pro radio, sinus anguli PGg est Pp, ergo sinus anguli GPg est ad Gg ut Pp ad PG.

In Triangulo GTg, est Gg ad sinum anguli GTg ut Tg sive TG ipsi proximè æqualis ad sinum Anguli Recti in G qui est radius pro quo PG hic assumitur ergo ex æquo, sinus Anguli GPg est ad sinum anguli GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim, & quia sinus parvorum Angulorum sunt ut ipsi Anguli, est *angulus GPg ad angulum* &c.

(n) * *Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.* Ex propositionis demonstratione liquet quod variatio inclinationis est ad motum nodorum ut Pp ad PG (sive ut sinus inclinationis plani ad Radium) & ut PG ad TG; sumatur Π in Ellipsi ad eamdem distantiam à nodo ac P in circulo, ratio PG ad TG eadem erit ac ratio ΠΓ ad TΓ, per construction. cum autem hic agatur de quantitate mediocri sumatur eamdem esse plani inclinationem sive agatur de Plano Elliptico sive de plano circulari; Ergo variatio Inclinationis erit semper ut motus nodorum sive agatur de plano Elliptico sive de plano circulari; sed motus nodo- 1173

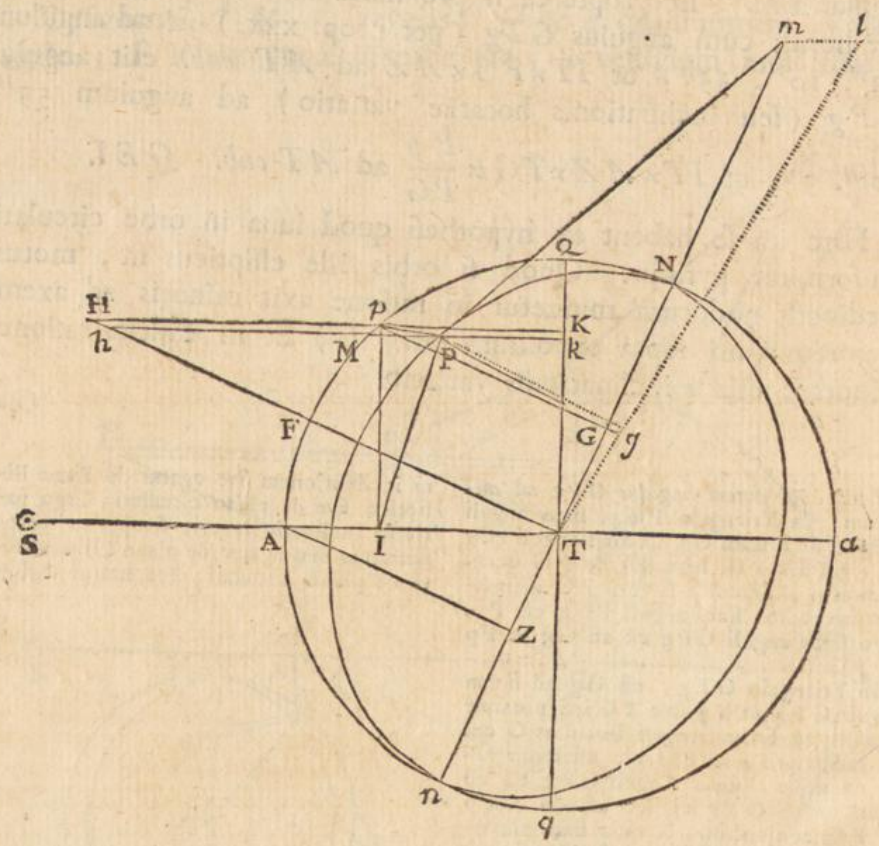



rum mediocris in orbe circulari est ad ejus motum in orbe Elliptico ut axis major ad minorem per Cor. Prop. XXXI.

In eâdem etiam ratione minuetur inclinationis variatio.

DE MUNDI SYSTEMATE.

*Corol.* 1. Si ad *Nn* erigatur perpendiculum *TF*, sitque *pM* motus horarius lunæ in plano ecliptícæ; & perpendicula *pK*, *Mk* in *QT* demissa & utrinque producta occurrant *TF* in *H*



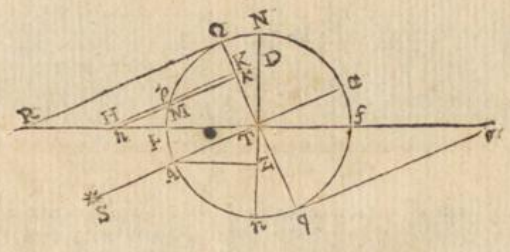

& *h*: (o) erit *IT* ad *AT* ut *Kk* ad *Mp*, & *TG* ad *Hp* ut *TZ* ad *AT*, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc

217. (o) * *Erit IT ad AT ut Kk ad Mp.* Est, ex naturâ circuli, ordinata pK cui æqualis est IT ad Radium AT, ut fluxio abcissæ Kk ad fluxionem arcus Mp, & *TG ad Hp ut TZ ad AT* producatur HpK ita ut occurrat lineæ Nn in D, propter Parallelas, HD, AT & HT, AZ per constructionem, est DT ad HD ut TZ ad AT, est pariter eamdem ob rationem DG ad pD ut TZ ad AT, quare sumendo differentiam terminorum duarum priorum rationum utriusque rationis est *TG ad Hp ut TZ ad AT*.

est, æquale areæ $HpMh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis variatio horaria ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $HpMh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT$ *cub.*

*Corol.* 2. Ideoque si terra & nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota inclinationis variatio tempore mensis illius foret ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$, ut (p) aggregatum omnium arearum $HpMh$, in revolutione puncti $p$ genitarum, & sub signis propriis + & − conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (q) id est, ut circulus totus $QAqa$ ductus

(p) * *Ut aggregatum omnium arearum HpMh sub signis propriis conjunctarum* scilicet prout linea MH sumitur in eamdem partem ac linea MK aut in partem oppositam; priore casu area HpMh signo affirmativo est affiicienda, posteriore negativo.



(q) * *Id est, ut circulus totus QAqa* &c. Liquet ex ipsâ constructione quod dum punctum p movetur ab F usque ad q, areæ HpMH constituunt aream positivam FAnqrfTF, dum ex q ad f procedit areæ HpMh constituunt aream negativam qrf, quæ ex priori detractâ relinquit semicirculum FnF.

Quod dum punctum p procedit ex f ad Q areæ HpMh efficiunt aream positivam faNQRFTf & dum ex Q ad F procedit, efficiunt aream negativam QRF quæ ex priori detractâ relinquit semicirculum fNF. 337.

Itaque omnes areæ HpMh sub signis propriis conjunctæ efficiunt circulum totum QAqa.

Cæterum observandum Variationem inclina-

DE MUNDI SYSTEMATE.

ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (r) hoc est, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2Mp \times AT$ *quad.*

*Corol.* 3. Proinde in dato nodorum situ, variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuata variatio illa menstrua generari posset, est ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$ sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id est (cum $Pp$ sit ad $PG$ ut sinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ sit ad $4AT$ ut (f) sinus duplicati anguli $ATn$ ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ nodorum à sole, ad quadruplum quadratum radii.

*Corol.*

117. clinationis esse positivam aut negativam, hoc est crescere aut decrescere secundum signa quantitatis $AZ \times TZ$ de quibus in Coroll. proximo dicemus.

(r) * *Ut circulus totus QAqa ductus in* $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ *ad* $Mp \times AT$ *cub.* Si in hac ratione loco circuli QAqa, ponatur ejus valor qui est circumferentia QAqa ductâ in dimidium radii seu in $\frac{AT}{2}$, hæc ratio licet, circumferentia $QAqa \times \frac{AT}{2} \times AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub. Multiplicetur uterque terminus per 2 & dividatur per AT, non mutabitur ratio & fiet *ut circumferentia QAqa ducta in* $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ *ad* $Mp \times AT$ *quad.*

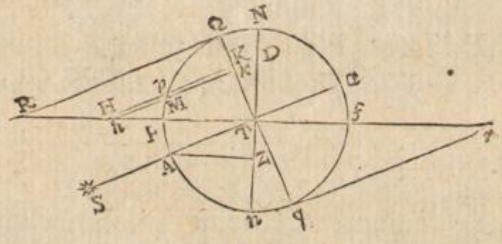
(f) *Ut sinus duplicati anguli.* Ex Trigonometriæ elementis sinus duplicati anguli ATn sive ATN, cujus sinus est AZ & Cosinus TZ, est $\frac{2AZ \times TZ}{AT}$ sive $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$.

Quando autem duplum anguli ATN excedit semicirculum sive quando angulus ATN est rectus, signum sinus dupli anguli ATN, fit negativum ex positivo; quando angulus ATN excedit 180$^{gr}$. signum sinus ejus dupli iterum fit positivus, sicque deinceps.

Positivum autem signum designat angulum Planum per variationem minui, negativum verò signum eum angulum augeri significat, ita ut angulus minuatur dum nodus N recedit ex conjunctione A ad quadraturam ultimam Q, crescit verò dum nodus à quadraturâ Q ad oppositionem a movetur, iterum minuitur dum ab oppositione ad primam quadraturam q tendit, & denique augetur dum à quadraturâ q ad conjunctionem A redit; ita ut Inclinationis angulus sit minimus cum nodi in quadraturis Q & q versantur, maximus

*Corol.* 4. Quoniam inclinationis horariæ variatio, ubi nodi in





ximus verò cum nodi sunt in syzygiis A & a; Quæ Lex ab Astronomis est observata sed paulò accuratius ostendendum id sequi reverâ ex hâc Propositione.

Sit nodus N ubivis inter conjunctionem A & ultimam quadraturam Q, ductâque FTf perpendiculari in lineam nodorum, dum Lunâ movebitur ex N ad F inclinationis variatio designabitur per aream NAFTh, cumque Luna tum versetur inter Nodum & remotiorem quadraturam motus nodi erit regressivus, ideoque cum linea ϒT fiat semper remotior à Lunâ quam linea NT (punctum ϒ quod hic exaratum non est designat novum locum in quem Nodus adscendens Lunæ movetur) inclinationis Lunæ angulus ad lineam Tϒ relatus minor erit quam si ad TN referretur, area ergo NAFTh designabit imminutionem anguli inclinat. dum pergit Luna ab N ad F.

Dum Luna movetur ab F ad q pergit quidem ut prius nodus in antecedentia, sed producta linea ϒT, ejus productio erit vicinior Lunæ in area Fq existenti quam productio lineæ NT, ideoque inclinationis Lunæ angulus ad productionem lineæ Tϒ relatus major erit quam si ad lineam Tn referretur, sed hoc in casu area FRq designat inclinationis variationem, ergo area FAq designat incrementum anguli inclinationis.

Dum Luna ab n ad f movetur, motus nodi fit regressivus & ex N in ϒ migrat, & lineæ ϒT productio remotior est à Lunâ in areâ nf versante quam productio lineæ NT ideo angulus inclinationis minor erit quam si ad lineam Tn referretur ea verò variationis mutatio designatur per aream Hnaf quæ ideo imminutionem anguli inclinationis designat.

Ab f ad Q crescit quidem inclinationis angulus, quia refertur ad lineam Tϒ, totum itaque illud variationis incrementum designatur per aream Qfr sed à Q ad n, cum motus nodi fiat progressivus, referaturque inclinationis angulus ad Tl, minuitur is angulus totaque imminutio designatur per aream NhrQ. 117.

Resumantur hæc omnia, deprehenditur imminutionem anguli inclinationis exprimi per areas NAFh, qnHR, Hnaf & NhrQ, quarum prima & ultima efficiunt QAFTr, duæ mediæ aream qafFR.

Totum verò incrementum anguli inclinationis exprimitur per areas FRq & Qfr, quarum hæc detracta ex area QAFTr relinquit semicirculum QAFf, prior detracta ex areæ qafTR relinquit semicirculum qafF ideoque circulus totus QAqa designat imminutionem anguli inclinationis cum nodus versatur in quovis puncto N quadrantis AQ.

Si hæc ratiocinia applicentur ad figuram Newtonianam ubi nodus N est in quadrante Qa, ex iis deprehendetur circulum QAqa designare incrementum anguli inclinationis.

Si nodus in quadrante aq versetur, omnia eodem modo procedent ac in primo casu, mutatis solummodo litteris majusculis in minores, ideoque etiam ostendetur circulum QAqa imminutionem anguli inclinationis designare; & pariter ubi nodus erit in quadrante qA casus hic ad secundum referri poterit, minuitur ergo inclinatio dum Nodus procedit ab A ad Q, tumque est minima, siquidem inde crescere incipit usque ad a, ubi est maxima, siquidem inde decrescit usque ad q, ubi iterum est minima indeque crescit usque ad A ubi iterum maxima est.

DE MUNDI SYSTEMATE.

in quadraturis verſantur, eſt (per hanc propoſitionem) ad angulum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{iv}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{P\,p}{PG}$ ad $AT$ *cub.* id (t) eſt, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{P\,p}{PG}$ ad $2AT$; hoc eſt, ut ſinus duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ductis in $\frac{P\,p}{PG}$ ad radium duplicatum: ſumma omnium variationum horariarum, quo tempore luna in hoc ſitu nodorum tranſit à quadraturâ ad ſyzygiam (id eſt, ſpatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad ſummam totidem angulorum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{iv}.$, ſeu $5878^{II}.$, ut ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ lunæ à quadraturis ducta in $\frac{P\,p}{PG}$ ad ſummam totidem diametrorum; hoc (u) eſt, ut diameter ducta in $\frac{P\,p}{PG}$ ad circumferentiam; id eſt, ſi inclinatio ſit $5^{gr.}\ 1'$,

121. (t) * *Id eſt.* Ubi nodi verſantur in quadraturis, recta N n coincidit cum Q q, ideóque perpendicularis A E, abit in radium A T. Quare $IT \times AZ \times TG \times \frac{P\,p}{PG}$ eſt ad A T cub. ut $IT \times AT \times TG \times \frac{P\,p}{PG}$ ad A T cub. Sive ut $IT \times TG \times \frac{P\,p}{PG}$ ad $AT^2$ ac dividendo per $\frac{1}{2}$ AT, ut $IT \times \frac{TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{P\,p}{PG}$ ad $2AT$.

(u) 121. * *Hoc eſt ut diameter.* Sit T I vel $p\,K = y$, radius Q T $= 1$, erit $TK = \sqrt{1 - yy}$, ex naturâ circuli, & $TK = TG$ quia in hoc caſu recta n N, coincidit cum Q q, cum nempe nodi verſentur in quadraturis; ac proinde ſinus duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis, id eſt $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} = 2y \times \sqrt{1 - y^2}$ Jam ut obtineatur elementum areæ quæ componitur ex omnibus ſinubus diſtantiæ duplicatæ, multiplicari debet ſinus variabilis $2y \times \sqrt{1 - y^2}$, per elementum arcûs circuli, hoc eſt, per $\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$, undè habetur elementum areæ quæſitæ $= 2y\,dy$, ſumptiſque fluentibus, prodit area tota $= y^2$, factâ autem $y = 1$, erit area illa ubi Luna pergit à quadraturâ ad ſyzigiam, æqualis quadrato radii. Nunc verò ut habeatur ſumma totidem diametrorum multiplicandus eſt quadrans circuli per totam diametrum. Hinc ſi radius dicatur $r$ peripheria $p$, erit ſumma omnium ſinuum duplicatæ diſtantiæ Lunæ à quadraturis, quo tempore Luna tranſit à quadraturâ ad ſyzigiam ad ſummam totidem diametrorum ut $r^2$ ad $\frac{p \times 2r}{4}$, ſivè ut $2r$ ad $p$, hoc eſt, ut diameter ad circumferentiam.

Si

1', ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex summâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, est 163'', seu 2'. 43''. LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

## PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

*Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum ecliptica.*

Sit $AD$ sinus inclinationis maximæ, & $AB$ sinus inclinationis minimæ. Bisecetur $BD$ in $C$, & centro $C$, intervallo $BC$ describatur circulus $BGD$. In $AC$ capiatur $CE$ in eâ

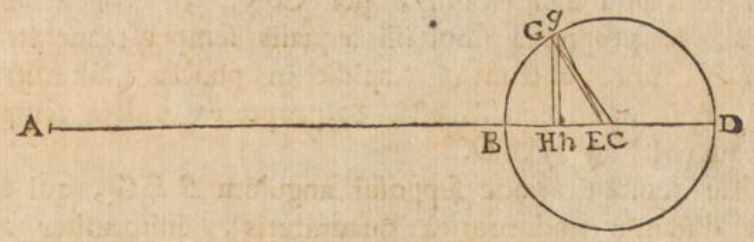



fig. 13.

ratione ad $EB$ quam $EB$ habet ad $2BA$: & si dato tempore constituatur angulus $AEG$ æqualis duplicatæ distantiæ nodorum à quadraturis, & ad $AD$ demittatur perpendiculum $GH$: erit $AH$ sinus inclinationis quæsitæ.

Nam

*Si autem inclinatio sit* 5°. 1'. Erit sinus Pp, huic inclinationi respondens, ad radium PG, ut 874 ad 10000 (ex vulgaribus sinuum tabulis). Est autem diameter ad peripheriam ut 7. ad 22, quarè summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ est ad summam totidem diametrorum ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22. Facile autem percipitur quod nodo existente in quadraturâ dum Luna à quadraturâ ad conjunctionem vadit, angulus inclinationis minuitur, quod tantumdem augetur, dum a conjunctione ad primam quadraturam movetur, minuitur rursum dum ad oppositionem vadit augeturque iterum dum ad ultimam quadraturam redit, ita compensatis incrementis & decrementis ut nulla sensibilis superfit inclinationis mutatio, quatenus scilicet nodus reverâ immotus in puncto Q supponitur. 121

DE MUNDI SYSTEMATE.

Nam $GEq$ æquale eſt $GHq+HEq=BHD$ (x) $+HEq=HBD+HEq-BHq=HBD+BEq-2BH\times BE=BEq+2EC\times BH=2EC\times AB+2EC\times BH=2EC\times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, eſt $GEq$ ut $AH$. Deſignet jam $AEg$ duplicatam diſtantiam nodorum à quadraturis poſt datum aliquod momentum temporis completum, & arcus $Gg$ ob datum angulum $GEg$ erit ut diſtantia $GE$. Eſt (y) autem $Hh$ ad $Gg$ ut $GH$ ad $GC$, & propterea $Hh$ eſt ut contentum $GH\times Gg$, ſeu $GH\times GE$; id eſt ut $\frac{GH}{GE}\times GEq$ ſeu $\frac{GH}{GE}\times AH$, id eſt, ut $AH$ & ſinus anguli $AEG$ conjunctim. Igitur ſi $AH$ in caſu aliquo ſit ſinus inclinationis, augebitur ea iiſdem incrementis cum ſinu inclinationis, per Corol. 3. Propoſitionis ſuperioris, & propterea ſinui illi æqualis ſemper manebit. Sed (z) $AH$, ubi punctum $G$ incidit in punctum alterutrum $B$ vel $D$, huic ſinui æqualis eſt, & propterea eidem ſemper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hâc demonſtratione ſuppoſui angulum $BEG$, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum $BEG$ rectum eſſe, & in hoc caſu $Gg$ eſſe augmentum horarium duplæ diſtantiæ nodorum & ſolis ab invicem, & inclinationis variatio horaria in eodem caſu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}.$ ut (a) contentum ſub inclinationis ſinu $AH$ & ſinu anguli recti $BEG$, qui eſt duplicata diſtantia nodorum à ſole, ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus $AH$ ad radium

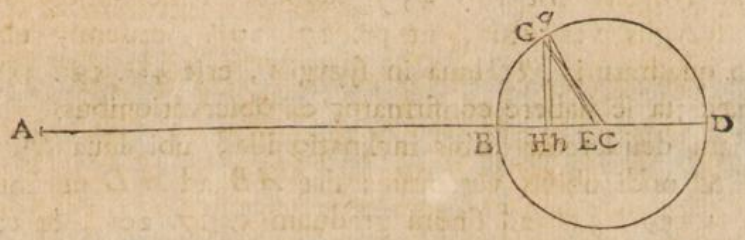
1211. (x) $*=BHD+HEq$. (Prop. 5. Lib. 2. elem.) $=HBD+HEq-BHq$ (per prop. 3. lib. 2. elem.) $=HBD+BEq-2BH\times BE$ (Prop. 7. ejuſdem Lib.) $=BEq+2EC\times BH$ (ob $BD=2EC+2BE$). Eſt autem (per conſtr.) $EB^2=2EC\times BA$; quare $BEq+2EC\times BH=2EC\times AB+2EC\times BH$.

(y) * *Eſt autem Hh ad Gg.* (Per naturam circuli).

(z) *Sed AH.* (Per conſtr.)

(a) * *Ut contentum ſub inclinationis ſinu AH, & ſinu anguli recti BEG*, hoc eſt, ut contentum ſub mediocris inclinationis ſinu AH (quia in hoc caſu AH=AC) & radio *ad quadruplum quadratum radii; id eſt, ut mediocris inclinationis ſinus AH, ad radium quadruplicatum.*

radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr}. 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ *B D* reſpondens, ad variationem illam horariam ut (b) diameter *BD* ad arcum *Gg*; id eſt, ut diameter *BD* ad ſemicircumferentiam *B G D* & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$




quo nodus pergit à quadraturis ad ſyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota *B D* ad $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa *B D* prodibit $16', 23''\frac{1}{2}$.

Hæc eſt inclinationis variatio maxima quatenus locus lunæ in orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi nodi in ſyzygiis verſantur, nil (c) mutatur ex vario ſitu lunæ. At ſi nodi in quadraturis conſiſtunt, inclinatio minor eſt ubi luna verſatur

(b) * *Ut Diameter B D ad arcum Gg.* Nam, in hâc conſtructione, variatio tota ſinuum differentiæ B D reſpondens per Diametrum B D exprimitur, & H h eſt incrementum ſinus inclinationis tempore quod per G g deſignatur, ſive horæ tempore; ſed ubi punctum H cadit in centro C, & punctum G in medio ſemicirculi, tunc eſt G g = H h; Ergo, eſt Diameter B D ad arcum G g ut variatio tota ad variationem horariam in Octantibus; ſed ut ſunt $2079\frac{7}{10}$ horæ quæ effluunt dum nodus pergit à quadratura ad ſyzygiam ad unam horam, ita ſemicircumferentia B G D ad G g, eſt ergo $Gg = \frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}h}$, ideoque variatio tota eſt ad vatiationem horariam in octantibus ut B D ad $\frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}h}$ ſive ut B D ad BGD & $2079\frac{7}{10}h.$ ad $1^h.$ conjunctim.

(c) * *Nil mutatur ex vario ſitu Lunæ.* Nam ex demonſtratione Prop XXXIV. inclinationis variatio horaria eſt ad angulum $33''. 10'''. 33^{iv}.$ ut $1T \times AZ \times TG \times \frac{PP}{PG}$ ad A T *cub.* ſed nodis verſantibus in ſyzygiis ſit A Z = o quare quantitas

De Mundi Systemate.

ſatur in ſyzygiis, quam ubi ea verſatur in quadraturis, exceſſu $2'.\ 43''$; uti in propoſitionis ſuperioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus exceſſus dimidio $1'.\ 21''\frac{1}{2}$ variatio tota mediocris $BD$ in quadraturis lunaribus diminuta fit $15'.\ 2''$, in ipſius autem ſyzygiis aucta fit $17'.\ 43''$. Si luna igitur in ſyzygiis conſtituatur, variatio tota in tranſitu nodorum à quadraturis ad ſyzygias erit $17'.\ 45''$: ideoque ſi inclinatio, ubi nodi in ſyzygiis verſantur, ſit $5^{gr}.\ 17'.\ 20''.$; eadem, ubi nodi ſunt in quadraturis, & luna in ſyzygiis, erit $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$. Atque hæc ita ſe habere confirmatur ex obſervationibus.

Si jam deſideretur orbis inclinatio illa, ubi luna (d) in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur; fiat $AB$ ad $AD$ ut ſinus graduum 4. 59'. 35'' ad ſinum graduum 5. 17. 20'', & capiatur angulus $AEG$ æqualis duplicatæ diſtantiæ nodorum à quadraturis; & erit $AH$ ſinus inclinationis quæſitæ. (e) Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio, ubi luna diſtat $90^{gr}.$ à

221. $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ fit etiam o, evaneſcit itaque hoc in caſu horaria variatio, ideoque in vario ſitu Lunæ non mutatur ejus orbitæ inclinatio. Et quidem idem citra calculum patet ex ipſa rei naturâ, nam verſantibus in ſyzygiis, ſive ſole exiſtente in linea nodorum, ſol eſt in eo plano in quo jacet linea nodorum, ſed linea nodorum eſt in plano orbitæ Lunaris, ergo ſol in ipſâ orbitâ Lunari productâ poſitus cenſeri poteſt, ac per conſequens qualiſcumque ſit ejus actio in Lunam, ipſam ex plano utrique communi neutiquam dimovebit.

(d) * *Ubi Luna in ſyzygiis & nodi ubivis verſantur.* Nam dum Luna ab unâ ſyzygiâ ad eamdem ſyzygiam redit, tota variatio menſtrua eſt ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$, ſive ut ex Cor. 3°. Prop. præcedentis conſtat ut Inclinationis ſinus ductus in ſinum duplicatæ diſtantiæ nodi à Sole ad quadruplum quadratum radii, ſed per hujus Probl. conſtructionem in ea ratione eſt $AH$, ſi modo $AB$ ſit ut ſinus minimæ inclinationis & $AD$ ſinus maximæ, ſed $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$ eſt minimus inclinationis Angulus ubi Luna eſt in ſyzygiis & $5^{gr}.\ 17'.\ 20''$ eſt maximus. *Ergo fiat AB ad AD ut ſinus graduum* $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$ &c.

(e) *Huic orbis inclinationi æqualis eſt ejuſdem inclinatio ubi Luna diſtat* $90^{gr}.$ *à nodis.* Minima inclinatio ubi Luna diſtat $90^{gr}.$ à nodis eſt ubi nodi ſunt in quadraturis, nonageſimus autem à nodis gradus incidit in ipſam ſyzygiam itaque minima inclinatio eadem eſt ac in præcedenti caſu; maxima vero inclinatio eſt cum nodi ſunt in ipſis ſyzygiis, & nonageſimus à nodis gradus tunc quidem incidit in quadraturas, ſed tunc inclinatio nihil mutatur ex vario ſitu Lunæ, itaque eadem eſt ſive Luna in ſyzygiis ſive in quadraturis verſetur, eadem ergo eſt iterum maxima inclinatio ac in caſu præcedenti, ideoque in hoc caſu $AB$ & $AD$ eadem aſſumenda ſunt ac in caſu præcedenti: Reliquum ratiocinium hic etiam adplicatur, nam quamvis tempus reditus Lunæ ad nonageſimum à nodo gradum brevior ſit tempore ejus reditus ad ſyzygiam

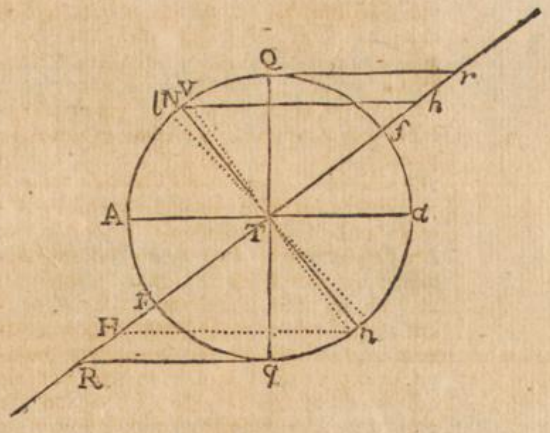
ſive

à nodis. In aliis lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam inclinationis variatio admittit, in (f) calculo latitudinis lunæ compenſatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum (ut ſupra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi poteſt.

*Scho-*

ſive menſe ſynodico, ſiquidem menſe Periodico etiam brevior eſt, tamen hic caſus ad fictionem Corollarii ſecundi magis accedit, in quo nempe ſupponitur nodum toto menſe ſenſibilem viam non eſſe emenſum, quod quidem accuratius dicetur ſi aſſumatur reditus Lunæ ad eumdem ſitum reſpectu nodi; hic ergo eadem conſtructio ac prior potiori jure erit adhibenda.

(f) * *In calculo latitudinis compenſatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum.* Calculus latitudinis fit, poſitâ inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ, & aſſumptâ diſtantiâ Lunæ à nodo, hinc latitudo Lunæ obtinetur, quæ creſcit à nodo ad gradum à nodo nonageſimum, inde decreſcit accedendo ad alterum nodum &c. Procedat ergo Luna à nodo N ad punctum F 90gr. à nodo diſſitum, motus medius nodi eſt major motu vero, toto eo intervallo, ut ſuperius (ad Prop. XXXII.) oſtenſum eſt, ergo aſſumpta mediocri diſtantia à nodo quæ verâ major eſt & mediocri inclinatione quæ convenit illi menſi, latitudo major invenietur quam debuiſſet, ſed quoniam in caſu iſtius figuræ minuitur Angulus inclinationis dum Luna movetur ab N in F, & is angulus ad mediocrem imminutionem tunc pervenit cum Luna eſt in F circiter, quia area NFh eſt ferè ſemicirculo æqualis, hinc inclinatio orbitæ angulum majorem efficit quam is qui per inclinationem mediocrem ſupponitur, unde latitudo vera major evadit quam ea quæ propter mediocrem inclinationem orbitæ obtinetur: hinc ex eo quod nodi motus mediocris loco motus veri aſſumitur invenitur latitudo major vera, ſed ex eo quod inclinatio mediocris aſſumitur loco veræ, invenitur latitudo minor vera; inæqualitates itaque menſtruæ quam variatio inclinationis & motus nodorum admittunt ſeſe mutuo compenſant in calculo latitudinis. Cæteri caſus eamdem compenſationem ſuppeditant, v. gr. dum Luna ex F in q movetur motus verus nodi eſt minor motu vero, hinc Luna eſt reverâ remotior à nodo quam ſtatuitur per motum medium nodi, ideoque latitudo major ſupponitur quam eſt (quia in ſecundo quadrante à nodo quò proprior eſt Luna à nodo aſcendente N, ideoque eo remotior à deſ- 121.




cendente n, eò ejus latitudo eſt major) ſed cum orbita Lunæ habuerit in F inclinationem mediocrem augetur is Angulus dum movetur Luna ab F ad q, ideoque aſſumendo eam inclinationem mediocrem minor obtinetur latitudo quam reverâ eſt, ergo, propter inæqualitatem motus nodi latitudo quæ ex motu nodi mediocri habetur eſt major vera, latitudo quæ obtinetur ex inclinatione mediocri eſt minor verâ, compenſantur ergo errores &c.

DE MUNDI SYSTEMATE.

## *Scholium.* (g)

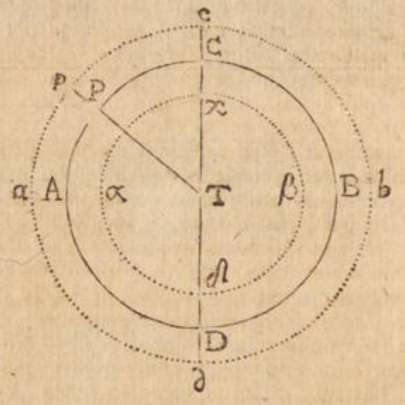
121. (g) * *Scholium.* Scholio hoc tradit Newtonus rationes quibus quædam ex Æquationibus Lunaribus ad calculos revocari possint, sed dolendum est illum non aperuisse vias quibus usus est ad eas concinnandas: defectum hunc utcumque reparare sumus conati & Methodos aperuimus quibus ex Gravitatis Theoria eas Æquationes deducere liceat, quantum fieri potuit iisdem usi sumus Methodis quas Newtono familiares fuisset constat & ad ejus solutiones proxime nos accessisse percipient Viri Docti cum paucis duntaxat secundis ab ipsius numeris discedat calculus noster & ejus consequentiæ planæ sint similes iis quas ex suis Principiis Newtonus derivavit, utrum aliis Methodis res feliciùs absolvi potuerit, viderint Doctiores, speramus tamen hos calculos, ut legitimis Principiis nixos, Lectoribus nostris gratos fore, & forte eos juvare ut melius quid excogitent: Cæterum hoc Scholium in quinque Paragraphos commodè distribui potest; In primo Newtonus Indicat calculum ejus Æquationis Lunæ quæ Æquatio Solaris prima dicitur: In secundo, tradit Æquationes Solares motus nodorum & Apogæi Lunæ; In Tertio illam Æquationis Solaris correctionem tradit quæ ab Excentricitate orbitæ Lunaris pendet; In quarto aliam adhuc correctionem Æquationis Solaris addit quæ nempe oritur ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ; In quinto denique agit de Æquationibus motûs Lunæ & ejus Apogæi quæ pendent ex situ Apogæi Lunæ respectu Solis.

Ut autem hæc omnia & potissimum ea quæ Æquationem Solarem Lunæ spectant, & quæ primo, tertio & quarto Paragrapho à Newtono indicantur meliùs intelligantur, totum eum calculum qualis ex Theoriâ gravitatis instituendus nobis videbatur, uno tenore tradendum censuimus.

*De Incremento motus medii Lunæ, & ejus Æquatione annuâ, ex Solis actione pendentibus, primum in Hypothesi orbem Lunæ esse circularem, postea in Hypothesi Orbem Lunæ esse Ellipticum. Denique in Orbe Lunari ad Ecliptieam inclinato.*

### THEOR. I.

Corpus P revolvatur in circulo ADBC circa corpus T à quo retineatur per vim decrescentem secundum quadrata distantiarum; accedat autem vis quædam constans quæ retrahat perpetuo corpus P à corpore centrali T, sed quæ sit exigua respectu vis ejus corporis T; Et describatur circulus a d b c in tali distantiâ ut residuum vis quam exerceret corpus T in eâ distantiâ (detractâ eâ vi extraneâ) sit ad vim quâ corpus P revolvebatur in circulo A D B C inverse ut cubi Radiorum Tp, TP; Dico, quod propter illam vim extraneam fiet ut corpus P circa circulum a d b c oscilletur, nunc citrà nunc ultra delatum, parum ab illo discedens, ita ut ejus motus assumi possit quasi fieret in eo circulo.




Nam fingatur eam vim extraneam non esse

esse constantem, sed talem ut, post discessum corporis P à circulo A D B C propter ejus vis extraneæ actionem, residuum vis quam exercet corpus T in distantia ad quam abit corpus P (detractâ eâ vi extraneâ) sit semper inversè ut cubi distantiarum, eveniet ut (per Prop. IX. Lib. 1. Princip.) corpus P spiralem Logarithmicam describat, in quâ angulus curvæ cum radio ad curvam ducto semper manet idem; Verùm quoniam ab initio vis illa Extranea fuit constans, liquet quod priusquam corpus P circulum a d b c attigerit ea vis plus imminuebat vim centralem quam ut decrescat secundùm cubos distantiarum auctarum, ideoque quod anguli curvæ cum radio ad curvam ducto semper crescere debuerunt, sed incremento perpetuo minore quo magis accedit virium decrescentium ratio ad rationem inversam cubi distantiarum; Perveniet ergo corpus P ad circulum a d b c, & angulus curvæ cum Radio, quando P erit in circulo a d b c, erit recto major, quia semper crevit is Angulus à tempore quo corpus P circulum A D B C describebat in quo angulus radii cum curva rectus est; ideo P ultra circulum a d b c perget; cum autem P ultra circulum a d b c pervenerit, detractio vis constantis vim Centralem minus minuet quam secundum cubum distantiarum, itaque angulus curvæ cum radio minor fiet quam si Logarithmica spiralis describeretur & tandem reducetur ad angulum rectum ultra circulmu a d b c, inde verò curva cum radio faciet angulum acutum, nam vis centralis illic major est quam ut circulus describi possit quod sic demonstrari potest; Areæ æqualibus temporibus descriptæ durante toto hoc corporis P motu sunt ubique æquales, quoniam vires ad centrum T constanter diriguntur (ex Hyp.), ideoque in eo loco ultra circulum a d b c in quo angulus curvæ cum radio fit rectus, arcus dato tempore descriptus foret ipsa basis areæ descriptæ cujus altitudo est distantia à Centro seu ipse radius, & is arcus debet esse ad arcum qui eodem tempore descriptus fuisset a corpore P si in circulo A D B C moveri perseveresset, nullaque vis extranea accessisset inverse ut radii; sagittæ autem eorum arcuum (quæ sunt semper ut quadrata arcuum divisa per Radios) forent inverse ut Cubi radiorum, sed vis centralis ultra circulum adbc, minus decrescit quam secundum cubum distantiarum, ergo sagitta arcus descripti quæ est ejus vis centralis effectus, major est sagittâ quæ foret secundum rationem inversam cubi distantiarum, ergo ea sagitta quæ per vim centralem producitur major est illa quæ orbtineretur si circulus in eo loco describeretur; Ergo corpus P à Tangente magis discedit versus centrum quam si circulum describeret, ergo ejus via acutum angulum cum Radio efficere incipit, sicque accedit iterum ad circulum a d b c angulis curvæ cum radio perpetuo decrescentibus; Cum autem infra eum circulum transiverit angulus quem facit curva cum Radio iterum augetur donec is angulus rectus evadat, inde vero fiet obtusus quia vis centralis illic minor est quam ut corpus P in circulo moveri pergat, redit ergo corpus P versus circulum a d b c idque perpetuâ oscillatione, ut liquet ex collatione motûs quem haberet in Logarithmicâ spirali cum hoc motu: Sed quò minor est vis illa data quæ ex centrali detrahitur eò illæ alternæ oscillationes minus à circulo a d b c recedent, quare si vis ea exigua supponatur respectu vis Centralis corporis T, supponi etiam potest motum corporis P in circulo a d b c fiet. Q. E. D.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI. 121.

Cor. 1. Si vis illa extranea & constans perpetuo traheret corpus P versus T, iisdem argumentis ostendetur quod si describatur circulus interior $\alpha\delta\beta\kappa$ in tali distantiâ à centro T, ut vis corporis T ad eam distantiam aucta per vim illam extraneam sit ad vim in circulo ADBC inversè ut cubi Radiorum circulorum ADBC, $\alpha\delta\beta\kappa$, corpus P hinc inde cis citrave circulum $\alpha\delta\beta\kappa$ oscillatur, & si ea vis extranea sit exigua censeri potest quod corpus P in eo ipso circulo $\alpha\delta\beta\kappa$ movebitur.

Cor. 2. Et si vis illa extranea constans non foret sed crescceret secundum aliquam dignitatem positivam distantiarum, iisdem omninò ratiociniis ostendi posset quod corpus P in circulo a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$ movebitur, eveniet solummodo ut radius T p paul m diversus sumi debeat ab eo qui inveniretur si vis ea extranea constans foret.

Schol. Aliis Methodis effectum illius vis extraneæ ad calculos revocari posse non negamus & quidem unam aut alteram Methodem ab hâc diversam eumdem in finem in sequentibus proponemus.

THE-

DE MUNDI SYSTEMATE.

## THEOR. II.

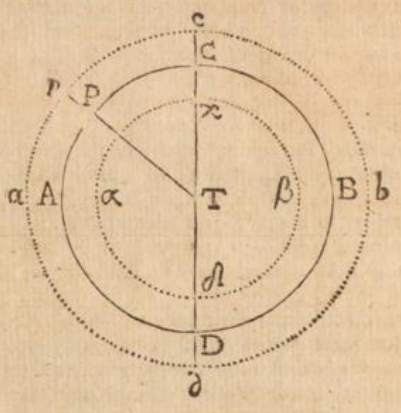
121. Positis iis quæ in primo Theoremate supponuntur, dicatur $r$ Radius circuli ADBC, sit $\varrho$ radius circuli a d b c, vel $\alpha\delta\beta\kappa$, sit $p$ Radiorum $r$ & $\varrho$ differentia; Vis corporis T in distantia $r$ dicatur $V$ & in eadem distantia vis extranea dicatur $Y$ quæ ereſcat ut distantiæ à centro T & quæ positiva censeatur si distrahat corpus P à centro, negativa verò si illud attrahat ad centrum, dico quod Radius $\varrho$ erit semper æqualis quantitati $\frac{V-\frac{1}{2}Y}{V-4Y}r$, sive quantitati $r\times 1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}+\frac{16Y^3}{V^3}$ &c. & omissis terminis propter exiguitatem quantitatis Y evanescentibus, est ille radius $\varrho = Y\times 1+\frac{Y}{V}$.

Nam vis corporis T in distantia $\varrho$ erit $\frac{rr}{\varrho\varrho}V$ vis extranea erit $\frac{\varrho}{r}Y$ ex hypoth., ideoque vis quâ circulus adbc (vel $\alpha\delta\beta\kappa$) describitur est $\frac{rr}{\varrho\varrho}V-\frac{\varrho}{r}Y$, sed hæc vis debet esse ad vim V quâ circulus A B C D describitur inversè ut cubi Radiorum, sive ut $\frac{1}{\varrho^3}$ ad $\frac{1}{r^3}$ (per Theor. præc.) ergo est $\frac{V}{\varrho^3}=\frac{V}{r\varrho^2}-\frac{Y\varrho}{r^4}$, sive reductis terminis ad eumdem denominatorem est $\varrho^4 Y = r^3 V\times\varrho - r = \pm r^3 pV$. Loco $\varrho$ scribatur $r\pm p$ fiet $r^4Y\pm 4r^3pY+6r^2p^2Y\pm 4rp^3Y+p^4Y=\pm r^3pV$, sive deletis terminis ubi $p$ superat primum gradum, quoniam hæc quantitas exigua est fit $r^4Y\pm 4r^3pY=\pm r^3pV$, sive $\pm pV\mp 4pY=rY$, unde obtinetur $\pm p=\frac{rY}{V-4Y}$; ideoque $\varrho$, quod est $r\pm p$, fit $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$ qui valor in seriem redactus est $r\times 1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$ &c. sive $r\times 1+\frac{2Y}{V}$.

## THEOR. III.

Dicatur $M$ Tempus Periodicum corporis P in circulo A D B C, dico quod ejus Tempus Periodicum in circulo a d b c (vel $\alpha\delta\beta\kappa$) erit $M\times 1+\frac{2Y}{V}$.

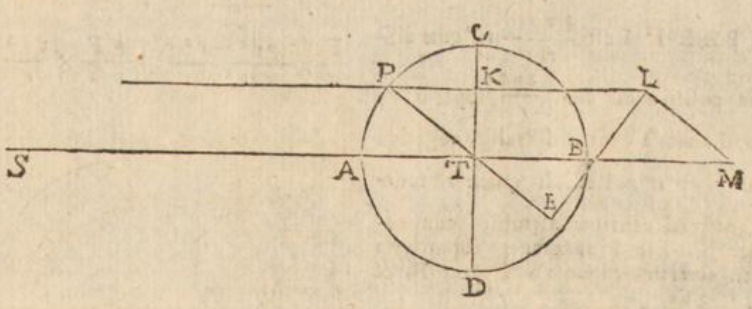
Dem. Tempus Periodicum corporis P revolventis in circulo a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\kappa\delta$) propter vim extraneam Y detractam vel additam est ad Tempus Periodicum ejus corporis P cum revolvebatur in circulo A D B C citra omnem vim extraneam, ut est quadratum radii $\varrho$ ad quadratum radii $r$; Nam quia vis Y est semper directa ad centrum T, areæ manebunt temporibus proportionales quamcumque in viam flectatur corpus P, ergo, si tandem ejus via in circulum a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\kappa\delta$) mutetur, tempus quo describetur peripheria a d b c (vel $\alpha\delta\beta\kappa$) erit ad tempus quo describebatur peripheria A D B C, ut tota area circuli a d b c (vel $\alpha\delta\beta\kappa$) ad totam aream circuli A D B C ideoque ut quadrata radiorum $\varrho$ & $r$, sive (per Theor. præced.) ut $\frac{V-3Y^2}{V-4Y^2}rr$ ad $rr$, ideoque ut $\frac{V-3Y^2}{V-4Y^2}$ ad 1. sed hâc fractione in seriem



ſeriem reſoluta ea evadit $1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$&c. &c. quæ ſeries valde convergit propter exiguitatem iſtius fractionis $\frac{Y}{V}$ & illius quadratum eſt $1+\frac{2Y}{V}+\frac{9Y^2}{V^2}+\frac{40Y^3}{V^3}$ &c. Ergo ut 1 ad $1+\frac{1Y}{V}$ + &c. ita M ad $M\times 1+\frac{2Y}{V}$ + quod eſt tempus quo deſcribetur Peripheria a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$.

## THEOR. IV.

Sit T terra, P Luna, ADBC circulus quem Luna deſcribit; ſit ST diſtantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur $a$; dicatur F vis Solis in terram in mediocri illa diſtantia, Sol ſupponatur immotus; diſtantia Lunæ à Terrâ PT dicatur $r$ & ea non obſtante actione Solis in Lunam eadem manere cenſeatur; Sit CP diſtantia Lunæ à quadraturâ proxima quæ dicatur $u$, ſit ejus ſinus $y$, ſit ejus Coſinus $z$, Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam ſecundùm directionem radii PT, eſt ubivis $\frac{F}{a}\times\frac{3yy}{r}-r$.

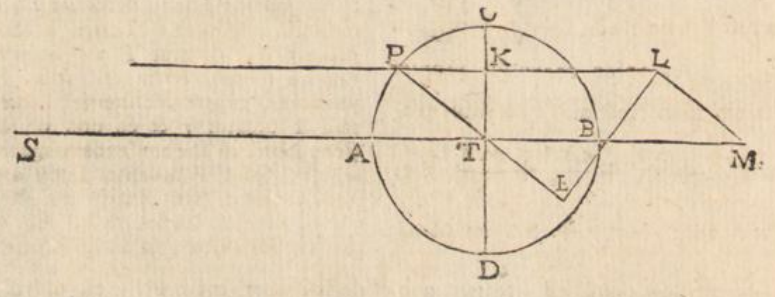



Nam, ſecundùm conſtructionem Prop. LXVI. Lib. I. Princ., repræſentetur vis Solis quæ dicitur F per lineam ST vel SK, ea vis Solis quâ trahitur Luna in loco P repræſentetur per lineam SL, & hæc vis cenſeatur compoſita ex duabus SM & LM, quarum LM ſit Parallela radio PT, cum autem linea SM ſit æqualis lineæ $ST\pm TM$, & terra trahatur per vim ST non ſecus ac Luna, ſitus reſpectivus Lunæ ac Terræ per eam vim ST non mutatur, ideo ſola ea pars vis SM quæ exprimitur per TM conſideranda venit; Præterea ex naturâ gravitatis, eſt SK ad SL ut eſt $\frac{1}{SK^2}$ ad $\frac{1}{SK\mp PK^2}$ ſive ut eſt $SK^2\mp 2SK\times PK+PK^2$ ad $SK^2$, aut omiſſo termino $PK^2$ ut $SK\mp 2PK$ ad SK, ſive quoniam 2PK eſt exiguum reſpectu lineæ SK ut SK ad $SK\pm 2PK$ eſt ergo SL ſive $SK\pm KL=SK\pm 2PK$ & $KL=2PK$, cum autem linea PL ſit proxime parallela lineæ SM, & ex conſtructione PT ſit parallela LM, eſt TM proxime æqualis lineæ PL, & eſt $PL=PK+2KL=3PK$; Ex puncto L ducatur perpendiculum in radium PT (productum ſi neceſſe ſit) & vis TM, ſeu vis ipſi æqualis PL reſoluta intelligatur in vim PE & vim LE, vis LE radio PT ſit perpendicularis ideoque vim centralem non afficit, vis PE ſecundùm directionem radii agat, ſicque punctum P à centro T diſtrahat, altera autem pars quæ per LM repræſentatur ſecundum directionem radii agens punctum P verſus centrum trahit; Ergo ea pars Solis quæ agit in Lunam ſecundum directionem radii PT eſt differentia virium PE & LM.

Jam vero ob Parallelas SL, SM & TP, LM eſt $LM=TP=r$, & cum PK ſit proxime perpendicularis in lineam TC erit

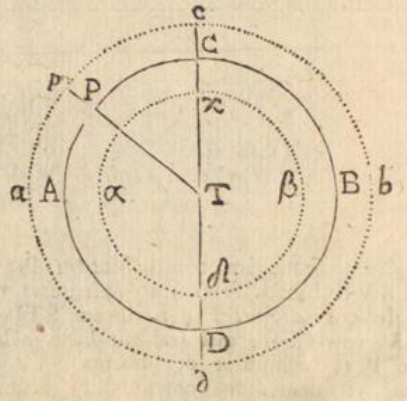
DE MUNDI SYSTEMATE.

I. 2 I.




erit PK ſinus arcus PC qui ſinus dictus eſt $y$, ideoque $PL = 3PK = 3y$, cum autem Triangula PKT, PEL ſint ſimilia, eſt PT ($r$) ad PK ($y$) ut PL ($3y$) ad PE quod erit ergo $\frac{3yy}{r}$ & differentia virium PE & LM eſt $\frac{3yy}{r} - r$, quæ differentia poſitiva eſt cum $\frac{3yy}{r}$ ſuperat $r$, tuncque Lunam à centro diſtrahit, negativa quando $\frac{3yy}{r}$ minus efficit quam $r$, tuncque Lunam ad centrum attrahit, cum ergo linea ST ſive $a$ repræſentet totam vim Solis in terram, eaque vis dicatur F, & quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ repræſentet eam partem vis Solis quæ in Lunam agit ſecundùm directionem PT, fiat ut $a$ ad $\frac{3yy}{r} - r$, ita F ad eam partem vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam quæ idcircò erit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. Q. E. O.

Coroll. Si transferatur Luna in alium orbem a d b c, $\alpha\delta\beta\kappa$ cujus radius ſit $\varrho$, Dico, quod, manente diſtantia Lunæ à quadraturâ proximâ, ea pars vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam creſcet ut illæ diſtantiæ $\varrho$, eritque ideo $\frac{\varrho}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, nam cum arcus p c ejuſdem numeri graduum cenſeatur ac arcus PC ſinus eorum erunt ut radii, ideoque ſinus arcus p c erit $\frac{\varrho}{r} y$, Demonſtrabitur verò iiſdem plane argumentis quibus in Theoremata uſi ſumus quod, ſi Luna in circulo a d b c vel $\alpha\delta\beta\kappa$ moveretur, ea pars vis Solis quæ ſecundum directionem radii P T exercetur erit $\frac{F}{a} \times 3\frac{\varrho\varrho y^2}{r^2} - \varrho = \frac{F}{a} \times \frac{3\varrho^2 y^2 - r^2\varrho^2}{r^2\varrho} =$ $\frac{F}{a} \times \frac{3\varrho y^2 - r^2\varrho}{r^2}\varrho = \frac{\varrho F}{r\,a} \times \frac{3y^2}{r} - r$.




## THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi poteſt, ſi concipiatur Lunam ex ſuâ orbita ADBC in aliam tranſferri, cujus ſingulæ particulæ quamminimæ ſint portiones circulorum talium ut vis centralis Terræ in ſingulo circulo agens ſublata vel addita vis Solis quæ in eo loco exerceretur ſit ad vim centralem Terræ in circulo ADBC citra Solis actionem agentem, inverſè ut cubus radii ejus circuli ad cubum radii circuli ADBC.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos creſcat vel decreſcat, ſitque nul-

nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo post minima sit sicque gradatim crescat, si constans censeatur per tempusculum aliquod, brevissime transibit Luna in circulum a d b c illi vi congruum per Theor. I., mox verò cum vis Solis crescat quantitate quam minima, ea vis censeatur constans per alterum tempusculum, transibit Luna ex circulo primæ vi congruo in alterum huic incremento consentaneum, sicque semper, ideoque in singulis particulis arcus C P Luna censeri potest delata in circulum vi Solis in eo puncto agenti congruum.

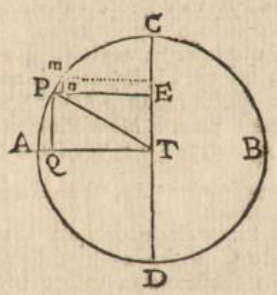
## THEOR. VI.

Manentibus quæ in Theor. IV. suppositа sunt, dicatur $c$ tota circumferentia cujus radius est $r$, dicatur Y vis Solis agens in Lunam secundum directionem P T & in datâ distantiâ C P à quadraturâ C, quæ distantia C P dicatur $u$, dicatur M tempus Periodicum Lunæ in circulo ADBC citrà Solis actionem, arcus exiguus à puncto P assumptus dicatur $du$, dico quod tempus quo similis arcus describetur in orbitâ in quam Luna per actionem Solis est translata erit $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ &c.

Nam si vis Y quæ in punctum P à Sole exercetur, in exiguas particulas divideretur & singula quæ dicatur d Y maneret constans durante unicâ revolutione Lunæ, sicque gradatim Lunam in circulum a d b c transferret, tempus Periodicum in singulo circulo excederet tempus Periodicum in circulo præcedenti quantitate $\frac{2dY}{V}$. Hinc tandem tempus Periodicum quo circulus a d b c describeretur foret $M \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ &c. per Theor. III. & tempus quo arcus similis arcui $du$ describeretur in eo circulo, foret ad hoc tempus Periodicum ut $du$ ad $c$, foret itaque $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V} +$, sed singulæ particulæ orbitæ quam Luna describit propter adjunctionem vis Solis spectari possunt quasi pertinerent ad circulos congruos vi Soli in illis punctis agenti, per Theor. V. Ergo, tempus inventum est illud ipsum, quo durante, Luna describet arcum similem arcui $du$ in orbitâ in quam transfertur per actionem Solis.

## LEMMA I.

Invenire integrales quantitatum $ydu$, $zdu$, $y^2du$, $z^2ydu$, $zy^2du$, $yz^2du$, $y^3du$, $y^4du$ &c. factarum ex Elemento arcus & dignitatibus ejus sinus $y$, vel ejus Cosinus $z$.




Ex naturâ circuli Triangulum P T E est simile Triangulo fluxionali P m n; ideoque est P T ($r$) ad P m ($du$) ut P E ($y$) ad P n ($dz$), ut T E ($z$) ad m n ($dy$), hinc est $du = \frac{rdz}{y} = \frac{rdy}{z}$; Hinc fit Primò, ut, omnes termini in quibus alteruter factorum $y$ vel $z$ quantitatis $du$ dimensionem habet imparis numeri, possint integrari; nam loco elementi $du$, ponatur ejus valor $\frac{rdz}{y}$ si $y$ sit imparis dimensionis, vel $\frac{rdy}{z}$ si $z$ sit imparis dimensionis, ea substitutione fiet ut pares evadant dimensiones $y$ vel $z$ quæ prius impares erant, & quia in primo casu habetur fluxio $dz$, loco $y^2$ substituatur $r^2 - z^2$, sicque omnes factores ducentes $dz$, erunt aut $r$ aut $z$, ideoque quantitas proposita erit absolute integrabilis, in altero casu cum habeatur fluxio $dy$, ut tollantur factores $z$ cujus dimensiones sunt pares, loco $z^2$ substituatur $r^2 - y^2$, sicque omnes factores ducentes $dy$ erunt aut $r$ aut $y$ ideoque habebuntur termini absolute integrabiles.

Secundò, factores quantitatis $du$ sint pares, & quidam primo sit $z^2du$ vel $y^2du$; Integralis horum Elementorum est $r \times$ CPQT vel $r \times$ CPE, nam est $z^2du = rzdy$, & $zdy$ est fluxio areæ CPQT; est $y^2du =$

DE MUNDI SYSTEMATE.

$ry\,dz$, & $y\,dz$ est fluxio areæ CPE; itaque quando P ex C pervenit in A & absolvit quadrantem Integralis $z^2\,du$ vel $y^2\,du$ est $r \times \frac{rc}{8}$.

121.

Sint itaque ambo factores $y$ vel $z$ quantitatis $du$ numero pari qualicumque, semper reduci poterunt ita ut quantitas propositа contineat dignitates pares alterutrius quantitatis, puta $y$, altera variabili exclusa ponendo loco $z^2$ quantitatem $r^2 - y^2$. Si ergo quæratur integralis quantitatis $y^{2m}\,du$, ut ea ad impares dimensiones revocetur spectetur ut $y^{2m-1} \times y\,du$; Est autem juxta Methodos vulgares $\int y^{2m-1} \times y\,du = y^{2m-1} \int y\,du - \int \int y\,du \times 2m-1 \times y^{2m-2}\,dy$, sed $y\,du = \frac{ry\,dz}{y} = r\,dz$, & Integralis quantitatis $dz$ sumptæ à puncto C est $r-z$, hinc $\int y\,du = rr - rz$, qua substituta in valore Integralis $\int y^{2m-1} \times y\,du$ ea fit $y^{2m-1} r^2 - y^{2m-1} rz - rr \int 2m-1 \times y^{2m-2}\,dy + \int .rz \times 2m-1 \times y^{2m-2}\,dy$, sive (quia $rr \int 2m-1 \times y^{2m-2}\,dy = \frac{2m-1}{2m-1} r^2 y^{2m-1} = r^2 y^{2m-1}$) est $\int .y^{2m}\,du = -rzy^{2m-1} + \int \times 2m-1 \times rz \times y^{2m-2}\,dy$ (sive quia $r\,dy = z\,du$) $= -rzy^{2m-1} + \int .2m-1 \times z^2 y^{2m-1}\,du$ (& loco $z^2$ substituendo $r^2 - y^2$) $= -rzy^{2m-1} + 2m-1 \int .r^2 y^{2m-2}\,du - 2m-1 \int y^{2m}\,du$. Et transpositione facta est $2m \int y^{2m}\,du = -rzy^{2m-1} + \int 2m-1 \times r^2 \int y^{2m-2}\,du$, & tandem $\int .y^{2m}\,du = \frac{2m-1}{2m} \times r^2 \int y^{2m-2}\,du - \frac{rzy^{2m-1}}{2m}$; Hinc cum habeatur Integralis quantitatis $y^2\,du$; si quæratur Integralis $y^4\,du$ ea obtinebitur per hanc formulam, siquidem in eo casu est $y^{2m-2}\,du = y^2\,du$, & ex ejus integratione habetur integratio quantitatis $\int y^{2m}\,du$, quæ isto in casu est $y^4\,du$; Simili modo ex integrali quantitatis $y^4\,du$ habebitur Integralis quantitatis $y^6\,du$ &c.

Quando P pervenit in A, terminus $\frac{rzy^{2m-1}}{2m}$ evanescit, quia illic est $z = o$ habetur ergo $\int y^{2m}\,du = \frac{2m-1}{2m} r^2 \int y^{2m-2}\,du$; In eo ergo casu si quæratur integralis quantitatis $y^4\,du$, fiat $m = 2$ erit $\int .y^4\,du = \frac{3}{4} r^2 \int y^2\,du$, sed $\int .y^2\,du = \frac{r^2 c}{8}$ ideoque $\int .y^4\,du = \frac{3r^4 c}{4 \times 8}$; Si quæratur Integralis quantitatis $y^6\,du$ fiat $m = 3$ & erit $\int y^6\,du = \frac{5}{6} r^2 \int y^4\,du = \text{sed } \int .y^4\,du = \frac{3r^4 c}{4.8.}$ ideoque $\int .y^6\,du \frac{3.5r^6 c}{4.6.8}$.

Cor. 1. Si in primo casu in quo alteruter factorum quantitatis $du$ aut ambo factores sunt imparis dimensionis, totum elementum per quantitates $r$, $z$, $dz$ exprimatur, Integralis quæ tunc obtinebitur non erit completa, quia cosinus $z$ ex T incipit & arcus $u$ ex puncto C, unde $dz$ negativum esse debet; erit ergo $\int r^n z^m dz = C - \frac{r^n z^{m+1}}{m+1}$, ut hæc constans C obtineatur, observandum quod ubi $u$ est o, ideoque evanescit hoc elementum tunc est $z = r$ ergo $o = C - \frac{r^{n+m+1}}{m+1}$ hinc $C = \frac{1}{m+1} r^{n+m+1}$; v. gr. sit $\int .rz^3\,dz = C - \frac{rz^4}{4}$ fit $C = \frac{1}{4} r^5$.

Cor. 2. Si è contra arcus $u$ ex puncto A inciperet, Integralis quæ obtinebitur cùm elementum per quantitatem $y$ exprimetur completa non erit, & eâ ratione compleri debebit quæ in præcedenti Corollario est indicata.

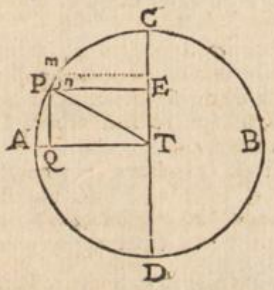
Cor. 3. In secundo casu, si $u$ ex puncto A incipiat erit $\int .y\,dz = \text{APET}$ & $\int z\,dy$ est area APQ, ut liquet ex ipsa figura.

Cor. 4. Denique si $u$ ex puncto A incipiat & ambo factores sint uterque dimensionis paris, elementum non est reducendum ad litteram $y$, ut in Lemmatis solutione factum est, sed ad quantitatem $z$, quæ in toto calculo loco $y$ substituatur & vice versa; Liquet enim quod $z$ est sinus respectu arcus AP, & $y$ ejus Cosinus.

## PROBLEMA I.

Invenire totam retardationem Lunæ dum unam revolutionem absolvit.

Cons-




Constat ex Theor. VI. Quod si Sol sit immotus, & Luna in totâ revolutione eam vim Solis patiatur quam patitur in puncto P, eveniet ut tempus quo describitur arcus $du$, (quodque debet esse $\frac{Mdu}{c}$ posito M tempore Periodico Lunæ, & $c$ Peripheriâ quam percurrit) evadat $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$; itaque tempus illud producitur quantitate $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2Y}{V}$, ideo cum tempore $\frac{Mdu}{c}$ iste arcus $du$ describi debuisset hoc tempore $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2Y}{V}$, arcus $\frac{2Y}{V} du$ describeretur, hæc est ergo retardatio Lunæ in puncto P orta per actionem Solis.

Sed in singulo puncto P orbitæ Lunaris vis Y est $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ (per Theor. IV.) ergo Elementum retardationis Lunæ est $du \frac{2F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r$, cujus Integralis secundum Lemma præcedens est $\frac{2F}{Va} \times \frac{3r+c}{8r} - \frac{1}{4} rc$, sive $\frac{2F}{Va} \times \frac{1}{8} rc$, cum P pervenit in A, cumque idem sit Solis effectus in singulo quadrante tota retardatio Lunæ est $\frac{2F}{Va} \times \frac{4}{8} rc$ sive $\frac{Frc}{Va}$, dum Luna revolutionem absolvit, respectu Solis immoti.

Si reddatur Soli motus suus, & loco mensis Periodici M, mensis Synodicus $\mu$ intelligatur, & censeatur quod proxime verum est mensem synodicum qui respondet mensi Periodico in circulo adbc peracto, esse ad eum mensem Periodicum ut $\mu$ ad M, ideoque eum mensem Synodicum esse $\mu \times 1 + \frac{2Y}{V}$ omnia procedent ut prius & erit $\frac{Frc}{Va}$ retardatio Lunæ toto ejus tempore synodico. 121.

Scrupulus esse potest, utrum in hac expressione, quantitas $c$ designet peripheriam 360 grad. an eam peripheriam conjunctam cum viâ quam Sol emensus est mense synodico; sed ex integrationis adhibitæ ratione patet, actum fuisse de veris quadrantibus circuli, ideoque hic $c$ designare peripheriam ipsam nihilque ultra, ita ut $\frac{Frc}{Va}$ sit retardatio absoluta Lunæ tempore synodico.

Verum alia certior correctio est adhibenda; Constat ex Propositione XXVI. hujusce Libri, velocitatem Lunæ augeri per Solis actionem Radio orbitæ Lunaris perpendicularem, ita ut, velocitas Lunæ in Quadraturis sit ad ejus velocitatem in quolibet puncto ut $109.73r$ ad $109.73r + \frac{yy}{r}$, hinc tempus quo describitur arcus $du$ brevius fit in proportione velocitatum, ideoque cum id tempus fuerit $\frac{\mu du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$, fit $\frac{109.73r}{109.73r + \frac{yy}{r}} \times \frac{\mu du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$ sive fractionem ad series reducendo $1 - \frac{yy}{109.73rr} \times \frac{\mu dc}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$; Quantitas autem hæc $\frac{\mu dc}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$, duas partes continet, priorem independentem ab actione Solis secundùm directionem radii exercitam, & de acceleratione ad hanc partem pertinente actum est in XXVI. Prop.; & hinc fit ut mensis synodicus medius sit brevior eo qui debuisset esse in proportione numeri 10973 ad 11023, & inæqualitates inde natæ in variis partibus mensis synodici in variatione continentur;

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

altera pars $\frac{\mu\, du}{c} \times \frac{2Y}{V}$ pendet ab actione Solis ſecundum radium orbitæ Lunaris exercitam, & de hac ſola iſto calculo agitur, ideoque cum ex iſta oriatur retardatio $\frac{2Y}{V}\, du$, & tempus $\frac{\mu\, du}{c}$ fiat minus in proportione 1 ad $1 - \frac{yy}{109.73r^2}$ retardatio quæ fiet dum arcus $du$ deſcribi debuiſſet erit ſolummodo $\frac{2Y\, du}{V} - \frac{2Yyy\, du}{109.73r^2V}$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ evadet hoc Elementum $du \times \frac{2F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^4}{109.73r^3} + \frac{yy}{109.73r}$ cujus Integralis pro quadrante juxta Lemma I. eſt $\frac{2F}{Va} \times \frac{3r^2c}{8r} - \frac{1}{4}rc - \frac{3 \times 3r^4c}{4 \times 8 \times 109.73r^3} + \frac{r^2c}{8 \times 109.73}$ ſive $\frac{2Frc}{Va} \times \frac{1}{8} - \frac{5}{4.8.109.73}$ & quadruplicatum pro tota revolutione fit $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$.

Coroll. Conſtat ex Cor. 2^do. Prop. IV. Lib. I. Princ. Quod vires centrales ſunt inter ſe directè ut radii & inverſe ut temporum Periodicorum quadrata: hinc, ſi ſit A annus ſidereus, & M menſis Periodicus ſidereus ſepoſitâ omni Solis actione, erit F ad V ut $\frac{a}{AA}$ ad $\frac{r}{MM}$, ſive $\frac{F}{V} = \frac{aMM}{rAA}$ ſubſtituto itaque hoc valore loco $\frac{F}{V}$ in quantitate $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$ quæ retardationem durante menſe ſynodico exprimit, ea retardatio fit $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92}c$, & ſi non attendatur ad correctionem quæ pendet ex actione Solis perpendicularis radio orbitæ Lunaris ea retardatio foret $\frac{M^2}{A^2}c$.

## PROBL. II.

Dato tempore ſynodico apparenti Lunæ, invenire tempus periodicum quod obſervari debuiſſet, ſi abeſſet actio Solis in Lunam ſecundùm radium orbitæ Lunaris exercitam.

Sit $S$ menſis ſynodicus apparens, A annus ſidereus, inde (ex nota proportione menſis ſynodici ad Periodicum) invenietur menſem Periodicum apparentem eſſe $\frac{AS}{A+S}$, & quoniam hoc tempore Periodico Luna deſcriberet peripheriam $c$ deducetur quod tempore ſynodico $S$ deſcribet arcum $\frac{A+S}{A}c$.

Sed Luna citra Solis actionem tempore Periodico M deſcribere debuiſſet Peripheriam $c$, &, eadem in Hypotheſi, tempore $S$ deſcripſiſſet aream $\frac{Sc}{M}$ hinc ergo retardatio abſoluta quam patitur tempore $S$ eſt $\frac{Sc}{M} - \frac{A+S}{A}c = \frac{AS-AM-MS}{AM}c$. Sed per Corollarium præcedentis problematis ea retardatio inventa fuerat $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92}c$ hinc obtinetur hæc æquatio $AS - AM - MS = \frac{433.92\, M^3}{438.92\, A}$, loco M ſcribatur XA, loco S ſcribatur EA, & fiet hæc æquatio $A^2E - A^2X - A^2EX = \frac{433.92\, A^3X^3}{438.92\, A}$ ſive $E = X + EX + \frac{433.92}{438.92}X^3$, ſed menſis ſynodicus medius eſt .08084896 A hinc E = .0804896 & æquatio fit .08084896 = 1.08084896 X + $\frac{433.92}{438.92}X^3$, loco X ſubſtituatur .0744 + R & æquatio evadit .08084896 = .08082129 + 1.09726905 R, unde habetur .00002767 = 1.09726905 R, hinc obtinetur R = .0000252 & M = .0744252 A.

## THEOR. VII.

Si mutetur utcumque Solis à Terra diſtantia, ita ut loco $a$ dicatur $X$, dico quod, cæteris manentibus, Retardatio Lunæ durante Tempore ſynodico, cum Ter-

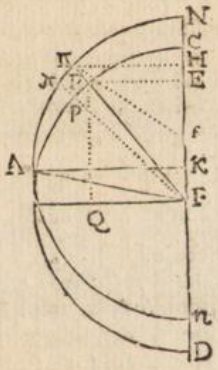
Terra distabit à Sole quantitate X erit $\frac{a^3 M^2}{X^3 A^2} \times \frac{433.92c}{438.92}$.

Nam ex Problemate I. Retardatio Lunæ inventa fuerat $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$ sed in aliâ à Sole distantia loco $a$ ponatur X, & præterea loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$, decrescit enim vis Solis F ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione facta retardatio Lunæ fit $\frac{a^2 Frc}{X^3 V} \times \frac{433.92}{438.92}$; Tum vero loco $\frac{F}{V}$ substituatur $\frac{aM^2}{rA^2}$ & habebitur expressio Theorematis hujusce.

## LEMMA II.

Foco F, axe majore N F n qui dicatur $2a$ describatur Ellipsis, sit $e$ ejus excentricitas eaque parva sit, axis minor sit $2b$, erit $b^2 = a - e^2$; Ex foco ut Centro radio $a$ describatur circulus, & ducantur à foco lineæ secantes circulum in P & Ellipsim in $\Pi$, linea F $\Pi$ dicatur X, sinus anguli A F P sit $y$, Cosinus $z$, Dico quod linea $x$ erit $\frac{b^2 a}{a^2 \mp ez}$.

Ducatur ex $\Pi$, $\Pi$ H perpendicularis ad Axem, & propter Triangulorum F P E, F $\Pi$ H similitudinem erit F P ad F $\Pi$ ut P E ad $\Pi$ H & ut F E ad F H, hoc est $a : x = y : \frac{y}{a} x = z : \frac{z}{a} x$: Sit f alter focus Ellipseos ex eo ducatur linea f $\Pi$, ex natura Ellipseos est f $\Pi = 2a - x$ sed f $\Pi^2 = \Pi$ H$^2$ + f H$^2$ & $\Pi$ H $= \frac{y}{a} x$, & f H = F H − F f vel F f − F H vel F f + F H, & est F f $= 2e$ & F H $= \frac{z}{a} x$ hinc $\Pi$ H$^2$ + f H$^2$ $= \frac{y^2}{a^2} x^2 + \frac{z^2}{a^2} x^2 \mp \frac{4ez}{a} x + 4e^2 =$ f $\Pi^2$ $= 4a^2 - 4ax + x^2$, est autem $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} x^2 = x^2 = x^2$, ergo $\mp \frac{4ez}{a} x + 4e^2 = 4a^2 - 4ax$, & dividendo per 4 & transponendo est $ax \mp \frac{ez}{a} x = a^2 - e^2 = b^2$; Unde habetur $x = \frac{b^2 a}{a^2 \mp ez}$. Q. E. O.




Cor. Hic valor $x$ in series resolutus est $\frac{b^2}{a} \times 1 \pm \frac{ez}{a^2} + \frac{z^2 e^2}{a^2} \pm \frac{e^3 z^3}{a^3}$ &c. sumptis signis superioribus quando E cadit in eâdem parte ac centrum, & sumptis signis inferioribus quando E cadit in parte in quâ non est centrum.

Cor. 2. Si fractio $\frac{a}{x} \times \frac{a^2 \mp cz}{b^2}$ ad dignitates superiores evehatur termini in quibus $e$ plurium dimensionum poterunt omitti, propter suppositionem excentricitatem exiguam esse, & quidem si agatur de Solis excentricitate ea non assurgit ad duas centesimas radii, & excentricitas Lunæ non assurgit ad septem centesimas.

Cor. 3. Hinc tardatio Lunæ quæ ex Solis actione pendet, fiet durante tempore synodico S, $\frac{433.92c}{438.92} \times \frac{M^2}{A^2} \times \frac{a^2 \mp ez^3}{b^6}$, positis $a$ pro semi-axe majore orbitæ Solis, $e$ pro ejus excentricitate, & $b$ pro axe minore.

## PROBL. III.

Determinare quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis dum Ter-

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

Terra deſcribit circa Solem arcum quam-minimum datum.

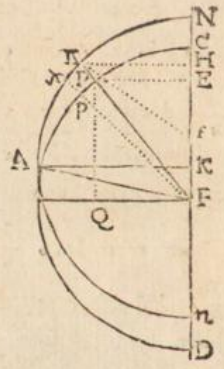
Sit ut in præcedenti Lemmate N Π n Ellipſis quam terra deſcribit, ſit Sol in foco F, ducatur ut prius linea F P Π & ei quam proxima F p π quæ ſecet in circulo C A D arcum P p, & quæratur quantitas graduum quâ tardatur Luna per Solis actionem, dum Terra videretur è Sole, deſcripſiſſe arcum P p.

Sit ut prius *A* tempus annuum, *a* Ellipſeos ſemi-axis major, *k* circumferentia eo radio deſcripta ex foco F, ſit *e* excentricitas, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ ſemi-axis minor, area ſemi-circuli $\frac{ak}{4}$, quæ eſt ad aream ſemi-Ellipſeos ut eſt *a* ad *b*, hinc area ſemi-Ellipſeos eſt $\frac{bk}{4}$.

Dicatur arcus A P, *u*, arcus P p ſit *du*, radio F Π ſive X deſcribatur arculus ex π in F Π, is erit ad *du* ut eſt F Π ſive X ad *a*, ergo is arculus erit $\frac{x\,du}{a}$, ideoque area $F\Pi\pi$ eſt $\frac{x^2\,du}{2a} = \frac{b^4\,a\,du}{2 \times a^2 \mp e z^2}$ (per Lem. præced.)

Sed tempus quo terra arcum P p deſcripſiſſe videtur eſt ad tempus ſemeſtre $\frac{1}{2}$ A, ut hæc area $F\Pi\pi$, ſive $\frac{x^2\,du}{2a}$ ad ſemi-Ellipſim $\frac{bk}{4}$, Eſt itaque illud tempus quo terra arcum P p deſcripſiſſe videtur $\frac{4\,x\,du}{2\,a\,b\,k} \times \frac{1}{2}\,A = \frac{x^2\,A\,du}{a\,b\,k}$.

Inventum autem eſt quod tempore S Luna tardabatur propter actionem Solis quantitate $\frac{433.92\,c}{439.92} \times \frac{M^2\,a^3}{A^2\,x^3}$ ergo tempore $\frac{x^2\,A\,du}{a\,b\,k}$ tardabitur quantitate $\frac{433.92\,c \times x^2\,A\,du}{438.92 \times S\,a\,b\,k} \times \frac{M^2\,a^3}{A^2\,x^3}$ ſive $\frac{433.92\,c \times du}{438.92 \times S.\,b.\,k} \times \frac{M^2\,a^2}{A\,x}$, aut ſubſtituendo valorem fractio. $\frac{a}{x}$, ſit $\frac{433.92.c\,du}{438.92.\,S\,b\,k} \times \frac{M^2\,a}{A} \times \frac{a^2 \mp e z}{b^2}$ ſive $\frac{433.92\,c\,du \times M^2\,a}{438.92\,S\,A\,b^3\,k} \times a^2 \mp e z$.




## PROBL. IV.

Invenire retardationem Lunæ ex actione Solis ortam durante ſemeſtri revolutione terræ circa Solem.

Primo inveniatur Integralis Elementi per Probl. III. inventi quod eſt $\frac{433.92\,c\,du \times M^2\,a}{438.92.\,S.\,A.\,b^3\,k}\,a^2 \pm a z$ cujus Integralis eſt $\frac{433.92\,c \times M^2\,a}{438.92.\,S.\,A\,b^3\,k} \times a^2 u \mp a e y$.

Si ergo ſumatur ſemeſtris revolutio, illic eſt $u = \frac{1}{2}k$, & termini in quibus occurrit *y* ſeſe deſtruunt, ut quidem liquet ex eo quod *y* illic evaneſcat, unde ſemeſtris retardatio fit $\frac{433.92c \times M^2 a}{438.92 S A b^3 k} \times \frac{1}{2}a^2 k = \frac{433.92c \times M^2 a^3}{438.92\,S\,A\,b^3} \times \frac{1}{2}$ ſive ponendo $a = b$ quod proximè verum eſt $\frac{433.92\,c\,M^2}{438.92\,S \times A} \times \frac{1}{2}$.

Cor. Si quæratur retardatio Lunæ, facta tempore quo Terra à ſuo Aphelio ad mediocrem ejus diſtantiam pervenit, obſervandum quod eo in loco arcus *u* eſt $\frac{1}{4}k - e$, & *y* eſt *b*, unde Integralis inventa evadit $\frac{433.92\,c \times M^2\,a}{438.92\,S.\,A\,b^3\,k} \times \frac{1}{4}a^2\,k - a^2\,e - a\,b\,e$, aut ſimplicius ſi quantitates *a* & *b* pro æqua-

æqualibus ſumere liceat fiet $\frac{433.92\,c \times M^2}{438.92\,S.A\,k} \times \frac{1}{4}k - 2e$ ſive $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92 \times SA\,b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$.

## PROBL. V.

Invenire Æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione, & quæ eſt adhibenda quando Terra eſt in ſuâ mediocri diſtantiâ à Sole.

Primo obſervandum eſt motum Lunæ qualis ex apparentiis determinatur ex duplici cauſâ pendere, ex actione Terræ cum motu projectili conjunctâ & ex Solis actione quæ motum ex præcedenti cauſâ natum tardat; Prior motus in orbe circulari uniformis foret, ſed tardatio ex alterâ cauſâ procedens inæqualiter priori illi ſeſe immiſcet, Aſtronomi verò cum motum medium Lunæ æſtimant, hanc tardationem ſumunt quaſi uniformiter in omne tempus diſtributam.

Cum ergo ea tardatio major ſit in aliquibus Terræ poſitionibus, in aliis ſit minor, quæſtio eſt quænam correctio motui medio Lunæ ſit facienda, ut habeatur Lunæ locus verus, ideoque inveſtiganda eſt differentia inter tardationem proportionaliter tempori diſtributam, & tardationem veram quæ ſingulo loco competit, quæ differentia loco medio addita aut ex eo detracta reſtituet verum locum Lunæ quatenus hæc ſola irregularitas ſpectatur.

Ut ergo habeatur tardatio tempori proportionalis quando Terra eſt in mediocri diſtantia, fiat ſecundum Regulam Keplerianam, ut area ſemi-Ellipſeos (quæ eſt $\frac{bk}{4}$ & eſt ſemeſtri tempori proportionalis) ad aream FNA (quæ eſt Ellipſeos quarta pars cum Triangulo FAK ideoque eſt $\frac{bk}{8} + \frac{be}{2}$ & eſt proportionalis tempori quo Terra ab Aphelio ſuo ad mediocrem à Sole diſtantiam pervenit) hoc eſt ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{4} + \frac{e}{k}$, ita tardatio ſemeſtri tempore factâ quæ (per Probl. IV.) eſt $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,SA\,b^3} \times \frac{1}{2}$, ad tardationem proportionalem tempori quo Terra ab Aphelio ad mediocrem ſuam à Sole diſtantiam pervenit, quæ erit ergo $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,SA\,b^3} \times \frac{1}{4} + \frac{e}{k}$; ſed per Cor. Probl. IV. vera tardatio eo in loco erat $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,SA\,b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$. Hinc ſubſtractione factâ, tardatio mediocris ſuperat tardationem veram quantitate $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,S.A\,b^3} \times \frac{3e}{k}$. Hæc ergo quantitas graduum debet addi loco medio ut locus verus obtineatur. Si ergo loco $e$ ſumatur .016 $\frac{7}{8}\,a$, erit $3e = .050\,\frac{5}{8}\,a$, & loco $k$ ſcribatur 6.283188 $a$; & loco $c$, 360 gr. erit $\frac{3ec}{k} = \frac{18^{gr}.225}{6.283188} = 2^{gr}.9005$; Præterea $\frac{M^2}{S.A}$ ad calculum revocatur ſi loco M ponatur, 0744252 A; & loco S, .08084896 A, ut in Prob. 2do. repertum eſt, fit $\frac{M^2}{S.A} = .06851183835$, idque ductum in fractionem $\frac{433.92}{438.92}$ efficit. 06773137, cumque fractio $\frac{a^3}{b^3}$ ſit tantum 1.00045 & ſuperius ſumptum ſit $a$ loco $b$ hæc fractio pro unitate ſumi poteſt, hinc eſt $\frac{a^3 M^2}{b^3\,S.A} \times \frac{433.92}{438.92} = .06773137$, quod ductum in $2^{gr}$. .9005 efficit $0^o.19646$ quod ductum per $60^l$ efficit $11'.7876$, ſive $11'.47''.256'''$, quam Newtonus $11'.49''$ aſſumit; majorem autem Æquationem in Hypotheſi Elliptica inveniemus, unde medium quoddam inter utramque ab ipſo aſſumptum eſſe videtur.

Cor. 1. Cum hæc æquatio ſit $\frac{433.92 \times ca^3 \times M^2}{438.92 \times S.b^3 A} \times \frac{3e}{k}$ ſive proxime $\frac{433.92\,c \times M^2}{438.92\,S \times A} \times \frac{3e}{k}$, & quantitates $c$, M, S, A, $k$, ſint conſtantes, hæc æquatio, ubi Tellus eſt in ſuâ mediocri diſtantiâ, eſt ſicut excentricitas orbitæ Telluris $e$, ideoque ſi ea excentricitas major ſit quam .016 $\frac{7}{8}$ radii $a$, creſcet hæc æquatio in hac proportione; ſit v. gr. $e = a \times .016\,\frac{11}{12}$,

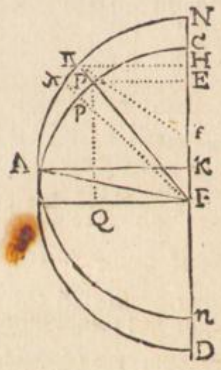


121

DE MUNDI SYSTEMATE.

§ 21.

& fiat ut $16\frac{7}{8}$ ad $16\frac{11}{12}$ ita 11′. 47″.616 ad quartum, is quartus terminus 11′.49″.42, erit æquatio, suppositâ excentricitate orbitæ Telluris .016$\frac{11}{12}$, hoc in casu Newtonus Æquationem facit 11′. 50″.




Cor. 2. In alio quovis loco orbitæ Telluris, æquatio habebitur si fiat ut semi-Ellipsis $\frac{bk}{4}$ ad aream F N Π ita semestris tardatio $\frac{433.92\,c\,M^2}{438.92 \times S.A} \times \frac{a^3}{2b^3}$ ad tardationem huic tempori proportionalem, quæ erit ergo $\frac{433.92\,c \times M^2 \times FN\Pi}{438.92 \times S \times A\,b^3} \times \frac{2a^3}{bk}$ tum vero si sumatur tardatio loco Π conveniens quæ est $\frac{433.92 \times c \times M^2 a}{438.92 \times S \times A b^3 k} \times a^2 u \mp aey$, (Probl. 4.) erit hæc æqu. $\frac{433.92c \times M^2 a^2}{438.92 \times S.A \times b^3 k} \times \frac{2a \times FN\Pi}{b} - au \pm ey$, ideoque erit ut $\frac{2aFN\Pi - abu \pm bey}{b}$; aut sumendo $u = b$, ut $\frac{2FN\Pi - bu \pm ey}{b}$. Jam vero hæc quantitas est ipsa æquatio centri Solis; nam arcus qui describeretur per motum medium Solis eo tempore quo arcus $u$ revertâ percurritur hac proportione obtinetur, ut semi-Ellipsis $\frac{bk}{4}$ ad aream F N Π ita semicirculus $\frac{1}{2}k$ ad arcum medio motu descriptum qui ergo erit $\frac{4FN\Pi}{bk} \times \frac{1}{2}k = \frac{2FN\Pi}{b}$; sed arcus tunc temporis revertâ descriptus, est N Π sive $u$, ergo æquatio centri Solis est $\frac{2FN\Pi}{b} - u$ sive $\frac{2FN\Pi - bu}{b}$ cui quantit. $\frac{2FN\Pi - bu \pm ey}{b}$ est quam proximè æqualis, nam terminus $ey$ propter exiguitatem $e$ respectu $b$, & $y$ respectu $u$ considerationem nullam hic meretur, ergo æquatio Lunaris in quovis loco orbitæ Telluris est sicut æquatio centri Solis eo in loco; Ergo ut æquatio centri Solis in mediocri distantia Telluris à Sole, est ad æquationem motus Lunaris adhibendam cum Tellus est in ea mediocri distantia à Sole, ita est æquatio centri Solis in quâvis distantiâ $u$ ab Aphelio, ad æquationem Luni Solarem primam Lunæ illi loco convenientem.

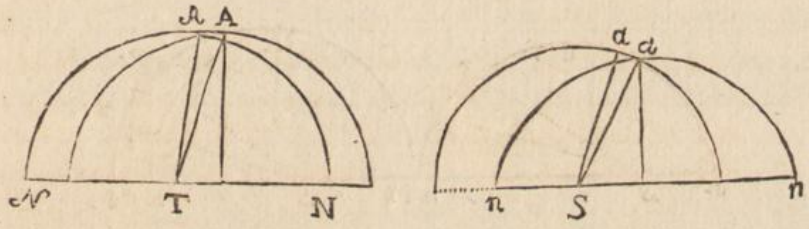
Cor. 3. Æquatio ista Lunæ, quæ Solaris prima dicitur, est maxima in distantia mediocri Terræ à Sole; nam cum sit proportionata æquationi centri Solis, & æquatio centri Solis sit maxima in mediocri distantiâ Telluris à Sole per ea quæ primo Libro circa hanc æquationem demonstrata sunt, Æquatio Solaris Lunæ eo in loco maxima pariter erit.

*De Incremento motus medii Lunæ, & ejus æquatione ex Solis actione pendentibus, in Hypothesi eum orbem esse Ellipticum, Methodo diversâ ab eâ quæ in calculo præcedente fuit adhibitâ.*

## THEOR. I.

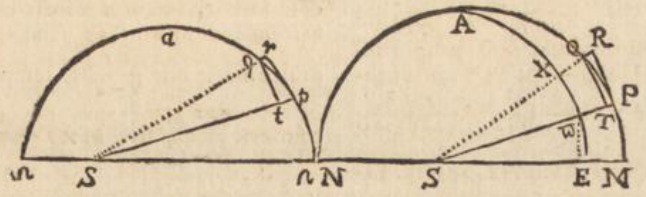
Sint duæ Ellipses descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focis posita, quorum vires absolutæ diversæ sint; Dico, quod si Tempora Periodica in utraque Ellipsi sint ut earum Ellipsium areæ; Ellipses illæ erunt inter se similes.

Describantur duæ Ellipses NAN, n a n, circa corpora S & s in focis Ellipsium posita, & quorum vires sint diversæ, si totum tempus quo describitur Peripheria Ellipseos N A N, sit ad totum tempus quo describitur Peripheria Ellipseos n A n ut area prioris Ellipseos ad aream alterius, Ellip-




Ellipſes illæ ſimiles eſſe debebunt, hoc eſt earum Ellipſium axes majores erunt inter ſe ut ſunt inter ſe earum minores axes, v. gr. ſi ſemi-axis major Ellipſeos NAN dicatur $r$, ejus minor ſemi-axis dicatur $q$ & major ſemi-axis Ellipſeos nan dicatur $\varrho$, ejus minor ſemi-axis $\kappa$, Dico quod erit $q$ ad $\kappa$ ut eſt $r$ ad $\varrho$.

Ex naturâ Ellipſium area Ellipſeos NAN eſt ad aream Ellipſeos nan ut eſt $rq$ ad $\varrho\kappa$, & ex Hypotheſi tempus Periodicum in Ellipſi NAN eſt ad tempus Periodicum in Ellipſi nan in eadem ratione $rq$ ad $r\kappa$, ſi ergo ſumantur arcus ſimiles AA, aa in mediocri diſtantiâ in utráque Ellipſi, tempora quibus deſcribentur illi arcus erunt ut tota tempora Periodica, quia illi arcus AA, aa in mediocri diſtantiâ poſiti deſcribuntur motu medio corporum eas Ellipſes deſcribentium, & erunt etiam ut areæ ASA & asa ex Hypotheſi, & iſtæ areæ ASA & asa, ſunt ut quadrata linearum SA & sa ſive ut $r^2$ ad $\varrho^2$; Ergo eſt $r^2$ ad $\varrho^2$ ut $rq$ ad $\varrho\kappa$, & dividendo terminos homologos per $r$ & $\varrho$ eſt $r$ ad $\varrho$ ut $q$ ad $\kappa$; Ergo Ellipſes ſunt ſimiles. Q. E. D.



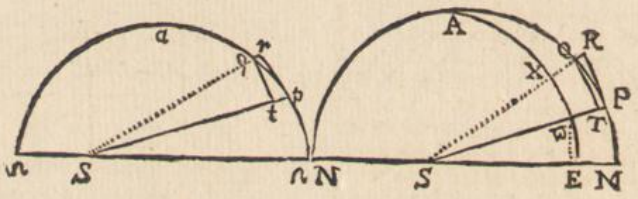

## THEOR. II.

Sint, ut prius, duæ Ellipſes deſcriptæ circa corpora centralia in ipſarum focis poſita quorum vires abſolutæ diverſæ ſint, & ſint tempora Periodica in utráque Ellipſi ut earum Ellipſium areæ, Dico quod axes majores earum Ellipſium erunt reciprocè ut vires abſolutæ corporum centralium.

Vis abſoluta corporis S dicatur V, corporis s dicatur V—Y, ducantur in utráque Ellipſi lineæ SP, sp ad lineas apſidum SN, sn ſimiliter inclinatæ, & iis proximæ ducantur lineæ SQ, sq angulos ſimiles PSQ, psq conſtituentes, ducantur ex Q & q perpendiculares QT, qt in lineas SP, sp, & productis lineis SQ sq donec occurrant Tangentibus in R & r, erunt QR, qr virium centralium effectus dum deſcribuntur arcus PQ, pq.

Primò quidem ex Hypotheſi, Tempora quibus deſcribentur ii arcus PQ, pq erunt ut areæ PSQ, psq, & quia, ex conſt. illæ areæ ſunt ſimiles, erunt ut quadrata linearum homologarum ſive ut $SP^2$ ad $sp^2$ aut $QT^2$ ad $qt^2$. Sunt autem virium centralium effectus, directè ut vires centrales & ut quadrata temporum, vires verò centrales ſunt ut

DE MUNDI SYSTEMATE.




$\frac{V}{SP^2}$ ad $\frac{V-Y}{sp^2}$, & quadrata temporum ſunt ut $SP^4$ ad $sp^4$, Ergo lineæ QR & qr erunt inter ſe ut $\frac{V}{SP^2} \times SP^4$ ad $\frac{V-Y}{Sp^2} \times sp^4$, ſive ut $V \times SP^2$ ad $\overline{V-Y} \times sp^2$, aut denique ut $V \times QT^2$ ad $\overline{V-Y} \times qt^2$.

Secundo, In omnibus Ellipſibus per vim centralem ex foco prodeuntem deſcriptis latus rectum eſt æquale $\frac{QT^2}{QR}$ ut conſtat ex Prop. XI. Lib. I. Princ. Si itaque latus rectum Ellipſeos NAN ſit L, Ellipſeos vero n a n ſit λ erit $L = \frac{QT^2}{QR}$ & $\lambda = \frac{qt^2}{qr}$, loco QR & qr quantitates ipſis proportionales $V \times QT^2$ & $V-Y \times qt^2$ collocentur, & erit L ad λ ut $\frac{QT^2}{V \times QT^2}$ ad $\frac{qt^2}{V-Yqt^2 \times}$ ſive ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; ſed ex naturâ Ellipſium, eſt $L = \frac{q^2}{r}$ & $\lambda = \frac{\varkappa^2}{\varrho}$, præterea quia Ellipſes ſunt ſimiles ex præcedente Theoremate eſt $q : r = \varkappa : \varrho$, ideoque $\frac{q}{r} = \frac{\varkappa}{\varrho}$; Eſt ergo $L : \lambda$ ut q ad $\varkappa$ ſive ut r ad $\varrho$; Itaque eſt r ad $\varrho$ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$. Q. E. D.

Cor. In hîs itaque Hypotheſibus Tempora Periodica erunt inverſe ut Quadrata virium abſolutarum corporum S & s; ſunt enim per Theor. I. ut $r^2$ ad $\varrho^2$, & ex hoc Theoremate eſt r ad $\varrho$ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; Ergo Tempora Periodica ſunt ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}^2}$.

## THEOR. III.

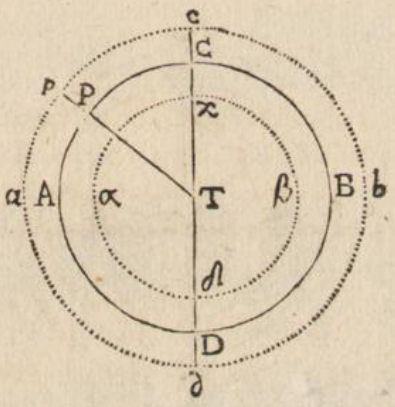
Sit T terra, P Luna quæ circa terram (ſepoſitâ omni actione Solis) deſcribat orbitam circulo proximam tempore Periodico M, Vis abſoluta Terræ in Lunam dicatur V, minuatur ea vis abſoluta quantitate exiguâ Y; Dico quod ſi ea vis V—Y maneat conſtans Luna deſcribet circa Terram orbitam ſimilem illi quam prius deſcribebat, ita ut ſi prioris orbitæ ſemiaxis major dicatur r, ſemi-axis major orbitæ novæ erit $\frac{Vr}{V-Y}$ & tempus Periodicum erit $\frac{V^2 M}{\overline{V-Y}^2}$ ſive $M \times 1 + \frac{2Y}{V} + \frac{3Y^2}{V^2} + \frac{4Y^3}{V^3}$ &c.

Nam 1°. cum Luna diſcedit à ſuâ orbitâ, retinetur tamen per vim decreſcentem ſecundum quadrata diſtantiarum, deſcribet ergo circa corpus in foco poſitum ſectionem Conicam, quæ erit adhuc Ellipſis, quia mutatio vis centralis ponitur exigua, & per vim priorem orbita circulo finitima deſcribebatur ita ut nec in Hyperbolam nec in Parabolam mutari poſſit hæc orbita.

2°. Cum vis nova Y ad centrum ſit etiamnum directa, quamcumque in viam flectatur Luna, areæ ſemper manebunt temporibus proportionales, ideo ſi tandem in orbitam a d b c deveniat ex orbita

ta ADBC, tempus quo describetur peripheria adbc erit ad tempus M quo describebatur peripheria ADBC ut tota area ADBC ad aream adbc.

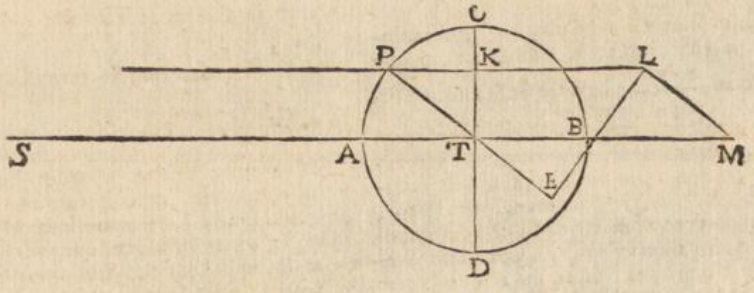
3°. Cum ergo in his orbitis ADBC, adbc (quæ describuntur circa corpus idem quidem, sed cujus vis absoluta alia censetur cum describitur orbita ADBC quam cum describitur adbc) tempora sint areis proportionalia, istæ areæ similes erunt, per Theor. I., circulisque finitimæ per Hyp., axes majores erunt inversè ut vires V & V−Y, per Theor. II. & tempora Periodica ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{V-Y^2}$ itaque si in orbita ADBC, id tempus dictum fuerit M, in orbita adbc, erit $\frac{V^2 M}{V-Y^2}$, sive hanc quantitatem in seriem resolvendo $M\times 1+\frac{2Y}{V}+\frac{3Y^2}{V^2}$. Q. E. D.




Cor. Iisdem Principiis ostendetur, quod si vis absoluta terræ augeretur quantitate exigua Y, Luna deferretur in orbitam interiorem $\alpha\delta\beta\pi$ similem priori ADBC, cujus radius foret $\frac{rV}{V-Y}$, sumendo quantitatem Y negativè & quæ describeretur tempore $M\times 1+\frac{2Y^2}{V}+\frac{3Y^2}{V^2}+\frac{4Y^3}{V^3}$ &c. sumendo negativè terminos in quibus quantitas Y est imparium dimensionum.

Ut autem servetur hæc conditio quantitatem Y esse exiguam, fractiones $\frac{3Y^2}{V^2}$ &c. sunt delendæ in utroque casu ut infinitè parvæ.

Schol. In primo calculo, cum supposuerimus orbitam Lunæ ADBC esse circularem, orbitas novas adbc, $\alpha\delta\beta\pi$ circulares etiam esse, supponere necesse erat per Theor. I. hujusce calculi.

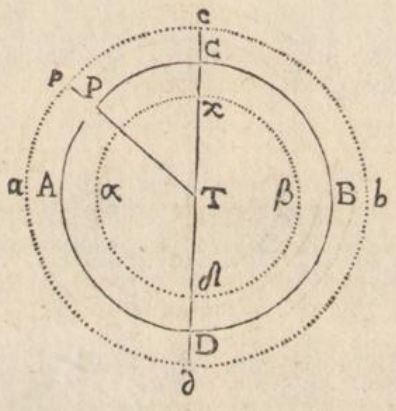



## THEOR. IV.

Sit T Terra, P Luna, ADBC orbita quam Luna circa terram describeret sepositâ omni Solis actione, sit ST distantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur $a$; dicatur F vis Solis in Terram ipsam in mediocri illâ distantia, distantiâ Lunæ à Terrâ PT dicatur $r$; Sit CP distantia Lunæ à quadraturâ proximâ quæ dicatur $u$, sit ejus sinus $y$, sit ejus cosinus $z$; Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundum directionem radii PT est ubique $\frac{F}{a}\times\frac{3yy}{r}-r$. Hoc Theor. idem est cum Theor. IV. præcedentis calculi, cujus demonstratio adiri potest.

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.




## THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi poterit, ſi concipiatur Lunam ex ſuâ orbitâ A D B C in aliam transferri cujus ſingulæ particulæ quamminimæ, forent portiones earum orbitarum quas Luna reverâ deſcriberet, ſi vis Terræ conſtanter imminuta aut aucta foret eâ quantitate, quæ, per actionem Solis in eam particulam exercitæ, ex vi Terræ detrahitur aut ei additur.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos creſcat & decreſcat, ſitque nulla cum $\frac{3yy}{r}=r$, paulo poſt minima ſit, ſicque gradatim creſcat, ſi cenſeatur eam conſtantem manere per aliquod tempuſculum, Luna breviſſimè tranſibit in orbitam a d b c illi vi congruam per Theor. III. mox verò cum vis Solis creſcat quantitate quam minimâ ea vis cenſeatur iterum conſtans per alterum tempuſculum tranſibit Luna ex orbitâ primæ vi congruâ in alteram huic incremento conſentaneam, ſicque ſemper: ideoque in ſingulis particulis arcus C P, cenſeri poteſt Lunam delatam eſſe in orbitam vi Solis in eo puncto agenti congruam.

## THEOR. VI.

Dicatur mediocris diſtantia Lunæ à Terra, $r$; vis Terræ in eâ diſtantiâ ſit V, vis Solis ſive additicia ſive ſubſtractiva ſit, quæ agit in Lunam ſecundum radii Telluris directionem, ſit Y in eâ mediocri diſtantiâ à Terra, creſcat verò ut diſtantiæ; Dicatur $x$ alia quævis diſtantia Lunæ à Terrâ in quâ vis Terræ erit $\frac{rrV}{xx}$, & vis Solis erit $\frac{xY}{r}$: Dico quod vis corporis centralis quæ in diſtantiâ $x$ foret $\frac{rrV}{xx}-\frac{xY}{r}$, in mediocri diſtantiâ eſſe debuiſſet $V-\frac{x^3}{r^3}Y$.

Nam ſiquidem fingitur vim Corporis ejus centralis fictitii ſequi legem gravitatis & decreſcere ſicut quadrata diſtantiarum fiat ut $\frac{1}{xx}$ ad $\frac{1}{rr}$ ita $\frac{rrV}{xx}-\frac{xV}{r}$ quæ eſt vis in diſtantiâ $x$ ad $V-\frac{x^3}{r^3}Y$ quæ erit vis in diſtantiâ $r$.

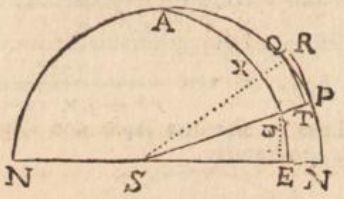
## THEOR. VII.

Sit $x$ ut prius diſtantia Lunæ à Terrâ in propriâ orbitâ, dico quod per actionem Solis illa diſtantia fiet $\frac{r^3xV}{Vr^3-Yx^3}$, ſive hoc valore in ſeriem redacto fiet $x+\frac{x^4Y}{r^3V}+\frac{x^7Y^2}{r^6V^2}$ &c. aut omiſſis terminis ſuperfluis $x+\frac{x^4Y}{r^3V}$.

Nam nova orbita in quam Luna delata cenſetur eſt ſimilis priori per Lem. I. & per Lem. II. earum lineæ Homologæ ſunt ut vires abſolutæ corporum centralium inverſè, ſeu ut vires quas habent in diſtantiis æqualibus, nempe inverſè ut $V-\frac{x^3}{r^3}Y$ ad V, ergo ut $V-\frac{x^3}{r^3}Y$ ad V, ita $x$ ad diſtantiam Homologam in novâ orbitâ quæ erit ergo $\frac{xV}{V-\frac{x^3}{r^3}Y}$ ſive $\frac{r^3xV}{Vr^3-x^3Y}$.

Q. E. D.

THEO-




## THEOR. VIII.

Centro S, radio æquali mediocri distantiæ $r$, describatur circulus, arcus ejus $\varpi X$ inter lineas SP, SQ interceptus dicatur $du$; Dico primò quod Luna in eo circulo uniformiter moveri posset eodem tempore Periodico quo moveretur in propriâ orbitâ si abesset vis Solis, ideoque si tempus Periodicum Lunæ in propriâ orbitâ dicatur M, & tota Peripheria circuli cujus radius est $r$ dicatur $c$, tempus quo arcus $du$ describetur mediocri Lunæ motu citra Solis actionem erit $\frac{M\,du}{c}$; 2°. Cum sit $r$ semi-axis major Orbitæ Lunaris, si dicatur $q$ ejus axis minor, Dico quod tempus quo idem ille arcus $du$ describi videbitur urgente Solis actione & spectatâ excentricitate orbitæ Lunaris erit $\frac{M\,du}{c} \times \frac{x^2}{qr} + \frac{2x^5Y}{qr^4V} + \frac{3x^8Y^2}{qr^7V^2}$ &c.

Primo enim liquet quod is circulus describetur eo tempore Periodico quo describeretur orbita Elliptica Lunaris si sola vis Telluris agat; nam si corpora plura circa centrum commune revolvantur in quibuscumque Ellipsibus, Tempora eorum Periodica sunt in sesquiplicatâ ratione axium majorum (per Prop. XV. Lib. I. Princ. Newt.) sed hujus circuli & orbitæ Lunaris axes majores sunt æquales (per const.) Ergo eorum tempora Periodica sunt æqualia.

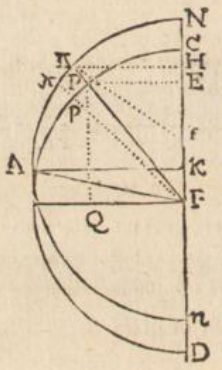
Secundo dicatur E tota superficies Ellipseos orbitæ Lunaris, hæc superficies E erit ad aream SQP ut tempus Periodicum M ad tempus quo arcus PQ describeretur, quod erit ergo $\frac{SQP \times M}{E}$ valor autem areæ SPQ est $\frac{QT \times SP}{2}$, sed ut $r$ ad $du$ ita SQ sive SP ($x$) ad QT, est ergo $QT = \frac{x\,du}{r}$ & $\frac{QT \times SP}{2} = \frac{xx\,du}{2r}$ hinc tempus quo Luna in propriâ orbitâ citra Solis actionem describeret arcum QP est $\frac{M \times x\,du}{2r.E}$. Hoc autem tempus erit ad illud quo describeretur similis arcus in orbitâ in quam Luna per actionem Solis defertur ut quadrata radiorum seu, per (Theor. præc.) ut $xx$ ad $xx + \frac{2x^5Y}{r^3V}$ ita $\frac{M \times x\,du}{2r.E}$ ad $\frac{M\,du}{2r.E} \times xx + \frac{2x^5Y}{r^3V}$, sive cùm semi-axis minor orbitæ Lunaris dicatur $q$ & area Ellipseos E sit ideo $\frac{1}{2}qc$, Tempus quo arcus $du$ describi videbitur à Lunâ translatâ per actionem Solis in aliam orbitam fiet $\frac{M\,du}{c} \times \frac{xx}{qr} + \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ + &c.

Cor. 1. Ex ipsâ demonstratione liquet quod tempus quo citra Solis actionem describeretur area SPQ foret $\frac{Mdu}{c} \times \frac{xx}{qr}$, & discrepantiæ illius quantitatis à motu medio in æquatione Lunæ, quæ dicitur soluta, continentur: excessus vero (vel defectus si vis Y fiat negativa) $\frac{M\,du}{c} \times \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ per Solis actionem genitus novam motus medii perturbationem producit de quâ hic agendum; Ergo, siquidem per medium motum tempore $\frac{M\,du}{c}$ arcus $du$ descriptus fuisset, tempore hujus excessus $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ arcus $\frac{2x^5Y\,du}{qr^4V}$ describi potuisset, eâque quantitate graduum tardatur medius motus Lunæ propter actionem Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam.

Cor. 2. Iisdem vero ratiociniis quibus usi sumus in solutione Probl. 1. calculi præcedentis constabit, quod propter accelerationem quæ oritur per actionem Solis perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris exercitam hæc retardatio $\frac{2x^5Y\,du}{qr^4V}$ debet minui in proportione 1 ad $1 - \frac{yy}{109.73r^2}$ sicque evadit $\frac{2x^5Y\,du}{qr^4V} - \frac{2x^5y^2Y\,du}{109.73q^6V}$.

LEM-

121.




## LEMMA I.

Ex præcedentis calculi Lemmate II. conſtat quod ſi ex puncto ϖ ducatur perpendicularis ϖ E in lineam Apſidum, & excentricitas dicatur f erit FI ſive $x = \frac{q^2 r}{r^2 \mp f \times FE}$.

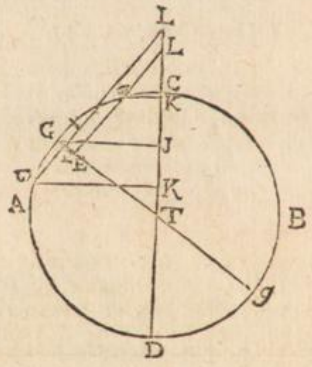
Nulla enim eſt differentia niſi in litteris, quæ diverſæ ſunt quia hic agitur de orbitâ Ellipticâ Lunæ illic de orbitâ Elliptica Telluris, cæterum eadem eſt demonſtratio.

Hic autem valor in ſeriem redactus evadet $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{FE \times f}{r} + \frac{FE^2 \times f^2}{r^4} \pm \frac{FE^3 \times f^3}{r^6}$ &c.

Signa ſuperiora adhibenda ſunt cum Luna diſtat ab Apogæo minus quam 90 gr. tam in conſequentia quam in antecedentia, cum Luna magis diſtat ab Apogæo quam 90 gr. ſigna inferiora ſunt adhibenda.

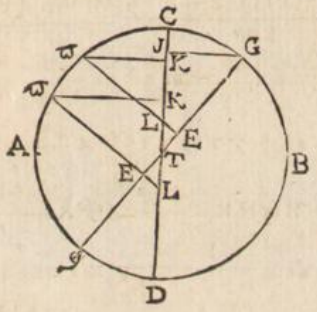
## LEMMA II.

Si linea Apſidum non coincidat cum lineâ quadraturarum, Dicatur vero *m* ſinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ Apſidum, & *n* ejus anguli coſinus; Sit *y* ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ, *z* ejus coſinus, Dico quod diſtantia Lunæ à terrâ, quæ dicitur *x* erit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$ cum Luna eſt in eâdem quadraturâ cum alterutrâ Apſi, eſt verò $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ cum Luna & alterutra Apſis non ſunt in eâdem quadraturâ.




Sit CADB circulus deſcriptus centro T, radio æquali mediocri diſtantiæ Lunæ à terrâ quæ dicitur *r*. Sit GT g linea Apſidum, CTD linea quadraturarum, GI ſinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ apſidum qui dicitur *m*, TI ejus coſinus qui dicitur *n*, ϖ punctum circuli CADB quod reſpondet vero loco Lunæ in peripheria ſuæ orbitæ, quod ſumitur vel ultra vel citra apſidem, ϖ K ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ qui dicitur *y*, TK ejus coſinus qui dicitur *z*, Ducatur ex ϖ in lineam apſidum perpendicularis ϖ E, quæ producatur donec ſecet lineam quadraturarum in L, Triangulum TIG eſt ſimile Triangulo TEL (ob angulos rectos E & I & angulum communem T); Triangulum TEL eſt ſimile Triangulo ϖ KL (ob angulos rectos E & K & angulum communem L; Hinc eſt TI (*n*) : IG (*m*) :: ϖ K (*y*) : KL $= \frac{my}{n}$; Hinc in iſto caſu TL = TK + KL $= z + \frac{my}{n}$, ſed ex ſimilitudine Triang. TIG & TEL eſt TG (*r*) : TI (*n*) :: TL $(z + \frac{my}{n})$ : TE $= \frac{nz + my}{r}$, ſubſtituto ergo

go hoc valore in valore $x$ Lemmate ſuperiori reperto fit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$. Q. E. 1°. O.




Si $\varpi$ & apſis alterutra non ſint in eadem quadratura, & 1°. ſi tamen $\varpi$ non diſtet 90 gr. à proxima apſide, ſimilia erunt ut prius Triang. TJG, TEL, $\varpi$KL, unde erit $KL = \frac{my}{n}$, ſed erit $TL = TK - KL$ ſive $z - \frac{my}{y}$, unde fiet $TE = \frac{nz - my}{r}$ ideoque erit $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$; Sed ſi $\varpi$ diſtet à linea apſidum pluſquam 90 gradibus erit $TL = KL - TK$ ſive, $-TK + KL$, ideoque TE fiet $\frac{-nz + my}{r}$, ſed cum in eo caſu ſignum anceps litteræ $f$ mutari debeat, ſtatuatur non mutari illud ſignum litteræ $f$ dum Luna eſt in eâdem quadraturâ donec in aliam quadraturam tranſeat, quamvis magis quam 90 gradibus ab apſide diſcedat, mutari debebit ut fiat æquipollentia ſignum quantitatis $\frac{-nz + my}{r}$, quæ itaque evadet ut prius $\frac{nz - my}{r}$ ideoque fiet $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ quotieſcumque $\varpi$ & apſis alterutra non erunt in eâdem quadraturâ, determinando ſignum anceps $\mp f$ ex apſide cui vicinior fuit Luna cum eam quadraturam deſcribere incepit. Q. E. 2°. Oſt.

Cor. Hic valor $x$ in ſeriem redactus evadit $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{f \times nz \pm my}{r^2} + \frac{f^2 \times nz \pm my^2}{r^4} \pm \frac{f^3}{r^3} \times \frac{nz \pm my^3}{r^6}$ ſigna ſuperiora litteræ $f$ ſunt adhibenda cum initium quadraturæ quam deſcribit Luna minus diſtat ab Apogæo quam 90 gr. tam in conſequentia quam in antecedentia, ſi vero magis diſtet ab Apogæo quam 90 gr. ſigna inferiora ſunt adhibenda.

Signa ſuperiora quantitatis $my$ ſunt adhibenda cum & Luna & apſis alterutra ſunt in eâdem quadraturâ, ſigna inferiora cum Luna & apſis ſunt in diverſis quadraturis.

## PROBL. I.

Dato Sinu & Coſinu anguli quem faciunt linea Apſidum & linea quadraturarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, tempore quo Luna orbitam ſuam percurrit.

Supponitur lineam Apſidum & Solem immotos manere durante illâ revolutione Lunæ; Quo poſito cum retardationis Lunæ elementum inventum fuerit (Cor. 2. Theor. 8.) $\frac{2a^5 Y du}{qr^4 V} - \frac{2x^5 y^2 Y du}{109.73 q r^6 V}$, loco $\frac{2rY du}{qV}$ ponatur ejus valor $\frac{2rF du}{Vaq} \times \frac{3y^2}{r} - r$ & loco $\frac{x}{r}$ valor ejus $\frac{q^2}{r^2} \times 1 \pm f \times \frac{nz \pm my}{r^2}$ &c. qui ad quintam dignitatem evehatur, dicatur A terminus $nz \pm my$, ea quinta dignitas erit $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 \pm \frac{5fA}{r^3} + \frac{15f^2A^2}{r^6} \pm \frac{35f^3A^3}{r^8}$; Verum obſervari poteſt, quod ſiquidem totidem ſunt quadrantes in quibus $f$ poſitivum aut negativum ſumi debet, ſi tota revolutio Lunæ ſpectetur, hi termini ancipites omitti poſſunt, vel ab initio, hæc quinta dignitas ſumi debet quaſi foret $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 + \frac{15f^2A^2}{r^4}$

*In his pagellis exponentem 2 loco exponentis 2 exaratum eſſe facilè percipiet eruditus Lector, quod monemus ne illo Typographico mendo turbetur horum intellectio.*

DE MUNDI SYSTEMATE.

Lib. I.

ducatur in $1-\frac{yy}{109.73r^2}$ fiet $\frac{q^{10}}{109.73r^{12}}\times 109.73r^2-y^2+15\times 109.73\frac{f^2A^2}{r^4}-\frac{15f^2y^2A^2}{r^6}$,

Denique ducatur in $\frac{2Fdu}{Vaq}\times 3y^2-r^2$ fit $\frac{2Fq^9du}{109.73\,V\,ar^{12}}\times 329.19r^2y^2-3y^4-109.73r^4+r^2y^2+\frac{45\times 109.73f^2y^2A^2}{r^4}-\frac{35\times 109.73f^2r^2A^2}{r^4}-\frac{45f^2y^4A^2}{r^6}+\frac{15f^2y^2A^2}{r^4}$ sive $\frac{2Fq^9du}{109.73\,V\,ar^{12}}\times 330.19r^2y^2-3y^4-109.73r^4+\frac{330.19\times 15f^2y^2A^2}{r^4}-\frac{15\times 109.73f^2r^2A^2}{r^4}-\frac{45f^2y^4A^2}{r^6}$. Loco $A^2$ ſubſtituatur $n^2z^2+m^2y^2$, omiſſo termino $\pm 2mnzy$, quia quando tota revolutio Lunæ aſſumitur duo ſunt quadrantes in quibus Luna eſt cum apſide, duo vero in quibus Luna cum neutra apſide occurrit, fit tandem totum Elementum $\frac{2Fq^9du}{109.73\,V\,ar^{12}}\times 330.19r^2y^2-3y^4-109.73r^4+\frac{330.19\times 15f^2n^2z^2y^2}{r^4}+\frac{330.19\times 15f^2m^2y^4}{r^4}-\frac{109.73\times 15f^2r^2n^2z^2}{r^4}-\frac{109.37\times 15f^2r^2m^2y^2}{r^4}-\frac{45f^2n^2z^2y^4}{r^6}-\frac{45f^2m^2y^6}{r^6}$;

Cujus Integralis ſecundum Lemma I. calculi præcedentis pro quadrante fit $\frac{2Fq^9}{109.73Var}\times\frac{330.19r^4c}{8}-\frac{3\times 3r^4c}{4\times 8}-\frac{109.73r^4c}{4}+\frac{330.19\times 15f^2n^2r^4c}{8r^4}-\frac{330.9\times 15f^2n^2\times\frac{3}{4}r^4c}{8r^4}+\frac{330.19\times 15f^2m^2\times\frac{3}{4}r^4c}{8r^4}-\frac{109.73\times 15f^2n^2r^4c}{4r^4}+\frac{109.73\times 15f^2n^2r^4c}{8r^4}-\frac{109.73\times 15f^2m^2r^4c}{8r^4}-\frac{45f^2n^2\times\frac{3}{4}r^4c}{8r^4}+\frac{45f^2n^2\times\frac{3\times 5}{4\times 6}r^4c}{8r^4}-\frac{45f^2m^2\times\frac{3\times 5}{4\times 6}r^4c}{8r^4}$; Quod reductum efficit $\frac{2Fq^9c}{109.73\ V.\ a.\ r}\times\frac{108.48}{8}+\frac{330.19\times 15\times f^2\times\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}m^2}{8r^4}-\frac{109.73\times 15f^2n^2+m^2}{8r^4}-\frac{45f^2\times\frac{1}{8}n^2+\frac{5}{8}m^2}{8r^4}$ quod quadruplicatum efficit $\frac{Fq^9c}{109.73\,V\,ar^8}\times 108.48+330.19\times 15f^2\times\frac{\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}m^2}{r^4}-109.73\times 15f^2\times\frac{n^2+m^2}{r^4}-45f^2\times\frac{\frac{1}{8}n^2+\frac{5}{8}m^2}{r^4}$ ſive tandem $\frac{Fq^9c}{109.73\,V\,ar^8}\times 108.48+136.0375\times 15\frac{f^2m^2}{r^4}-27.5575\times\frac{15f^2n^2}{r^4}$.

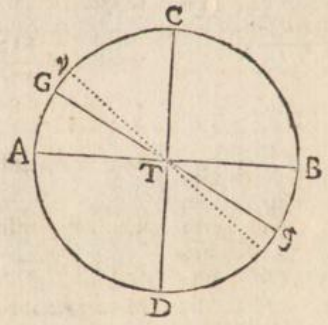
Cor. Si Sol & Apſis immoti non fingantur, ſed ſupponatur eos pari paſſu moveri res eodem redibit, ſi modo hæc revolutio quâ durante naſcitur hæc tardatio cenſeatur æqualis menſi Synodico; Quamvis autem Apſis reverâ non ſequatur motum Solis, ſed longe lentiùs procedat, imo in iſto calculo immota cenſeri debeat, non tamen inde oritur error ullius momenti tam propter Eccentricitatem Orbitæ Lunaris quæ magna non eſt, quam propterea quod maxima pars hujus tardationis pendeat ex poſitione Lunæ reſpectu Solis, & minima ſit ea pars hujus tardationis quæ per ſitum Lunæ reſpectu Apſidum determinatur.

Cor. 2. Ex his terminis $\frac{Fq^9c}{109.73V\,ar^8}\times 108.48+136.0375\times 15\frac{f^2m^2}{r^4}-27.5575\times 15\frac{f^2n^2}{r^4}$ liquet quod ſi linea Apſidum cum linea quadraturarum conſentiat, quo caſu ſinus $m$ anguli quem facit linea Apſidum cum linea quadraturarum evaneſcit, & ejus Coſinus $n$ fit $r$, hæc tardatio fit omnium minima, nempe $\frac{Fq^9c}{109.73.\,V\,ar}\times 108.48-27.5575\times 15\frac{f^2}{r^2}$.

E con-

E contra, si linea Apsidum sit in Syzygiis ita ut $m$ fiat $r$, & $n$ evanescat, hæc expressio fit omnium maxima nempe $\frac{Fq^2c}{109.73.Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^2}{r^2}$; Ideo mensis Synodicus fit minimus cum Apsides sunt in Quadraturis, longissimus vero cum Apsides sunt in Syzygiis.

Cor. 3. Hinc oritur altera æquatio Solaris Lunæ quæ secunda dicitur & pendet ex situ Apsidum, sive Apogæi respectu Solis.




## PROBL. II.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari & lineam Apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ Syzygiarum successivè obtinere, Invenire tardationem mediocrem Lunæ in singulâ ejus revolutione synodicâ.

Sit linea Apsidum, in ipsâ directione syzygiarum A & B, & dum Sol ab Apogæo Lunæ in consequentia movetur, & Apogæum revera est immotum, fingatur Solem immotum stare & ipsum Apogæum à Sole in antecedentia regredi; Moveatur Apogæum ex G in $\gamma$ per arcum quamminimum G$\gamma$ qui dicatur $du$ tardatio Lunæ quæ fiet dum describitur G$\gamma$ erit ad totam tardationem quæ fieret si apsis foret immota in G & quæ per Probl. præcedens inveniretur, ut tempus quo Apsis describit arcum G$\gamma$ ad totum mensem synodicum: Dicatur ergo A tempus quo Apsidum revolutio Solis respectu absolveretur, quod in hac hypothesi est ipse annus sidereus, erit ut tota circumferentia $c$ ad $du$, ita $A$ ad tempus quo Apsis arcum $du$ describet quod erit $\frac{A\,du}{c}$. Præterea ut mensis synodicus S ad hoc tempus $\frac{A\,du}{c}$, Ita tardatio mense synodico facta quæ est $\frac{Fq^2c}{109.73\,Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15\frac{f^2n^2}{r^4}$ ad tardationem quæ fiet tempore $\frac{A\,du}{c}$ quæ erit itaque $\frac{AFq^2du}{S \times 109.73.V.ar^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15\frac{f^2n^2}{r^4}$ (in quâ expressione $m$ respondet quantitati $y$ quæ in Lemmate I. præcedentis

DE MUNDI SYSTEMATE.

tis calculi adhibetur, & $n$ respondet quantitati $z$) & integretur pro quadrante juxta Coroll. 4. ejus Lemmatis habebitur

121. $\frac{A.F.q^9}{S\times 109.73.V.ar^8}\times\frac{108.48c}{4}+\frac{136.0375\times 15f^2r^2c}{4r^4}-\frac{163.595\times 15f^2r^2c}{8r^4}$; Quadruplicetur vero pro toto circulo fiet $\frac{AFq^9c}{S\times 109.73.V.ar^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$; Denique ut totum tempus A ad tempus synodicum S ita hæc tardatio ad tardationem menſe ſynodico factam quæ erit ergo $\frac{Fq^9c}{109.73\,V.ar^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$.

## PROBL. III.

Posità excentricitate orbitæ Telluris circa Solem, & orbitæ Lunæ circa Terram invenire tardationem Lunæ 1°. dum Terra describit arcum quamminimum datum, 2°. Dum describit annuam suam orbitam, 3°. durante menſe ſynodico, 4°. dum Luna ab Aphelio ſuo ad mediocrem ſuam à Sole distantiam pervenit.

Sit $a$ mediocris distantia Telluris à Sole, $x$ alia quævis distantia, ſi F ſit vis Solis in distantia $a$ erit $\frac{aaF}{xx}$ ejus vis in distantia $x$; Ergo in calculo Probl. mox præcedentis quo tardationem menſe ſynodico factam invenimus, $x$ loco $a$ ponatur & $\frac{aaF}{xx}$ loco F evadet tardatio $\frac{a^2Fq^9c}{109.73\,Vx^3r^8}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$, & ſi A ſit annus ſidereus, M menſis Periodicus Lunæ citra omnem Solis actionem, eſt $\frac{F}{V}=\frac{M^2a}{A^2r}$ (per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) hinc iſta tardatio evadit $\frac{M^2a^3q^9c}{109.73A^2x^3r^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$.

Sit $b$ ſemi-axis minor Ellipſeos quam Terra describit circa Solem, $e$ excentricitas, $k$ Peripheria radio $a$ descripta, ideoque ſit $\frac{1}{2}bk$ area tota Ellipſeos quam Terra describit circa Solem, ſit $du$ motus angularis terræ circa Solem quam minimo tempore, area illi angulari motui reſpondens erit $\frac{xxdu}{2a}$ (ut conſtat ex calculo præcedente) ideoque ut Ellipſis tota $\frac{1}{2}bk$ ad hanc aream $\frac{xxdu}{2a}$, ita annus A, ad tempus quo arcus $du$ deſcribitur qui erit ergo $\frac{Axxdu}{abk}$, & ut menſis ſynodicus Sad id tempus ita tota tardatio ad tardationem hoc tempore quæ factam erit $\frac{AM^2a^3x^2q^9cdu}{109.73.S.A^2x^3abkr^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$ ſive $\frac{M^2a^2q^9cdu}{109.73\,S\,A\,x.bkr^9}\times 108.48+\frac{813.6f^2}{r^2}$ ſed $\frac{a}{x}$ eſt $\frac{a^2\mp ez}{b^2}$ per Lem. 2. calculi præcedentis, hinc iſtud elementum evadit $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3k.r^9}\times a^2du\mp ezdu$ cujus Integralis eſt $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3.kr^9}\times a^2u\mp aey$, quæ ſemi-circulo abſoluto fit $\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73\,S.A.b^3kr^9}\times\frac{1}{2}k$; cujus duplum eſt retardatio anno durante factâ, eſtque $\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73.S.A.b^3r^9}$ hinc ut A ad S ita hæc tardatio ad tardationem menſe ſynodico factam quæ erit ergo $\frac{M^2a^3q^9c}{A^3b^3r^9}\times\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Denique, retardatio quæ convenit mediocri distantiæ à Sole, in quâ $u$ eſt $\frac{1}{4}k-e$, & eſt $y=b$, eſt $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73\,S.A.b^3r^3}\times\frac{1}{4}a^2-\frac{a^2e}{k}-\frac{abe}{k}$.

PRO-

## PROBL. IV.

Dato tempore Synodico apparenti Lunæ invenire tempus Periodicum M quod obſervaretur ſi omnino abeſſet vis Solis.

Siquidem tempore M deſcriberetur arcus $c$, tempore S deſcriberetur $\frac{Sc}{M}$, tempus autem Periodicum quod tempori Synodico S reſpondet eſt $\frac{AS}{A+S}$, ideoque cum illo tempore revera deſcribatur arcus $c$, tempore Synodico S deſcriberetur $\frac{A+S}{A}c$, hinc retardatio quæ fit menſe Synodico eſt $\frac{Sc}{M} - \frac{Ac+Sc}{A}$ ſive $\frac{ASc-AMc-MSc}{AM}$, quæ inventa fuit $\frac{M^2a^3q^9c}{A^2b^2r^9} \times \frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ unde fit æquatio ex quâ valor quantitatis M obtinebitur, fiat ut in præcedenti calculo $S=EA$ & $M=X\,A$, æquatio evadit $E=X+EX+X^3 \times \frac{a^3q^9}{b^3r^9} \times \frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

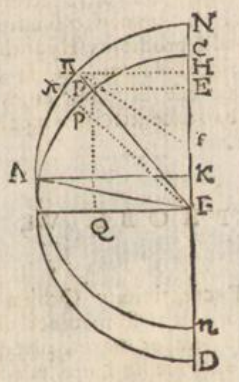
Sumatur excentricitas mediocris orbitæ Lunaris quam .05505 $r$ facit Newtonus in hoc Scholio, unde is terminus $\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ evadit 1.0110782 eſt $\frac{q^9}{r^9}=9864$, eſt $\frac{a^3}{b^3}=1$. proximè, itaque æquatio eſt $E=X \times \overline{1+E}+.9972\,X^3$, loco E ſubſtituatur .0804896, loco X ſubſtituatur .0744 + R & æquatio evadit .08084896 = .08082583 + 1.09740854 R unde habetur .00002313 = 1.09740854 R unde obtinetur R = .0000210, & M = .0744210 A; fere ut in præcedenti calculo.

## PROBLEMA V.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

Invenire æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione & quæ adhibenda eſt cum Terra eſt in mediocri ſuâ diſtantiâ à Sole.

Z z z.




Hoc Problema ſolvitur ut in præcedenti calculo, itaque ut tota Ellipſis cujus area eſt $\frac{1}{2}bk$ ad aream FNA (ſive $\frac{bk}{8}+\frac{be}{2}$.) ita tardatio annua quæ inventa eſt $\frac{M^2a^3q^9c \times 108.48+813.6\times\frac{f^2}{r^2}}{S.A.\,b^3r^9\times 109.73}$, ad tardationem quæ in motu medio continetur & quæ eſt ideo $\frac{M^2aq^9c \times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3r^9\times 109.73} \times \frac{1}{4}a^2+\frac{a^2e}{k}$, cujus exceſſus ſupra retardationem veram Probl. III. inventam eſt $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3r^9\times 109.73} \times \frac{2a^2e+abe}{k}$ ſive ſumendo $ab$ pro $a^2$ fit $\frac{M^2a^3q^9c}{S.A.\,b^3r^9} \times \frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73} \times \frac{3e}{k} = \frac{.9972M^2}{S.A} \times \frac{3ec}{k}$

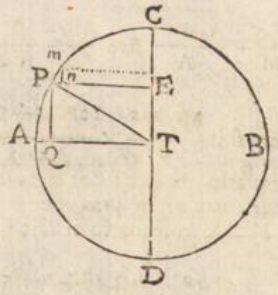
DE MUNDI SYSTEMATE.

121. (per Prob. IV.) est $\frac{3ec}{k}$ = 2gr. 9005, est $\frac{M^2}{SA}$ = .0685042 quod ductum in .9972 efficit .0683123888, quod ductum in 2gr. 9005, efficit 0°.1982 quod ductum per 60′ bis efficit 11″. 52‴ &c. sed in priori calculo erat 11′. 47″, itaque medium inter hos duos valores est 11′. 49″, ut invenit Newtonus; cum enim Orbitæ Lunaris figura sit admodum variabilis, & incerta sit excentricitas quæ ipsi citra actionem Solis conveniret, non immerito sumitur medium inter id quod prodit ex Hypothesi orbem Lunæ esse circularem, & in Hypothesi orbem Lunæ esse Ellipsim, cujus excentricitas est ea excentricitas mediocris quæ observatur.

## PROBL. VI.

Positâ Excentricitate Orbitæ Lunaris, Posito vero Solem in mediocri suâ distantiâ à Terrâ semper stare, invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario situ Apogæi Lunæ respectu Solis.

Inventum erat in Problemate 1°. quod tota tardatio Lunæ, durante mense Periodico, in mediocri distantia Terræ à Sole & in data Apsidis ad Quadraturam positione erat $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 107.48 + \frac{136.035 \times 15 f^2 m^2}{r^4} - \frac{27.5575.15 f^2 n^2}{r^4}$, Posito sinum anguli lineæ Apsidum cum linea quadraturarum esse $m$, Cosinum vero anguli esse $n$, sive quod eodem redit sinum distantiæ Apsidis à Syzygia esse $n$, ejus Cosinum esse $m$; Præterea inventum erat quod si linea Apsidum omnes possibiles positiones cum linea Syzygiarum assumat, tota tardatio quæ eo tempore fit est $\frac{AFq^9c}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$; Hinc si linea apsidum discedat à Syzygia arcu $u$, & fingatur retardationem esse proportionaliter tempori distributam, fiet ut tota Peripheria $c$ ad eum arcum $u$, ita tota tardatio facta dum Peripheria describitur quæ est $\frac{AFq^9c}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813. f^2}{r^2}$ ad tardationem mediam huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{AFq^9u}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$, sed cum Elementum tardationis (eodem Probl. 2°.) repertum fit $\frac{AFq^9du}{S.\ 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{136.0375 \times 15 f^2 m^2 - 27.5575 \times 15 f^2 n^2}{r^4}$. Integralis ejus sumatur per Lemma I. calculi præcedentis, loco $m$ ponendo $z$ & loco $n$ ponendo $y$, & Integralis erit




$\frac{AFq^9}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48u + \frac{136.0375 \times 15 f^2 \times APET - 27.5575 \times 15 f^2 APQ}{r^3}$

quæ quantitas si subtrahatur ex præcedenti, æquatio in data distantia $u$ Apogæi à Sole in Antecedentia, vel Solis ab Apogæo in consequentia erit $\frac{AFq^9f^2}{S \times 109.73\,Var^8} \times 813.6ru - 136.0375 \times 15 APET + 27.5575 \times 15 APQ$ est autem $APET = APQ + 2PQT$, est $ru = 2APT = 2APQ + 2PQT$, quibus valoribus substitutis, divisoque primo termino 813.6 per 15 æquatio evadit $\frac{15AFq^9f^2}{109.73 \times S.\ V.\ ar^8} \times 108'.48\ APQ + 108.48\ PQT - 136.0375\ APQ - 272.075\ PQT + 27.5575\ APQ$, & reductione facta fit $\frac{15A \times Fq^9f^2}{109.73 \times S.\ V.\ ar^8} \times -163.595\ PQT$.

Hæc æquatio negativa est cum Apogæum

gæum Lunæ ex A in C à Syzygiâ ad quadraturam procedit, in Quadratura evanescit, nam PQT in Quadratura fit zero: Si Apsis ex C in syzygiam B pergat, fit APET = APQ − 2PQT, est $ru = 2APT = 2AQP - 2PQT$, quibus valoribus in æquatione substitutis quantitas − 163.595 PQT ex negativâ positiva fit, rursus fit negativa cum ex syzygiâ B ad quadraturam D Apogæum pergit, positiva iterum ex D in A; evanescit vero in omnibus punctis syzygiarum & quadraturarum.

Cor. 1. Ex Trigonometriâ notum est quod sinus arcus dupli alterius arcus est duplum facti sinus arcus simpli per ejus Cosinum divisum per Radium; ideoque constat quod sinus arcus dupli alterius arcus est semper ut factum arcus simpli per ipsius Cosinum; sed areæ QPT duplum, nempe area TQPE, est ipsum factum sinus QP arcus AP per ejus Cosinum TQ, ergo area QPT est ut sinus arcus dupli arcus AP, Æquatio autem inventa est ubique ut area illa PQT siquidem constat ex facto illius areæ per constantes ductæ; Ergo æquatio proposita est ubique ut sinus arcus dupli Distantiæ Apogæi Lunæ à Syzygiâ.

Cor. 2. Hinc etiam sequitur illam æquationem evanescere in syzygiis & Quadraturis, iis enim in punctis Luna distat à syzygiâ vel 0gr. vel 180gr. vel 270 vel 360, quorum arcuum duplum est 180, 360, 540, 720, quorum arcuum sinus sunt zero.

Cor. 3. Hinc etiam sequitur hanc æquationem esse maximam in Octantibus tunc enim cum Apogæum distet à syzygia vel 45. gr. vel 135 vel 225 vel 315 quorum dupli sunt, 90 gr 270, 450, 630 &c. & horum arcuum sinus sit Radius qui omnium sinuum maximus est sequitur æquationem istis sinibus proportionatam hic loci esse maximam.

Cor. 4. In Octantibus hæc area PQT est $\frac{1}{2}r^2$, ut notum est, hinc ista Æquatio evadit $\frac{40.449375 \times 15AF\, q^2 f^2}{109.73 \text{ S. V} \times a r^2}$, loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$ est $f^2 = 0030305 r^2$; est $\frac{q^2}{r^2} = .9864$. tota quantitas fit $\frac{40.449375 \times 15 \times .0029828 r \times AM^2}{109.73 \text{ S. } A^2} = z$

sed inventum est quod est $\frac{M^2}{SA} = .0685042$, & est $\frac{40.449375 \times 15}{109.73} = 5.52939$, hinc tota æquatio est .0011297456 $r$, sed $r$ est æqualis arcui 57 gr. 29. &c. hinc æquatio est graduum .063723125 &c. quod ductum per 60 efficit $3'.82338$, & .82338 ductum per 60, efficit $49''.4$, Ita ut tota æquatio sit $3'.49''$. &c.

Cor. 5. Newtonus non tradit quantitatem hujus Æquationis qualem illam ex calculis invenit, sed ait ille, *Hæc æquatio quam semestrem vocabo in Octantibus Apogæi quando maxima est ascendit ad* $3'\,45''$ *circiter quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantia à Terra.* Scilicet in Hypothesibus nostris Apsidem & terram immotam assumpsimus, cum id revera non sit, ideoque, si concedatur nos attigisse verum Newtoni calculum, æquatio per calculum inventa non plane eadem erit cum vera, parum tamen admodum ab illa differet; cæterum omnes æquationis veræ Leges ex iis quæ per istum calculum obtinentur meritò deducentur, & eæ ipsæ sunt quæ in præcedentibus Coroll. sunt constitutæ, sed absoluta æquationis quantitas ex observatione non ex calculo est petenda, differunt autem calculus & rei veritas $3''$ duntaxat quod Theoriæ præstantiam sufficienter probat.

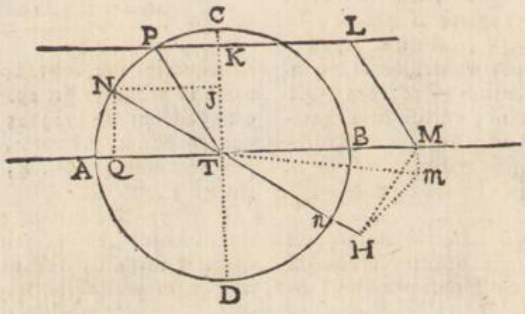
*De Æquatione motus Lunaris semestri secunda quæ pendet ex positione lineæ Nodorum respectu lineæ Syzygiarum.*

Ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Ecliptice fit ut pars actionis Solis consumatur in ipso plano orbitæ Lunaris ad Planum Ecliptice admovendo, sicque tota non occupetur, ut hactenus suppositum fuerat in distrahendo Lunam à terræ centro aut illam ad id attrahendo, aut alio modo Lunam in proprio ejus Plano accelerando aut retardando. Hinc æquationes prius inventæ novâ correctione indigent.

PRO-

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.




## PROBL. I.

Invenire partem actionis Solis quæ Lunam ſecundum radium ejus orbitæ trahit, ſublatâ eâ parte actionis Solis quæ conſumitur in ipſo plano orbitæ Lunaris dimovendo.

Sit ATB linea Syzygiarum in Ecliptícæ plano; NTn linea nodorum; P locus Lunæ in propria orbita; PL, LM directiones virium in quas reſolvitur vis Solis, quarum PL eſt parallela TM & LM Paralleia radio TP.

Ducatur ex M in planum orbitæ Lunaris productum perpendicularis Mm, ducatur in plano orbitæ Lunaris linea Tm, & ex M & m ducantur perpendiculares MH, mH in lineam nodorum Nn productam.

Radius TP dicatur $r$ ut prius, Diſtantiæ Lunæ à Quadratura ſinus PK dicatur $y$, Coſinus TK dicatur $z$; Diſtantiæ nodorum à Syzygia ſinus NQ ſit $n$, Coſinus TQ ſit $m$; Denique ſinus Inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam dicatur $l$, exiſtente $r$ radio, & ea inclinatio conſtans ſupponatur, quæ ſecundum Keplerum, De la Hirium &c. eſt ubi maxima, graduum 5. 19. 30.

Ex demonſtratis eſt $TM = 3y$; & propter ſimilitudinem Triangulorum NTQ, MTH, eſt $NT\ (r) : MT\ (3y) :: NQ\ (n) : MH\left(\frac{3yn}{r}\right)$, & quia angulus MHm eſt angulus inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam, ut $r : l :: MH\left(\frac{3yn}{r}\right) : Mm = \frac{3ynl}{r^2}$; Denique ut eſt $TM\ (3y)$ ad $Mm\left(\frac{3ynl}{r^2}\right)$ ſic eſt $r$ ad ſinum anguli MTm qui erit ergo $\frac{nl}{r}$, cujuſque Coſinus erit $\sqrt{r^2 - \frac{n^2l^2}{r^2}}$ ſive $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$.

Jam autem tota vis TM eſt ad eam ejus partem quæ agit ſecundum planum orbitæ Lunaris ut radius ad Coſinum anguli MTm ſive ut $r$ ad $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$ & in eâdem proportione minuuntur partes in quas reſolvitur ea vis, ergo cum portio totius vis TM ſecundum directionem radii exercita (ſi Planum orbitæ Lunaris & Eclipticæ idem fuiſſent) ſit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r}$ ex ſuperiùs demonſtratis; Pars reſidua propter inclinationem Plani erit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}$; Vis autem LM quæ eſt $\frac{F}{a}r$ & negativè ſumitur, nullam diminutionem patitur ex hâc plani inclinatione, quippe PT eſt in ipſâ orbitâ Lunari, ideoque ejus planum quomodocumque ſitum non dimovet; Hinc ergo pars actionis Solis quæ Lunam ſecundum radium ejus orbitæ trahit, ſublatâ

tâ eâ parte quæ conſumitur in plano orbitæ dimovendo eſt $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2rs}$.

## PROBL. II.

Dato ſinu anguli quem faciunt lineæ Nodorum & Syzygiarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis ſecundùm directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, ſemotâ eâ ejus actionis parte quæ in dimovendo plano orbitæ Lunaris exercetur.

Elementum retardationis Lunæ (Probl. 1. calculi prioris) inventum erat $\frac{2Ydu}{V}$, loco Y ponatur ejus valor Probl. præcedente inventus $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2rs}$; ſi, quia jam actum eſt de retardatione per vim $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ productâ, adhibeatur ſolummodo quantitas $\frac{F}{a} \times -\frac{3y^2n^2l^2}{2rs}$ (quæ cum negativa ſit ex retardatione fit acceleratio) hinc, accelerationis ex hâc causâ pendentis Elementum eſt $\frac{2Fdu}{Va} \times \frac{3y^2n^2l^2}{2rs}$, cujus Integralis pro quadrante eſt $\frac{Fn^2l^2}{Vars} \times \frac{3r^2c}{8}$ & quadruplicatum pro revolutione integrâ fit $\frac{3Fn^2l^2c}{2Var^3}$. Unde liquet quod cum linea nodorum eſt in ipſâ lineâ Syzygiarum quo caſu $n$ evaneſcit, tunc motus Lunæ eſt ipſe ille qui præcedentibus Theoriis fuit inventus, quando vero linea nodorum eſt in lineâ ſyzygiarum tunc eſt $n = r$, & eſt acceleratio $\frac{2Fl^2c}{2Var}$ quæ tum maxima eſt.

## PROBL. III.

Poſito Solem in mediocri ſuâ diſtantiâ verſari, & lineam Nodorum omnes poſſibiles poſitiones cum lineâ Syzygiarum ſucceſſivè obtinere, Invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario ſitu nodorum Lunæ.

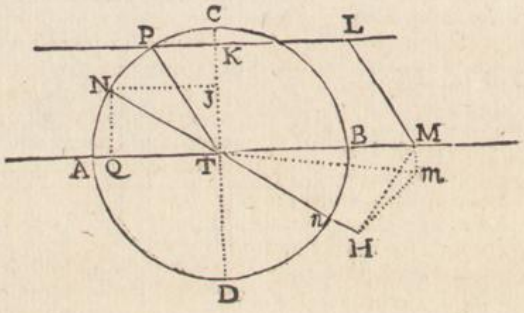
Primò ut inveniatur acceleratio mediocris quæ ex inclinatione plani Lunaris oritur, fingatur Solem immotum ſtare & lineam Nodorum ab eo recedere in Antecedentia (nodorum autem motum proprium hic omittere licet, cum in Problemate præcedente omiſſus ſit, ſic enim utraque omiſſio ſeſe compenſant.)

Moveatur Nodus ex N per arcum $du$, acceleratio Lunæ quæ fiet dum deſcribitur $du$ erit ad acceleration em toto menſe factam, ut tempus quo Nodus deſcribit arcum $du$ ad totum menſem, ſed tempus quo nodus deſcribit arcum $du$ eſt $\frac{Adu}{c}$, nam ut tota Peripheria $c$ ad arcum $du$ ita annus ſidereus A ad tempus quo arcus $du$ deſcribitur, quod erit ergo $\frac{Adu}{c}$, ergo ut menſis ſynodicus S, ad hoc tempus $\frac{Adu}{c}$, ita acceleratio uno menſe factâ quæ inventa eſt $\frac{2Fl^2n^2c}{2Var^3}$ ad $\frac{3AFl^2n^2du}{2S.Var^3}$ Integretur pro quadrante & erit $\frac{3AFl^2r^2c}{2\times 8S.Var^3}$ quadruplicetur pro totâ revolutione fiet $\frac{3AFl^2c}{4SVar}$, & hæc erit acceleratio motus medii Lunæ propter orbitæ inclinationem.

Hinc ſi linea nodorum diſcedat à lineâ ſyzygiarum arcu $u$, & fingatur totam acceleration em proportionaliter tempori diſtribui, fiat ut tota Peripheria $c$ ad eum arcum $u$, ita tota tardatio $\frac{3AFl^2c}{4S.Var}$, ad acceleration em huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{3AFl^2u}{4S.V.ar}$ ſive $\frac{3AFl^2}{2S.Var^2} \times \frac{ru}{2}$. Sed Integralis elementi $\frac{3AFl^2n^2du}{2SVar^3}$ quando arcus NA eſt $u$, eſt $\frac{3AFl^2 \times ANQ}{2.S.V.ar^2}$ (ex Lem. I. calc. 1.) hæc ergo quantitas ex præcedenti ſubſtracta dat æquationem ſive differentiam acceleration is mediæ & acceleration is

De Mundi Systemate.

121.




veræ, quæ æquatio erit ergo $\frac{3AFl^2}{2SVar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ sed $\frac{ru}{2} - ANQ$ est Triangulum NQT, & est $NQT = \frac{nm}{2} = \frac{2nm}{4}$; Hinc æquatio proposita sive Excessus accelerationis mediæ super veram est $\frac{3AFl^2}{8S.Var} \times \frac{2nm}{r}$, quæ est quantitas quâ minuendus est motus medius Lunæ ut ejus locus verior habeatur.

Cor. Hinc cum quantitates $\frac{3AFl^2}{8S.Var}$ sint constantes & $\frac{2nm}{r}$ sit sinus arcus dupli distantiæ nodi à syzygiâ, æquatio est ubique ut sinus arcus dupli distantiæ nodi à syzygiâ, ergo evanescit in syzygiis & Quadraturis; Maxima est in Octantibus, cumque sit illic $m = n = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, est $\frac{2nm}{r} = r$: loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2a}{A^2r}$, æquatio in Octantibus fit $\frac{3M^2l^2}{8S.A.r}$, sed cum Inclinatio sit 5 gr. $19\frac{1}{2}'$ cujus sinus $l$ est .09281, ideoque $\frac{l^2}{r}$ est .00863, & $\frac{3l^2}{8r} = .00325$, cum vero $\frac{M^2}{S.A}$ (per Prob. V. calc. præc.) sit. 0685; hinc æquatio evadit in Octantibus .000221; Denique est $r = 578'.29$, quod ad secundas reductum efficit $206264''$, & ductum per .000223 efficit $45''.6$, quam Newtonus $47''$ per Theoriam gravitatis se invenisse profitetur.

## DE MOTU APSIDUM.

Newtonus Sectione XI. Lib. I. Princ. ingeniosissimam excogitavit rationem motum Apsidum ad calculum revocandi, fingendo nempe vim externam Solis posse conferri cum vi quæ ex revolutione plani ipsius orbitæ Lunaris oriretur, sicque inveniri curvam per motum corporis in Ellipsi mobili genitam quæ eadem foret cum eâ quæ per vis extraneæ adjunctionem nasceretur; Eidem Methodo mox insistemus & ex eâ Leges motûs Apsidum derivantur accuratissimè quales illas Newtonus statuit; sed fatendum ipsam absolutam ejus motus quantitatem dimidio circiter minorem inveniri illâ quæ per observationes innotescit; Itaque aliam indicare Methodum rem eamdem æstimandi priori illâ non omissâ, inopportunum visum non est.

## PROBL. I.

Sol supponatur immotus; Linea Apsidum qualemcumque Angulum cum lineâ quadraturarum efficiat, ejusque anguli sinus sit $y$;

In-

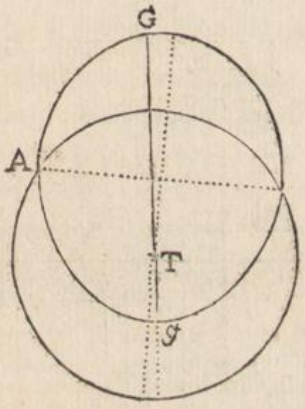
Invenire motum Apogæi dum Luna ab Apogæo ad Apogæum redit.

Sit G A g Ellipsis quam Luna circa Terram T describit; sit G Apogæum, g Perigæum; dicatur $r$ semi-axis major; $T$ distantia Apogæa; $T - 2f$ distantia Perigæa. Centro T describatur circulus radio $r$, eum circulum Luna describeret eodem tempore quo Ellipsim suam describit, & Vis Centralis Terræ in Lunam in eodem circulo revolventem foret $\frac{du^2}{2r}$ ex notâ circuli proprietate.

Portiones $du$ ejus circuli ubique æquales intelligantur, & sumantur in Ellipsi arcus terminati per lineas e centro T per utrumque extremum arcus illius $du$ ductas; liquet, quod dum arcus illi Elliptici describentur, lineolæ per quas Luna ex Tangente ad Ellipsin reducetur erunt effectus vis centralis Terræ & vis Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris conjunctis vel oppositis actionibus Lunam trahentium.

Lineolæ autem propter vim centralem terræ descriptæ erunt ubique, primò in ratione ipsius vis centralis, sive inverse ut quadrata distantiarum à centro, ideoque in distantia X erunt $\frac{r^2 du^2}{2rX^2}$; & secundò ut quadrata temporum sive ut quadrata arearum Ellipseos quæ respondent arcubus æqualibus $du$; illæ vero areæ cum sint inter se similes (ob æquales angulos in T arcubus æqualibus $du$ mensuratos) erunt ut $X^2$, ideoque tempora erunt ut $X^2$ eorumque quadrata ut $X^4$; Ideoque vis centralis Terræ effectus dum describitur area quæ respondet arcui $du$ erit ubique $\frac{r^2 du^2}{2rX^2} \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^2 du^2}{2r^3}$. In Apogæo erit $\frac{T^2 du^2}{2r^3}$ in Perigæo $\frac{T^2 du^2}{2r^3} - \frac{4Tf du^2}{2r^3}$ &c.

Vis Solis in Lunam agens secundum directionem radii orbitæ Lunaris dicatur Y in mediocri distantiâ, & quia crescit ut distantiæ, in distantiâ X fit $\frac{X}{r}$ Y, ejus verò effectus crescit ut quadrata temporum, ideoque per ea quæ dicta sunt, effectus ejus vis dum describitur area quæ respondet arcui $du$ est $\frac{X}{r} \times Y \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^5}{r^5}$ Y,




in Apogæo erit $\frac{T^5}{r^5}$ Y, in Perigæo $\frac{T^5}{r^5}$ Y $- \frac{10T^4 f}{r^5}$ Y &c.

Sit, ut prius, F vis Solis in Terram in ejus mediocri distantiâ à Terra $a$, inventum est vim Y esse $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & vim Lunæ in mediocri distantia esse ad vim Solis F ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ (A ut prius est annus sidereus, M mensis Periodicus, sed sepositâ Solis actione) cum ergo effectus vis Terræ in Lunam in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{r du}{2}$ sit $\frac{du^2}{2r}$, si fiat ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ ita $\frac{du^2}{2r}$ ad quartum qui erit $\frac{M^2 a}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r}$, is terminus erit effectus vis Solis quæ per F exprimitur, sicque effectus vis Y in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{r du}{2}$ erit $\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r} \times \frac{3yy}{r} - r$, & in qualicumque distantiâ X erit $\frac{X^5}{r^5} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r} \times \frac{3yy}{r} - r$.

Hinc fluxio secunda orbitæ Lunaris, hoc est, lineola ad Terram directa, intercepta inter Tangentem & curvam Lu-

DE MUNDI SYSTEMATE.

narem quæ est differentia (vel summa) effectuum vis Centralis Terræ & vis Solis in Lunam dum arcus respondens arcui $du$ percurritur erit ubique $\frac{du^2}{2r} \times \frac{X^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{X^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r}} - r$.

121.

Hæc fluxio in Apogæo erit $\frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r}} - r$; In Perigæo vero erit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r}} - r$; Ubi notandum quod si Sol immotus fingatur, (ut in hyp. Problem. assumitur) & si Perigæum esset è Diametro oppositum Apogæo tunc quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ eadem absolutè foret tam in Apogæo quam in Perigæo.

Si conciperetur quod effectu virium existente in Apogæo $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \frac{3yy}{r}} - r$ vera Ellipsis describeretur, hic effectus virium in Apogæo deberet esse ad earum effectum in Perigæo, primo inversè ut quadrata distantiarum, secundo directe ut quadrata temporum sive ut quartæ dignitates distantiarum, unde illi effectus erunt ut quadrata distantiarum directe hoc est ut $T^2$ ad $T^2 - 4Tf$, dividatur ergo effectus virium in Apogæo per $T^2$ & ducatur in $T^2 - 4Tf$ effectus virium in Perigæo esse deberet $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r}} - r$: Sed in Perigæo ut & in Apogæo ex naturâ Apsidum evanescit fluxio distantiæ X utpote maximæ vel minimæ, ejus autem fluxionis fluxio est is ipse effectus Virium Terræ & Solis, ideo fluens hujus effectus virium reverâ evanesceret, itaque ex ipsis hypothesibus oportebit ut $\int \frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r}} - r = 0$; Sed in Perigæo, spectatâ actione Terræ & Solis, fluxio secunda reperta erat $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r}} - r$. Itaque excedit eam quantitatem cujus fluens evadit zero quantitate $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{6T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r}} - r$.

Punctum itaque Perigæi non erit in puncto è Diametro oppositi Apogæo, sed arcu quodam differet, quem obtinemus quærendo quonam in loco orbitæ Lunaris fluens fluxionis secundæ ejus curvæ evanescat. Observandum autem, quod distantiæ Lunæ à Terrâ, circa puncta Apogæi vel Perigæi non multum mutantur, ideoque si Perigæum arcu $p$ transferatur non magna mutatio exinde orietur in effectu vis centralis terræ, sed sinus $y$ qui occurrit in valore vis Solis evadet, $y + \frac{zp}{r}$ (sumpto $z$ pro cosinu arcus cujus sinus est $y$, est enim $dy = \frac{zdu}{r}$ per naturam circuli, cùm hic verò agatur de arcu $p$ non magno, potest poni $p$ loco $du$, & differentia sinuum pro $dy$) fiet itaque fluxio secunda orbitæ Lunaris in loco in quo Perigæum esse debebit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T4f}{r^5} \times \overline{3yy + \frac{6yzp}{r} + \frac{3z^2p^2}{r^2}}} - r$; cujus pars $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r}} - r$, Fluentem habet æqualem zero; Fluens autem excessus $\frac{du^2}{2r} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times - \frac{T^5}{r^5} \times \frac{6yzp}{r^2} + \frac{6T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r$ fiat æqualis zero (omissis terminis in quibus $f$ aut $p$ ad duas dimensiones assurgunt) & habebitur valor $p$, quatenus designat arcum quo processit Perigæum, siquidem tota fluens fluxionis secundæ orbitæ Lunaris in eo puncto fiet zero.

Hinc itaque divisis terminis per quantitatem communem $\frac{6M^2T^4du}{2Ar^8}$ habetur

hæc

hæc Æquatio $T\,p \times \int \frac{y\,z\,d\,u}{r} = f \times \int \overline{3\,y\,y\,d\,u - r\,r\,d\,u}$, sive quia $y\,d\,u = -r\,d\,z$ fit $T\,p \times \int -z\,d\,z = f \times \int -\overline{3\,r\,y\,d\,z - r^2\,d\,u}$. Est autem $\int -z\,d\,z = \frac{1}{2}\,r\,r - \frac{1}{2}\,z\,z$ & $\int -y\,d\,z$ segmentum circulare cujus ordinata est $y$, sive sector circularis $\frac{1}{2}\,r\,u$, dempto vel assumpto Triangulo cujus area est $\frac{1}{2}\,y\,z$; Hinc æquatio evadit $\frac{1}{2}\,T\,p \times r\,r - z\,z = f \times \frac{3}{2}\,r^2\,u - \frac{3}{2}\,r\,y\,z - r^2\,u$, sive $T\,p \times y\,y = f \times r^2\,u - 3\,r\,y\,z$, unde tandem habetur $p = \frac{r\,f}{T} \times \frac{r\,u - 3\,y\,z}{y\,y}$.

Atque cum hic sit motus Perigæi quo tempore Luna fertur ab Apogæo ad Perigæum erit motus Apsidis durante unâ revolutione Lunæ ab Apogæo ad Apogæum $\frac{2\,f\,r}{T} \times \frac{r\,u - 3\,y\,z}{y\,y}$.

Cor. 1. Hinc motus Apsidum nullus est cum $r\,u - 3\,y\,z = 0$; in Quadraturis verò fit negativus regrediuntur itaque Apsides; maximus autem est in syzygiis & positivus, tunc enim evanescit quantitas negativa $3\,y\,z$, fit $u = \frac{1}{4}\,c$, & $y = r$, unde ille motus fit $\frac{f\,c}{2\,T}$ durante unâ revolutione Lunæ.

Cor. 2. Si hunc calculum accuratius instituere liceret, attendi posset ad motum Solis dum Luna ab Apogæo ad Perigæum movetur, promovetur enim interim Sol 13 circiter gradibus, itaque etsi Luna veram describeret Ellipsim, Perigæum non faceret cum quadratura eumdem angulum quem faciebat Apogæum, sed 13 gradibus minus distaret in consequentia. Sed instituto calculo invenimus parum admodum exinde mutari motum Perigæi in propriâ orbitâ, ita ut ad institutum nostrum sufficiat illum assumere qualis per Problema repertus est.

## PROBL. II.

Invenire quantitatem motus Apsidum singulo anno.

Sit Apogæum in quadraturâ, & Sole procedente Apogæum inde versus Syzygiam recedat.

Dicatur $\alpha$ tempus quo Sol revolutionem respectu Apogæi Lunæ absolvit, dicatur $\pi$ tempus quo Luna ab Apogæo ad Apogæum redit, sit $c$ tota Peripheria quam Sol Apogæi respectu describit, & $d\,u$ arcus ejus exiguus quo Apogæum à quadraturâ recessisse censebitur propter Solis motum, tempus quo hunc arcum 121. describserit erit $\frac{\alpha\,d\,u}{c}$, & cum tempore $\pi$, Apogæum moveatur quantitate $\frac{2\,f\,r}{T.\,y\,y} \times r\,u - 3\,y\,z$ tempore $\frac{\alpha\,d\,u}{c}$ procedet quantitate $\frac{2\,\alpha\,f\,r}{\pi.\,T.\,c} \times \frac{r\,u\,d\,u}{y^2} - \frac{3\,y\,z\,d\,u}{y^2}$, erit autem $u$ arcus qui metitur distantiam Apogæi à quadraturâ, $y$ ejus sinus, & $z$ ejus Cosinus, & $d\,u = \frac{r\,d\,y}{z}$ hinc quantitas $\frac{2\,a\,f\,r}{\pi.\,T.\,c} \times \frac{r\,u\,d\,u}{y^2} - \frac{3\,z\,y\,d\,u}{y^2}$, fit $\frac{2\,\alpha\,f\,r}{\pi.\,T.\,c} \times \frac{r\,u\,d\,u}{y^2} - \frac{3\,r\,d\,y}{y}$. Ut habeatur fluens quantitatis $\frac{r\,u\,d\,u}{y^2}$, ponatur loco $u$ ejus valor $y + \frac{y^3}{6\,r\,r} + \frac{3\,y^5}{40\,r^4} + \frac{5\,y^7}{112\,r^6} + \frac{35\,y^9}{1152\,r^8} + \frac{63\,y^{11}}{2816\,r^{10}}$ &c. fiet $\frac{r\,u\,d\,u}{y\,y} = \frac{r\,d\,u}{y} + \frac{y\,d\,u}{6\,r} + \frac{3\,y^3\,d\,u}{40\,r^3} + \frac{5\,y^5\,d\,u}{112\,r^6}$ + &c. & dividendo $r\,d\,u$ per valorem $y$, qui est $u - \frac{u^3}{6\,r\,r} + \frac{u^5}{120\,r^4} - \frac{u^7}{5040\,r^6}$ est $\frac{r\,d\,u}{y} = \frac{r\,d\,u}{u} + \frac{u\,d\,u}{6\,r} + \frac{7\,u^3\,d\,u}{360\,r^3} + \frac{31\,u^5\,d\,u}{15120\,r^5}$; & loco $y\,d\,u$ in sequentibus terminis ponendo $-r\,d\,z$ & loco $y^2$ ejusque dignitatum ponendo $r^2 - z^2$ ejusque dignitates, fit $\frac{r\,u\,d\,u}{y\,y} = \frac{r\,d\,u}{u} + \frac{u\,d\,u}{6\,r} + \frac{7\,u^3\,d\,u}{360\,r^3}$ &c. $-\frac{r\,d\,z}{6\,r} + \frac{3}{40} \times \frac{r\,r - z\,z \times -r\,d\,z}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\overline{r\,r - z\,z}^2 \times -r\,d\,z}{r^6} + \frac{35}{1152}, \frac{\overline{r\,r - z\,z}^3 \times -r\,d\,z}{r^8} + \frac{63}{2816} \times \frac{\overline{r\,r - z\,z}^4 \times -r\,d\,z}{r^{10}}$ &c. Cujus quantitatis

DE MUNDI SYSTEMATE.

121. fluens est $r$ L. $u + \frac{u^2}{12r} + \frac{7u^4}{1440r^3}$ &c. $+ \frac{rr-rz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{\frac{2}{3}r^4 - r^3z + \frac{1}{3}rz^3}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\frac{8}{15}r^6 - r^5z + \frac{2}{3}r^3z^3 - \frac{1}{5}rz^5}{r^5} + \frac{35}{1152} \times \frac{\frac{16}{35}r^8 - r^7z + r^5z^3 - \frac{3}{5}r^3z^5 + \frac{1}{7}rz^7}{r^7} + \frac{63}{1816} \times \frac{\frac{128}{315}r^{10} - r^9z + \frac{4}{3}r^7z^3 - \frac{6}{5}r^5z^5 + \frac{4}{7}r^3z^7 - \frac{1}{9}rz^9}{r^9}$

cui fluenti si adjungatur fluens quantitatis $-\frac{3rdy}{y}$ quæ est $-3r$ L. $y$ & omne ducatur per $\frac{2afr}{\pi Tc}$ habetur motus Apogæi dum propter Solis motum Apsis recessit à quadraturâ arcu $u$.

Si ergo $u$ sit quadrans, $y$ erit $r$, & $z$ fiet zero unde hæc expressio evadet $\frac{2\alpha fr}{\pi Tc} \times r$ L. $\frac{1}{4}c + \frac{\frac{1}{16}c^2}{12r} + \frac{\frac{7}{256}c^4}{1440r^3}$ &c. $+ \frac{r}{6} + \frac{3}{40} \times \frac{2}{3}r + \frac{5}{112} \times \frac{8}{15}r + \frac{35}{1152} \times \frac{16}{35}r$ &c. $- 3r$ L. $r = \frac{2\alpha fr^2}{\pi \cdot Tc} \times$ L. $\frac{\frac{1}{4}c}{r} + \frac{c^2}{192r^2} + \frac{7c^4}{368640r^4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10\times11}$ &c. harum fractionum $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5}$ &c. summa variis modis haberi potest, & quidem liquet oriri istos terminos ex terminis seriei quæ excessum quadrantis supra radium exprimit cum radius est Unitas, cujus seriei quinque priores termini efficiunt .33905, residui .23174; hinc cum quinque primi termini hic assumpti evadant propter fractiones per quas ducuntur .26343, & sequentes per fractiones minores quam $\frac{2}{3}$ ducantur, ii omnes sequentes simul sumpti non efficient $\frac{.23174}{3}$ sive .07724, id itaque addatur ad .26343, erit .34067 numerus major quæsito, & .26343 numerus quæsito minor, assumatur medium .30205 quantitas proposita evadit $\frac{2\alpha f}{\pi Tc} \times$ L $\frac{\frac{1}{4}c}{r} + \frac{c^2}{192} +$ .30205.

Si verò dicatur $g$ excessus quadrantis super Radium, per naturam Logarithmorum fiet L. $\frac{1}{4}c = g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \frac{1}{4}g^4$ + &c. = .57079 − .16290 + .06196 − .02652 + .01211 − .00576 = .4496, unde expressio inventa fit $\frac{2\alpha f}{\pi Tc} \times .4496r^2 + \frac{c^2}{192} + .30205r^2 = \frac{2\alpha f}{\varpi T} \times .75165r^2 + \frac{c}{192} = \frac{\alpha f}{\varpi I} \times \frac{1.5033r^2}{c} + \frac{c}{96}$, sive quia est $\frac{c}{96} = 3^{gr}.75$, & $\frac{r^2}{c} = \frac{r}{6.28,188} = 9^{gr}.1189$ & $\frac{1.5r^2}{c} = 13^{gr}.6783$, habetur motus Apogæi durante quadrante $\frac{f}{I} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 175^{gr}.4283$ & durante totâ revo- $\frac{f}{I} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 695^{gr}.7132$, sed ut totum tempus $\alpha$ qualecumque sit, ad tempus annuum A, ita motus $\frac{f}{I} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 695^{gr}.7132$ ad motum annuo tempore factum qui erit $\frac{f}{I} \times \frac{A}{\varpi} \times 695^{gr}.7132$; Præterea sit P mensis Periodicus Lunæ fiatque ut A ad P ita $\frac{f}{I} \times \frac{A}{\varpi} \times 695^{gr}.7132$ ad motum Apsidum tempore Periodico Lunæ, qui erit $\frac{f}{I} \times \frac{P}{\varpi} \times 695^{gr}.7132$, & ut P ad $\varpi$ ita $\frac{f}{I} \times \frac{P}{\varpi} \times 695^{gr}.7132$, ad motum Apsidum mense Anomalistico $\varpi$ qui erit $\frac{f}{I} 695^{gr}.7132$, & ut 360 ad $360 + \frac{f}{I} \times 695^{gr}.7132$ ita P ad mensem Anomalisticum $\varpi$ qui ergo erit $P \times 1 + \frac{f}{I} \times \frac{695^{gr}.7132}{360}$; Ideoque motus annuus Apogæi erit $\frac{f}{I} \times \frac{A \times 69.7132}{P \times 1 + \frac{f}{I} \times \frac{69.7132}{360}}$, sed annus Tropicus

picus est $13\frac{1}{3}P$ proxime, hinc motus Apogæi fit $\frac{f}{T} \times \frac{13\frac{1}{3} \times 69.7132}{1+\frac{f}{T}\times\frac{69.7132}{360}}$.

Excentricitas $f$ orbitæ Lunaris est quidem variabilis, de ejus legibus posthac; Excentricitatis valorem mediocrem assumit Newtonus .05505 si Radius sit 1, Ill. Cassinus eam paulo minorem facit nempe .05430; ex Legibus autem variationis excentricitatis patebit quod loco $f$ scribi debet .05147 & loco T, 1.05147 unde motus Apsidum fiet $\frac{.04895\times13\frac{1}{3}\times69^{gr}.7132}{1+\frac{.04895\times69.7132}{360}} = \frac{45^{gr}.4997}{1.0126} = 44.9$ circiter; qui quidem motus invenitur per observationes $40^{gr}$.

## DE MOTU APSIDUM

### *Secundum Newtoni methodum.*

Hic revocanda sunt ea quæ in Sectione IX. Lib. I. dicta sunt de motu corporum in orbibus mobilibus.

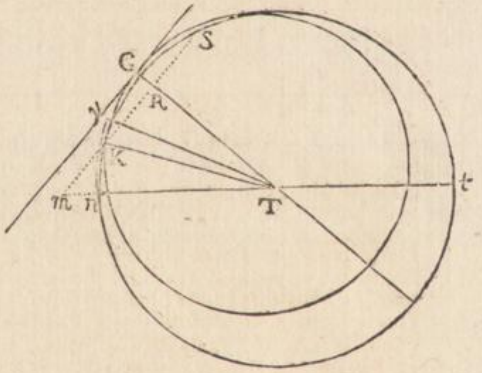
### LEMMA I. Prop. XLIV. Lib. I.

Concipiatur planum Orbitæ alicujus uniformiter revolvi, dum corpus quoddam ipsam orbitam propter vim centralem aliquam percurrit, id corpus in singulo puncto duplici vi centrali urgebitur, propriâ nempe quâ urgetur in centrum virium, & eâ quæ ex revolutione Plani orbitæ pendet, Hæc ubique erit inverse in triplicatâ ratione distantiæ à Centro.

Demonstrationem vide Propositione suprà indicatâ.

### LEMMA II.

Si vis Solis in Lunam agens, sit quantitas quæ in mediocri distantiâ sit constans, dicaturque Y, crescat vero ut distantia à Terrâ, vis Terræ in distantiâ mediocri sit V, Dico quod (ponendo orbitam Lunarem circulo satis finitimam esse) motus Lunæ concipi poteri quasi fieret in Ellipsi simili illi quam revera describit, sed cujus Planum foret mobile, ita ut integrâ revolutione Apsis ejus orbitæ promoveretur quantitate $360^{gr}. \times \sqrt{\frac{r^3V-T^3Y}{r^3V-4T^3Y}}$; Demonstratio est in exemplis tertiis ad Propositionem XLV, sed eam demonstrationem hic breviter trademus.

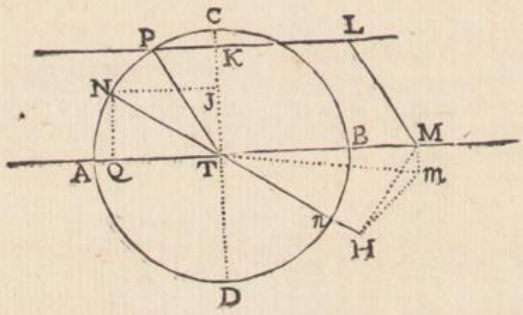



Sit G Lunæ Apogæum, GK arcus quam minimus quem Luna in propria orbita dato exiguo tempore describeret, transferatur vero Luna cum suo Plano ita ut ejus Apsis transferatur in $\gamma$ dum Luna ex G in K moveri debuisset; motus Lunæ in G ex duobus compositus censeatur, nempe ex motu secundum Tangentem per velocitatem acquisitam, & ex motu per vim centralem genitam quæ simul ac semel in puncto G agere censeatur, hic motus per GR repræsentetur, motus secundum Tangentem per RK, fiat vero RK ad R m, ut angulus GTK ad GTK + GT$\gamma$, & si nulla vis centralis ex revolutione plani oriretur, Luna foret in m cum debuisset esse in K, sed quia Tm est longior quam TK sumatur Tn = TK & revera Luna erit in n, & erit mn effectus vis centralis ex revolutione plani genitus dum Luna describisset arcum GK.

Ra-

DE MUNDI SYSTEMATE.

LIB. I.




Radio TK centro T deſcribatur circulus quem mT producta ſecet in t & mK producta ſecet in S, erit $mn \times mt = mK \times mS$ per Cor. Prop. XXXV. III. Elem. Eucl. ideoque erit $mn = \frac{mK \times mS}{mt}$ & ſi fingatur hunc circulum quam proximè coincidere cum Arcu orbitæ Lunaris GK, eodemque tempore deſcribi quo arcus deſcriberetur, erit GR effectus vis centralis Terræ dum Luna deſcripſiſſet arcum GK, & per notam proprietatem circuli hic arcus foret $\frac{RK^2}{2GT}$.

Ergo cum effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ, & effectus vis centralis terræ eodem tempore geniti ſint mn & GR, vires illæ erunt uti mn & GR, ſive ut quantitates ipſis æquales $\frac{mK \times mS}{mt}$ & $\frac{RK^2}{2GT}$ ſed cum mt ſit quamproxime 2GT, ſitque $mS = mR + RK$, & $mK = mR - RK$, iſtæ vires ſunt ut $mR^2 - RK^2$ ad $RK^2$, ſi itaque dicatur T diſtantia maxima Lunæ, T − X alia diſtantia quævis, r mediocris diſtantia, V vis terræ in ea mediocri diſtantia, erit $\frac{r^2}{T^2}V$ vis centralis terræ in puncto T, ideoque, cum ſit $RK^2$ ad $mR^2 - RK^2$ ut vis gravitatis ad vim ex revolutione plani genitam hæc erit, $\frac{r^2V \times mR^2 - r^2V \times RK^2}{T^2 \times RK^2}$.

In puncto K aut alio quocumque ubi TK eſt T − X, vis gravitatis eſt $\frac{r^2}{T-X^2}V$, & quoniam vires ex revolutione Plani genitæ ſunt inverſe in triplicatâ ratione diſtantiarum, vis plani eſt $\frac{T.r^2.V \times mR^2 - Tr^2V \times RK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ quæ ſi addatur vi gravitatis fit $\frac{Tr^2VRK^2 - Xr^2VRK^2 + Tr^2VmR^2 - Tr^2VRK^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$

Sed cum in eo puncto vis gravitatis ſit $\frac{r^2}{T-X^2}V$, & vis ſubſtractitia Solis ſit ut diſtantiæ, ideoque ſit $\frac{T-X}{r}Y$, ſi reducantur ad communem denominatorem $Tr^2V - Xr^2V - \frac{T^4Y}{r} + \frac{4T^3XY}{r} -$. $\overline{T-X}^3$ fient $\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\overline{T-X}^3}$

Ut autem æquipolleat Plani revolutio cum ſubſtractione vis Solis, ita determinandæ ſunt quantitates $RK^2$ & $mR^2$, ut expreſſiones harum virium ſint ubique æquales, & 1°. quidem cum X ſit zero, vis gravitatis cum vi Plani eſt $\frac{Tr^2V \times mR^2}{\overline{T-X}^3 \times RK^2}$ & vis gravitatis ſubſtractâ vi Solis remanet $\frac{Tr^2V - \frac{T^4Y}{r}}{\overline{T-X}^3}$. Oportet ergo ut ſit

$mR^2 =$

$mR^2 = \frac{\overline{RK^2}}{r^2V} \times r^2V - \frac{T^3Y}{r}$. Termini vero reliqui in quibus est X sunt $-\frac{Xr^2VRK^2}{\overline{T.X^3} \times RK^2}$ & $-\frac{Xr^2V + 4T^3X\frac{Y}{r}}{1-Y^3}$. Oportet ergo ut sit $RK^2 = \frac{\overline{RK^2}}{r^2V} \times r^2V - 4T^3\frac{Y}{r}$.

Itaque ut vis revolutionis plani vi gravitatis permixta, idem efficiet ac vis substractitia Solis, oportet ut sit $mR^2$ ad $RK^2$ ut $r^2V - \frac{T^3Y}{r}$ ad $r^2V - \frac{4T^3Y}{r}$, sive ut sit mR ad RK ut $\sqrt{r^2V - T^3Y}$ ad $\sqrt{r^2V - 4T^3Y}$ unde cùm sit mR ut motus Lunæ & Apogæi conjunctim & RK ut motus Lunæ, si Luna describerit 360gr. fiet ut $\sqrt{r^2V - 4T^3Y}$ ad $\sqrt{r^2V - T^3Y}$ ita 360gr. ad Lunæ & Apogæi motum conjunctim, qui erit ergo $360 \times \sqrt{\frac{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}} = 360\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3Y}}$, itaque si ex hoc valore tollantur 360gr. Residuum erit motus Apogæi integrâ revolutione Lunæ. Q. E. O.

## THEOR. I.

Invenire motum Apogæi Lunaris, supponendo orbitam Lunarem esse circulo finitimam.

Describat Luna arcum $du$, & eo durante vis Y constans maneat, & spectatur $du$ quasi portio Ellipseos descriptæ, si vis Y durante totâ revolutione crevisset sicut distantiæ; Motus Apsidis durante totâ revolutione C, foret (per Lemma 2.) $c\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3r}} - c$, ideoque durante tempore quo arcus $du$ percurritur foret $du\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3Y}} - du$, sit $r = T$, & sumatur valor quantitatis $\sqrt{\frac{V-Y}{V-4Y}}$ is erit $1 + \frac{3Y}{2Y}$, hinc itaque elementum motus Apsidum est $\frac{3r}{2V}du$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. fit $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3yydu}{r} - rdu$, cujus Integralis pro quadrante est $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3r^2c}{8r} - \frac{rc}{4}$ & pro circulo $\frac{3F}{2Va} \times \frac{rc}{2}$ & cum $\frac{F}{V}$ sit $\frac{MM}{rAA}$ evadit, $\frac{3MM}{4AA}c$ sive cum $\frac{MM}{AA}$ sit fere .0055 est motus Apsidum $.0041c = 1^d.476$ sive $1^d 28'.33''$, & quia is absolvitur mense Synodico, ut habeatur motus Apogæi annuus, fiat ut .0808 ad 1, ita $1^d.476$ ad $18^{sr}.267$ sive $18^{sr}.16'$. quod est circiter dimidium veri motus Apsidisut observat Newtonus.

## THEOR. II.

Invenire Leges motus Apogæi Lunæ supponendo Orbitam Lunarem esse Ellipticam.

Distantia Lunæ Apogæa dicatur A, Perigæa dicatur P, sinus anguli Apogæi & lineæ quadraturarum sit $y$, vis Solis in Apogæo agens erit per demonstrata $A \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & vis Solis agens in Perigæo, erit $P \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & $y$ in utroque casu est eadem quantitas, dicatur itaque C hæc quantitas $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$; siquidem est constans; Vis Solis substractitia aut addititia in Apogæo ac Perigæo erit AC vel PC; hoc est, erit ut quantitas constans C, ducta in distantiam A vel P; si itaque fingatur in punctis intermediis, eam vim esse etiam eandem constantem C, per distantiam ductam, aut saltem variationem quantitatis C compensari tunc per Cor 2. Prop. XLV., & Exempla tertia ejusdem, erit motus Lunæ ab Apside ad Apsidem $360 \times \sqrt{\frac{V-C}{V-4C}}$, si V

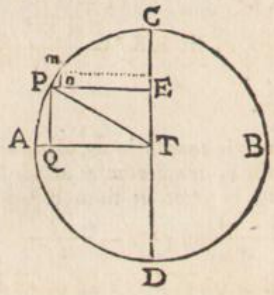
DE MUNDI SYSTEMATE.

fit ut vis gravitatis terræ in data distantia, est vero $360 \sqrt{\frac{V-C}{V-4C}} = 360 \times 1 + \frac{3C}{2V}$,

121. ideoque motus Apsidis erit $360 \times \frac{3C}{2V}$ tota revolutione Synodico-Anomalisticâ quam pro synodicâ sumimus.

Loco C litteram Y quæ in toto calculo designabat quantitatem $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ resumamus, & fingatur talem esse Apogæi motum ut ubique sit proportionalis motui $360 \times \frac{3Y}{2V}$ durante mense Synodico quod quidem ex prædictis consequitur, fingaturque Solem immotum stare & Apogæum ejus respectu in Antecedentia regredi, totamque revolutionem respectu Solis tempore $\alpha$ absolvere, sit ergo $c$ tota peripheria, Apsis percurret respectu Solis arcum $du$ tempore $\frac{\alpha du}{c}$; Ideo tempore synodico $S$ percurret $360^{gr.} \times \frac{3Y}{2V}$ motuo suo, tempore $\frac{\alpha du}{c}$ percurret $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3Ydu}{2V}$, sed quia est $\frac{Y}{V} = \frac{F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r$ & $\frac{F}{V} = \frac{MMa}{AAr}$, elementum motus Apogæi est $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3yydu - r^2du$, cujus integralis est (si fingatur Apogæum à quadratura ad syzygiam in antecedentia retrocedere) $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3.rf.ydz - r^2u$ est autem autem $f.ydz = CPE$, hinc sumendo $\frac{\alpha M}{SA}$ pro unitate, est $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$ & pro quadrante $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{8}$ & pro circulo $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{2}$ prope ut in præcedenti Theoremate.

Hinc si sumatur motus Apogæi proportionalis tempori, dum Apogæum discedet à Sole arcu $u$, ejus motus esse debuisset $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{ru}{2}$ cum revera inventus sit $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$, hinc æquatio est $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{3ru}{2} - 3CPE$, sed $3CPE = \frac{3ru}{2} \mp \frac{3yz}{2}$ per




constr. hinc Æquatio fit $\frac{3M}{2Ar} \times \pm \frac{3yz}{2}$, sed $\frac{2yz}{r}$ est sinus arcus dupli distantiæ à Sole, hinc itaque hæc æquatio est ut sinus arcus dupli distantiæ Apogæi à Sole, unde Lex æquationis habetur, quod sit maxima in Octantibus, nulla in Syzygiis & quadraturis, positiva à quadraturis ad Syzygias negativa inde, sed ejus quantitas, non per hunc calculum, sed per observationes est determinanda; Siquidem, ut observatum est, Hypotheses adhibitæ ut ut à motu Apsidum non dissimiles, attamen ipsius quantitatem dimidio fere minorem exhibent. De his in Notis subsequentibus plura.

## DE EXCENTRICITATE ORBITÆ LUNARIS.

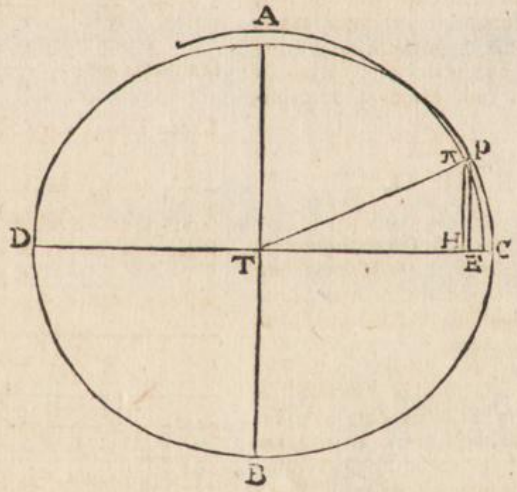
Ipsa Curva quam Luna describit posset determinari per calculum adhibita ejus curvæ fluxione secunda, quæ obtinetur subtrahendo vim Solarem à vi terræ; Audivimus autem Viros in Matheſi Primarios hoc Problema, quod certè non est exiguæ difficultatis, suum feciſſe; Cum autem nobis videatur Newtonum non aliter hanc curvam investigasse quam per approximationes quasdam, eadem Methodo, tenui nostro modulo magis accommodata, idem persequi conabimur.

I. Propositione XXVIII. hujus Libri qvæ-

quæsivit Newtonus qualis foret orbita Lunaris ex suppositione illam citra actionem Solis circularem esse, & invenit quod si assumatur eam orbitam fieri Ellipsim per Solis actionem ea Ellipsis terram in centro haberet & ejus axis minor foret ad majorem qui secundùm lineam quadraturarum jaceret, ut 69 ad 70.

Hinc deducitur quod si semi-axis major 70 dicatur $r+p$, semi-axis minor 69 sit $r-p$, distantia Lunæ à terra in loco quovis dicatur $r+x$, sit $y$ sinus distantiæ Lunæ à quadratura proxima, $z$ ejus distantiæ Cosinus erit ubivis $x = p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$.






Nam sit $T\Pi = r$, $TP = r+x$, $\Pi H = y$, $TH = z$; propter Triangula similia TPE, TΠH est $PE = \frac{r+x}{r} \times y$ & $TE = \frac{r+x}{r} \times z$, unde per naturam Ellipseos est $\frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} \times \overline{r+p}^2 - \frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} \times \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2$; Unde est $\overline{r-p}^2 = \overline{\frac{r+x}{r^2}}^2 \times y^2 + \frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} \times \frac{r+x^2}{r^2} \times z^2$, sed divisione factâ, omissisque terminis superfluis, est $\frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} = 1 - \frac{4p}{r}$, hinc fit $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 - \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times \frac{4pz^2}{r}$ & quia $y^2 + z^2 = r^2$, & formatis dignitatibus omissisque terminis in quibus $p$, vel $x$, ad secundam dimensionem assurgunt habetur $r^2 - 2rp = r^2 + 2rx - \frac{4pz^2}{r} =$ sive loco $z^2$ scripto $r^2 - y^2$; deletis terminis æqualibus & transpositione factâ & divisione per 2, habetur $rx = \frac{2pr^2}{r} - \frac{2py^2}{r} - rp$ ideoque $x = p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$.

Ex quo sequitur quod in Octantibus $x$ evanescit, illic enim $\frac{2y^2}{r^2} = 1$.

II. Ponatur vero Orbitam Lunarem

121. Ellipticam citra Solis actionem ejuſque ſemi-axem majorem eſſe $Y$, excentricitatem dici $f$, accedere autem vim Solis, ſed eam tantùm partem ejus actionis conſiderari quæ ſecundum orbitæ radium agit, omiſſâ illâ parte ejus actionis Solaris quæ radio eſt perpendicularis, in hâc Hypotheſi deprehendetur hujus orbitæ figuram variari, & magis oblongam evadere dum Apſides ſunt in Syzygiis quam dum ſunt in quadraturis, Excentricitatem pariter variabilem eſſe maximam dum Apſides ſunt in Syzygiis, mediocrem cum Apſides ſunt in Octantibus, cum ſunt in Quadraturis minimam, & ex hâc hypotheſi cum priori conjunctâ ejus excentricitatis variabilis Leges & quantitas rudi Minervâ determinari poteſt.

## THEOR. I.

Poſitis Sole & lineâ Apſidum immotis, item omiſſâ eâ actionis Solaris parte quæ perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris agit; Dico quod ſi deſcribatur Ellipſis, cujus Terra ſit focus & cujus axis major ſit linea inter Lunæ Apogæum & Perigæum interjacens, Orbita Lunaris erit contenta intra eam Ellipſim cum Apſides erunt in Syzygiis, erit vero extra eam Ellipſim cum Apſides erunt in Quadraturis, cum vero Apſides erunt in Octantibus orbita Lunaris cum eâ Ellipſi coincidet.

Reſumptis iis quæ in Theor. VII. calculi ſecundi dicta fuerunt, inventum eſt quod ſi diſtantia Lunæ citra Solis actionem fuiſſet $x$, evadit per Solis actionem ſecundum radium exercitam $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V}$ ſive quia eſt $\frac{Y}{V} = \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - r$, hæc diſtantia fit $x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{x^4}{r^3}$. Hinc cum diſtantia Apogæa ſit $r + f$, diſtantia Perigæa ſit $r - f$, & ea diſtantia quæ eſt perpendicularis in axem & quæ eſt ſemi-lateri recto Ellipſeos æqualis $r - \frac{f^2}{r}$; Diſtantia Apogæa evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 + 4r^3f}{r^3}$. Diſtantia Perigæa fit $r - f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 - 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 - 4r^3f}{r^3}$ & Diſtantia perpendicularis eſt $r - \frac{H}{r} + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4z^2 - 12r^2z^2f^2}{r^5}$; Ponendo $z$ loco $y$, ut fieri debere ex ipſâ conſtructione patet, Ergo totus axis major invenitur $2r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{6r^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2r^4}{r^3}$, ſive ſemi-axis eſt $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - \frac{M^2}{A^2} \times r$; Excentricitas vero eſt $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2} \times 4f$; Ex Ellipſeôn autem naturâ, ſemi-latus Rectum Ellipſeos cujus hic foret axis major & hæc foret excentricitas evaderet $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - r - \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2}{r^2} - 4\right)}}{2} f^2 = r + \frac{M^2}{A^2} \times r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - r - \sqrt{\frac{3y^2}{r} - r} - f^2 \times \frac{1}{r} + \frac{7M^2}{A^2 r^2} \times \frac{3y^2}{r} - r$, ſed eâ diſtantia perpendicularis eſt in curva Lunari $r - \frac{f^2}{r} + \frac{M^2}{A^2} + \sqrt{\frac{3z^2}{r} - r} - \frac{4M^2f^2}{A^2r^2} \times \frac{3z^2}{r} - r$ unde differentia inter diſtantiam perpendicularem in Ellipſi & eam diſtantiam in Orbita Lunari eſt $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2 - \frac{M^2f^2}{A^2r^3} \times 21y^2 - 12z^2 - 3r^2$, ſive omiſſo hoc ultimo termino propter $f^2$, ea differentia eſt $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2$. Si Apſides ſunt in Syzygiis eſt $y = r$, & $z = o$, unde hæc quantitas eſt maxima quæ eſſe poſſit, unde diſtantia perpendicularis in Ellipſi excedit diſtantiam in orbita Lunari quantitate $\frac{3M^2r}{A^2}$; Si Apſides ſunt in quadraturis fit $y = o$, & $z = r$, un-

unde hæc quantitas $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2$ evadit $-\frac{3M^2 r}{A^2}$, ideoque distantia perpendicularis in Ellipsi minor est distantia in Orbita Lunari, unde fit ut Orbita Lunaris contineat intra se Ellipsim; Si vero Apsides sint in Octantibus evanescit $y^2 - z^2$, hinc ipsa Orbita Lunaris cum Ellipsi coincidit.

Cor. Ex hoc Theoremate liquet quod omissio vis quæ agit perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris, exhibet orbitæ Lunaris mutationem plane oppositam illi quæ ex ejus consideratione deduceretur omissâ excentricitate orbitæ, nam sive Apsides sint in Syzygiis sive in quadraturis liquet ex Theoremate præcedenti orbitam Lunæ prolongari secundum lineam Syzygiarum, contrahi vero secundum lineam quadraturarum, cujus oppositum statuebatur Prop. XXVIII. hujusce, ex consideratione vis Solaris totius, sed semotâ Excentricitatis orbitæ Lunaris ratione; hinc ergo ut mediocrem quodammodo teneamus viam; jungemus incremento distantiæ Lunaris secundum Hypothesim Theor. VII. calculi 2di. invento, partem aliquam $\frac{m}{n}$ decrementi secundum methodum Newtonianam inventi; Unde sic medium quoddam inter ambas Hypotheses obtinebimus. Itaque quævis distantia $x$ evadet $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2} = x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2x^4 y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times x^4}{A^2 \times r^3} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$.

## PROBL. I.

Positis iis quæ in Corollario præcedentis Theorematis statuuntur, & supposito Orbitam Lunarem, quomodocumque mutatam per Solis actionem, Ellipsi proximam esse, Invenire Leges excentricitatis Orbitæ Lunaris.

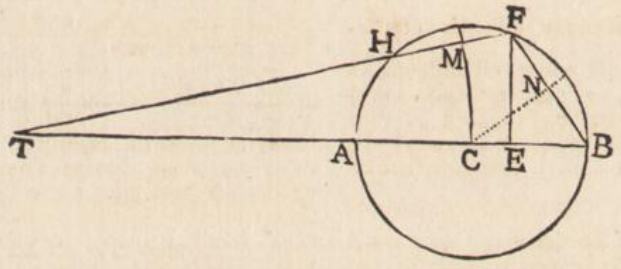
Primò cum distantia Apogea sit $r + f$, hæc distantia loco $x$ substituta in valore per Coroll. Theor. præcedentis reperto evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 y^2 + 12 r^3 f y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times r^4 + 4r^3}{A^2 r^3} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$; ut habeatur distantia mediocris loco $x$ scribatur $r$, sinus autem ejus distantiæ à quadratura proxima est quam proxime Cosinus distantiæ Apogæi à quadratura proxima, ideoque loco $y$ scribatur $z$, fit $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2z^2}{r} - \frac{M^2 r}{A^2} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2z^2}{r^2}$ quæ substracta ex distantiâ Apogæâ relinquit excentricitatem $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times y^2 - z^2 + 12 r f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$, quæ omissis terminis omittendis fit $f + \frac{3M^2 r^2 - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$; Hinc illius excentricitatis hæ sunt leges, 1°. Excentricitas est maxima cum Apsides sunt in Syzygiis, nam illic $y$ fit $r$, & $z = o$, hinc excentricitas evadit $f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

2°. Excentricitas est minima cum Apsides sunt in Quadraturis, illic enim est $y = o$ & $z = r$, unde Excentricitas evadit $f - \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

3°. Excentricitas est mediocris cum Apsides versantur in Octantibus, estque $= f$, quia $y^2 = z^2$ sicque evanescit $\frac{3M^2 r^2 - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.




4°. In aliis quibuſcunque locis hâc conſtructione obtinetur fere excentricitas, ſumatur $TC = f$, $CB = \frac{3M^2r - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2}$, hoc radio CB deſcribatur circulus in quo ſumatur BF æqualis duplæ diſtantiæ Apſidum à Syzygiâ, erit ſatis proximè CF excentricitas, nam centro T radio TC deſcribatur arcus CM, cum ſit perpendicularis in lineam THMF, & is arcus parum diſcedat à linea recta, punctum M erit medium lineæ HF per 3. 3 Elem. & MF erit æqualis Coſinui CE arcûs BF.

Radius CB ad compendium dicatur $g$, & quia ſinus dimidii arcus BF in circulo cujus radius erat $r$ dicebatur $z$ in hoc calculo, hinc in hoc circulo erit $BN = \frac{g}{r}z$, & juxta nota Trig. Theoremata, ut CB ($g$) ad BN $\left(\frac{g}{r}z\right)$ ſic FB $\left(\frac{2gz}{r}\right)$ ad $EB = \frac{2zz}{rr}g$, & $CE = g - \frac{2zz}{rr}g = g \times \frac{rr - 2zz}{rr}$, ſed $rr - zz = yy$, hinc $CE = g \times \frac{yy - zz}{rr}$, ideoque TF ſive $TE = f + \frac{3M^2r - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2} \times \frac{yy - zz}{r^2}$ ut prius inventum fuerat.

Schol. Hæc fictitia Ellipſis nonnihil diſcederet à loco Perigæi Lunæ per eaſdem hypotheſes determinato, ſi verò ex diſtantia Perigæa cum diſtantia Apogæa collatis excentricitas quæreretur, diverſa quidem ejus quantitas obineretur, ſed eædem forent Leges, nam diſtantia Apogæa foret $r + f + \sqrt{r + 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ & Perigæa $r - f + \sqrt{r - 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ hinc axis major eſſet $2r + 2r \times \frac{Y}{V} + \frac{2n}{m} \times p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ & ſemi-axis $r + r \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$; Excentricitas vero $f + 4f \times \frac{Y}{V}$ ſive $f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2r} \times \frac{3yy}{r} - r$. Quæ quidem eſt maxima cum Apſides ſunt in Syzygiis quia illic $y^2 = r^2$ ergo $f \times 1 + \frac{8M^2}{A^2}$. In quadraturis ſit minima quia evaneſcit $y$, ideoque ſit $f \times 1 - \frac{4M^2}{A^2}$, hinc mediocris excentricitas eſt $f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$, quod evenit in Octantibus tunc enim $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, ideoque $\frac{3y^2}{r} - r = \frac{1}{2}r$, ſit ergo $f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2r} \times \frac{1}{2}r = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$. In cæteris locis ſumatur $TC = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$ & $CB = \frac{6M^2}{A^2}f$, & ſi CB dicatur

$g$ ut in Probl. præcedente erit $CE = g \times \frac{rr - 2zz}{rr} = g \times \frac{rr - 2rr + 2yy}{rr} = g \times \frac{2yy - rr}{rr}$ ideoque $TE = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2} + \frac{6M^2}{A^2} \times \frac{2yy - rr}{rr} = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2 r} \times r + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - \frac{6M^2}{A^2 r} \times r = f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2 r} \times \frac{3y^2}{r} - r$ quæ est Excentricitas reperta, & eadem constructione obtinetur ac in hypothesi Problematis.

Si denique sicut Astronomis solemne est axim majorem constantem assumamus, & semi-axis major dicatur $r$, qui ex distantiâ Apogæa subducatur ut habeatur Excentricitas, eædem ejus excentricitatis Leges iterum obtinebuntur; erit quippe Excentricitas $f + r + 4f \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ sive $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3yy}{r} - r + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r} + \frac{n}{m} p \times \overline{1 - \frac{2y^2}{r^2}}$; Quæ fit in Syzygiis ubi $y^2 = r^2$, $f + \frac{2M^2 r}{A^2} + \frac{8M^2 f}{A^2} - \frac{2np}{m}$, in Quadraturis ubi $y$ evanescit $f - \frac{M^2 r}{A^2} - \frac{4M^2 f}{A^2 f} + \frac{n}{mp}$. Unde mediocris Excentricitas est $f + \frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{2M^2 f}{A^2} - \frac{np}{2m}$, quæ quidem etiam in Octantibus circiter occurrit quia majores termini $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{3yy}{r} - r + \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$ evadunt $\frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{M^2 f}{A^2}$ in Octantibus, nam cum $y^2$ illic sit $\frac{1}{2} r^2$ fiunt ii termini $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{3rr}{2r} - r$, $+ \frac{4M^2 f}{A^2 r} \times \frac{2rr}{2r} - r = \frac{M^2 r}{2A^2} + \frac{2M^2 f}{A^2}$.

## PROBL. II.

Variationis Excentricitatis quantitatem maximam determinare.

Hoc Problema nonnisi per determinationem veræ curvæ quam sequitur Luna potest determinari, quâ non inventâ ad Observationes recurrendum, ut feciſſe videtur Newtonus, mediocrem Excentricitatem esse partium 5505 quarum radius sit 100000 assumit, & maximum incrementum vel decrementum assumit 1172 $\frac{1}{4}$, tam ex Observationibus quàm quod ille numerus ad concinnandam constructionem pro Æquatione Apogæi commodus esset ut suo loco dicemus. 121.

Illust. Cassinus mediocrem illam Excentricitatem facit 5430 Incrementum vero & Decrementum 1086, nec malè hæc consentiunt cum quantitatibus Prob. 10. inventis, si loco quantitatis indeterminatæ $\frac{n}{m}$ scribatur $\frac{1}{2}$; Nam, id Incrementum aut Decrementum inventum fuerat $\frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$, sive accuratiùs sumptis quantitatibus quæ ad simplicitatem calculi omissæ fuerant cum Excentricitas inventa fuisset $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times \overline{y^2 - z^2} + 12r^3 f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 z^2}{r^4}$, hæc evadit (cum Apsides sunt in Syzygiis & $z = 0$, $y = r$) $f + \frac{M^2}{A^2} \times 3r + 12f + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - p$. & cum sunt in Quadraturis ubi $z = r$ & $y = 0$, $f - \frac{M^2}{A^2} \times 3r + \frac{M^2}{A^2} \times 4f + p$, unde mediocris Excentricitas est $f + \frac{M^2}{A^2} \times 10f$, & Incrementum vel Decrementum, $\frac{M^2}{A^2} \times \overline{3r + 6f - p}$.

Cum itaque sit $\frac{M^2}{A^2} = .0055$ ex priùs inventis, mediocris Excentricitas $1 + \overline{\frac{10M^2}{A^2} \times f}$ quam

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

(†) Hiſce motuum lunarium computationibus oſtendere volui, quod motus lunares per theoriam gravitatis à cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua medii motus lunæ oriatur à variâ dilatatione orbis lunæ per vim ſolis, juxta Corol 6. Prop. LXVI. Lib. I. (h) Hæc vis in perigæo ſolis major eſt, & orbem lunæ dilatat; in apogæo ejus minor eſt, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; & æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compenſatur, in (i) apogæo & perigæo ſolis nulla eſt, in (k) mediocris ſolis à terrâ diſtantia ad $11'.\ 50''$ circiter aſcendit, in aliis locis æquationi centri ſolis proportionalis eſt; & additur medio motui lunæ ubi terra pergit ab aphelio ſuo ad perihelium, & in oppoſitâ orbis parte ſubducitur. Aſſumendo radium orbis magni 1000

(quam Caſſinus invenit 5430 & Newtonus 5505) eſt 1.055 $f$, hinc eſt $f=5147$ ſecundum Caſſinum & 5218 ſecundùm Newtonum quod utrumque ductum in .0055, prius efficit 1819.85 alterum 1822.2 cumque $p$ ſit 719, id ex priore detractum relinquit 1100.85, ex poſteriore 1103.2; qui numeri incidunt inter 1172 & 1086 quos pro Excentricitatis variatione aſſignant Newtonus aut Hallejus & Caſſinus.

(†) * *Hiſce motuum* &c. Hæc eſt enim veritatis ejus Theoriæ fortiſſima probatio, ſi ea quæ Mathematice deducuntur ex eâ Theoriâ apprime conſentiant cum Phænomenis in caſu maxime compoſito.

(h) * *Hæc vis in Perigæo Solis major eſt & orbem Lunæ dilatat*; Vis Solis aliquando adjungitur vi Terræ ut Lunam verſus Terram attrahat, aliquando idque ſæpiùs & ubi fortiùs agit vi Terræ eſt oppoſita, & Lunam à Terrâ diſtrahit, itaque toto effectu vis Solis ſimul conſiderato, Luna per eam vim à Terrâ diſtrahitur & eò magis quò ea vis Solis major eſt; ideoque Luna magis à Terrâ diſtrahitur dum Terra verſatur in ſuo Perihelio quàm ubi verſatur in Aphelio: hinc primo caſu orbita Lunæ magis eſt dilatata quàm hoc altero.

(i) * *In Apogæo & Perigæo nulla eſt* id omninò liquet ex Coroll. 2. Probl. V. prioris calculi, nam ex iis quæ in eo Corollario ſtatuuntur liquet quod ut habeatur Æquatio quovis in loco, hæc proportio eſt inſtituenda, ut areæ Ellipſeos quam Terrâ deſcribit dimidium ad aream deſcriptam à Terrâ ab Aphelio (vel Perihelio) uſque ad eum locum propoſitum, ita ſemeſtris tardatio ad tardationem mediocri motui adſcriptam, ſed in hoc caſu ea area à Terra deſcripta eſt ipſa ſemi-Ellipſis, ergo etiam tardatio medio motui adſcripta eſt ipſa ſemeſtris tardatio; Tum verò ſumitur ex Probl. IV. tardatio loco dato conveniens quæ ex tardatione mediocri tollitur, & differentia eſt æquatio quæſita; ſed rurſus ea tardatio Aphelio aut Perihelio conveniens eſt ipſa ſemeſtris tardatio, ergo, ex tardatione mediocri motui eo in loco adſcripta, detracta nullum eſt reſiduum, cum planè ſint æquales, ergo æquatio in Apogæo ac Perigæo nulla eſt.

(k) * *In mediocri Solis diſtantia &c.* Videntur hæc verba ſtatuere quid conſtet ex Obſervationibus, nempe hanc æquationem eſſe $11'.\ 50''$. ubi maxima eſt, & eſſe æquationi centri proportionalem; obſerva-

1000 & eccentricitatem terræ $16\frac{7}{8}$, hæc (l) æquatio, ubi maxima est, per theoriam gravitatis prodiit $11^{l}.\ 49^{\prime}$. Sed eccentricitas terræ paulo major esse videtur, & auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas, $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit $11^{l}.\ 51^{\prime\prime}$.

(m) Inveni etiam quod in perihelio terræ, propter majorem vim solis, apogæum & nodi lunæ velocius moventur quam in aphelio ejus, idque in triplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. (n) Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum

servavimus autem Ill. Cassinum hanc æquationem ubi maxima est $9^{l}.\ 44^{\prime\prime}$. efficere.

(l) * *Hæc æquatio ubi maxima est prodiit* $11^{l}.\ 49^{\prime\prime}$. Sumptâ Orbitâ Lunari ut circulari, per Theoriam gravitatis prodiit $11^{l}.\ 47^{\prime\prime}$. imo minor, sive Newtonus aliâ viâ eum calculum instituerit quàm nos, sive alia Elementa assumpserit, sive ex excentricitate Orbitæ Lunaris consideratione hanc quantitatem auxerit, cætera verò ad amussim quadrant.

Eam Æquationem excentricitati Terræ esse proportionatam ex Cor. I. Prob. V. pag. 487., prodit enim ejus valor per quantitates fixas ductas in excentricitatem quæ in calculo dicebatur $e$; & quamvis quantitas $b$ quæ est $\sqrt{a^2 - e^2}$ in eo valore occurrat, idcircò non est censendum æquationis valorem multùm pendere ex illa dignitate $e^2$ siquidem in illo termino ea dignitas fere evanescit respectu $a^2$.

Liquet etiam ex Cor. 2. ejusd. Probl. cæteras æquationes esse proportionatas æquationi centri Solis: addendas esse motui Lunæ dùm pergit ab Aphelio ad Perihelium, illic enim tardatio vera minor est quam tardatio mediocris, ergo provectior est Luna quam secundùm tardationem mediocrem, addi ergo debet ejus viæ iste tardationis defectus; ex Perihelio pergendo res oppositâ ratione procedet.

(m) * *Inveni etiam &c.* Id utique statuit Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I., illic ostendit Vires Solis esse ut Cubos distantiarum reciprocè, unde cùm sint causæ errorum Apogæi & Nodorum, illi errores sive motus qui suis causis sunt proportionales, debent esse ut cubi distantiarum reciproce; Hinc dicatur $a$ mediocris distantia Terræ à Sole, distantia quævis alia dicatur $a \pm x$, motus medius diurnus Apogæi in distantia $a$ sit $g$. motus medius nodi in ea distantia $a$ sit $n$. in distantia $x$, motus Apogæi erit $\frac{a^3}{a \pm x^3}\, g$ & motus nodi erit $\frac{a^3}{a \pm x^3}\, n$ aut formando seriem ex his quotientibus & omissis terminis in quibus altior dignitas quantitatis $x$ occurrit, erit motus Apogæi in quavis distantia, $g \mp \frac{3x}{a} g$, & motus nodi $n \mp \frac{3x}{a} n$. 121.

(n) * *Et inde oriuntur Æquationes annuæ, Æquationi centri Solis proportionales.* Cùm motus Apogæi Lunæ & nodi uniformis non sit cùm Terra ad varias à Sole distantias transfertur, sed addatur aut detrahatur ex eorum motu medio quantitas variabilis $\frac{3x}{a} g$, & $\frac{3x}{a} n$, si quæratur progressus Apogæi Lunæ aut nodi cùm Terra ab Aphelio Solis certâ quantitate dierum discesserit, is progressus ex motu medio Apogæi Lunæ aut nodi recte non computabitur, quippe singulis diebus præter motum medium quantitate $\frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ processerunt aut recesserunt, summa ergo om-

tuum æquationi centri ſolis proportionales. Motus (o) autem ſolis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ terræ à ſole inversè & (p) maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, eſt $1^{gr}.\ 56'.\ 20''$ prædictæ ſolis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. (q) Quod ſi motus ſolis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam $2^{gr}.\ 54'$

121. omnium harum quantitatum erit ſumenda, quæ erunt correctiones ſeu æquationes quibus ex loco medio Apogæi & Nodi ad verum ejus locum deveniemus, illæ verò æquationes æquationibus centri Solis erunt proportionales, nam cùm motus Solis ſit in duplicatâ ratione diſtantiæ inverse (ut exponetur in notâ o proximè ſequenti) ſit $m$ motus medius diurnus Solis in mediocri diſtantia $a$, in diſtantiâ quavis $a \pm x$ is motus erit $\frac{a}{a \pm x}^{2} m$, ſeu in ſeriem reſolvendo hanc Expreſſionem erit $m \mp \frac{2x}{a} m$, hinc differentia inter motum medium & verum erit $\pm \frac{2x}{a} m$, & ex ſummâ earum differentiarum conflabuntur æquationes centri Solis, cùm ergo æquationes Apogæi & Lunæ ex ſummâ quantitatum $\pm \frac{2x}{a} g, \frac{2x}{a} n$ conſtent, erunt iſtæ æquationes ubivis in punctis correſpondentibus ſeu in æqualibus ab Aphelio Terræ diſtantiis in ratione conſtanti $3g$. & $3n$ ad $2m$: Ideoque erunt ubique proportionales æquationibus centri Solis.

(o) * *Motus Solis eſt in duplicatâ ratione diſtantiæ inversè* ſcilicet motus Solis angularis è Terrâ ſpectatus; nam cùm Sol deſcribat ſemper areas tempori proportionales, arcus quos reverâ deſcribit ſunt ſemper inversè ut diſtantiæ, ſed præterea magnitudines apparentes eorum arcuum e Terrâ ſpectatorum ſunt etiam inverse ut eorum à Terrâ diſtantia, ergo arcus quos Sol ſingulis temporculis æqualibus deſcribere videtur è Terrâ, ſunt in duplicatâ ratione diſtantiarum inversè.

(p) *Et maxima Centri Æquatio eſt* $1^{o}.\ 56'.\ 20''$. Illam $1^{o}.\ 55'.\ 50''$. facit Ill. Caſſinus.

(q) * *Quod ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè*; Dicatur $M$ motus Solis in diſtantiâ mediocri, quæ dicatur $a$, & diſtantia quævis alia ſit $a \pm x$; ſi motus Solis eſſet in triplicatâ ratione diſtantiarum inverse, in diſtantiâ $a \pm x$ foret $\frac{a^3}{a \pm x^3} M$ ſive $\frac{a^3 M}{a^3 \pm 3a^2x + 3ax^2 \pm x^3}$ aut formando ſeriem, is motus in diſtantia $a \pm x$ erit $M \pm \frac{3x}{a} M$ omiſſis reliquis terminis ob exiguitatem fractionis $\frac{x}{a}$; ideoque differentia motus in diſtantiâ verâ & motus in diſtantiâ mediocri foret $\mp \frac{3x}{a} m$: In verâ autem hypotheſi quòd Solis motus creſcat in ratione ſubduplicatâ inverſâ diſtantiarum, eodem ratiocinio invenitur quod in quovis loco motus Solis erit $\frac{a^2 M}{a^2 \mp 2ax + x^2}$ & diviſione facta erit is motus $M \mp \frac{2x}{a} M$, & differentia motus veri & motus medii erit $\mp \frac{2x}{a} M$, eritque ergo hæc differentia ad differentiam in priore Hypotheſi inventam ut 2 ad 3 in omnibus locis correſpondentibus; ſed æquationes conflantur ex ſummâ differentiarum motus veri & medii ſumptarum in omnibus locis ab Aphelio uſque ad locum eum ubi æquatio applicatur; cùm ergo in utráque hypotheſi ſingulæ differentiæ motus veri & medii ſint in omnibus punctis correſpondentibus

in

$54' 30''$. (r) Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi & nodorum lunæ generant, ſunt ad $2^{gr}$, $54'. 30''$. ut motus medius diurnus apogæi, & motus medius diurnus nodorum lunæ ſunt ad motum medium diurnum ſolis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi $19'. 43'$, & æquatio maxima medii motus nodorum $9. 24''$. (s) Additur verò æquatio prior & ſubducitur poſterior, ubi terra pergit à perihelio ſuo ad aphelium: & contrarium fit in oppoſitâ orbis parte.

Per theoriam gravitatis (t) conſtitit etiam quod actio ſolis in lunam

in ratione conſtanti 2 ad 3 erunt etiam ſummæ earum differentiarum in locis correſpondentibus, ipſæ nempe æquationes in eâdem ratione, ergo maxima centri æquatio in hypotheſi verâ motum Solis decreſcere in duplicatâ ratione diſtantiarum eſt ad æquationem maximam in hypotheſi fictitiâ motum Solis decreſcere in triplicatâ ratione diſtantiarum ut 2 ad 3 cum ergo æquatio maxima ſit per Obſervationes $1^{gr}. 56'. 20''$. hæc altera erit $\frac{3}{2} \times 1^{gr}. 56'. 20''$. ſive $2^{gr}. 54'. 30''$. Q. E. D.

(r) * *Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & nodorum generant ſunt ad* $2^{gr}. 54'. 30''$. *ut modus medius Apogæi & Nodi ad motum medium Solis.* Nam ſtatutum eſt motus horum eſſe in triplicatâ ratione diſtantiarum inverſè, ſit $g$ motus medius Apogæi in mediocri nempe diſtantiâ, $n$ motus medius nodorum, & $m$ motus medius Solis, decreſcantque in triplicatâ ratione inverſâ diſtantiarum, deprehenditur eodem modo ac in notâ præcedente quod in quolibet loco differentiæ inter motum verum & motum mediocrem erunt $\mp \frac{3x}{a} g$, $\mp \frac{3x}{a} n$, $\mp \frac{3x}{a} m$, Æquationes maximæ ſunt ſumma earum quantitatum ſumptarum ab Apogæo Solis uſque ad mediocrem ejus à Terrâ diſtantiam, itaque illæ Æquationes conſtituuntur per ſeries, omnium $\frac{3x}{a} g$, omnium $\frac{3x}{a} n$, & omnium $\frac{3x}{a} m$, qualeſcumque ergo ſint illæ quantitates variabiles $x$, cùm eædem ſint in tribus hiſce ſeriebus ſummæ earum ſerierum ſive Æquationes maximæ, erunt inter ſe ut illæ quantitates $g$, $n$ & $m$, per quas omnes partes ſingularum illarum ſerierum ducuntur, illæ verò quantitates ſunt motus medii Apogæi, nodi & Solis, ergo datâ unâ ex his Æquationibus, v. gr. datâ Æquatione maximâ Solis & motu medio Apogæi, nodi & Solis, habentur cæteræ Æquationes maximæ ſtatuendo illas eſſe ad eam Æquationem datam, ut ii motus medii dati. 121.

Liquet verò ex ipſâ hac Demonſtratione, verùm quidem Solis motum medium aſſumi debere, non autem veram ipſius Æquationem ſed eam quæ prodit fingendo Solis motum in triplicatâ ratione diſtantiarum decreſcere.

(s) * *Additur verò Æquatio* Apogæi Lunæ *& ſubducitur Æquatio* nodi *ubi Terra pergit à Perihelio ſuo ad Aphelium*; motus Apogæi Lunæ eſt progreſſivus, motus verò nodi eſt retrogradus; Terrâ autem à Perihelio procedente uterque motus major fit motu medio, inde ergo plus procedit Apogæum Lunæ, quàm per motum medium, plus recedit nodus, prior ergo Æquatio addenda, poſterior detrahenda.

(t) * *Per theoriam gravitatis conſtitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo ma-*

DE MUNDI SYSTEMATE.

lunam paulo major ſit, ubi tranſverſa diameter orbis lunaris tranſit per ſolem, quam ubi eadem ad rectos eſt angulos cum linea terram & ſolem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major eſt in priore caſu quam in poſteriore. Et (u) hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris, pendens à ſitu apogæi lunæ ad ſolem, quæ quidem maxima eſt cum apogæum lunæ verſatur in octante cum ſole, & nulla cum illud ad quadraturas vel ſyzygias pervenit: & motui medio additur in tranſitu apogæi lunæ à ſolis quadraturâ ad ſyzygiam, & ſubducitur in tranſitu apogæi à ſyzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam ſemeſtrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima eſt, aſcendit ad 3′. 45″ circiter, (x) quantum ex phænomenis colligere

121. *jor ſit ubi tranſverſa Diameter orbis Lunaris tranſit per Solem* &c.

Facile deducitur ex Cor. Theor. IV. calculi primi (pag. 479) quod (exiſtente $x$ diſtantiâ Lunæ à Terrâ, $r$ ejus diſtantiâ mediocri, & $y$ ſinu ejus diſtantiæ à quadraturâ, exiſtente etiam F vis Solis in terram in mediocri ejus diſtantiâ $a$) actio Solis Lunam trahentis ſecundum directionem radii orbitæ Lunaris eſt $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$.

Unde ea vis, Lunâ in quadraturis exiſtente, fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times -r$, eſt ergone gativa & Lunam ad Terram attrahit cum verò Luna eſt in ſyzygiis, ea actio Solis fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times 2r$, eſt itaque poſitiva & Lunam à Terra diſtrahit; In locis autem ſimilibus hæ Solis actiones ſunt ut diſtantiæ $x$ Lunæ à Terrâ. Hinc ſi Apſides ſint in ſyzygiis fit verò Luna in quadraturis, ubi per actionem Solis ad terram trahitur ambæ diſtantiæ $x$ Lunæ in utrâque quadraturâ poſitæ ſunt ſimul æquales lateri recto orbitæ Lunaris; cum verò Luna eſt in ſyzygiis ubi per actionem Solis à Terra diſtrahitur, ambæ diſtantiæ $x$ Lunæ in conjunctione & oppoſitione poſitæ ſunt ſimul æquales axi majori, qui ſemper ſuperat latus rectum.

Si verò Apſides ſunt in quadraturis, & Luna etiam in quadraturis ambæ diſtantiæ $x$ Lunæ in utrâque quadraturâ poſitæ ſimul ſumptæ ſunt æquales axi majori, & cum Lunâ eſt in ſyzygiis, ambæ diſtantiæ $x$ Lunæ in conjunctione & oppoſitione poſitæ ſunt ſimul æquales lateri recto orbitæ Lunaris.

Ergo cum Apſides ſunt in Syzygiis actio Solis quæ Lunam ad Terram attrahit eſt minor, & è contra actio quæ Lunam à Terra diſtrahit eſt major quam cum Apſides ſunt in quadraturis, ideoque orbis Lunaris paulo major fieri debet in priore caſu quam in poſteriore.

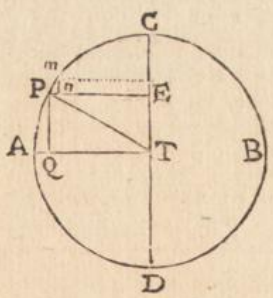
De punctis autem inter quadraturas & Syzygias intermediis ab eo quod in his punctis extremis evenit judicari poteſt, ſed potiſſimum ex calculo quo Æquatio ex hâc cauſâ natâ determinatur.

(u) * *Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris* &c. Hujus æquationis calculum ejuſque Leges explicatas habes Probl. VI. calculi ſecundi (pag. 500.) ejuſque Corollariis.

(x) * *Quantùm ex Phænomenis colligere potui* &c. Ex Coroll. 5°. Probl. VI. (pag. 501. in quo quædam menda irrepſerunt à B. L. prius corrigenda) Æquatio hæc 3′. 56″ eſt reperta, quædam autem cau-

ligere potui. Hæc eſt ejus quantitas in mediocri ſolis diſtantiâ à terrâ. (y) Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione diſtantiæ ſolis inversè; ideoque in maximâ ſolis diſtantiâ eſt $3'. 34''$,

cauſæ ſunt cur hæc quantitas pro verâ quantitate adhiberi nequeat, ſed hæc æquatio ex phænomenis ſit colligenda; primò, quantitas $f$ ſive excentricitas Orbitæ Lunaris ſatis certo non eſt cognita, ut conſtat ex iis quæ de excentricitate dicta ſunt, hic autem mediocrem excentricitatem aſſumpſimus 5505 partium quarum radius orbitæ ſit 100000 cum Newtono quam Caſſinus facit tantum 5430 partium, & forte minor aſſumi deberet ſi attendatur ad Excentricitatem Orbitæ Lunaris qualis ea foret citra Solis actionem ex quibus conſiderationibus, liquet æquationem inventam minorem factum iri quam $3'. 56''$, ſicque magis acceſſuram ad æquationem $3'. 45''$ quæ ex Phænomenis colligitur: ſecundò cum varias Hypotheſes aſſumpſerimus vero quidem proximas non tamen veras abſolutè ut liquet ex Cor. I. Probl. I. (pag. 496) ex iis erroribus ipſæ quantitates abſolutæ mutantur ſed manent earum proportiones ex quibus Leges æquationum pendent ita ut datâ aliquâ ex æquationibus per Phænomena, reliquæ ſatis tuto exinde deduci queant.




(y) * *Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione diſtantiæ inversè.* Probl. VI. (pag. 500. col. 2.) hæc æquatio inventa eſt $\frac{15 A \times F q^9 f^2}{109.73 \times S. V. a r^8} \times - 163.595$ P Q T, in quâ expreſſione $a$ repræſentat mediocrem Solis à Terra diſtantiam, in aliâ itaque à Sole diſtantiâ loco $a$ ponatur X, & loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$ quia vis Solis F eſt inversè ut quadrata diſtantiarum, hac ergo ſubſtitutione factâ æquatio fit $\frac{15 A a^2 F q^9 f^2}{109.73. S. V X^2. X r^8} \times - 163.595$ P Q T tum loco $\frac{F}{V}$ ſubſtituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ (ut liquet ex Cor. Probl. I. calculi primi, pag. 484) æquatio evadit $\frac{15 M^2 a^3 q^9 f^2}{109.73 S. A. X^3. r^9} \times - 163.595$ P Q T, & quia in octantibus eſt P Q T $= \frac{1}{4} r^2$ æquatio eſt $- \frac{15 \times 163.595 \times M^2 a^3 q^9 f^2}{4 \times 109.73 \times S. A X^3 r^7}$, in quâ cum nulla ſit variabilis quantitas præter $X^3$ in denominatore occurrente, liquet Æquationem cum Apogæum eſt in Octantibus, hoc eſt æquationem maximam eſſe ut $X^3$ inverſe, hoc eſt *augeri ac diminui in triplicatâ ratione diſtantiæ Solis X inversè; ideoque* &c.

121.

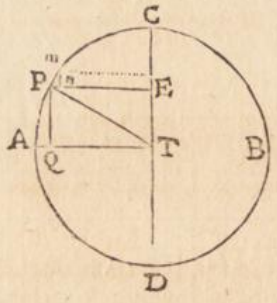
Scilicet poſitâ Excentricitate Orbitæ telluris $.016\frac{11}{12}$, diſtantia maxima eſt $1 + .016\frac{11}{12}$, diſtantia mediocris 1, & diſtantia minima $1 - .016\frac{11}{12}$, itaque ſumendo rationem triplicatam mediocris & maximæ diſtantiæ fiat ut $1 + 3 \times .016\frac{11}{12} + 3 \times .000285\frac{1}{3}$ &c. (1.0516) ad 1, ita $3'45''$ ad quartum qui erit $3'.34''$. & ſumendo rationem triplicatam inverſam mediocris & minimæ diſtantiæ fiat ut $1 - 3 \times .016\frac{11}{12}$

$34''$, & in minima $3'. 56''$ quamproximè: ubi vero apogæum lunæ ſitum eſt extra octantes, evadit minor; (z) eſtque ad æquationem maximam, ut ſinus duplæ diſtantiæ apogæi lunæ à proximâ ſyzygiâ vel quadraturâ ad radium.

(a) Per eandem gravitatis theoriam actio ſolis in lunam paulo major eſt ubi linea recta per nodos lunæ ducta tranſit per ſolem, quam ubi linea illa ad rectos eſt angulos cum recta ſolem ac terram jungente. (b) Et inde oritur alia medii motus lu-

121. $+3\times.000285\frac{1}{2}$ &c. (.950197) ad 1 ita $3'. 45''$. ad quartum qui erit $3'. 56''$.

(z) * *Eſtque ad æquationem maximam.* Siquidem in quâcumque diſtantiâ Terræ à Sole, hæc æquatio eſt $\frac{15\,M^2\,a^3\,r^9\,f^2}{109.73\,S.\,A.\,X^3\,x^9}\times-163.595\,PQT$, liquet quod ſupponendo diſtantiam X non variari, hæc æquatio erit ubique ut PQT; in octantibus autem PQT eſt $\frac{1}{4}r^2$, hinc in quovis loco hæc æquatio eſt ad eam quæ in

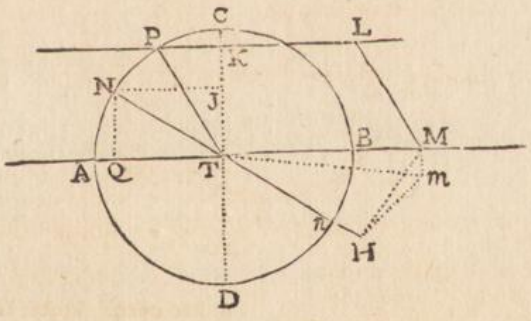



Octantibus obtineretur, manente eâdem diſtantiâ Solis à Terrâ ut PQT ad $\frac{1}{4}r^2$, ſive quia PQT eſt $\frac{1}{2}zy$ ut $\frac{1}{2}zy$ ad $\frac{1}{4}r^2$, & utrumque ducendo per $\frac{4}{r}$ ut $\frac{2zy}{r}$ ad $r$, ſed $\frac{2zy}{r}$ eſt ſinus duplæ diſtantiæ puncti P, hoc eſt Apogæi à Syzygiâ, (aut à quadraturâ perinde enim eſt ut ex Trigonometriæ Principiis liquet) hinc æquatio in quovis ſitu Apogæi extra octantes eſt ad Æquationem maximam quæ obtineretur in Octantibus manente eâdem diſtantia Telluris à Sole, ut ſinus duplæ diſtantiæ Apogæi Lunæ à proximâ Syzygiâ, ad radium.

(a) * *Per eamdem* &c. Cum linea recta per nodos ducta tranſit per Solem, tunc Sol verſatur in plano ipſius orbitæ Lunaris producto, ejus itaque actio non conſumitur in dimovendâ Lunâ ab eo plano, ſed tota impenditur ad eam vel à terrâ diſtrahendam, vel ad terram attrahendam, vel ad eam accelerandam aut retardandam in proprio ſuo Plano, cum autem linea nodorum eſt ad angulos rectos cum rectâ ſolem ac terram jungente, tunc Sol maxime diſcedit à plano orbitæ Lunaris, hinc pars ejus actionis conſumitur in admovendo Plano orbitæ Lunaris ad Eclipticam, & per reſiduum duntaxat ejus actionis Lunæ errores *in longum* producit; hinc priori caſu actio Solis in Lunam paulò major eſt quam in poſteriore, partem autem actionis Solis reſiduam ſublatâ eâ ejus parte quæ in plano orbitæ Lunaris dimovendo conſumitur ad calculum vocamus Probl. 1°. Calculi tertii (pag. 502.).

(b) * *Et inde oritur alia motus medii æquatio.* Hujus æquationis quantitatem & Leges Probl. III. Calculi 3i. (pag. 503.) expoſuimus, illamque $\frac{3\,A.\,F.\,l^2}{8\,S.\,V.\,ar}\times\frac{2nm}{r}$ in-

lunaris æquatio, quam ſemeſtrem ſecundam vocabo, quæque maxima eſt ubi nodi in ſolis octantibus verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in ſyzygiis vel quadraturis, & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi alterutrius à proximâ ſyzygiâ aut quadraturâ: (c) additur vero medio motui lunæ, ſi ſol diſtat à nodo ſibi proximo in antecedentia, ſubducitur ſi in conſequentia, & in octantibus, ubi maxima eſt, aſcen-




invenimus, ſumendo *l* pro ſinu inclinationis orbitæ, & *n* & *m* pro ſinu & Coſinu diſtantiæ nodorum à Syzygiâ. Hinc cum $\frac{2nm}{r}$ ſit ſinus duplæ diſtantiæ nodi à Syzygiâ, cæteri verò termini ſint conſtantes hæc æquatio eſt maxima *ubi nodi in Solis octantibus verſantur*, & evaneſcit *ubi ſunt in Syzygiis vel quadraturis & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi à Syzygiâ* &c.

(c) * *Additur verò medio motui Lunæ, ſi ſol diſtat à nodo ſibi proximo in antecedentia ſubducitur ſi in conſequentia.* Ex actione Solis in Lunam, Lunâ retardatur, ex diminutione verò ejus actionis propter obliquitatem plani orbitæ Lunaris, diminuitur hæc Lunæ retardatio, hoc eſt acceleratio quædam oritur reſpectu motus qui, omiſſâ hac conſideratione, fuerat determinatus; mediocris acceleratio hinc nata, & quæ includitur in medio motu Solis eſt ubique $\frac{3\,A.F.l^2}{2\,S.Var^2} \times \frac{ru}{2}$, vera autem acceleratio eſt $\frac{3\,A.F.l^2}{2\,S.Var^2} \times ANQ$. Unde æquatio eſt $\frac{3\,A.F.l^2}{2.\,S.Var^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ per Probl. III. calculi 3. (pag. 503. & ſeq.) jam itaque ſi $\frac{ru}{2}$ ſit major quam ANQ quod evenit in toto quadrante ANC, acceleratio mediocris eſt major vera, & Luna magis proceſſiſſe cenſetur quam revera proceſſit, hinc iſta differentia $\frac{3\,A.F.l^2}{2\,S.Var^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ debet detrahi ex ejus loco invento ut verus locus habeatur, in hoc autem caſu Sol qui puncto A reſpondere cenſetur eſt in conſequentia reſpectu nodi N. 121.

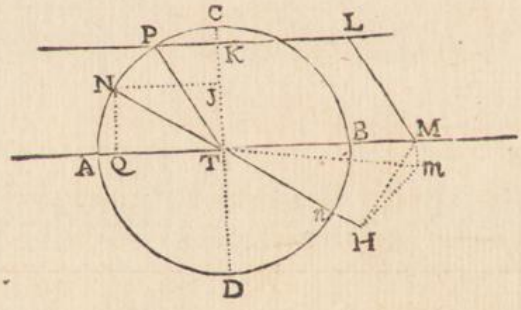
Dum verò N verſatur inter C & B, &

DE MUNDI SYSTEMATE.

cendit ad $47^{\prime\prime}$ in mediocri ſolis diſtantiâ à terrâ, (d) uti ex theoriâ gravitatis colligo. In (e) aliis ſolis diſtantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum eſt reciprocè ut cubus diſtantiæ ſolis à terrâ, ideoque in perigæo ſolis ad $49^{\prime\prime}$ in apogæo ejus ad $45^{\prime\prime}$ circiter aſcendit.

121.

Per




*n* inter A & D, tunc $\frac{ru}{2}$ eſt minor quam ANQ, ſic itaque acceleratio mediocris eſt minor quam acceleratio vera, ideoque differentia $\frac{3\,A.\,F\,l^2}{2\,S.V.a\,r^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ addi debet loco medio Lunæ, tunc autem Sol in A eſt in antecedentia reſpectu nodi proximi *n*.

3°. Dum N verſatur inter B & D & *n* in A & C $\frac{ru}{2}$ excedit ANQ, ſive motus mediocris excedit verum ſubduci itaque debet differentia, eſt vero in eo caſu Sol in A in conſequentia reſpectu nodi *n*.

Denique Dum N eſt inter D & A, $\frac{ru}{2}$ minor eſt quam ANQ addi itaque debet æquatio loco medio Lunæ & Sol eſt in Antecedentia reſpectu nodi N.

Ergo æquatio ſubducitur ex medio motu Lunæ cum Sol eſt in conſequentia reſpectu nodi proximi, additur vero ei motui cum Sol eſt in antecedentia.

(d) * *Uti ex Theoriâ colligo*, calculus noſter coroll. Probl. III. contentus, Æquationem maximam $45^{\prime\prime}.6$ exhibet, qui numerus eſt adeo proximus numero $47^{\prime\prime}$. quem ex Theoriâ gravitatis collegit Newtonus, ut credere facile ſit ipſum hunc numerum ex Theoriâ gravitatis collegiſſe eâ proximè ratione quæ in calculo (pag. 501.) adhibetur, differentiola enim iſta oriri poteſt ex eo quod, vel angulum inclinationis orbitæ, vel quantitatem *M* menſis Periodici citra actionem Solis conſiderati, paulo majorem fecerit quam nos.

(e) * *In aliis Solis diſtantiis.* Eadem plane eſt demonſtratio ac in notâ (y) præcedente; cum æquatio ſit $\frac{3\,A\,F\,l^2}{8\,S\,V\,a\,r} \times \frac{2\,n\,m}{r}$ in diverſâ Solis à Terrâ diſtantiâ X, loco *a* ſcribatur X, loco F, $\frac{a^2 F}{X^2}$, loco $\frac{F}{V}$, $\frac{a\,M^2}{r\,A^2}$, æquatio evadit $\frac{3\,M^2\,a^3\,l^2}{8\,A.\,S.\,X^3\,r^2} \times \frac{2\,n\,m}{r}$ & in Octantibus quia $\frac{2\,n\,m}{r} = r$, Æquatio eſt $\frac{3\,M^2\,a^3\,l^2}{8\,A.\,S\,X^3\,r}$, ideoque æquationes in Octan-

Per (f) eandem gravitatis theoriam apogæum lunæ progreditur quam maximè ubi vel cum ſole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum ſole quadraturam facit. (g) Et eccentricitas ſit maxima in priore caſu & minima in poſteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ ſunt, & æquationem principalem apogæi generant, quam ſemeſtrem vocabo. (h) Et æquatio maxima ſemeſtris eſt $12^{gr}.\ 18'$ circiter, quantùm ex obſervationibus colligere potui. *Horroxius* noſter lunam in ellipſi circum terram, in ejus umbilico inferiore conſtitutam, revolvi primus ſtatuit. *Halleius* centrum ellipſeos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum terram. Et (i) ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progreſſu & regreſſu apogæi & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur diſtantia mediocris lunæ à terrâ in partes 100000, & refe-

Octantibus in diverſâ Solis à Terrâ diſtantiâ, ſunt inter ſe inverſe ut X3, ſi fiat itaque ut Cubus maximæ diſtantiæ Terræ à Sole qui eſt 1.0516, ad Cubum 1 mediocris diſtantiæ, ita $47''$ Æquatio pro mediocri diſtantia inventa erit ad $45''$ circiter eaque erit Æquatio in maximâ diſtantiâ Solis à Terrâ, & ut .950107 Cubus minimæ diſtantiæ, ad 1 ita $47''$ ad $49''$ circiter quæ erit Æquatio maxima cum Sol erit in Perigæo. Eâdem etiam ratione ac in notâ (z) oſtendetur quomodo in quâvis Solis à Terrâ diſtantiâ, & in quavis poſitione Nodi reſpectu Solis Æquatio obtineri debeat.

(f) * *Per eamdem gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maximè* &c. Per Methodum ex ipſis Newtoni Principiis derivatam invenimus (pag. 505. & ſeq.) motum Apſidis eſſe ut $3yy-rr$, ſumendo $y$ pro ſinu diſtantiæ Apſidis à quadraturâ, is ergo motus, juxta hunc calculum, evaneſcit cum $y\sqrt{3}=r$, cum nempe $y$ eſt ſinus arcus $35^{gr}.15'$, poſitivus verò, eſt in ſyzygiis illic enim fit $3yy-rr=2rr$ negativus in Quadraturis illic enim eſt $3yy-rr=-rr$.

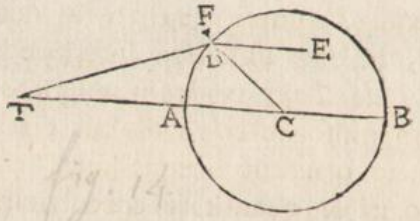
(g) * *Et excentricitas ſit maxima in priore caſu* cum nempe Apſides ſunt in ſyzygiis & minima in poſteriore, cum nempe *Apſides ſunt in Quadraturis.* Id utique ſtatuitur toto calculo de Excentricitate orbitæ Lunaris ſuperius pag. 512. & ſeq. tradito. 121.

(h) * *Et Æquatio maxima ſemeſtris*, &c. Hanc ex obſervationibus determinandam liquet cum non ſatis feliciter obtineatur abſoluta quantitas motus Apogæi per calculos ſecundum Newtoniana Principia inſtitutos; Methodus autem à nobis indicata eſt admodum incompleta & rudis, & in ea multa quæ conſiderari debuiſſent ſunt omiſſa, hinc cum in cæteris motibus Lunæ & Æquationibus ad votum ſuccedat Theoria Newtoniana, in hoc caſu aliquid adhuc deſiderari, fatendum eſt.

(i) * *Et ex motu in Epicyclo.* Ingeniosè & feliciter conjunctas eſſe unicâ conſtructione Geometricâ Excentricitatis variationes, & motus Apogæi æquationes, ex iis quæ de Excentricitate dicta ſunt pag. 516. intelligi poteſt; Illic enim oſtenditur quod ſi TC ſit excentricitas media $f$, CB maxima excentricitatis variatio ab excentricitate mediocri, BF arcus duplus diſtantiæ apſidis à ſyzygiâ, tunc linea TF eſt excentricitas, oſtenditur verò, Probl. II. pag. 517. variationem maxi-

DE MUNDI SYSTEMATE.

referat $T$ terram & $TC$ eccentricitatem mediocrem lunæ partium 5505. Producatur $TC$ ad $B$, ut ſit $CB$ ſinus æquationis maximæ ſemeſtris 12gr. 18′ ad radium $TC$, & circulus $BDA$ centro $C$, intervallo $CB$ deſcriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur & ſecundum ordinem literarum

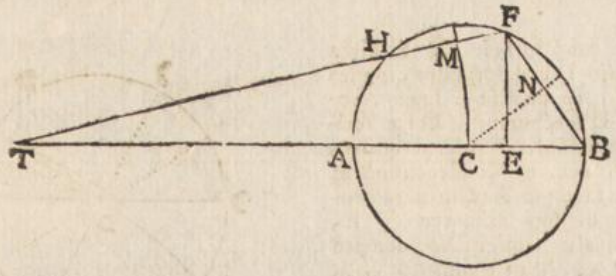



$BDA$ revolvitur. Capiatur angulus $BCD$ æqualis duplo argumento annuo, ſeu duplæ diſtantiæ veri loci ſolis ab apogæo lunæ ſemel æquato, & erit $CTD$ æquatio ſemeſtris apogæi lunæ & $TD$ eccentricitas orbis ejus in apogæum ſecundo æquatum tendens. Habitis autem lunæ motu medio & apogæo & eccentri-

221. mam excentricitatis quæ eſt A B tam ex obſervationibus quam conſentiente calculo ſumi poſſe 1172 partium quarum Radius orbitæ Lunaris eſt 100000 & excentricitas TC 5505, ſimul autem cum conſtet ex obſervationibus æquationem ſemeſtrem Apogæi 12gr. 18′ eſſe, ejus Anguli ſinus eſt partium 1172 Radio exiſtente partium 5505, ut liquet ſi fiat ut Radius 100000 ad ſinum Anguli 12°. 18′ qui eſt 21303 ita 5505 ad quartum qui eſt 1172 $\frac{3}{4}$ hinc illum numerum pro maximâ variatione excentricitatis ſelegit Halleius, quia non procul eſt ab iis quos & obſervationes & calculus indicant, ſimulq; e eſt ſinus anguli maximi quo diſcedunt Apſides à loco medio, Ergo quando B F eſt quadrans, ideoque Apſides octante à ſyzygiâ diſtant, ſinus anguli F T B eſt ipſa linea C B ſive 1172 $\frac{3}{4}$ dum radius T F eſt æqualis T C ſive 5505, ergo eo in caſu angulus F T B eſt verus diſceſſus lineæ Apſidum à ſuo loco medio, & jacet T F in verâ poſitione lineæ apſidum, & cum T F ſit excentricitas eo in loco eſt F in ipsâ poſitione centri orbitæ Lunaris; Idem proximè eveniet in quovis alio loco F; Nam cum Æquationes Apogæi (pag. 512.) ſint ut ſinus Arcus dupli diſtantiæ Apſidis à Sole, & ſit F B arcus duplus diſtantiæ Apſidis à Sole & F E ejus ſinus, æquatio maxima 12gr. 18′. debebit eſſe ad eam quæ huic loco F competit ut B C ad F E, ſed in ea proxime ſunt ratione anguli omnes F T B, hinc itaque eſt quam proxime T F in verâ poſitione lineæ Apſidum & F centrum orbitæ.

tricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus lunæ locus in orbe & distantia ejus à terrâ, (k) idque per methodos notissimas.

(l) In perihelio terræ, propter majorem vim solis, centrum orbis lunæ velociùs movetur circum centrum *C* quam in aphelio, idque in triplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. (m) Ob æquationem centri solis in argumento annuo comprehensam, centrum orbis lunæ velocius movetur in epicyclo *BDA* in duplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione simplici distantiæ inversè; ab orbis centro *D* agatur recta *DE* versus apogæum lunæ, seu rectæ *TC* parallela, & capiatur angulus *EDF* æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam apogæi lunæ à perigæo



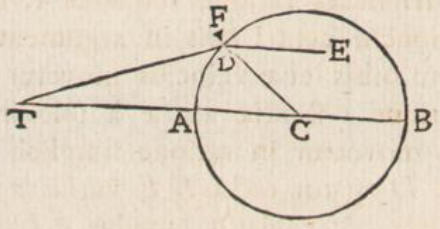

(k) * *Per Methodos notissimas.* De iis agitur Lib. I. Prop. XXXI.

(l) * *In perihelio.* Si nulla esset vis Solis quiescerent Apsides orbitæ Lunaris, nec mutaretur ejus excentricitas, motum itaque centri orbitæ Lunaris F in circulo BFHA vi Solari esse debitum liquet, omnes verò errores ex vi Solari ortos, esse proximè in triplicatâ ratione distantiæ terræ à Sole sæpius observatum est, hinc motus centri F orbitæ Lunaris in circulo BFHA eâ proportione variari debet.

(m) * *Ob Æquationem centri Solis in argumento annuo comprehensam* &c. Arcus FB vel arcus BD in figura Textus est duplus distantiæ Apsidis à syzygiâ, hoc est, duplus distantiæ Apsidis à Sole, itaque punctum F invenitur locum Solis à loco Apsidis tollendo, residui in consequentia duplum est arcus BF, & id residuum est argumentum annuum, fingatur apsidem immotam esse solem vero moveri, pendebit arcus BF ex motu Solis fietque major quo celerius Sol movebitur, sed motus Solis est inverse in ratione duplicatâ distantiarum Terræ à Sole (not. o), ergo motus puncti F ex hac consideratione sequitur rationem inversam duplicatam distantiæ Terræ à Sole. 121.

DE MUNDI SYSTEMATE.

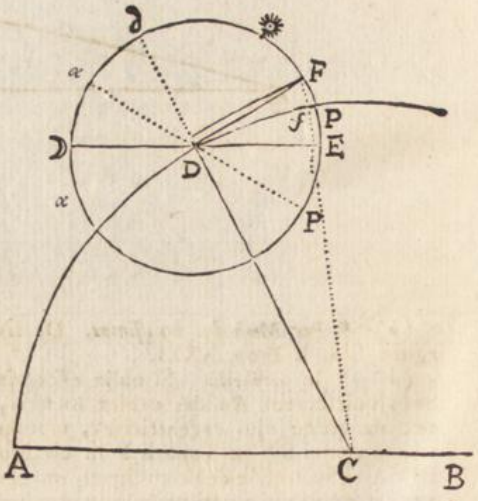
gæo ſolis in conſequentia; vel (n) quod perinde eſt, capiatur angulus *CDF* æqualis complemento anomaliæ veræ ſolis ad gradus 360. Et ſit *DF* ad *DC* ut dupla eccentricitas orbis magni ad diſtantiam mediocrem ſolis à terra, & motus medius




diurnus ſolis ab apogæo lunæ ad motum medium diurnum ſolis ab apogæo proprio conjunctim, id eſt, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & $52^{\prime}.\ 27^{\prime\prime}.\ 16^{\prime\prime\prime}.$ ad $59^{\prime}.\ 8^{\prime\prime\prime}.\ 10^{\prime\prime}.$ conjunctim, ſive ut 3 ad 100. Et

121. (n) * *Vel quod perinde eſt.* Si circa punctum D radio DF deſcribatur circulus EF ☉ dα ☽ P; In quo ſit E Lunæ Apogæum e centro D ſpectatum; ☽ Lunæ Perigæum, α Apogæum Solis, P Solis perigæum, ☉ locus Solis, cum ex Conſtructione ſit dDE = DCB, ideoque duplum argumenti annui, ſive duplum diſtantiæ ☉E, erit EDC æqualis ſemicirculo dempto 2☉E, ſive erit $\frac{1}{2}c - 2\odot E$; Itaque ſi ei arcui EDC addatur EDF æqualis annuo argumento dempta diſtantia Apogæi Lunæ a Perigæo Solis, ſive ☉E − PE, fiet CDF = $\frac{1}{2}c - \odot E - PE$, ſed cum $\frac{1}{2}c$ ſit æqualis diſtantiæ Perigæi Solis ab ejus Apogæo erit $\frac{1}{2}c = PE\odot\alpha$, ex quo itaque detracto PE & E☉, eſt CDF = ☉α ſive diſtantiæ Solis ab Apogæo in antecedentia, aut quod idem eſt complemento ad 360 gr. arcus α ☽ PEF ☉, qui arcus eſt diſtantia Solis ab Apogæo ſuo, in conſequentia ſumpta, quæ eſt Solis anomalia vera.

Si punctum P foret in conſequentia reſpectu puncti E, tunc EDF faciendus eſſet æqualis argumento annuo addita diſtantia Perigæi Solis à Lunâ, ſicque fieret CDF = $\frac{1}{2}c - \odot + PE$ & quoniam in eo




caſu eſt $\frac{1}{2}c = P\odot\,☽\,\alpha$, & $-\odot E + PE = -P\odot$, erit CDF = ☉ ☽ α, ſive erit diſtantia Solis ab Apogæo in Antecedentia poſito, hoc eſt, complementum ad 360 gr. arcûs α ☽ PEF ☉, qui arcus eſt diſtantia Solis ab Apogæo ſuo in conſequentia ſumpta, quæ eſt Solis anomalia vera.

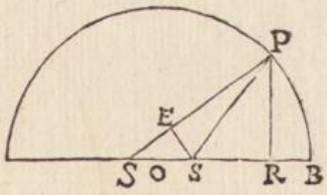
Et concipe centrum orbis lunæ locari in puncto $F$, & in epicyclo, cujus centrum eſt $D$, & radium $DF$, interea revolvi dum punctum $D$ progreditur in circumferentiâ circuli $DABD$. Hâc (o) enim ratione velocitas, quâ centrum orbis lunæ in lineâ quâdam curvâ circum centrum $C$ deſcriptâ movebitur, erit reciprocè ut cubus diſtantiæ ſolis à terrâ quamproximè, ut oportet.

Com-

(o) * *Hâc enim ratione.* Æquationem hujus motus centri orbis Lunaris quæ adhibenda eſt ut moveatur velocius quam per primam conſtructionem, idque in ſimplici ratione diſtantiæ inverſe eſſe proportionalem æquationi centri Solis conſtat eadem demonſtratione quâ in notis m & n pag. 519. de Æquationibus annuis Apogæi & nodi idem probatum fuit.

Dicatur $a$ mediocris diſtantia Terræ à Sole, quævis alia diſtantia dicatur $a \pm x$, motus medius centri orbis Lunaris in diſtantia $a$ ſit $o$, & quia ille motus eſt in triplicatâ ratione diſtantiæ Solis à Terra inverſe, in aliâ quavis diſtantiâ Terræ à Sole erit $\frac{a^3}{a^3 \pm 3ax \pm \&c.} o$ & formando ſeriem, erit $o \mp \frac{3x}{a} o$, ſed ſi fingeretur eum motum ſequi proportionem inverſam duplicatam diſtantiarum, inveniretur is motus ſingulis in locis $o \mp \frac{2x}{a} o$, & ita aſſumptus fuerat in primâ conſtructione (vid. not. $m$ præced.), ergo ſingulo in loco error commiſſus per hanc fictionem foret $\mp \frac{x}{a} o$; Pariter ſi Solis motus medius dicatur $m$ oſtenſum eſt (not. $n$ pag. 519. 520.) differentiam inter motum medium & verum eſſe $\mp \frac{2x}{a} m$; Ideoque cum ratio $\mp \frac{x}{a} o$ ad $\mp \frac{2x}{a} m$, ſit in ſingulis punctis $x$ eadem, Æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a} o$ orta erit proportionalis Æquationi ex $\mp \frac{2x}{a} m$ ortæ, hoc eſt erit proportionalis Æquationi centri Solis; Sed Æquatio centri Solis, eſt quamproximè proportionalis ſinui anomaliæ Solis not. 372. Lib. I. nam illic demonſtratur quod ſi ex utroque foco S & ſ orbitæ

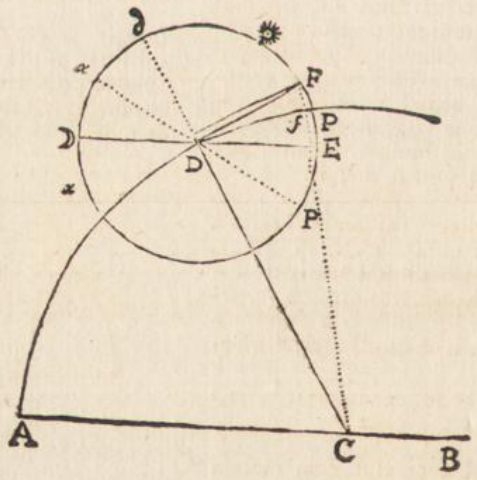





Solis ducantur lineæ ad punctum P erit BſP anomalia media, & BSP anomalia vera, ideoque angulus SPſ erit Æquatio, ducatur ergo ex ſ in SP perpendiculum ſE & ex P perpendiculum PR ob ſimilitudinem Triangulorum SſE & ſPR erit, SP ad PR ut Sſ ad ſE, ſive ſumendo SP pro radio conſtanti (quod eſt proxime verum) erit, ut Radius ad Sinum Anomaliæ veræ ita dupla excentricitas ad ſinum æquationis Solis, ſive ad ipſam Æquationem, nam in parvis angulis, arcus pro ſinubus ſumi poſſunt. Hinc ſinus anomaliæ veræ eſt ad æquationem centri Solis in Ratione datâ radii nempe ad duplam excentricitatem, hinc itaque, Æquatio orta ex errore $\mp \frac{x}{a} o$, erit ut ſinus Anomaliæ Solis, ſed

De Mundi Systemate.

Computatio motus hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris lunæ à terra sit partium 100000, & eccentricitas $TC$ sit partium 5505 ut supra: recta $CB$ vel $CD$ invenietur partium $1172\frac{3}{4}$ & recta $DF$ partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad distantiam $TC$ subtendit angulum ad terram quem translatio centri orbis à loco $D$ ad locum $F$ generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata

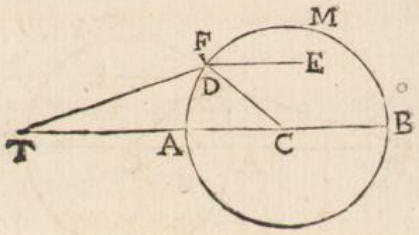



121. Angulus CDF est complementum ejus anomaliæ ad 360gr. sinus autem arcus alicujus & sinus ejus complementi ad 360gr. sunt unum & idem, ergo Æquatio ex errore $\mp\frac{x}{a}o$ nata est proportionalis sinui angulorum CDF & si sumatur Radius DF æqualis æquationi maximæ hinc natæ, cæteri omnes sinus angulorum CDF erunt ipsæ æquationes in datâ Solis anomaliâ, si itaque sumantur à puncto D arcus Df in circulo BDA æquales illis sinubus, erit f verus locus centri orbitæ Lunaris, & quia ob exiguitatem horum sinuum respectu radii CD, linea per C & f ducta cadit etiam in F sumi potest F, ut verus locus centri orbitæ Lunaris.

Invenitur autem Æquatio maxima orta ex errore $\mp\frac{x}{a}o$; si attendatur quod Solis motus est ubique $m \mp \frac{2x}{a}m$, sive $m \mp \frac{x}{a} \times 2m$ ideoque summam omnium errorum ex errore $\frac{x}{x}o$ fore ad summam omnium errorum in solis motu genitorum ut $o$ ad $2m$, sive Æquationem quæsitam esse ad Æquationem Solis ut est motus centri orbitæ Lunaris per circulum BDA ad duplum motum medium Solis respectu sui Apogæi, sed quoniam arcus BD sunt semper dupli distantiæ Solis ab Apogæo Lunæ motus

cata in ſitu parallelo ad diſtantiam ſuperioris umbilici orbis lunæ à terra, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici, & ad diſtantiam lunæ à terrâ (p) ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri ſecunda dici poteſt. Et hæc æquatio, in mediocri lunæ diſtantia à terrâ, eſt ut ſinus anguli, quem recta illa *DF* cum recta à puncto *F* ad lunam ducta continet quamproximè, & ubi maxima eſt evadit 2′.



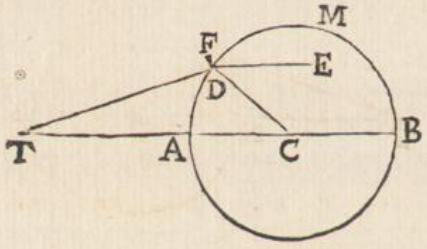



tus diurnus centri orbis Lunaris per circulum BDA eſt etiam duplus motus Solis ab Apogæo Lunæ, hinc Æquatio quæſita eſt ad maximam Æquationem Solis ut eſt radius DC ad diſtantiam mediocrem Solis à Terra & ut duplus motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad duplum motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo conjunctim, maxima autem Solis Æquatio eſt ipſa dupla excentricitas orbis magni, hinc Æquatio quæſita ſive radius DF eſt ad duplam excentricitatem ut FC ad diſtantiam mediocrem Solis à Terra, & ut motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo conjunctim, undè viciſſim eſt etiam DF ad DC ut dupla excentricitas ducta per motum diurnum Solis ab Apogæo Lunæ, ad diſtantiam mediocrem Solis à Terrâ ductam per motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo.

(p) * *Subtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu Lunæ.* Scilicet tota orbita Lunæ, ipſaque Luna per motum centri orbitæ ex D in F tranſlatum ex proprio loco mota cenſeri debet in locum alium per lineam ipſius DF duplam ipſique Parallelam, cum itaque diſtantia mediocris ſit partium 100.000, ſi hæc linea quæ duplicata eſt 70.4, angulum rectum cum linea à Terra ducta efficiat quo caſu maximam æquationem facit, ipſa ſubtendet angulum 2′ 25″ ſiquidem ſinus duorum minutorum eſt 58.18 ſinus trium 87.27. In aliis autem hujus lineæ poſitionibus reſpectu lineæ à Terrâ ductæ, anguli quos ſubtendet erunt ad iſtum ut eſt ſinus Anguli quem facit cum lineis à Terrâ ductis ad Radium; Nam in Triangulis in quibus duæ lineæ ſunt conſtantes ſed earum angulus variabilis, ſi una ex iis lineis alterius reſpectu ſit minima, Tertia linea pro conſtante aſſumi poteſt, eſt verò ad minimam lineam, ut ſinus anguli variabilis ad ſinum anguli oppoſiti minimæ lineæ; hinc ſinus anguli variabilis & ſinus anguli minimi ſunt in ratione datâ. Ergo ut ſinus

DE MUNDI SYSTEMATE.

2′. 25″. (q) Angulus autem quem recta $DF$ & recta à puncto $F$ ad lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum $EDF$ ab anomalia media lunæ, vel addendo distantiam lunæ à sole ad distantiam apogæi lunæ ab apogæo so-




lis. Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita 2′. 25″. sunt ad æquationem centri secundam, addendam, si summa illa sit minor semicirculo, subducendam si major. Sic habebitur ejus longitudo in ipsis luminarium syzygiis.

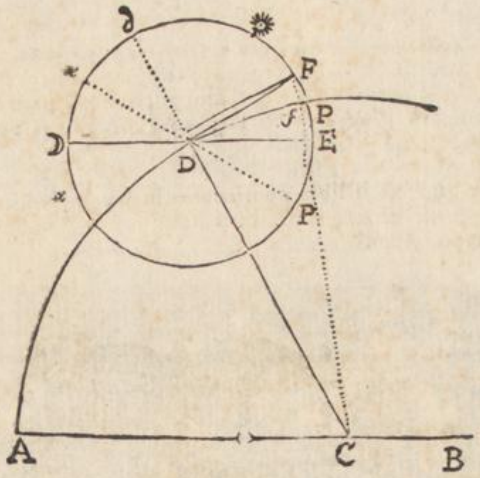
Cum

[21.] sinus Anguli recti sive Radius ad 2′. 25″. ita sinus anguli quem facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad $DF$, ad angulum quo locus Lunæ mutatus cernitur.

(q) * *Angulus autem quem* facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad $DF$, & in ipso loco Lunæ posita, æqualis est illi quem facit recta $DF$ & recta à puncto $F$ ad Lunam ducta, saltem proximè quia $F$ est centrum orbitæ Lunaris à quo Terra non multum distat; Fingatur, produci lineam $DF$ & ex puncto $F$ duci lineam Parallelam lineæ $DE$, quæ ad Apogæum Lunæ tendit, & ex eodem puncto $F$ aliam duci lineam ad Lunam, angulus hujus lineæ cum linea $DE$ erit anomalia media Lunæ ergo angulus hujus lineæ cum linea $DF$ producta erit differentia anguli $EDF$ & anomaliæ mediæ Lunæ, sive quia erat $EDF$ differentia argumenti annui, & distantiæ Apogæi Lunæ à Perigæo Solis & ex Anomalia media Lunæ tollatur argumentum annuum supereſt distantiæ Lunæ à Sole, cui addi debet distantia Apogæi Lunæ & Perigæi Solis, sive (quia semi circuli additi vel detracti non mutant valores Angulorum eorumque sinuum) distantia Apogæi Lunæ & Apogæi Solis: cætera facile patebunt ex figuræ descriptione; Exemplum esto in conjunctione ubi est ☉ locus Solis & Lunæ, liquet enim quod quando punctum ☉ est in consequentia respectu puncti F, Luna quæ transfertur per lineam parallelam lineæ $DF$ transfertur in Antecedentia; dum è contrà punctum ☉ est in antecedentia respectu puncti F, Luna transfertur in consequentia; est vero $F☉ = PE$, cum ergo $AL$ est major semicirculo, ut in figura, tunc $PE$ sive $F☉$ est minor semicirculo, est ergo ☉ in consequentia respectu puncti F, hinc subducenda est ea Æquatio; sit verò $AE$ minor semicirculo-

Cum atmosphæra terræ ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem solis, & refringendo spargat eandem in umbram terræ, & spargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: (r) Ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipsibus lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria vero lunæ primò in syzygiis, deinde in quadraturis, & ultimò in octantibus per phænomena examinari & stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios solis & lunæ ad tempus meridianum in observatorio regio *Grenovicensi*, die ultimo mensis *Decembris* anni 1700. st. vet. non incommodè sequentes adhibebit: nempe motum medium solis ♑ 20gr. 43′. 40″., & apo-




lo erit PE major semicirculo ut & F☉, ideoque est ☉ in antecedentia respectu F promovetur itaque Luna propter hanc Æquationem; cæterum non tantum in luminarium Syzygiis, sed ad cæteros Lunæ ad spectus hæc adaptari possunt, verum commodius est Astronomis, Theoriam suam ex syzygiarum observationibus explorare & constituere.

(r) * *Ad diametrum umbræ.* Parallaxis est angulus qui subtenditur per semi-Diametrum terræ ex Luna spectatæ; Jam vero propter atmosphæræ actionem in radios lucis idem evenit respectu umbræ ac si semi-Diameter terræ 35 vel 40 milliaribus augeretur, nam radii illâc pergentes rectam viam non sequuntur, sed introrsum in umbram conjiciuntur, hinc

DE MUNDI SYSTEMATE.

& apogæi ejus ☋ $7^{gr.}\ 44'.\ 30''$, & motum medium lunæ ♒ $15^{gr.}\ 21'.\ 00''.$, & apogæi ejus ♈ $8^{gr.}\ 20'.\ 00''$, & nodi ascendentis ☊ $27^{gr.}\ 24'.\ 20''.$; & differentiam meridianorum observatorii hujus & observatorii regii *Parisiensis* $0^{hor.}\ 9^{min.}\ 20^{sec.}$ motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum satis accuratè habentur.

821. carent radiis solaribus loca quæ trans Atmosphæram eos recipere deberent, fungitur ergo Atmosphæra vice corporis opaci, & umbra ea de causa dilatari debet quasi semi-Diameter terræ in 35 vel 40 milliaribus foret aucta.

---

## ERRATA.

Pag. 400. Not. col. 2. lin. 8. & pag. 402. N. col. 1. l. 2. *pro* 110. *lege* 112. Pag. 498. Not. col. 1. l. 17. & 18. Luna *lege* Terra. *Ibid.* col. 2. l. 8. quæ factam erit *lege* factam, quæ erit. Pag. 500. col. 1. l. 27. *pro* 107.48. *lege* 108.48. Pag. 501. col. 1. linea $5^{a}$. ante ultimam $\frac{1}{2}r^2$ *lege* $\frac{1}{4}r^2$. *Ibid.* lineâ $4^{a}$. ante ultimam & ultimâ & col. 2. lin. 2. *pro* 40.449375 *lege* 40.89875, *ibidem*, *pro* 5.52939 *lege* 5.59082. *Ibid.* lin. 3. *pro* .0011297456*r* *lege* .0011448782*r*. *Ibid.* lin. 5. *pro* .06372125 *lege* .06559087*2*. *Ibid.* lin. 6. *pro* 3'82338. & *pro* .82338. *lege* 3'.9354. & .9354. Lin. 7. *pro* 49''4. *lege* 56''. Lin. 8. *pro* 3'.49''. *lege* 3'.56''. Lin. 30. *pro* 3'' *lege* 11''. Pag. 502. col. 1. lin. 28. *pro* graduum 5.19'.36''. *lege* graduum $5^{o}.19'.30''$.

Serò quidem hæc tertii libri continuatio in lucem prodit propter varia Editoris negotia, citiùs edetur ultima hujus libri continuatio, quoniam ejus operâ nimis tardâ non utemur in posterum.

PHI-

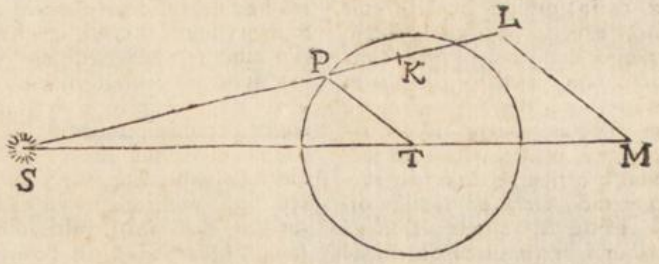
# PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.



*LIBRI TERTII CONTINUATIO II.*

## PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

*Invenire vim Solis ad Mare movendum.*




SOlis vis *ML* ſeu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1. ad 638092,6. Et vis *TM*–*LM* ſeu 2*PK* in ſyzygiis lunaribus eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum à centro terræ, id eſt, in (z) ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideo-

(z) * *In ratione* $60\frac{1}{2}$ *ad* 1. Quemadmodùm in prop. 25ª. demonſtratum eſt eam partem vis centripetæ Lunaris in Solem quâ motus ejus circà terram perturbatur

DE MUNDI SYSTEMATE.

ideoque vis prior in ſuperficie terræ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus diſtant à ſole. Vi alterâ, quæ duplo major eſt, mare elevatur & ſub ſole & in regione ſoli oppoſitâ. (x) Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus diſtant à ſole, ſive elevet eandem in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis, hæc ſumma erit tota ſolis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac ſi tota in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant à ſole nil ageret.

Hæc eſt vis ſolis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi ſol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſuâ diſtantiâ à terrâ. (a) In aliis ſolis poſitionibus vis ad mare attollendum eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis ſolis ſupra horizontem loci directè & cubus diſtantiæ ſolis à terrâ inversè.

Co-

121. batur & quæ radio orbitæ Lunaris erat proportionalis, eſſe ad vim centripetam Lunæ in terram in duplicatâ ratione temporum periodicorum terræ circà Solem & Lunæ circà terram, ſimili planè modo probatur eam quoque partem vis centripetæ in Solem quæ analoga eſt radio terræ eſſe ad vim centripetam Lunæ in terram in ratione radii terræ ad radium orbitæ Lunaris directè & ratione duplicatâ temporis periodici terræ circà Solem ad tempus periodicum Lunæ circà terram inverſè. Quarè vires Solis ad perturbandos motus corporum propè ſuperficiem terræ ſunt ad vires Solis ad perturbandos motus Lunæ ut radius terræ ad radium orbitæ Lunaris, hoc eſt, ut 1 ad 60 $\frac{1}{2}$.

(x) * *Summa virium* eſt ad vim gravitatis ut 3 ad 38604600 ſive ut 1 ad 12868200.

(a) * *In aliis Solis poſitionibus.* Hâc vi aqua maximè deprimitur ubi Sol verſatur in horizonte & maximè elevatur ubi Sol in vertice loci verſatur. Depreſſio autem & elevatio aquarum magis ac magis decreſcit quò altiùs Sol aſcendit ſuprà horizontem, aut à vertice deſcendit. Præterea hæc depreſſio aut elevatio circa initium & finem lentiùs, circà medium verò celeriùs minuitur; ſed hæc contingent ſucceſſiva aquarum incrementa & decrementa, ſi vis maxima Solis in vertice loci exprimatur per diametrum circuli, hoc eſt, per per ſinum verſum 180°. ſeù duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem, in aliis autem Solis poſitionibus vis eadem exhibeatur per ſinus verſos altitudinum duplicatarum; Quare in variis Solis poſitionibus, vis ad marè attollendum ſumi poteſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem, ſeclusâ tamen perturbatione quæ ex variâ Solis à tellure diſtantiâ oritur. At vis Solis augetur vel minuitur quò propiùs ad terram accedit aut longiùs abeà recedit, idque in ratione triplicatâ diſtantiarum inversâ (cor. 14. prop. 66. lib. 1.) conſiderari itaquè poterit, vis Solis ad mare attollendum ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſuprà horizontem loci directe & cubus diſtantiæ Solis à Terrâ inverse. Cæterùm tota hæc propoſitio eleganter admodùm calculo tractata legitur in tribus Diſſertationibus quæ Tom. 3°. adjectæ ſunt.

*Corol.* Cum vis centrifuga partium terræ à diurno terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſurâ pedum *Pariſienſium* 85472, ut ſupra in prop. XIX; vis ſolaris de quâ egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1. ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, (b) efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub ſole & ſoli oppoſitis ſuperet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus diſtant à ſole, menſurâ tantùm pedis unius *Pariſienſis* & digitorum undecim cum triceſimâ parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

## PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

*Invenire vim lunæ ad mare movendum.*

(c) Vis lunæ ad mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim ſolis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ aſcenſus in conjunctione & oppoſitione luminarium, obſervante *Samuele Sturmio*, eſt pedum plus minus 45, in quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differen-

(b) * *Efficiet ut altitudo aquæ.* Quoniam ex variis pendulorum obſervationibus & nuperrime inſtitutis gradûs meridiani menſuris ſub circulo polari, terra altior eſt ſub æquatore quam ex Theoriâ Newtonianâ prodiit (prop. 19. lib. hujus) paulò augenda erit altitudo aquæ in hoc corollario definita. Obſervandum autem eſt corollarium illud rigoroſè verum non eſſe; Newtonus enim ex differentiâ diametri æquatoris & axis terræ per ſimplicem proportionem colligit altitudinem aquæ ex vi Solis oriundam; uterque tamen caſus eſt longè diverſus, primus ſiquidem pendet à quadraturâ circuli, alter verò refertur ad quadraturam hyperbolæ (ut patet ex cor. 2. prop. 90. lib. 1. & not. 106. lib. hujus). Sed quam parùm à veritate diſcrepet præſens corollarium apparet ex computo inito in Diſſertatione Clariſſ. Macclaurin prop. 5. 121.

(c) * *Vis Lunæ ad Mare movendum.* Vid. cap. 6. num. 10. in Diſſertatione Clariſſ. Bernoullii & prop. 9. in Diſſertatione Clariſſ. Macclaurini.

De Mundi Systemate.

rentiâ oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore verſantium & mediocriter à terrâ diſtantium ſunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æſtus maris ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi* ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æſtus in ſyzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem æſtus in portu *Briſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

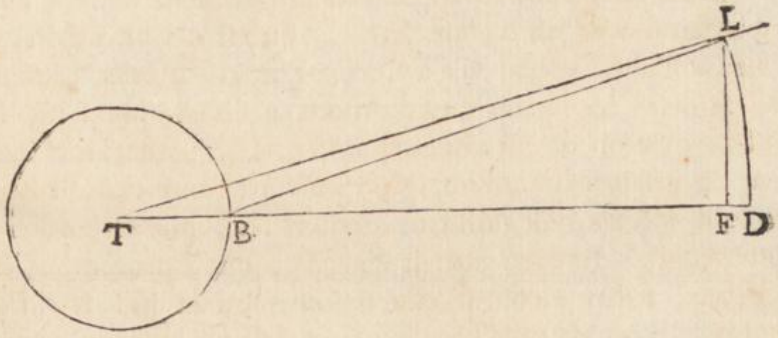
Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æſtus maximi non incidunt in ipſas luminarium ſyzygias, ſed ſunt tertii à ſyzygiis ut dictum fuit, ſeu proximè ſequuntur tertium lunæ poſt ſyzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut à *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt horam à novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam à novilunio vel plenilunio plus minus quadrageſimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam ſeptimam circiter ab appulſu lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè ſequuntur appulſum lunæ ad meridianum, ubi luna diſtat à ſole vel ab oppoſitione ſolis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in conſequentia. Æſtas & hyems maxime vigent, non in ipſis ſolſtitiis, ſed ubi ſol diſtat à ſolſtitiis decimâ circiter parte totius circuitus, ſeu gradibus plus minus 36 vel 37. Et ſimiliter maximus æſtus maris oritur ab appulſu lunæ ad meridianum loci, ubi luna diſtat à ſole decimâ circiter parte motus totius ab æſtu ad æſtum. Sit diſtantiâ illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et (d) vis ſolis in hâc diſtantiâ lunæ à ſyzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum

221. (d) * *Et vis Solis.* Hanc virium proportionem non multùm à verò differre patet ex iis quæ immediatè præcedunt.

motum maris à vi lunæ oriundum, quam in ipſis ſyzygiis & quadraturis, in ratione radii ad ſinum complementi diſtantiæ hujus duplicatæ ſeu anguli graduum 37, hoc eſt, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia ſuperiore pro S ſcribi debet 0,7986355 S.

Sed & vis lunæ in quadraturis, ob declinationem lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ poſt quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ verſatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum diminuitur (e) in duplicatâ ratione ſinus complementi declinationis quamproximè. Et propterea vis lunæ in his quadraturis eſt tantùm 0,8570327 L. Eſt igitur L+0,7986355S ad 0,8570327L−0,7986355S ut 9 ad 5.

(f) Præterea diametri orbis, in quo lunâ ſine eccentricitate moveri deberet, ſunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque diſtantia




(e) 122 * *In duplicatâ ratione.* Sit TBD planum æquatoris, T centrum telluris, ſitque Luna in L, erit angulus LBD, menſura declinationis ab æquatore, ſeu, ob exiguum angulum TLB, erit declinatio illa quamproximè æqualis angulo LTD, cujus anguli coſinus eſt TF, ſumpto TL, pro radio. Jam vis quæ aquam in loco æquatoris B, directè trahit à centro T, ubi Luna verſatur in plano æquatoris in D, eſt ad vim quæ eandem aquam directè à centro trahit, ubi Lunæ eſt in L, ut TL ad TF, hoc eſt, ut radius ad ſinum complementi declinationis LTD, ſepoſitâ vi aquæ centripetâ verſus T. Sed, auctâ vi illâ centripetâ, in eâdem ratione minuitur vis altera aquam à centro trahens; Quare, componendo, vis Lunæ in loco D, eſt ad vim ejus in L, ut quadratum ſinûs totius TL, ad quadratum ſinûs complementi TF, declinationis Lunæ LTD. 122.

(f) * *Præterea diametri orbis.* (Prop. 28. Lib. hujus).

De Mundi Systemate.

tia lunæ à terrâ in ſyzygiis eſt ad diſtantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ à ſyzygiis, ubi æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. (g) Vires autem lunæ ad mare movendum ſunt in triplicatâ ratione diſtantiarum inversè, ideoque vires in maximâ & minimâ harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantia ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. (h) Unde fit 1,017522L + 0,7986355 S ad 0,9830427×0,8570327L−0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis ſolis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

*Corol.* 1. Cum aqua vi ſolis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum triceſimâ parte digiti, eâdem vi lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $\frac{5}{22}$, & vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi luna eſt in perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè ſufficit, & quantitati motuum probè reſpondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut (i) plenus ſit æſtus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor eſſe debet quam graduum nonagin-

122.

(g) * *Vires autem Lunæ.* (Cor. 14. Prop. 66. Lib. 1.).

(h) * *Undè fit.* Ut ex hâc analogiâ vis L Lunæ colligi poſſit ducenda ſunt media & extrema, hæcque orietur æquatio 1.017522 L × 5 + 0.7986355 S × 5 = 0.9830427 × 9 × 0.857032 L − 0.7986355 S × 9; & tranſponendo hæc habebitur proportio S : L = 0.9830427 × 0.8570327 × 9 − .017522 × 5 : 0.7986355 × 5 + 0.7986355 × 9. Jam verò ſumptis horumce numerorum Logarithmis, & quæſitis reſpondentibus numeris in vulgaribus Logarithmorum tabulis, prodit S ad L ut 1 ad 4.4815 quamproxime.

(i) * *Ut plenus ſit æſtus.* (109).

naginta. In mari *Æthiopico* aſcenſus aquæ intra tropicos minor eſt quam in zonis temperatis, propter anguſtiam maris inter *Africam* & auſtralem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Eâ de causâ fluxus & refluxus in inſulis, quæ à littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normannia*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtus reſpondet viribus ſolis & lunæ.

*Corol.* 2. Cum vis lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longè minor quam quæ vel in experimentis pendulorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. (k) In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

*Co-*

(k) * *In æſtu ſolo marino.* Hæ quidem vires ad movendum mare ſufficiunt, ſed alios effectus ſenſibiles producere non poſſunt. Etenim granum unum cum pondere granorum 4000 etiam accuratiſſimâ libra comparatum ſentiri vix poteſt, vis autem Solaris eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, ſummaque virium Solis & Lunæ eſt ad eandem vim gravitatis ut 1 ad 2032890. Quare patet vires illas licet conjunctas multò minores eſſe quam ut pondus corporis cujuſvis in Libra appenſi ſenſibiliter augere vel minuere poſſint. Unde nec in experimentis pendulorum, Baro- 122.

DE MUNDI SYSTEMATE.

*Corol.* 3. Quoniam vis lunæ ad mare movendum eſt ad ſolis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per corol. 14. prop. LXIV. lib. 1.) ſunt ut denſitates corporum lunæ & ſolis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas lunæ erit ad denſitatem ſolis ut 4.4815 ad 1 directè, & cubus diametri lunæ ad cubum diametri ſolis inversè: id eſt (cum diametri mediocres apparentes lunæ & ſolis ſint $31'.\ 16''\frac{1}{2}$ & $32'.\ 12''$) ut 4891 ad 1000. (l) Denſitas autem ſolis erat ad denſitatem terræ ut 1000 ad 4000; & propterea denſitas lunæ eſt ad denſitatem terræ ut 4891 ad 4000 ſeu 11- ad 9. Eſt igitur corpus lunæ denſius & magis terreſtre quam terra noſtra.

*Corol.* 4. Et cum vera diameter lunæ ex obſervationibus aſtronomicis ſit ad veram diametrum terræ ut 100 ad 365; erit maſſa lunæ ad maſſam terræ ut 1 ad 39,788.

*Corol.* 5. Et (m) gravitas acceleratrix in ſuperficie lunæ erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie terræ.

*Corol.* 6. (n) Et diſtantia centri lunæ à centro terræ erit ad diſtantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

(o) *Corol* 7. Et mediocris diſtantia centri lunæ à centro terræ in octantibus lunæ erit ſemidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproximè. Nam terræ ſemidiameter maxima fuit pedum *Pariſienſium* 19658600, & mediocris diſtantia centrorum terræ & lunæ, ex hujuſmodi diametris $60\frac{2}{5}$ conſtans, æqualis eſt pedibus 1187379440. Et hæc diſtantia (per corollarium ſupe-

122. Barometrorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis ſenſibiles edent effectus. Idem corollarium eleganter demonſtravit Clariſſ. Eulerus num. 30. Diſſertationis de fluxu & refluxu maris.

(l) * *Denſitas autem Solis.* (Cor. 3. Prop. 8. Lib. hujus).

(m) * *Et gravitas acceleratrix.* Nam gravitas acceleratrix eſt ut maſſa directè & quadratum diſtantiæ à centro, hoc eſt, ſemidiametri inverse (cor. 1. prop. 75. lib. 1.). Ideòque gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ eſt ad gravitatem acceleratricem in ſuperficie terræ ut $1 \times 13324$ ad $39.788 \times 1000$, hoc eſt, ut 1 ad 3 circiter.

(n) * *Et diſtantia centri Lunæ.* (61. Lib. 1.).

(o) * *Coroll.* 7. Computum eodem planè modo initur ac in prop. 4. lib. hujus.

ſuperius) eſt ad diſtantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque diſtantia poſterior eſt pedum 1158268534. Et cum luna revolvatur, reſpectu fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{7}$; ſinus verſus anguli, quem luna tempore minuti unius primi deſcribit, eſt 12752341, exiſtente radio 1000,000000,000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illa, qua retinetur in orbe, cadendo in terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi luna cadendo tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,8538067. Et ad ſexageſimam partem diſtantiæ lunæ à centro terræ, id eſt ad diſtantiam pedum 197896573 à centro terræ, corpus grave tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad diſtantiam pedum 19615800, quæ ſunt terræ ſemidiameter mediocris, grave cadendo deſcribet pedes 15,11175, ſeu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{11}$. Hic erit deſcenſus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in prop. XX. deſcriptam, deſcenſus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Pariſiorum* exiſtente exceſſu quaſi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in latitudine *Lutetiæ* cadendo in vacuo deſcribent tempore unius ſecundi pedes *Pariſienſes* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{33}$ circiter. Et ſi gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur à motu diurno terræ in illa latitudine; gravia ibi cadendo deſcribent tempore minuti unius ſecundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{2}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* ſupra oſtenſum eſt ad prop. IV, & XIX.

*Corol.* 8. Diſtantia mediocris centrorum terræ & lunæ in ſyzygiis lunæ eſt ſexaginta ſemidiametrorum maximarum terræ, demptâ triceſimâ parte ſemidiametri circiter. Et in quadraturis lunæ diſtantia mediocris eorundem centrorum eſt $60\frac{5}{6}$ ſemidiametrorum terræ. Nam hæ duæ diſtantiæ ſunt ad diſtantiam

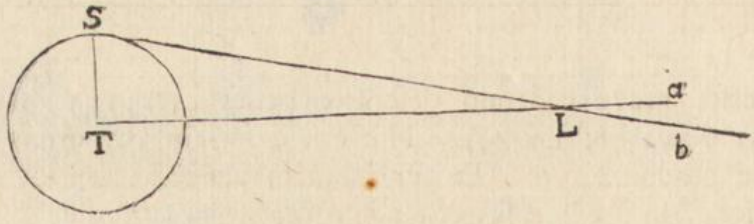
DE MUNDI SYSTEMATE.

mediocrem lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per prop. XXVIII.

*Corol.* 9. Distantia mediocris centrorum terræ & lunæ in syzygiis lunæ est sexaginta semidiametrorum mediocrium terræ cum decimâ parte semidiametri. Et in quadraturis lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est sexaginta & unius semidiametrorum mediocrium terræ, demptâ triceſimâ parte semidiametri.

*Corol.* 10. In syzygiis lunæ (P) parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, est $57'.20''$, $57'.16''$, $57'.14''$, $57'.12''$, $57'.10''$, $57'.8''$, $57'.4''$ respectivè.

In




123. (P) 123. * *Parallaxis* Lunæ horizontalis in diversis latitudinibus seu distantiis ab æquatore determinari potest. Parallaxis Lunæ horizontalis est differentia locorum in quibus Luna in horizonte posita, ex centro & superficie terræ observata inter stellas fixas conspicitur. Hæc autem locorum distantia æqualis est angulo sub quo videretur semidiameter terræ ex loco Lunæ observata. Sit Luna in horizonte constituta in L; observator in superficiei terrestris loco S, Lunam inter stellas referet in b, sed idem observator in centro terræ T positus Lunam referet in a. Est igitur differentia locorum æqualis a L b, qui æquatur angulo S L T, sub quo semidiameter terræ è loco Lunæ L spectatur. Sed quoniam terra est figuræ sphæroidicæ, semidiametri ejus in diversis latitudinibus inter se differunt & est semidiameter maxima secundum æquatorem ad minimam secundum polos, sive in latitudine 90° ut 19658600 ad 19573000 circiter, estque earum differentia 85472 (prop. 19 lib. huj.) in aliis latitudinibus differentia inter diametrum maximam & quamvis aliam est ad differentiam priorem in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum cujusvis latitudinis quamproximè (prop. 20 lib. huj.) hinc in syzigiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris, hoc est, ubi distantia centrorum Lunæ & terræ est semidiametrorum maximarum terræ 59. 366 circiter (cor. 8.) sub æquatore invenitur dicendo, ut est distantia Lunæ à terrâ L S = 59. 366, ad semidiametrum maximam T S = 1, ità sinus totus ad sinum anguli T L S, qui est $57'\ 20''$. In aliis Lunæ locis minuitur parallaxis in eâdem fere ratione ac semi-

In his computationibus attractionem magneticam terræ non conſideravi, cujus utique quantitas perparva eſt & ignoratur. Siquando vero hæc attractio inveſtigari poterit, & menſuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum iſochronorum in diverſis parallelis, legeſque motuum maris, & parallaxis lunæ cum diametris apparentibus ſolis & lunæ ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: (q) licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.

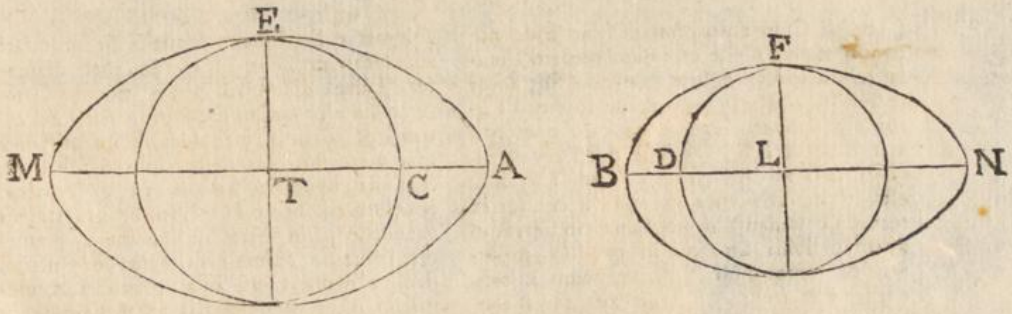
## PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

*Invenire figuram corporis lunæ.*

Si corpus lunare fluidum eſſet ad inſtar maris noſtri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum eſſet ad vim lunæ, quâ mare noſtrum in partibus & ſub lunâ & lunæ oppoſitis attollitur, (r) ut gravitas acceleratrix lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in lunam, &

ſemidiametri terræ, & hinc prodeunt parallaxes in latitudinibus graduum 0. 30. 38. 45. 52. 60. 90. quales a Newtono determinantur.

(q) * *Licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.* Theoriæ Newtoni de fluxu & refluxu maris plurima hic potuiſſemus adjungere quorum ope calculos accuratiùs repetere licuiſſet. Verùm materiam exhauriunt elegantiſſimæ diſſertationes quas tom. 3. addidimus. 1234

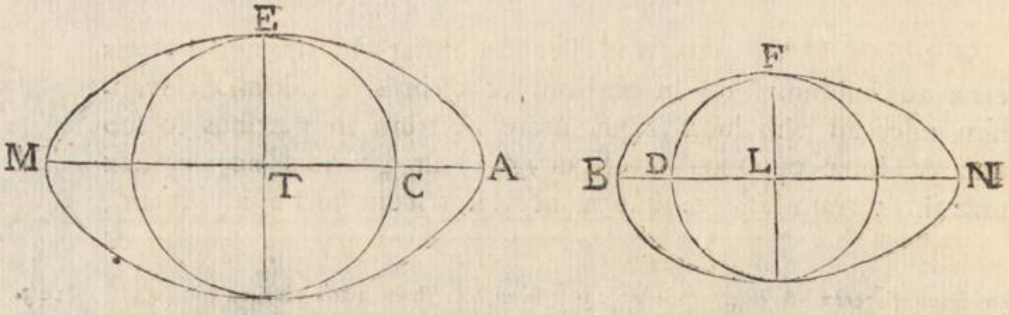



(r) * *Ut gravitas acceleratrix.* Sit T, globus terræ fluido ſatis profundo E A, coopertus, ſitque L, globus Lunæ coopertus fluido F B. Si gravitas acceleratrix Terræ in Lunam æqualis eſſet gravitati acceleratrici Lunæ in terram, hoc eſt ſi æqualis eſſet materiæ quantitas in Lunâ & in Terrâ, globi duo T, L, ſeſe componerent in figuras ſphæroidicas ſimiles quarum axes M A, B N, jacerent in directum

DE MUNDI SYSTEMATE.

& diameter lunæ ad diametrum terræ conjunctim; id est, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, seu 1081 ad 100. Unde cum mare nostrum vi lunæ attollatur ad pedes $8\frac{1}{5}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de causâ figura lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

*Co-*




123. (106). Cum enim omnia hinc inde ponantur æqualia præter ipsam molem, nulla est ratio cur figuræ illæ non sint inter se similes, alteraque in acutiorem sphæroidem desinat. Quare in casu præsenti, erit B L ad L F, ut T A ad T E, & vicissim B D ad A C sicut I F ad T E, hoc est, si æqualis esset gravitas acceleratrix terræ in Lunam atque Lunæ in terram, altitudo fluidi Lunaris in partibus proximis & remotissimis suprà globum Lunæ, esset ad altitudinem fluidi terrestris analogam suprà globum terræ ut diameter Lunæ ad diametrum terræ. Rursùs, si terra & Luna æquales habeant diametros, erunt altitudines fluidi suprà globos ut gravitates acceleratrices respective (prop. 74. lib. 1.). Quare si neque gravitas acceleratrix in Lunam æqualis sit gravitati acceleratrici Lunæ in terram, nec diameter Lunæ diametro terræ æqualis, vis terræ ad elevandum fluidum in partibus citimis & ultimis erit ad vim ipsam Lunæ quâ mare nostrum in partibus & sub Lunâ & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim, sive ut massa Lunæ quæ gravitati acceleratrici est proportionalis ad massam terræ quæ itidem gravitati ejus acceleratrici est proportionalis & ut diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim. De figurâ corporis Lunæ nova quam plurima atque eximia habentur in dissertationibus de fluxu & refluxu maris.

*Corol.* (f) Inde vero fit ut eadem ſemper lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim ſitu corpus lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium agitantium eſſent longè tardiſſimæ: adeò ut facies illa, quæ terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in prop. XVII allatam) reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in terram converti.

(f) * *Indè verò fit.* Quoniam maxima diameter Lunæ versùs centrum terræ dirigitur (ex dem.) hinc ſit ut eadem ſemper Lunæ facies in terram obvertatur. Poſitâ autem Sphæroidicâ Lunæ figurâ, inter varias Lunæ partes non dabitur æquilibrium, niſi Sphærois Lunæ axem ſuum telluri obvertat (109); quare in alio ſitu corpus Lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes, ob parvitatem virium in minimo ſcilicet axis majoris ſuprà minorem exceſſu, eſſent longe tardiſſimæ adeò ut non turbetur Lunaris motûs circà axem æquabilitas, ideóque (per not. in prop. 17.) facies illa quæ terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis Lunaris umbilicum reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in terram converti. 124

124. Clariſſ. D. De Mairan in elegantiſſimâ diſſertatione de motu diurno telluris circa axem quæ legitur in monum. Pariſ. an. 1729. exponit admodum ingeniosè prout ſemper facit, cur eadem Lunæ facies in terram continuò obvertatur, variaſque explicat inæqualitates librationis Lunaris in longitudinem. Conjecturam facit Vir Doctiſſimus homogeneam non eſſe Lunæ materiam ſed hemiſpherium inferius ſuperiori gravius ſupponit; quo poſito facilè demonſtrat Lunam reſpectu telluris in ſitu conſtanti manere. Obſervat deindè fieri non poſſe ut conſtans maneat Lunæ poſitio, niſi conſtans quoque ſit velocitas fluidi in quo Lunam ipſam deferri aſſumit. Sed in omni orbitâ elliptica vel excentricâ qualis eſt orbita Lunæ, variabiles ſunt hujuſce fluidi velocitates, quarè Luna in eodem ſitu conſiſtere non poteſt, ſed oſcillationes quaſdam in longitudinem patitur, ex quibus fiet ut modo nobis detegatur aliqua pars hemiſpherii quod occultum eſſe ſolet, modo autem nobis abſcondatur aliqua pars hemiſpherii quod ſolet eſſe conſpicuum, idque magis vel minus contingere debet pro majori vel minori inæqualitate velocitatum fluidi. Hâc ratione explicari poterit cur Lunaris librationis quantitas in longitudinem major aliquando ab Aſtronomis obſervatur quam ex prop. 17. lib. hujus, prodire debet. Verùm totahæc explicatio ad rem noſtram & Newtonianum ſyſtema accommodabitur, ſi vorticum loco ſubſtituatur attractio, quemadmodum à Clariſſ. Daniele Bernouillio factum eſt, cujus eximiam Diſſertationem de fluxu & refluxu maris cap. 3. conſulat Lector.

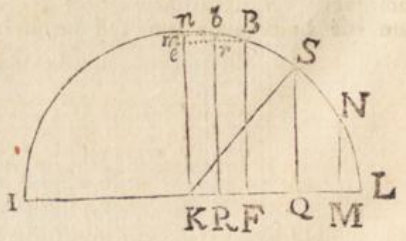
DE MUNDI SYSTEMATE.

## LEMMA I.

*Si* APEPp *terram deſignet uniformiter denſam, centroque* C *& polis* P, p *& æquatore* AE *delineatam; & ſi centro* C *radio* CP *deſcribi intelligatur ſphæra* Pape; *ſit autem* QR *planum, cui recta à centro ſolis ad centrum terræ ducta normaliter inſiſtit; & terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ ſphæra modo deſcriptâ altior eſt, particulæ ſingulæ conentur recedere hinc inde à plano* QR, *ſitque conatus particulæ cujuſque ut ejuſdem diſtantia à plano: Dico primò, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli diſpoſitarum, vis & efficacia ad terram circum centrum ejus rotandam, ſit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod à plano* QR *maximè diſtat, conſiſtentium vim & efficaciam, ad terram conſimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iſte circularis circum axem, in communi ſectione æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

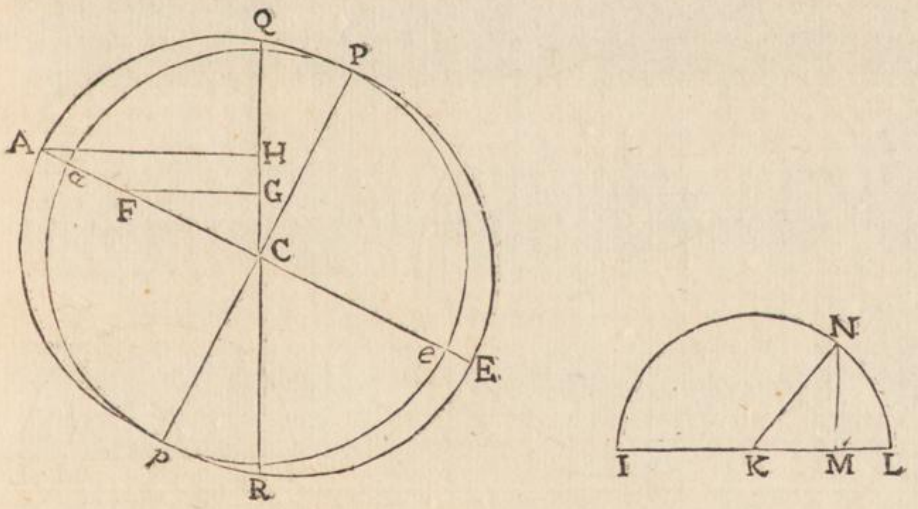
Nam centro *K* diametro *IL* deſcribatur ſemicirculus *INL*. Dividi intelligatur ſemicircumferentia *INL* in partes innumeras æquales, & à partibus ſingulis *N* ad diametrum *IL* demittantur ſinus *NM*. Et (t) ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus

125. (t) 125. * *Et ſumma quadratorum.* Diviſa intelligatur ſemi-circumferentia INL, in particulas æquales innumeras nb, NL, NS, bB &c. erectiſque ſinibus bR, NM, &c. erit ſinus bm, ſeu KR, æqualis ſinui NM, & ità de cæteris (prop. 26. lib. 3. elem.). Quare ſinus omnes ut KR, KF, æquales erunt ſinibus ut NM, SQ, ac proindè ſumma quadratorum ex ſinibus omnibus NM, æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus omnibus KM. Præterea quadratum ſemi-diametri KN, æquale eſt quadratis ſinuum KM, MN. Quare (ob ſummam quadratorum KM,




æqua-

bus $NM$ æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus $KM$, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris $KN$; ideoque ſumma quadratorum ex omnibus $NM$ erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris $KN$. LIBER TERTIUS. PROP. XXXVIII. PROBL. XIX.



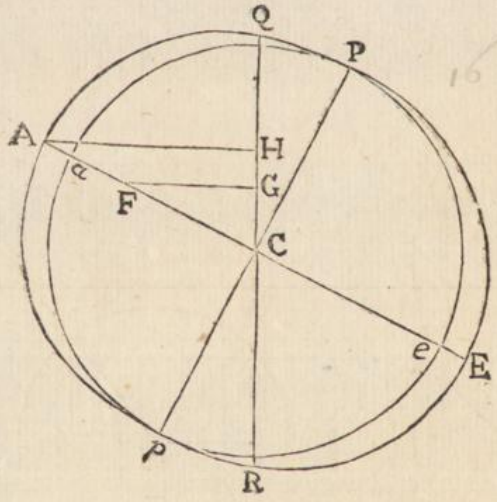

Jam dividatur perimeter circuli $AE$ in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque $F$ ad planum $QR$ demittatur perpendiculum $FG$, ut & à puncto $A$ perpendiculum $AH$. Et vis, quâ particula $F$ recedit à plano $QR$, erit ut perpendiculum illud $FG$ per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam $CG$ (u) erit efficacia particulæ $F$ ad terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco $F$, erit ad efficaciam particulæ in loco $A$, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$,

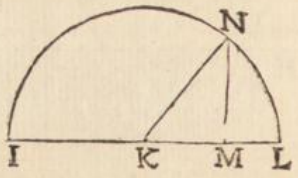
æqualem ſummæ quadratorum NM, ſumma quadratorum ex omnibus ſemidiametris KN, dupla eſt ſummæ quadratorum ex omnibus ſinibus NM, ideòque ſumma quadratorum ex omnibus NM, erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris KN. 125.

(u) * *Erit efficacia.* (47. *lib.* 1.).

De Mundi Systemate.

$HC$, (x) hoc est, ut $FCq$ ad $ACq$; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis $F$ erit ad efficaciam particularum totidem in loco $A$, ut summa omnium $FCq$ ad summam totidem $ACq$, hoc est (per (y) jam demonstrata) ut unum ad duo. *Q. E. D.*



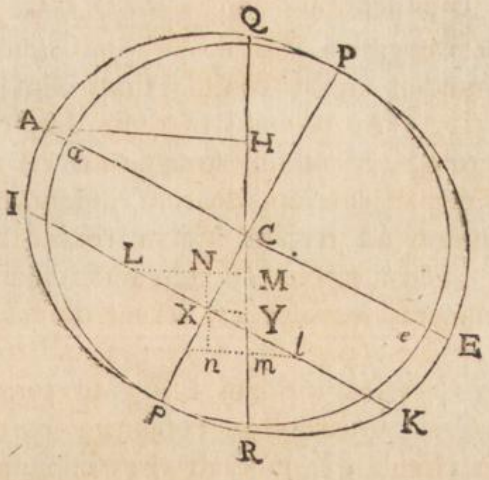

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter à plano $QR$, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem terram, circum axem tam in plano illo $QR$ quam in plano æquatoris jacentem.

Lib. 3. (x) * *Hoc est*, ob triangula ACH, FCG, similia. (y) * *Per jam demonstrata.* (150.).

LEM-

## LEMMA II.

*Iisdem positis: dico secundò quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo* AE *uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*




Sit enim *IK* circulus quilibet minor æquatori *AE* parallelus, sintque *L*, *l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Papæ* sitæ. Et si in planum *QR*, (z) quod radio in solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula *LM*, *lm*: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum *QR*, (a) proportionales erunt perpendiculis illis *LM*, *lm*. Sit

(z) * *Quod radio in Solem ducto.* (Per hyp. Lem. 1.).

(a) * *Proportionales erunt.* (Per hypothes. ejusdem Lem.). 125.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Sit autem recta $Ll$ plano $Pape$ parellela & biſecetur eadem in $X$, & per punctum $X$ agatur $Nn$, quæ parellela ſit plano $QR$ & perpendiculis $LM$, $lm$ occurrat in $N$ ac $n$, & in planum $QR$ demittatur perpendiculum $XY$. (b) Et particularum $L$ & $l$ vires contrariæ, ad terram in contrarias partes rotandam, ſunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc eſt, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$; ſeu $LN \times MC + NM \times MC$ & (c) $LN \times mC - NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ ſeu (d) $2\,LN \times NX$ eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in $A$ conſiſtentium vim $2\,AH \times HC$, (e) ut $LXq$ ad $ACq$. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ ſeu $2\,XY \times CY$ ad particularum earumdem in $A$ conſiſtentium vim $2\,AH \times HC$, ut $CXq$ ad $ACq$. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum $L$ & $l$ ſimul ſumptarum vis ad terram rotandam eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco $A$ conſiſtentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad $ACq$. Sed ſi circuli $IK$ circumferentia $IK$ dividatur in particulas innumeras æquales $L$, erunt omnes $LXq$ ad totidem $IXq$ ut 1 ad 2 (per lem. 1.) atque ad totidem $ACq$, ut $IXq$ ad $2\,ACq$; & totidem $CXq$ ad totidem $ACq$ ut $2\,CXq$ ad $2\,ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli $IK$ ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco $A$, ut $IXq - 2\,CXq$ ad $2\,ACq$: & propterea (per lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli $AE$, ut $IXq - 2\,CXq$ ad $ACq$.

Jam

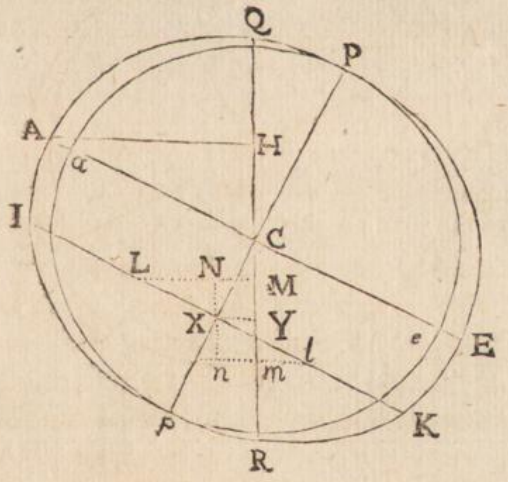
225. (b) * *Et particularum L & l.* (Ex Dem. in Lem. præced.).

(c) * *Et* $LN \times mC - NM \times mC$. Nam ob ſimilitudinem triangulorum LN: NM = ln: nm, ſed eſt NM = nm; quare LN = ln, ideóque $ln \times mC - nm \times mC = LN \times mC - NM \times mC$ & ob $mC = mM + MC$, erit virium illarum differentia $= LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$.

(d) * *Seu* $2\,LN \times NX$. Nam, ob ſimilitudinem triangulorum, eſt NX = nX, ideóque Nn ſeu Mm = 2 NX, ac proinde $LN \times Mm = 2\,LN \times NX$.

(e) * *Ut* $LXq$ *ad* $ACq$. Eſt enim LN: AH = LX: AC & NX: HC = LX: AC, ideóque per compoſitionem rationum $LN \times NX : AH \times HC = LXq : ACq$. Simili argumento patet partem nega-

Jam verò si sphæræ diameter $P p$ dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem $IK$; (f) materia in perimetro circuli cujusque $IK$ erit ut $IXq$: ideoque vis materiæ illius ad terram rotandam, erit ut $IXq$ in $IXq - 2CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli $AE$ perimetro consisteret, esset ut $IXq$ in $ACq$. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi $AE$ consistentis, ut omnia $IXq$ in $IXq - 2CXq$ ad totidem $IXq$ in $ACq$, (g) hoc est, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in $ACq$, id est, ut omnia $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$ ad



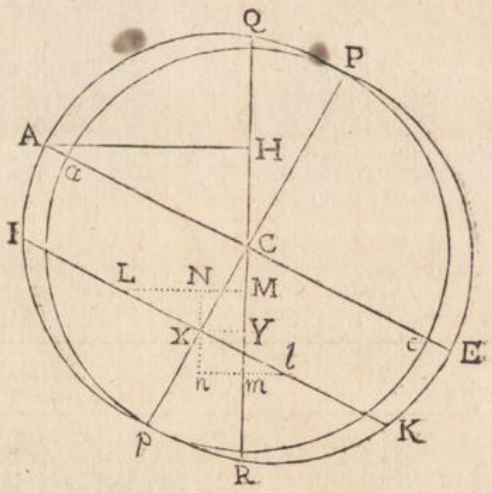

negativam esse ad vim particularum earumdem in A consistentium ut C X q ad A C q.

(f) * *Materia in perimetro circuli.* Sunt enim zonæ sphæricæ similes ut quadrata radiorum.

(g) *Hoc est, ut omnia* &c. Nam ex centro C, ad punctum I, ducta intelligatur recta C I, erit $IX^2 = CI^2 - CX^2$, sed est $CI = AC$, quare $IX^2 = AC^2 - CX^2$, ac proinde $IXq$ in $(IXq - 2CXq) = ACq - CXq$ in $ACq - 3CXq$. 125.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc est, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio est $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio est $ACqq - ACq \times CXq$; ac (h) proinde per methodum fluxionum, ut $ACqq \times$




$CX - \frac{4}{5} ACq \times CX$ *cub.* $+ \frac{3}{5} CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{4}{5} ACq \times CX$ *cub.* id est, si pro $CX$ scribatur tota $Cp$ vel $AC$, ut $\frac{4}{15} ACqc$ ad $\frac{2}{5} ACqc$. hoc est, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

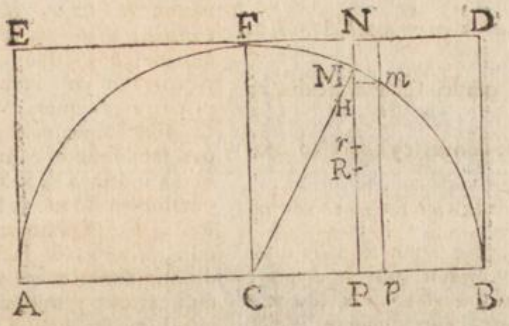
LEM.

225. (h) * *Ac proindè per methodum fluxionum.* Quantitates $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$ & $ACqq - ACq \times CXq$, concipiantur multiplicatæ per fluxionem rectæ $CX$, sumptisque fluentibus, erit fluens prioris quantitatis $ACqq \times CX - \frac{4}{5} ACq \times CX$ cub. $+ \frac{3}{5} CXq$ cub. fluens autem posterioris quantitatis fiet $ACqq \times CX - \frac{1}{3} ACq \times CX$ cub. & ut habeatur efficacia tota, pro $CX$ scribatur $Cp$ vel $AC$, erit fluens prior ad posteriorem ut $\frac{4}{15} ACq$ cub. ad $\frac{2}{5} ACq$ cub.

## (i) LEMMA III.

*Iisdem positis: dico tertiò quod motus terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000.*

Est enim motus cylindri circum axem suum immotum revolventis ad motum sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet

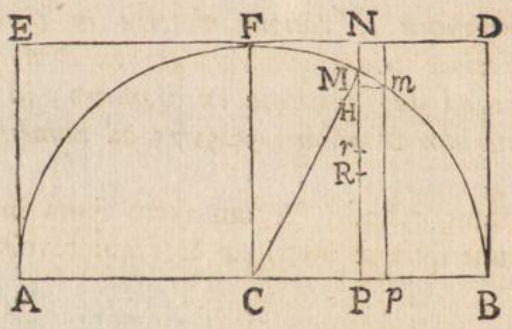



(i) 126. * *Lemma* demonstratur. Revolutione semicirculi A F B, & rectanguli eidem circumscripti A E D B, describantur sphæra & cylindrus circumscriptus. Sit radius C B = 1, peripheria circuli hoc radio descripti = $n$, abscissa C P = $x$, ordinata P M = $y$, quælibet ipsius pars P R = $v$, R r = $dv$; peripheria circuli radio P R, descripti = $nv$, annulus circularis ex revolutione lineolæ R r = $nv\,dv$, velocitas puncti R = $v$, motus annuli prædicti = $nv^2dv$, motus totius circuli radio P R, descripti = $\frac{1}{3}nv^3$, motus circuli radio P M, descripti = $\frac{1}{3}ny^3$, motus circuli radii P N descripti = $\frac{1}{3}n$, motus cylindri totius = $\frac{2}{3}n$. 1263

Sit P p = $dx$ motus annuli solidi revolutione figuræ P M m p descripti = $\frac{1}{3}ny^3\,dx = \frac{1}{3}n\,dx \times (1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}n\,dx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}nx^2\,dx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}}$. Undè motus solidi revolutione figuræ C F M P, descripti = $\frac{1}{4}n \int dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$

DE MUNDI SYSTEMATE.

libet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis: & motus cylindri ad motum annuli tenuiſſimi, ſphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum




$+\frac{1}{12}nx(1-xx)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}n\times CFMB=\frac{1}{32}nn$, adeóque motus ſphæræ totiùs $=\frac{1}{16}nn$. Eſt igitur motus cylindri ad motum ſphæræ ut $\frac{2}{3}n$ ad $16nn$, ſeu ut 16 ad $\frac{3}{2}n$, hoc eſt, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis ſibi inſcriptis; nam quadratum diametri 2 eſt $4$ & $4\times4=16$, circulus verò cujus diameter 2, & peripheria $n$, eſt $\frac{1}{2}n$ & tres hujuſmodi circuli ſunt $\frac{3}{2}n$.

126.

Materia annuli tenuiſſimi ſphæram & cylindrum ad communem eorum contactum F ambientis ſit $m$, & velocitas erit ut CF, ſive ut 1, adeóque motus $=m$, & proinde motus cylindri ad motum annuli illius ut $\frac{2}{3}n$ ad $m$, ſive ut $2n$ ad $3m$, hoc eſt, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; baſis enim cylindri eſt circulus $\frac{1}{2}n$ & altitudo diameter AF $=2$, ideóque cylindrus $=n$. Prædicti annuli materia ſit $aan$, ideóque motus ipſius circà axem cylindri $=aan$. Revolvatur jam idem annulus circà proprium axem quem exhibeat diameter AB; & particula materiæ annuli reſpondens arcui infinitеſimo Mm, erit $a^2\times Mm$ & hujus motus $a^2y\times Mm=a^2dx$, ob proportionem Mm : mH $(dx)$ = CM $(1)$ : PM $(y)$. Quarè motus partis FM, annuli eſt $a^2x$, & factâ $x=1$, motus quadrantis annuli $=a^2$ eſt motus totius annuli circà proprium axem $=4a^2$. Eſt igitur motus annuli circà axem cylindri ad ejuſdem motum circà axem proprium ut $aan$, ad $4aa$, ſeu ut $n$ ad 4, hoc eſt, ut circumferentia circuli $n$, ad duplum diametri 4. Quamobrem motus cylindri eſt ad motum ſphæræ

ut - - - - - 16 ad $\frac{3}{2}n$

motus annuli circà axem cylindri eſt ad motum cylindri ut $m$ ad $\frac{2}{3}n$

& motus annuli circà axem proprium eſt ad ejus motum circà axem cylindri ut 4 ad - $n$.

Quarè, per compoſitionem rationum & ex æquo, motus ſphæræ circà axem proprium eſt ad motum annuli ut $n^3$ ad $64m$.

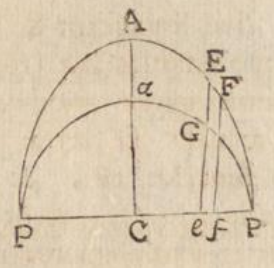
plum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iſte circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejuſdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HY-

64 *m*. Eſt autem $n^3$ ad 64 *m* ut $\frac{2n}{3} \times \frac{3n^2}{16}$ ad $8 \times m$, ſed $\frac{2n}{3}$, eſt quantitas materiæ in terrâ; *m*, quantitas materiæ in annulo $\frac{3n^3}{16}$ eſt ſumma trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli AFB, & 8 eſt ſumma duorum quadratorum ex diametro AB. Quare motus terræ totius circum axem jam ante deſcriptum ex motibus particularum omnium compoſitus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcumque ad duo quadrata ex diametro, id eſt, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000, poſitâ ratione diametri ad peripheriam ut 1 ad 3.141 quamproxime. Q. E. D.

127. Lemma. Semiaxe majori CA & minori CP, deſcribatur ſemiellipſis PAp, atque radio CP, deſcribatur ſemicirculus Pap, circà axem Pp revolvi concipiantur tum ſemicirculus tum ſemiellipſis, erit ſphæra motu ſemicirculi genita ad ſphæroidem ſemiellipſeos revolutione deſcriptam ut $Ca^2$ ad $CA^2$. Sit $pe = x$, $Ge = y$, $Cp = r$, $CA = a$, exprimatque $\frac{r}{p}$ rationem radii ad peripheriam, erit $\frac{py}{r}$, peripheria circuli radio Ge deſcripti. Præterea (ex naturâ ellipſeos 248 lib. 1.) $Ca\ (r) : CA\ (a) = Ge\ (y) : Ee$, ideóque $Ee = \frac{ay}{r}$, hinc peripheria circuli radio Ee deſcripti $= \frac{pay}{rr}$, ejuſdemque circuli area $= \frac{pa^2y^2}{2r^3}$; area autem circuli radio Ge deſcripti eſt $\frac{py^2}{2r}$. Quarè fluxio ſphæroidis fit $\frac{pa^2y^2dx}{2r^3}$, & fluxio ſphæræ eſt $\frac{py^2dx}{2r}$. Sed (ex naturâ circuli) $y^2 = 2rx - xx$; hinc fluxio ſphæroidis eſt $\frac{2pa^2rxdx - pa^2x^2dx}{2r^3}$; & fluxio ſphæræ $\frac{2prxdx - pxxdx}{2r}$, ſumptiſque fluentibus, erit fluens prima ad alteram ut $\frac{pa^2rx^2}{r^3} - \frac{pa^2x^3}{6r^3}$ ad $\frac{prx^2}{2r} - \frac{px^3}{6r}$. Jam loco *x*, ſubſtituatur 2*r*, erit ſphærois tota, ad totam ſphæram ut $\frac{4pa^2r^3}{r^3} - \frac{8pa^2r^3}{6r^3}$ ad $\frac{2pr^3}{r} - \frac{8pr^3}{6r}$, hoc eſt, ut $a^2$, ad $r^2$, ſivè in ratione duplicatâ $CA^2$ ad $Ca^2$. Simili argumento patet ſphæram ellipſeos ſemiaxe majori tanquam radio deſcriptam eſſe ad ellipſoidem in ratione duplicatâ ſemiaxis majoris ad minorem.

127.



De Mundi Systemate.

## HYPOTHESIS II.

*Si annulus prædictus terrâ omni reliquâ ſublatâ, ſolus in orbe terræ, motu annuo circa ſolem ferretur, & interea circa axem ſuum, ad planum eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus punctorum æquinoctialium, ſive annulus iſte fluidus eſſet, ſive is ex materiâ rigidâ & firmâ conſtaret.*

## PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

*Invenire præceſſionem æquinoctiorum.*

Motus mediocris horarius nodorum lunæ in orbe circulari, ubi nodi ſunt in quadraturis, erat $16^{''}. 35^{'''}. 16^{iv}. 36^{v}$, & hujus dimidium $8^{''}. 17^{'''}. 38^{iv}. 18^{v}$. (ob rationes ſupra explicatas) eſt motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto ſidereo $20^{gr}. 11'. 46^{''}$. Quoniam igitur nodi lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}. 11'. 46^{''}$. in antecedentia; & ſi plures eſſent lunæ, motus nodorum cujuſque (per corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) forent ut tempora periodica; ſi luna ſpatio diei ſiderei juxta ſuperficiem terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}. 11'. 46^{''}$ ut dies ſidereus horarum 23. 56′ ad tempus periodicum lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id eſt, ut 1436 ad 39343. Et par eſt ratio nodorum annuli lunarum terram ambientis; ſive lunæ illæ ſe mutuo non contingant, ſive liqueſcant & in annulum continuum formentur, ſive denique annulus ille rigeſcat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iſte, quoad quantitatem materiæ, æqualis ſit terræ omni *P a p A P e p E* quæ globo *P a p e* ſuperior eſt; & quoniam globus iſte ad terram illam ſuperiorem (k) ut *a C qu.* ad *A C qu. − a C qu.* id eſt (cum terræ ſemidiameter minor *P C* vel *a C* ſit ad ſemidiametrum majorem *A C* ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; ſi annulus iſte terram ſecundùm æquatorem cingeret & uterque ſimul

127. (k) * *Ut a C qu. ad A C qu − a C qu.* Globus iſte eſt ad terram totam ut $a C^2$, ad $A C^2$ (Lem. præc.) ideóque annulus materiæ inter globum & terram interceptus, hoc eſt, exceſſus materiæ in terrâ ſuprà materiam in globo eſt ut $AC qu. - a C qu.$

mul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223, ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: (l) motus qui

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROBL. XX.

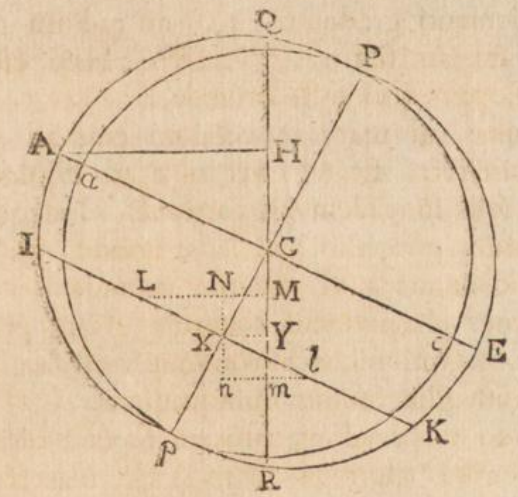



fig. 18

restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo & globo compositi ad motum $20^{gr.}\ 11'.\ 46''.$, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi lunarum (ut supra explicui) atque (m) ideo quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires $3\,IT$ *in fig. pag.* 411. & 413.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano $QR$, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem in morem figuræ $Pap\,APep\,E$ ad superiorem

(l) * *Motus qui restabit in annulo,* (52. lib. 1.).

(m) * *Atque ideò.* (vid. not. 101. 127. lib. hujus).

De Mundi Systemate.

illam terræ partem conſtituendam ſpargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regreſſus jam eſſet ad $20^{gr.}\ 11'.\ 46''$, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret $9''.\ 56'''.\ 50^{iv.}$

Cæterum hic motus (n) ob inclinationem æquatoris ad planum eclipticæ minuendus, idque in ratione ſinus 91706 (qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$.) ad radium 100000. Quâ ratione motus iſte jam fiet $9''.\ 7'''.\ 20^{iv.}$ Hæc eſt annua præceſſio æquinoctiorum à vi ſolis oriunda.

Vis autem lunæ ad mare movendum erat ad vim ſolis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et (o) vis lunæ ad æquinoctia movenda eſt ad vim ſolis in eâdem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præceſſio à vi lunæ oriunda $40''.\ 52'''.\ 52^{iv.}$, ac tota præceſſio annua à vi utrâque oriunda $50''.\ 00'''.\ 12^{iv.}$ Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præceſſio æquinoctiorum ex obſervationibus aſtronomicis eſt annuatim minutorum ſecundorum plus minus quinquaginta.

Si (p) altitudo terræ ad æquatorem ſuperet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & præceſſio æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Deſ-

227. (n) * *Ob inclinationem.* Pro majori vel minori inclinatione plani æquatoris ad planum Eccliptiæ minorem eſſe vel majorem regreſſum æquinoctiorum patet ex not. 101. lib. hujus. Illud autem decrementum obtinetur, ſi minuatur motus in ratione ſinûs complementi inclinationis ad radium. Sed planum æquatoris inclinatur ad planum Eccliptiæ gradibus $23\frac{1}{2}$ circiter, quare cum motus æquinoctiorum ſit tardiſſimus, ſatis accurate minuitur motus ille in ratione ſinûs 91706. qui ſinus eſt complementi graduum $23\frac{1}{2}$ ad radium 100000.

(o) * *Et vis Lunæ.* (Cor. 18. 19. Lib. I.).

(p) * *Si altitudo terræ.* Quò enim altior erit materia ad æquatorem eò levior ſit oportet ut materiam quæ eſt verſus polos in æquilibrio poſſit ſuſtinere. Cæterum quia in tribus non ſatis Laudandis Diſſertationibus tom. 3. adjunctis, nova occurrunt quamplurima de figurâ telluris, de viribus Solis & Lunæ, præceſſionem æquinoctiorum, eâdem quâ hactenus factum eſt, methodo, accuratiùs licebit computare.

Deſcripſimus jam ſyſtema ſolis, terræ, lunæ, & planetarum: ſupereſt ut de cometis nonnulla adjiciantur.

## LEMMA IV.

*Cometas eſſe lunâ ſuperiores & in regione planetarum verſari.*

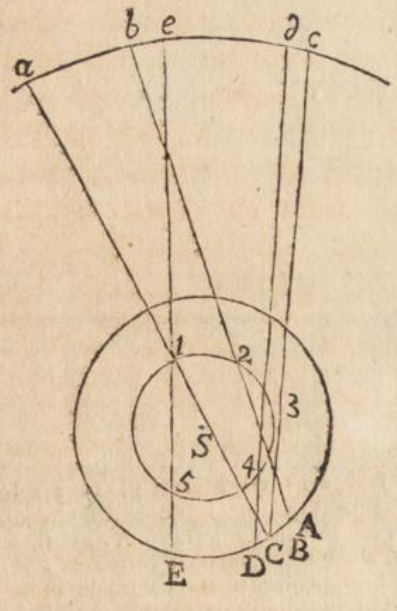
(q) Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas ſupra regiones ſublunares, ſic (r) ex parallaxi annuâ convincitur eorum deſcenſus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum, ſunt omnes ſub exitu apparitionis aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi terra eſt inter ipſos & ſolem; at juſto celeriores ſi terra vergit ad oppoſitionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi terra verſatur inter ipſos & ſolem; & juſto tardiores vel retrogradi, ſi terra ſita eſt ad contrarias partes. (f) Contingit hoc maximè ex motu terræ

(q) * *Ut defectus parallaxeos diurnæ.* Parallaxis diurna cometæ eſt differentia locorum in quibus cometa ex centro terræ, vel ex eo ſuperficiei terræ loco ad quem cometa verticalis eſt & ex quovis alio loco ſuperficiei terræ obſervatus, inter ſtellas fixas refertur. Hæc parallaxis diurna, maxima eſt in Lunâ, ubi ea in horizonte conſtituitur, inde verò magis magiſque decreſcit quò altius Luna ſuprà horizontem elevatur. Quia verò hæc parallaxis non obſervatur in cometis, patet eos eſſe Lunâ ſuperiores (30.).

(r) * *Sic ex parrallaxi annuâ.* Parallaxis annua ex motu circà ſolem oritur, hæcque reſpicit longitudinem cometæ, hoc eſt, diſtantiam ejus in Eccliptica à primo arietis puncto. Quomodò ex hâc parallaxi Newtonus colligat cometas deſcendere in regiones planetarum explicabitur in decurſu.

(f) 128. * *Contingit hoc maximè.* Sit S, Sol A B E, orbita telluris & a b c, ſphæra fixarum ad quam Planetæ referantur, exhibeatque 1, 2, 3, 4, Planetæ alicujus inferioris orbitam. Moveatur terra ex A, per B, in C, & intereà Planeta ex 1, per 2, in 3, hic Planeta ex a, per b, in c, ſecundum ordinem ſignorum progredi videbitur. At ſi terra moveatur ex

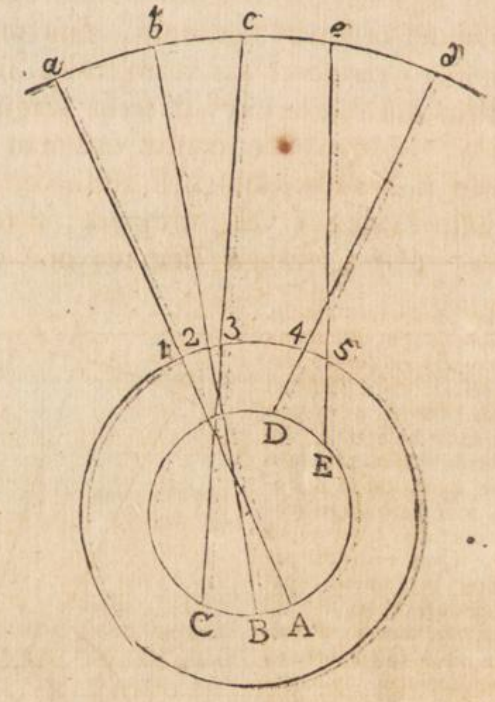
128.




C, per D, in E & planeta ex 3, per 4 in 5, idem planeta per d, in e, retrogredi videbitur.

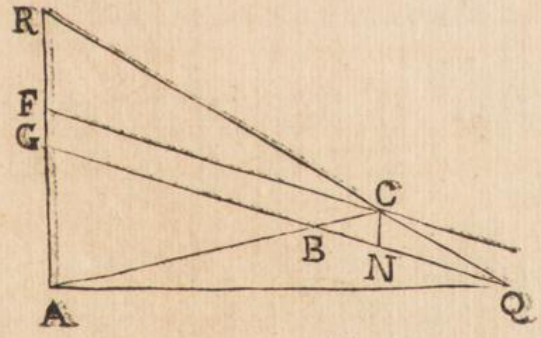
DE MUNDI SYSTEMATE.

in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celerius. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, & motu angulari circa solem tantò celeriùs fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta




122. Jam verò repræsentet 1, 2, 3 orbem planetæ superioris, sicque A B C, orbis terræ. Moveatur terra ex A, per B & C in D, planeta autem superior ex 1 per 2 & 3 in 4, hic planeta secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si terra moveatur ex D in E, planeta verò ex 4 in 5, idem planeta ex loco d in e, retrogredi apparebit. Quia verò planetæ modò in consequentia, modò in antecedentia ferri videntur, necessum est ut modò tardiores, modò celeriores appareant, atque in ipso veluti motuum æquilibrio, neque in consequentia neque in antecedentia sensibiliter pergant sed quasi stationarii videantur. Hæc itaque planetarum phænomena ex motu terræ maximè contingunt, oriri tamen possunt etiam aliquantulum ex inæquali planetarum motu.

ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa è terrâ ſpectatus ob motum ſuum tardiorem apparet eſſe retrogradus; ſin terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu terræ) fit ſaltem tardior. At ſi terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione



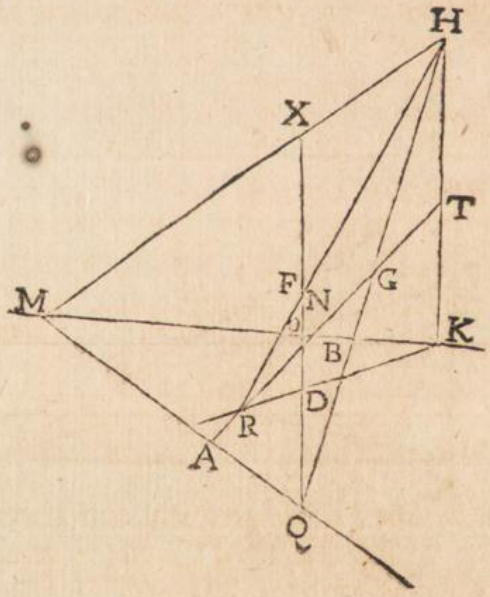

129. Lemma. Datis poſitione tribus rectis QA, QB, QC, ex eodem puncto Q, ductis & in eodem plano jacentibus, ducere rectam AC, ex puncto quolibet A, ità ut partes AB, CB, ſint in datâ ratione m, ad n.

Ex A ducatur utcum que recta AR, rectis QC, QB, productis occurrens in G, R, capianturque GF, AG, in datâ ratione m ad n (prop. 12. lib. 6. elem.). Per F, agatur FC parallela rectæ GQ, ipſique QR occurrens in C, erit juncta AC, recta quæſita. Nam ob parallelas FC, GQ, eſt AB: BC = AG: GF, ſed (per conſtr.) GF, AG, ſunt in datâ ratione m ad n. Quare eandem inter ſe rationem habent partes interceptæ AB, BC.

Idem fit trigonometricè. Nam in triangulo AQG, datur latus AG, & præterea noti ſunt anguli AQG, QAG, ideóque dabitur AG, ac proinde innoteſcet etiam GF, datam habens rationem ad AG (per conſtr.) quare dabitur recta CN, æqualis & parallela rectæ GF. Rurſus in triangulo QNC, cognitis angulo CQN, & angulo CNQ, qui æqualis eſt angulo FGN, hoc eſt, anguli prius inventi AGQ, complemento ad duos rectos, atque inſuper dato latere CN, innoteſcet CQ, tandem in triangulo ACQ, datis lateribus QA, QC, & angulo intercepto AQC, invenientur latus CA atque anguli QAC, QCA, id eſt, magnitudo & poſitio rectæ AC. 129.

DE MUNDI SYSTEMATE.

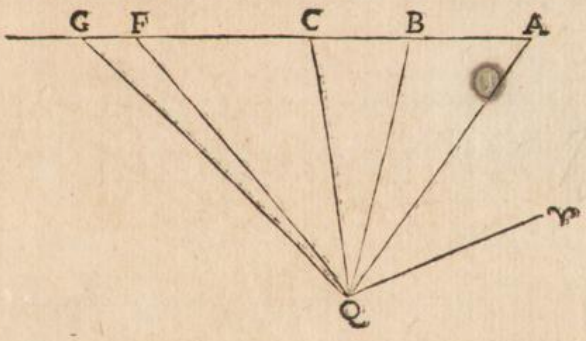
tione vel motu retrogrado distantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto $\curlyvee Q A$, $\curlyvee Q B$, $\curlyvee Q C$ observatæ tres longitudines cometæ sub initio motus, sitque $\curlyvee Q F$ longitudo ultimò obser-




130. 130. Lemma. Datis positione quatuor rectis QA, QB, RB, RD, in eodem plano jacentibus ducere rectam MK, ità ut MO, sit ad ON ut $m$ ad $n$, & ON ad NK ut $n$ ad $r$. Capiatur BG, ad BA, sicut $n+r$ ad $m$. Item capiatur FB ad BD ut $m+n$ ad $r$. Junctæ rectæ QG, RF, producantur donec concurrant. Per punctum concursus H, ducatur HK parallela rectæ BD, itemque HM, parallela rectæ RB, erit MK recta quæsita. Nam propter parallelas HM, TN (per constr.) erit KN ad NM, ut KT ad TH. Sed quia HK parallela est rectæ FD, KT est ad TH ut DB ad BF, hoc est, (per constr.) ut $r$ ad $m+n$, ac proinde KN est ad NM ut $r$ ad $m+n$. Rursus ob parallelas HK, OX, erit MO ad OK ut MX ad XH, sed quia HM, parallela est rectæ AG, erit MX ad XH ut AB ad BG, id est, (per constr.) ut $m$ ad $n+r$. Est igitur MO ad OK ut $r$ ad $m+n$. Quare, dividendo & ex æquo, tres rectæ MO, ON, NK, sunt in eâdem ratione cum tribus quantitatibus $m$, $n$, $r$. Idem fit trigonometricè. Nam rectarum quatuor datarum QA, QB, RB, RD, dantur intersectiones omnes ac proindè rectæ QB, DB, RB, BA, RD, sunt magnitudine datæ. Præterea dantur etiam BF & BG, utpotè habentes datam rationem ad BD & RA. Jam verò in triangulo RBF, datis lateribus BR, BF, cum angulo intercepto RBF, dantur latus RF & angulus RFB ac proindè etiam datur angulus QFH.

Simi-

observata, ubi cometa videri desinit. (a) Agatur recta $ABC$, cujus partes $AB$, $BC$ rectis $QA$ & $QB$, $QB$ & $QC$ interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur $AC$ ad $G$, ut sit $AG$ ad $AB$ ut tempus inter observationem primam & ultimam ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur $QG$. Et si cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque terra vel quiesceret,



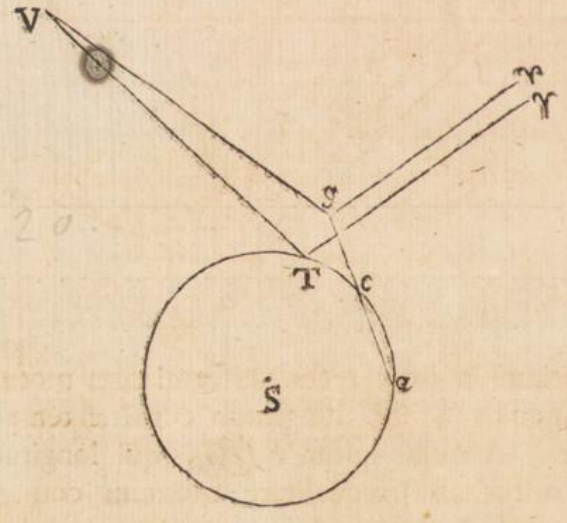

ceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progrederetur; foret angulus $\curlyvee QG$ longitudo cometæ tempore observationis ultimæ. Angulus igitur $FQG$, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, si terra & cometa in contrarias partes moventur, additur angulo $\curlyvee QG$, & sic motum apparentem cometæ

Similiter in triangulo QBG, datis lateribus QB, BG, & angulo QBG, dabitur angulus BQG; quare in triangulo QFH, datis duobus angulis QFH, FQH, cum latere QF, quod est summa vel differentia rectarum datarum QB, QF innotescet latus QH. Tandem in triangulo QHM, dato angulo HQM qui est summa vel differentia notorum angulorum BQA, HQB, datoque angulo QMH qui æqualis est angulo dato QAB, simulque noto latere QH, innotescent latera HM, QM. Simili prorsus modo invenientur latera RK, HK, in triangulo RKH. Igitur in triangulo MHK, notis lateribus HM, HK, & angulo intercepto MHK, qui æqualis est angulo dato ABQ, innotescent anguli HMK, HKM & basis MK. Datis autem angulis HMQ, HMK, dabitur horum summa vel differentia QMK, hoc est, positio rectæ MK, ob rectam QM, positione datam. Simili modo rectæ QO, RN, RK & anguli quos MK cum his rectis efficit, trigonometrice inveniuntur. 130

(a) * *Agatur recta ABC.* (129).

DE MUNDI SYSTEMATE

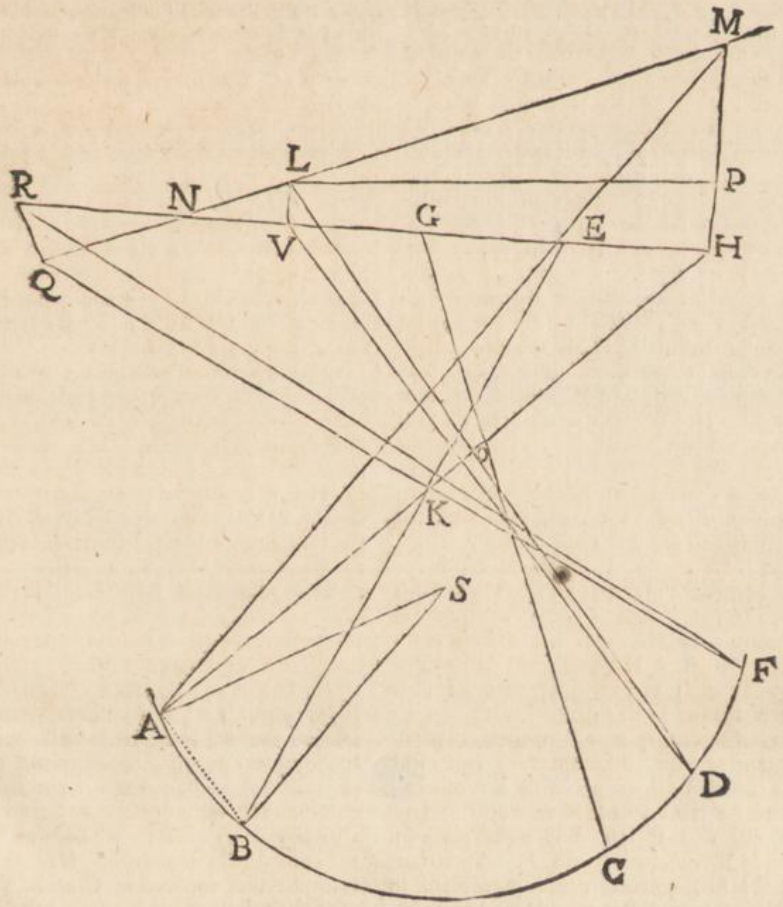
metæ velociorem reddit: ſin cometa pergit in eaſdem partes cum terrâ, eidem ſubducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti (b) modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu terræ, & idcirco pro parallaxi cometæ meritò habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero cometæ ex hâc parallaxi ſic colligitur. Deſignet *S* ſolem, *a c T* orbem magnum, *a* locum terræ in obſervatione primâ, *c* locum




terræ in obſervatione tertiâ, *T* locum terræ in obſervatione ultimâ, & T♈ lineam rectam verſus principium arietis ductam. Sumatur angulus ♈*TV* æqualis angulo ♈*QF*, hoc eſt, æqualis longitudini cometæ ubi terra verſatur in *T*. Jungatur *a c*, & producatur ea ad *g*, ut ſit *ag* ad *ac* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem terra tempore obſervationis ultimæ, motu in rectâ *a c* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur *g*♈ ipſi *T*♈ parallela, & capiatur angulus ♈*gV* angulo ♈*QG*

130. (b) * *Uti modò expoſui.* (128).

$\Upsilon QG$ æqualis, erit hic angulus $\Upsilon gV$ æqualis longitudini cometæ è loco $g$ ſpectati; & angulus $TVg$ parallaxis erit, quæ oritur à tranſlatione terræ de loco $g$ in locum $T$: ac proinde $V$ locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic (c) autem locus $V$ orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet. Idem




(c) 131. * *Hic autem locus V.* Recta HV, referat veſtigium cometæ in plano Eccliptícæ, ſintque V, G, E, H, quatuor cometæ loca in plano Eccliptícæ præcedenti methodo inventa. Sit S, ſol, ABCD, orbis magnus, ſintque A, B, C, D, quatuor terræ loca ad tempora obſervationum nota. In triangulo ASB, dantur latera SA, SB, daturque angulus ASB, differentia ſcilicet locorum terræ è ſole viſorum; quare dabuntur anguli SAB, SBA, notaque erit in partibus ſemidiametri orbis magni recta AB, chorda nempe arcûs à tellure interim percurſi. Rurſus in triangulo KAB, dantur omnes anguli, nam datur angulus KAB, qui eſt ſum- 131.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Idem colligitur ex curvaturâ viæ cometarum. (d) Pergunt hæc

132. ſumma vel differentia notorum angulorum SBA, SBK. Quare datur ratio laterum AK, AB, ſed data eſt ratio rectarum SA, AB, dabitur itaque ratio SA ad KA. At (131.) nota eſt ratio inter KO & KH, innoteſcet igitur ratio inter SA & KH; Quarè datur AH, diſtantia cometæ à terrâ in partibus ſemidiametri orbis magni. Simili planè modo invenientur aliorum locorum diſtantiæ à terrâ E, G, V, hic autem locus V, ubi cometa videri deſinit, ex datis obſervationibus inito computo per methodum expoſitam, orbe Jovis inferior eſſe ſolet.

132. Cometæ veſtigium in plano Eccliptiæ jam determinavimus, ut autem veram obtineamus cometæ trajectoriam, ex loco H, ad planum Eccliptiæ erecta intelligatur normalis HM, tangens anguli latitudinis cometæ ad datum obſervationis tempus poſito AH, radio, eritque M, locus verus cometæ ad tempus datum; Eſt enim poſitio rectæ AH, ejus longitudo & angulus MAH, latitudo. Similiter in loco V, ad idem Eccliptiæ planum erigatur normalis VL, æqualis tangenti latitudinis ad idem tempus obſervatæ, ſumpto DV, pro radio, erit L, locus verus cometæ, ideóque juncta recta LM, eſt ipſa trajectoria quæſita. Patet autem diſtantiam loci M, ab A, ſivè rectam AM, eſſe ad rectam AH, ut ſecans latitudinis in H, ad radium, & ità porrò de aliis cometæ locis.

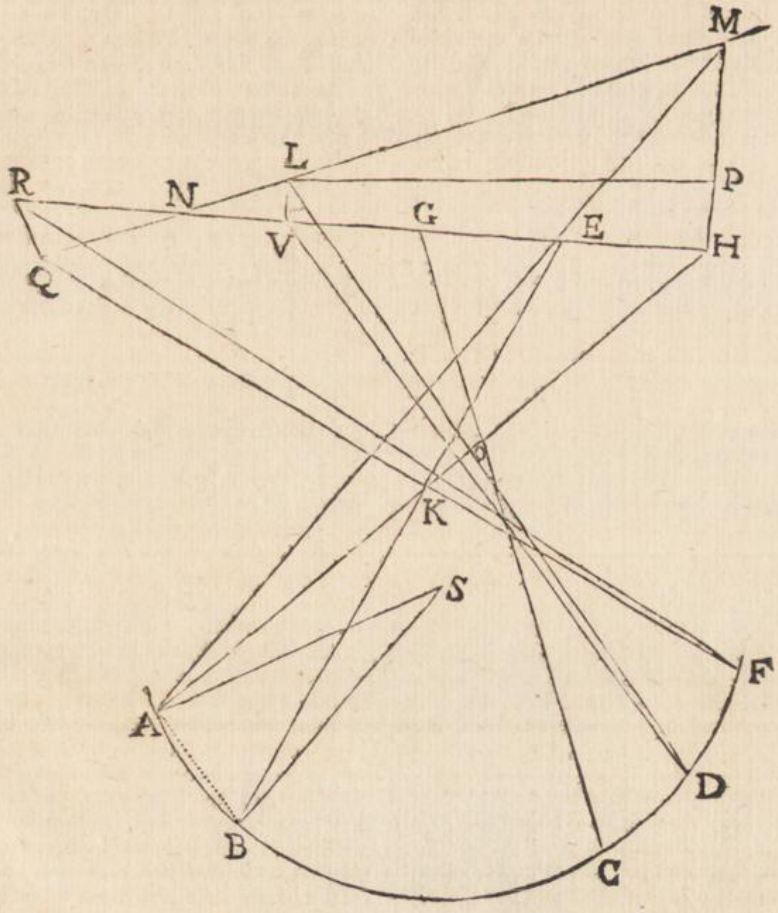
133. Cætera quæ ad motum cometæ pertinent facilè definientur. Invenitur LM, recta ſcilicet percurſa à cometa, dum tellus ab A ad D movetur. Ducatur enim LP ipſi VH parallela cum rectâ ME concurrens in P. In triangulo PLM, præter angulum rectum in P, datur latus LP, æquale lateri VH, atque etiam datur latus PM, æquale differentiæ rectarum datarum MH, LV, quarè dabitur LM. Producatur ML, donec cum HV, concurrat in N, erit N nodus. Præterea NV erit ad VL, ut VH ad PM, itemque LN ad LV ut LM ad MP, & ideò dabuntur LN, LV, capiatur tempus quod ſit ad tempus inter obſervationem in M, & obſervationem in L, ut NL ad LM, habebitur tempus inter obſervationem in L, & appulſum cometæ ad nodum, cum enim cometa in lineâ rectâ uniformiter moveri ſupponatur, tempora ſunt ut ſpatia. Dabitur quoque locus cometæ in nodo verſantis, cum enim detur punctum N, & propter tempus cognitum inter obſervationem in L, & appulſum cometæ ad nodum, detur quoque locus terræ pro hoc momento, dabitur poſitio rectæ hæc puncta jungentis, hoc eſt longitudo cometæ in nodo exiſtentis. Tandem ob datam diſtantiam nodi à loco V datamque latitudinem cometæ in eodem loco, dantur in triangulo ſphærico rectangulo latera duo circà angulum rectum ac proinde innoteſcit inclinatio hypothenuſæ, id eſt, ſemitæ ipſius cometæ ad Eccliptiam.

134. Ex dictis colligitur quâ ratione ad tempus quodlibet propoſitum definiri poſſint locus cometæ è terrâ viſus, illiuſque diſtantia à terrâ. Determinentur ut ſuprà veſtigium orbitæ in plano Eccliptiæ HEVR, ipſaque vera cometæ orbita MLNQ. Capiatur HR ad HV, ut ſpatium inter obſervationem primam tempuſque datum ad ſpatium inter obſervationem primam & quartam. Dato terræ loco ad tempus propoſitum, putà F, datur poſitio rectæ FR, ac proinde datur longitudo cometæ quæſita (132). Præterea fiat RQ ad RN, ſicut MH ad HN, patet dari latitudinem cometæ ad tempus datum (loc. cit.). His autem datis, obtineri poteſt diſtantia cometæ à terrâ (ibid.) in hâc ergò hypotheſi quod cometæ in lineis rectis uniformiter moveantur, determinari poſſunt præcipua motûs cometarum elementa. Hâc de re conſulat Lector opuſculum Clariſſ. Viri Dominici Caſſini de cometâ an 1664., Davidis Gregorii Aſtronomiam Phyſicam & Caſſini filii Theoriam cometarum in monumentis Pariſ. an. 1727.

(d) * *Pergunt hæc corpora.* Eſt & alia parallaxis proveniens ex motu terræ circà Solem. Hæc latitudinem cometarum reſpicit, hoc eſt, diſtantiam eorum ab Eccliptiçâ verſus Boream aut auſtrum, undè fit ut cometæ in ſphærâ fixarum à curſu cir-

hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa, quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum






circulari deflectere & lineam admodum irregularem videantur describere. Cum enim planum in quo cometa movetur, cum plano Ecclipticæ in quo terra fertur, non coincidat, cometa modò suprà Ecclipticam in Septentrionem ascendit, modò infrà Ecclipticam in austrum descendit. Quia tamen in eodem plano semper incedit, orbem circularem, tellure quiescente, videretur describere, sed quoniam tellus ipsa movetur in plano Ecclipticæ, cometa pro diversis terræ locis observatus, modò versùs Boream altius ascendere, modò versùs austrum inferius descendere apparebit. Observationibus compertum est cometas propemodum in

DE MUNDI SYSTEMATE.

totum apparentem, deflectere ſolent ab his circulis, & quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quod reſpondet motui terræ; & inſignis ejus quantitas, meo computo, collocavit diſparentes cometas ſatis longe infra jovem. Unde conſequens eſt quod in perigæis & periheliis, ubi propius adſunt, deſcendunt ſæpius infra orbes Martis & inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum (e) ex luce capitum. Nam corporis cœleſtis à ſole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur ſplendor in quadruplicatâ ratione diſtantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis diſtantiam à ſole, & in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde ſi detur & lucis quantitas & apparens diameter cometæ, dabitur diſtantia, dicendo quod diſtantia ſit ad diſtantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè & ratione duplicatâ lucis ad lucem inversè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum

835. circulis maximis pergere, quandiu moventur celerius, at in fine curſûs deflectere ſolent ab his circulis; hæc autem deflexio pendet ex ipsâ trajectoriæ cometarum curvaturâ de quâ infra. Quare deinceps trademus normam computi quo Newtonus diſparentes cometas ſatis longe infrà Jovem collocavit, nonnullaque afferemus exempla cometarum qui infrà orbes Martis & inferiorum planetarum deſcenderunt.

(e) 135. (*) *Ex Luce capitum.* Intelligantur duæ ſuperficies ſphæricæ concentricæ, minor una, major altera, & in centro utriuſque conſtitutûm fingatur corpus aliquod lucidum. Quoniam corpus illud radios ſuos per omnem circuitum diffundit, evidens eſt eandem radiorum quantitatem in concavâ ſuperficie utriuſque ſphæræ contineri, ideóque denſitates radiorum erunt in ratione ſuperficierum ſphæricarum inverſè, hoc eſt, in ratione duplicatâ ſemidiametrorum ſive diſtantiarum à corpore lucido inverſè (14. lib. 1.). Quare nullâ diſtantiarum habitâ ratione, ſenſatio quæ à radiis nervos opticos percutientibus excitatur, eſt ut quadratum diſtantiæ inverſè. Sed quò remotius eſt lucidum, eo pauciores radii ad oculum perveniunt, idque in duplicatâ ratione diſtantiarum (loco ſuprà cit.) hoc eſt, in duplicatâ ratione diametri apparentis diminutæ. Quarè, componendo, corporis cœleſtis à ſole illuſtrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur ſplendor in ratione quadruplicatâ diſtantiæ. Erit itaque quadratum diſtantiæ cometæ à ſole ad quadratum diſtantiæ planetæ ab eodem in ratione compoſitâ ex duplicatâ ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione lucis planetæ ad lucem cometæ. Unde diſtantia cometæ à Sole eſt ad diſtantiam planetæ ab eodem in ratione compoſitâ ex ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione ſubduplicatâ Lucis planetæ ad Lucem cometæ.

cum sexdecim pedum à *Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, ideoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia cometæ ad distantiam saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inversè, & 12′ ad 30″ directè, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus cometa anni 1665 mense aprili, ut auctor est *Hevelius*, claritate suâ pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum saturnum ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter capillitii cometarum raro superet 8′ vel 12′, diameter verò nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hasce ut plurimùm ejusdem esse apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non rarò conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est, quod cometæ omnes in perihelis vel infrà Saturnum collocandi sint, vel non longè suprà. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: quâ certe ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quam planetæ, qui hic sunt, illustrantur à stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tantò pro-

DE MUNDI SYSTEMATE.

pius ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis à ſe reflexæ planetas æmuletur. Inde veriſimile fit cometas longè infra ſphæram Saturni deſcendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex caudis. (f) Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia cometarum, ne fumus à capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur ſi concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, (g) Jovem ipſum ſplendore ſuo multùm ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illuſtrabitur à ſole, ideoque erit ſoli multò propior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem

135. (f) * *Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi*, ut poſteà probabitur.

(g) * *Jovem ipſum ſplendore ſuo.* Id variis obſervationibus confirmat Newtonus in opuſculo de mundi ſyſtemate. Cometa anni 1679. Decembris 12. & 15. ſtilo veteri, quo tempore caudam clariſſimam emittebat & Luci multorum Jovium per tantum ſpatium diffuſæ ac dilatatæ non imparem, magnitudine nuclei, ut obſervabat *Flamſtedius*, cedebat Jovi, adeóque Soli longè vicinior, quin imò minor erat Mercurio. Nam die 17ª menſis hujus, ubi terræ propior erat, apparuit Caſſino per teleſcopium Ped. 35. paulò minor globo Saturni. Die 8ª. menſis hujus, tempore matutino, vidit Halleius caudam perbrevem & latam & quaſi ex corpore ſolis jamjam orituri exeuntem, ad inſtar nubis inſolito more fulgentis, nec priùs diſparentem quam ſol ipſe inciperet ſuprà horizontem conſpici. Superabat igitur hic ſplendor Lucem nubium uſque ad ortum ſolis, & immediato ſolis ſplendori ſolum cedendo vincebat longe lucem omnium ſtellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipſa Luna in tantâ ſolis orientis vicinitate cerni ſolet. Fingamus lucem hancce dilatatam coarctari & in orbem nuclei cometici Mercurio minorem coarctari & ſplendore longè fortiori jam reddita magis conſpicua, Mercurium longè ſuperabit, adeóque erit ſoli vicinior. Diebus 12. & 15. ejuſdem menſis, cauda hæc per ſpatium longè majus diffuſa apparuit rarior, & luce tamen adeò forti ut ſtellis fixis vixdum apparentibus cerneretur & mox trabis mirum in modum fulgentis ſpeciem exhibuit.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum à terrâ solem versùs, ac decrescente in eorum recessu à sole versus terram. Sic enim cometa posterior anni 1665. (observante *Hevelio*) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque præterierat perigæum; splendor vero capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio*) in fine mensis Julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur usque ad *Sept.* 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. esse tantum $6'.\ 5''$ inclusa coma, at *Sept* 2. esse $9'.\ 7''$. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in viciniâ solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad terram. Cometa anni 1618. circa medium mensis *Decembris*, & iste anni 1680. circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate solis. Caput cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb.* 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput cometæ posterioris in distantia novem graduum à sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta solem occidentem. *Decemb.* 26. velocissimè

motus

DE MUNDI SYSTEMATE.

motus, inque perigæo propemodum exiſtens, cedebat ori pegaſi, ſtellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut ſtella quartæ, *Jan.* 9. ut ſtella quintæ, *Jan.* 13. ob ſplendorem lunæ creſcentis diſparuit. *Jan.* 25. vix æquabat ſtellas magnitudinis ſeptimæ. Si ſumantur æqualia à perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus poſita, ob æquales à terrâ diſtantias, æqualiter lucere debuiſſent, in plaga ſolis maximè ſplenduêre, ex altera perigæi parte evanuêre. Igitur ex magnâ lucis in utroque ſitu differentia, concluditur magna ſolis & cometæ vicinitas in ſitu priore. Nam lux cometarum regularis eſſe ſolet, & maxima apparere ubi capita velociſſimè moventur, atque ideo ſunt in perigæis; niſi quâtenus ea major eſt in vicinia ſolis.

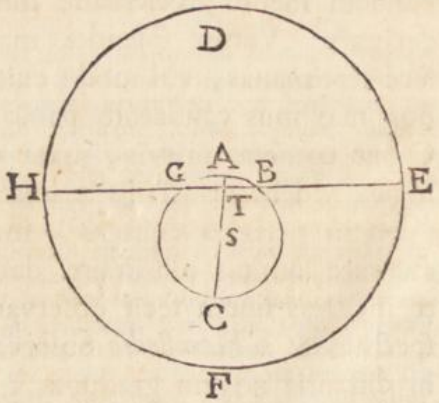
*Corol.* 1. Splendent igitur cometæ (h) luce ſolis à ſe reflexâ.

*Corol.* 2. (i) Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem ſolis. Si cernerentur in regionibus longè

135.

(h) * *Luce Solis à ſe reflexâ.* Nam à terrâ recedentibus cometis & ad ſolem accedentibus, augetur eorum ſplendor, decreſcente licet diametro, ut ex præcedentibus obſervationibus patet.

(i) * *Ex dictis etiam intelligitur.* Referat S ſolem, T, terram, circulus DEFH, ſphæram fixarum. Quoniam cometæ ſplendent luce ſolis à ſe reflexâ, (cor. 1.), ii non videbuntur, niſi à ſole ità illuſtrentur ut oculi noſtri hâc luce moveri poſſint. Præterea cometæ per caudas ſuas maximè ſiunt conſpicui, has autem caudas non emittunt priuſquam ad ſolem aliquantulum incaluerint, quare patet cometas ſeſe conſpicuos non præbere niſi ad definitam quandam à ſole diſtantiam accedant. Ponatur itaque ſphæra ABCG, ſoli concentrica ad talem diſtantiam deſcripta ut nullus cometa propter illuſtrationis defectum, detegi poſſit, priuſquam ad ſphæræ hujus ſuperficiem pervenerit, juncta recta ST, producatur utrinque donec ſuperficiei huic occurrat in A, & C. Per T, ductum intelligatur planum HE, cui normalis eſt recta AC, planum illud ſphæram dividet in duo hemiſpheria quorum unum HFE, eſt verſus ſolem, alterum verò HDE, ſoli opponitur. Cometæ omnes in ſphæ-




ræ ſegmento BCG, exiſtentes, videbuntur in hemiſphærio verſus ſolem, omnes autem qui verſantur in ſegmento BAG videbuntur in hemiſphærio quod ſoli opponitur.

longè ultra ſaturnum, deberent ſæpiùs apparere in partibus ſoli oppoſitis Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur; & ſol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio ſolem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux ſolaris obtexit Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à ſole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quam ſint ipſo jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa ſolem deſcripti pars longè major ſita eſt à latere terræ, quod ſolem reſpicit; inque parte illà majore cometæ, ſoli ut plurimum viciniores, magis illuminari ſolent.

*Corol.* 3. Hinc (k) etiam manifeſtum eſt, quod cœli reſiſtentia deſtituuntur. Nam cometæ vias obliquas & nonnunquam curſui

tur. Quarè ſi ſegmentum BCG, majus ſit ſegmento BAG, plures cometæ videbuntur in hemiſpherio verſus ſolem quam in oppoſito. Jam verò cometæ nudis oculis ſe priùs detegendos non exhibent quam ſint Jove propiores; ponatur itaque SA, circiter $\frac{3}{2}$ diſtantiæ Martis à ſole, hoc eſt, SA ſit circiter dupla ipſius ST, erit ſegmentum BGC pluſquam quadruplo majus ſegmento BAG, ideóque quadruplo vel quintuplo plures cometæ detegentur in hemiſpherio verſus ſolem quam in hemiſpherio oppoſito. At ſi cometæ cernerentur in regionibus longè ultrà Saturnum, foret SA, longè major quam ST, & ideò cometæ ſæpiùs deberent apparere in partibus ſoli oppoſitis, forent enim terræ viciniores qui in ſegmento BAG, verſantur, cæteros verò in ſegmento BCG, ſol interpoſitus obſcuraret. Ex his intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem Solis.

(k) * *Hinc etiam manifeſtum eſt.* Clariſſ. Caſſinus in mon. Pariſ. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosè reduxit. Obſervatos plurimorum cometarum motus retrogrados meras 135
eſſe apparentias conjectatur, non ſecus ac directus planetarum circumſolarium motus apparet aliquandò retrogradus. Sed quamvis celeberrimi hujuſce Aſtronomi judicium maximè veneremur, nonnullos tamen cometas motu verè retrogrado contrà ſeriem ſignorum curſum tenuiſſe conabimur oſtendere, ubi hâc de re plura dicendi locus dabitur, poſtquam ſcilicet tradiderimus motuum cometarum elementa. Obliquas eſſe nonnunquam cometarum vias & curſui planetarum contrarias fateri non dubitarunt quidam Carteſiani. Verùm quâ ratione diverſi illi cometarum motus cum vorticibus conciliari poſſint difficilè intelligitur, cum enim cometæ in regiones planetarum deſcendant, neceſſe videtur ut rapidiſſimo vorticum torrente contrarii cometarum motus maximè perturbentur, citóque deſtruantur, ac tandem cometæ hujuſce torrentis vi rapiantur. At ſummè regulares eſſe cometarum motus & contrà curſum planetarum diutiſſimè conſervari, nonnullis cometarum exemplis deinceps patebit.

DE MUNDI SYSTEMATE.

curſui planetarum contrarias ſecuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus ſuos, etiam contra curſum planetarum diutiſſimè conſervant. (l) Fallor ni genus planetarum ſint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod ſcriptores aliqui meteora eſſe volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. (m) Capita cometarum atmoſphæris ingentibus cinguntur; & atmoſphæræ infernè denſiores eſſe debent. Unde nubes ſunt, non ipſa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ viſuntur. Sic terra ſi è planetis ſpectaretur, luce nubium ſuarum proculdubio ſplenderet, & corpus firmum ſub nubibus propè deliteſceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata ſunt, quæ ſitum mutant inter ſe, & firmum jovis copus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum ſub atmoſphæris & profundioribus & craſſioribus abſcondi debent.

## PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

*Cometas in ſectionibus conicis umbilicos in centro ſolis habentibus moveri, & radiis ad ſolem ductis areas temporibus proportionales deſcribere.*

(n) Patet per corol. 1. prop. XIII. libri primi, collatum cum prop. VIII. XII. & XIII. libri tertii.

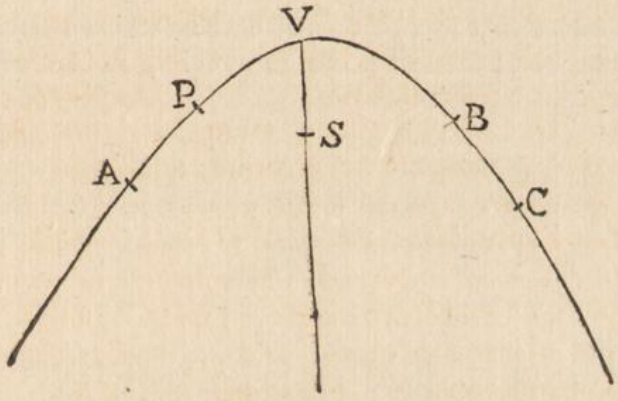
*Co-*

335. (l) * *Fallor, ni genus planetarum ſint.* Quam gravibus fundamentis nitatur hæc ſententia manifeſtum erit poſteà ex variis cometarum phænomenis.

(m) * *Capite cometarum* atmoſphæris ingentibus cingi variis argumentis impoſterum confirmat Newtonus. Cæterum in ipſis cometarum corporibus non fieri perpetuas mutationes illas in decurſu conſtabit independenter omninò ab illâ opinione quæ cometis ingentes atmophæras tribuit.

(n) * *Patet.* Quoniam cometæ motu ſuo lineas curvas circà ſolem deſcribunt, ut ex obſervationibus conſtat, vi aliquâ à motu rectilineo detorquentur (per leg 1.). Quoniam autem hæc vis quæ planetas à lineis rectis detorquet maximè tendit versùs ſolem ut pote corpus cætera omnia ſyſtematis ſolaris corpore longe ſuperans, eadem quoquè vis in cometis ſolem maximè debet reſpicere. Sed vis acceleratrix in planetis eſt in duplicatâ ratione diſtantiarum à ſole inverſâ (prop. 8. lib. 3.). Quare eandem quoque legem obſervare debent cometæ quæ ſunt corpora planetis ſimilia ac proindè (cor. prop. 13. lib. 1. & prop. 13. lib. 3.) come-

*Corol.* 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica planeta




cometæ non secus ac planetæ in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moventur & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describunt. Hæc ità se habent, si sol è loco suo nullatenus moveatur; sed quamvis sol per attractionem planetarum perpetuo motu agitetur, non tamen longe recedit à communi gravitatis centro planetarum omnium, ideóque etiam cometæ qui in regionibus à sole maximè diffitis commorantur, non magnopere hujus centri situm turbare possunt. Quare orbitarum suarum umbilicus non longe distabit à centro solis, ac proindè propositio hæc vera est quamproxime. Quantum accuratè observatis cometarum motibus congruat patebit deinceps.

136. Keplerus aliique post eum astronomi non pauci cometas in lineis rectis moveri posuerunt, & indè cometarum quorumdam loca observationibus satis congrua calculo investigarunt. Res ità succedere potest, si observetur cometa in eâ tantùm orbitæ suæ parte quæ à rectâ non multum differat. Sit APVBC, Sectio conica admodùm excentrica in cujus umbilico altero S collocatum sit solis centrum. Ponamus cometam observari, dum orbitæ suæ partem AP, describit, fieri 136.
potest ut reliquo tempore, dum scilicet à loco P, per V, B, ad locum C promovetur, in regiones remotissimas abiens oculis se subducat & sub radiis solaribus deliteſcat respectu observatoris in tellure circà solem S motâ, vel etiam accidere potest ut, motu telluris ità exigente, cometa percurrens orbitæ partem APVB, sub solaribus radiis abscondatur & tunc primum observetur cum ad locum B pervenerit, lineam BC describpturus. In hoc utroque casu via cometæ à lineâ rectâ parum differet. In primo casu, cometæ à Sole absorpti credentur, quia ad solem accedentes, pro destructis habebuntur. In altero casu, e sole videbuntur emergere, quia tunc primum sese conspicuos præbuerunt, dum à Sole in remotas regiones discedebant. Porrò dum cometa versus solem descendit, putà dum AP percurrit posteà ad solem accedens sub ejus radiis latet, putà dum PVB describit, tandemque dum ad alteras solis partes subitò emergit, usurpatur sæpè pro novo cometa à priori in AP diverso, & duæ rectæ AP, BC pro duabus trajectoriis habentur. Ex his patet cur trajectoriæ rectilineæ, observatis cometarum motibus

DE MUNDI SYSTEMATE.

netarum in (o) axium principalium ratione ſeſquiplicatâ. (P) Ideoque cometæ maximâ ex parte ſupra planetas verſantes, & eo nomine orbes axibus majoribus deſcribentes, tardius revolventur. Ut ſi axis orbis cometæ ſit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis ſaturni, id eſt, ad annos 30. ut $4\sqrt{4}$ (ſeu 8) ad 1. ideoque erit annorum 240.

*Corol.* 2. (P) Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ ſine erroribus ſenſibilibus adhiberi poſſint.

*Corol.* 3. Et propterea (per corol. 7. prop. XVI. lib. I.) velocitas cometæ omnis, erit ſemper ad (q) velocitatem planetæ cujuſvis circa ſolem in circulo revolventis, in ſubduplicatâ ratione duplæ diſtantiæ planetæ à centro ſolis, ad diſtantiam cometæ à centro ſolis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, ſeu ellipſeos in quâ terra revolvitur ſemidiametrum maximam eſſe partium 100000000: & (r) terra motu ſuo diurno mediocri deſcribet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eâdem telluris à ſole diſtantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ ſit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, deſcribet motu ſuo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{2}{3}$.

136. plerumque reſpondeant. Id fit ſcilicet eò quod aliqua duntaxat portio trajectoriæ pro integrâ trajectoriâ habeatur. At ſi tota ſimul conſideretur tam in aſcenſu verſus ſolem quam in deſcenſu, aliam nullam præter Sectionem conicam ſatisfacere conſtabit.

(o) * *In axium principalium ratione ſeſquiplicatâ.* (Prop. 15 lib. 1.).

(P) * *Ideoque cometæ* maximâ ex parte ſuprà planetas verſantes, quo tempore ſcilicet oculos noſtros fugiunt & eo nomine orbes axibus majoribus quam planetæ deſcribentes tardius revolventur.

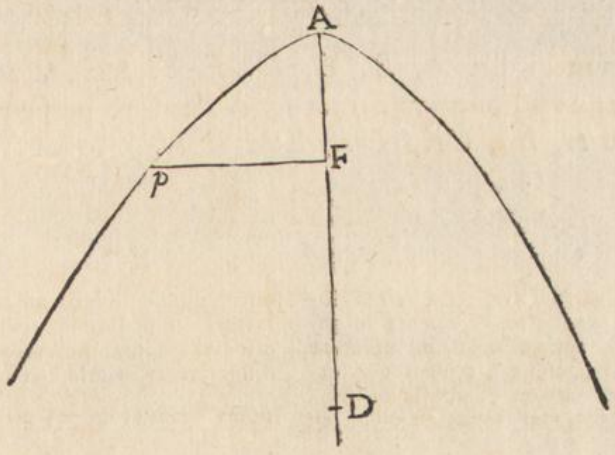
(P) * *Orbes autem parabolis adeò finitimi.* Orbes cometarum ſunt admodum excentrici, ut ex obſervationibus colligitur, & valdè exigua eſt portio orbis quem toto apparitionis tempore deſcribunt, exiguo enim temporis ſpatio ſeſe conſpicuos præbent. Verum ſi in ellipſi centrum ad infinitam ab umbilico diſtantiam removeatur, portio ellipſis cujus abſciſſa finita eſt, abit in parabolam. Quare elliptici orbes cometarum erunt parabolis valde finitimi.

(q) * *Ad velocitatem planetæ cujuſvis* circà ſolem in circulo revolventis, hoc eſt, ad velocitatem ejus mediocrem.

(r) * *Et terra.* Fiat hæc analogia: ut eſt tempus periodicum terræ circà ſolem ad totam peripheriam circuli 3.141 &c. ità dies una vel hora una ad partem peripheriæ unâ die vel horâ unâ deſcriptam.

$101364\frac{1}{2}$. (f) In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicatâ ratione distantiarum reciprocè, ideoque datur.

*Corol.* 4. (t) Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam cometa radio ad solem ducto




(f) * *In majoribus autem vel minoribus.* (Cor. 6. prop. 4. & prop. 15. lib. 1. vel per cor. 6. prop. 16. ejusdem libri).

(t) * *Undè si latus rectum.* Ex umbilico parabolæ F, ducatur ad axem A D, ordinata P F, erit area A p F, ad aream circuli quartâ parte lateris recti seu radio A F descripti (theor. 2. de parabolâ lib. 1.) ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Nam si radius circuli sumatur æqualis unitati, erit area circuli ad quadratum diametri, ut 3.14159 ad 4. Sed rectangulum sub ordinatâ p F & abscissâ F A, est dimidium hujus quadrati, hoc est 2, & area parabolica A p F, hujus rectanguli duæ tertiæ partes, hoc est $\frac{4}{3}$ (per theor. 4. de parab. lib. 1.). Quarè area parabolica A p F, est ad aream circuli radio A F, descripti ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. 136.

Si igitur velocitas cometæ revolventis in parabolâ eadem esset cum velocitate planetæ gyrantis in circulo, in eâdem quoque ratione foret tempus quo cometa describit arcum parabolæ A p, ad tempus periodicum planetæ. Sed velocitas cometæ est ad velocitatem planetæ in eâdem distantiâ à sole ut $\sqrt{2}$ ad 1, in hâc igitur ratione diminuenda est prior ratio. Undè tempus quo cometa describit arcum parabolicum A p, erit ad tempus periodicum planetæ ut $\frac{4}{3\times\sqrt{2}}$ ad $\frac{3.14159}{1}$. Sivè ut $\sqrt{\frac{16}{9\times 2}}$, hoc est, ut $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ad 3.14159.

singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. (u) Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quâvis, erit area diurna & horaria major vel minor in eâdem ratione subduplicatâ.

## (x) LEMMA V.

*Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.*

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.

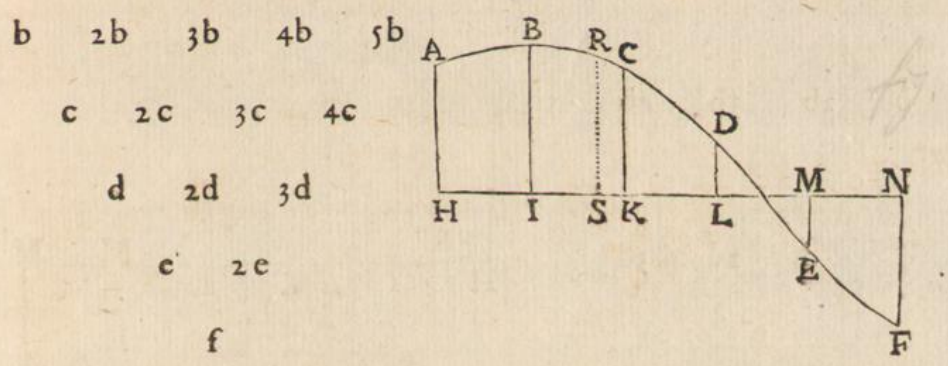
*Cas.*

136. Jam tempus periodicum terræ circâ solem sit 365.2565 dier. & cometa in perihelio ad distantiam æqualem distantiæ terræ à sole supponatur, tempus quo cometa describet arcum parabolicum Ap, per hanc analogiam invenitur: ut est 3.14159 ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$, ità 365.2565 ad tempus quæsitum quod erit 109. dier. 14 hor. 46′. Si quadratum radii ponatur esse partium 100000000. erit area parabolica harum partium 133333333, quas cometa radiis ad solem ductis describit diebus 109. hor. 14.46′. Quare area quam cometa singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$ & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$.

(u) * *Sin latus rectum.* Tempora quibus cometa in distantiis inæqualibus areas parabolicas similes describeret, sunt ut revolutiones in circulis, idcoque in ratione distantiarum sesquiplicatâ (cor. 6. prop. 4. lib. 1.), id est, majus temporis intervallum requiritur ut cometa in majori parabolâ aream similem describat, minus autem in minori, ac proinde cometa tempore æquali minorem partem parabolæ majoris & majorem parabolæ minoris describeret, idque in ratione sesquiplicatâ distantiarum inversâ, hoc est, positâ ratione distantiarum $\frac{d}{e}$, erit ratio arearum æquali tempore descriptarum ut $\frac{1}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. Sed areæ similes parabolarum inæqualium sunt in ratione duplicatâ laterum rectorum (112. lib. I.). Sive distantiarum quæ sunt laterum rectorum pars quarta (cor. 2. theor. 1. de parab. lib. 1.). Quare ratio prior in hâc ratione duplicatâ augenda est, totaque ratio composita erit ut $\frac{dd}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{ee}{e\sqrt{e}}$, hoc est, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{e}$, quæ est ratio subduplicata distantiarum sive laterum rectorum. Patet aream minorem fieri in eâdem ratione subduplicatâ, si ratio sesquiplicata distantiarum minuatur in ratione duplicatâ laterum rectorum seu distantiarum.

(x) * *Lemma.* Totum illud Lemma exponitur num. 76. lib. 2.

*Caſ.* 1. Si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* æqualia ſunt intervalla *HI*, *IK*, *KL*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, &c. ſecundas *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias *d*, 2*d*, 3*d*, &c. id eſt, ita ut ſit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, dein $b - 2b = c$, &c. & ſic pergatur ad

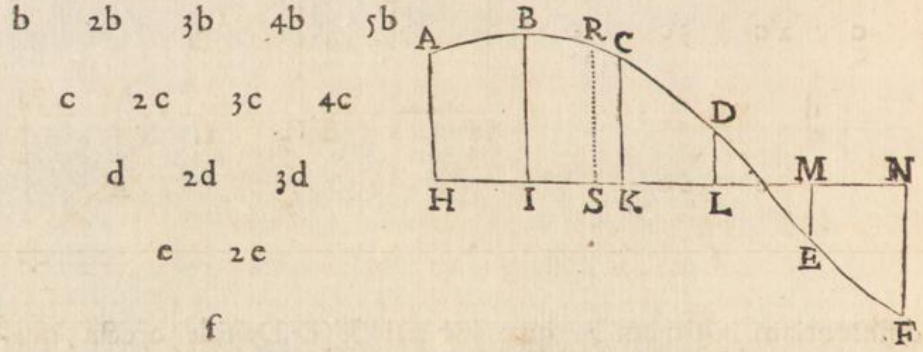



differentiam ultimam, quæ hic eſt *f*. Deinde erecta quacunque perpendiculari *RS*, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla *HI*, *IK*, *KL*, *LM*, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum *ME*, & præponendo ſigna negativa terminis *HS*, *IS*, &c. qui jacent ad partes puncti *S* verſus *A*, & ſigna affirmativa terminis *SK*, *SL*, &c. qui jacent ad alteras partes puncti *S*. Et ſignis probe obſervatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

*Caſ.* 2. Quod ſi punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, &c. inæqualia ſint intervalla *HI*, *IK*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*; ſecundas per intervalla bina diviſa *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias per intervalla terna diviſas *d*, 2*d*, 3*d*, &c. quartas per intervalla quaterna diviſas *e*, 2*e*, &c. & ſic

De Mundi Systemate.

sic deinceps; id est, ita ut sit $b=\frac{AH-BI}{HI}$, $2b=\frac{BI-CK}{IK}$, $3b=\frac{CK-DL}{KL}$, &c. dein $c=\frac{b-2b}{HK}$, $2c=\frac{2b-3b}{IL}$, $3c=\frac{3b-4b}{KM}$, &c. postea $d=\frac{c-2c}{HL}$, $2d=\frac{2c-3c}{IM}$, &c. Inventis




differentiis, dic $AH=a$, $-HS=p$, $p$ in $-IS=q$, $q$ in $+SK=r$, $r$ in $+SL=s$, $s$ in $+SM=t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum $ME$, & erit ordinatim applicata $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

*Corol.* Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproximè. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum area curvæ illius quadrandæ. (y) Potest autem parabola per methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

LEM-

136. (y) * *Potest autem Parabola*, per methodos notissimas (165. lib. 1.) semper quadrari geometricè. Inveniatur itaque æquatio definiens curvam parabolicam quæ transibit per curvæ quadrandæ puncta quotlibet, erit area parabolæ hujus eadem quam proximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. Quò plura sunt puncta curvæ propositæ per quæ transit curva Parabolica, eò propius area hujus accedit ad aream illius.

## LEMMA VI.

*Ex observatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.*

Designent *HI*, *IK*, *KL*, *LM* tempora inter observationes *HA*, *IB*, *KC*, *LD*, *ME* observatas quinque longitudines cometæ, *HS* tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E* duci intelligatur curva regularis *ABCDE*; & per lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata *RS*, erit RS longitudo quæsita.

Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

(z) Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; sufficerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

LEM-

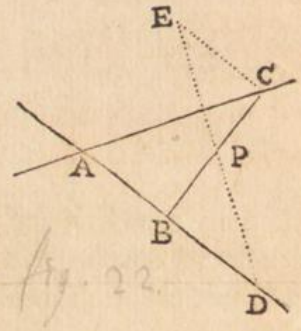
(z) 137. * *Si longitudinum observatarum*, (patet per not. in cor. præc.). Methodus Lemmatis præcedentis quæ methodus interpolationum dici solet, in rebus Astronomicis usus habere potest eximios. Hanc methodum adhibuit Clariss. Maierus tom. 2. Comment. Acad. Petropol. ad investiganda solstitiorum momenta. Circà tempus solstitii observentur aliquæ Solis altitudines meridianæ, illasque Solis altitudines repræsentent quædam ordinatæ, & tempora inter observationes elapsa ordinatarum intervallis exhibeantur. Deinde transeat Parabola per extremitates ordinatarum, abscissa quæ correspondet minimæ ordinatæ, tempus solstitii determinabit. Cæterum definiri potest tempus solstitii per plures observationes & parabolam pluri m dimensionum, vel per tres observationes dum exact & parabolam conicam, uti fecit Halleius. Verum in quocunque casu adhibeatur interpolationum methodus, oportet differentiæ observatas sensibiliter majores esse erroribus qui in ipsâ observatione committi possunt, hâc autem adhibitâ curâ, satis accurate determinari poterunt plurima astronomiæ phænomena quæ aliâ quidem viâ forent determinatu difficillima. Elegantissimam ejusdem methodi exemplum dedit eximius geometra D. Clairaut in Mon. Paris. an. 1736., ubi determinandæ telluris figuræ modum exponit ex mensurâ plurium meridiani arcuum in diversis latitudinibus captâ. 137.

DE MUNDI SYSTEMATE.

## LEMMA VII.

*Per datum punctum* P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in datâ illâ ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q. E. F.*




## LEMMA VIII.

*Sit* ABC *parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bisecta in* I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit* I$\mu$ *& vertex* $\mu$. *In* I$\mu$ *producta capiatur* $\mu$O *æqualis dimidio ipsius* I$\mu$. *Jungatur* OS, *& producatur ea ad* $\S$, *ut sit* S$\S$ *æqualis* 2SO. *Et si cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* $\S$B *secans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chordâ* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim *EO* secans arcum parabolicum *ABC* in *Y*, & agatur $\mu X$, quæ tangat eundem arcum in vertice $\mu$, & actæ *EO* occurrat in *X*; & (a) erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $ACY\mu A$ ut *AE ad AC*. Ideoque cum trian-

137. (a) * *Et erit area.* Quoniam chorda AC bisecta est in I, erit semisegmentum A$\mu$I æquale semisegmento $\mu$IC. Item quia $\mu$X tangit parabolam in $\mu$, erit $\mu$X, parallela chordæ AC (per Lem. 4. de conic. lib. 1.) ac proinde triangulum

triangulum $ASE$ fit ad triangulum $ASC$ in eâdem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASCY\mu A$ ut $AE$ ad $AC$. Cum autem $\frac{2}{3}O$ ſit ad $SO$ ut 3 ad 1, & $EO$ ad $XO$ in eâdem ratione, erit $SX$ ipſi $EB$ parallela: & propterea ſi jungatur $BX$, erit triangulum $SEB$ triangulo $XLB$ æquale. LIBER TERTIUS. PROP. XL. THEOR. XX.

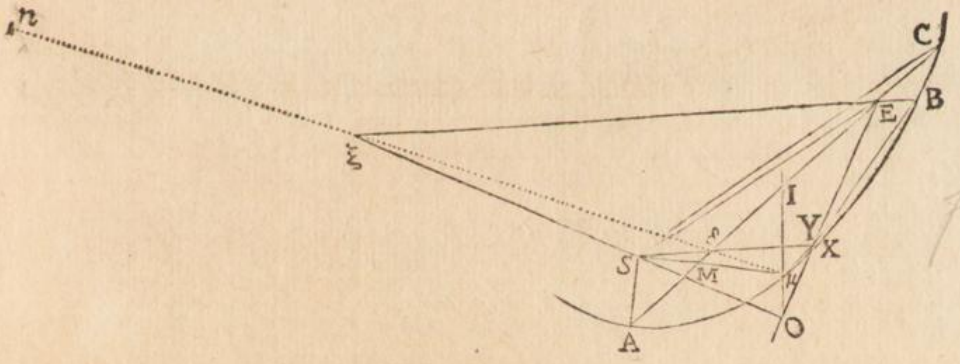



fig. 23

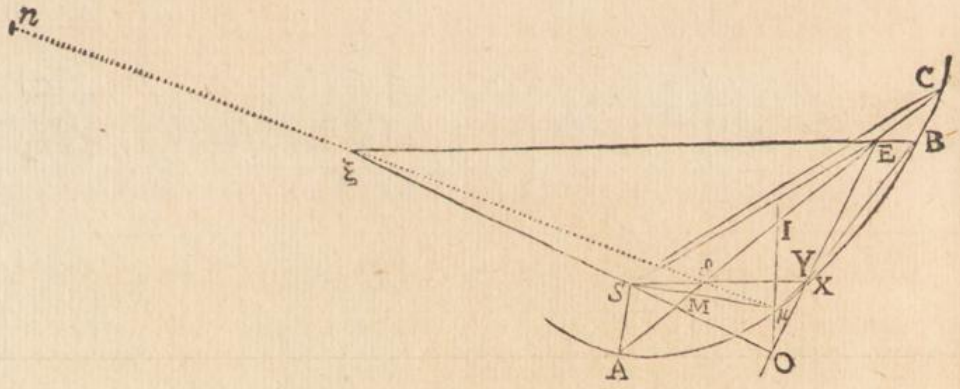
Unde ſi ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum $EXB$, & de ſumma auferatur triangulum $SEB$, manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque ideo ad aream $ASCY\mu A$ ut $AE$ ad $AC$. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis eſt area $ASBY\mu A$ (b) quamproximè, & hæc area $ASBY\mu A$ eſt ad aream $ASCY$

lum OIE ſimile eſt triangulo O$\mu$X, ideóque ob IO triplam ipſius $\mu$O, erit triangulum IOE trianguli $\mu$OX, noncuplum & triangulum IOE trapezii I$\mu$XE, ſeſquioctavum. Præterea triangulum IAO, eſt trianguli IA$\mu$, ſeſquialterum (omittuntur in figurâ aliquæ lineæ ad vitandam confuſionem) cum idem ſit trianguli utriuſque vertex A, ſitque baſis OI ſeſquialtera baſis $\mu$I; triangulum verò A$\mu$I, ſubſeſquitertium eſt ſemiſegmenti A$\mu$I (prop. 24. Archimed. de parab vel theor. 4. de parab. lib. 1.). Quare triangulum AOI eſt ſeſquioctavum ſemiſegmenti A$\mu$I, hoc eſt, in ratione compoſitâ ex rationibus ſeſquialterâ & ſubſeſquitertiâ ac proinde triangulum AOI, eſt ad ſemiſegmentum A$\mu$I, ſicut triangulum IOE, ad trapezium $\mu$XIE, & viciſſim trapezium $\mu$XIE eſt ad ſemiſegmentum A$\mu$I ut IE ad AI, ac proinde, componendo, area curvilinea A$\mu$XE, eſt ad ſemiſegmentum A$\mu$I, ut AE, ad AI, ideóque area curvilinea A$\mu$XE eſt ad ſegmentum totum A$\mu$C ut AE ad AC. 137a

(b) * *Quamproximè.* Ob viciniam punctorum $\mu$, X (ex hyp.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

$ASCY\mu A$, (c) ut tempus descripti arcus $AB$ ad tempus descripti arcus totius $AC$. Ideoque $AE$ est ad $AC$ in ratione temporum quamproximè *Q. E. D.*




*Corol.* Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem $\mu$, est $AE$ ad $AC$ in ratione temporum accuratè (d).

*Scho-*

138. (c) * *Ut tempus descripti arcûs.* (prop. 1. lib. 1.).

(d) * *Accuratè.* Ideò enim in casu Lemmatis hujus A E non est ad A C in ratione temporum accuratè, quia area A S B X $\mu$ A, sumpta est æqualis areæ A S B Y $\mu$ A, quod verum est duntaxat quamproximè. Sed coincidentibus punctis B, $\mu$, areæ illæ æquale fiunt accuratè, quare in hoc casu A E est ad A C, in ratione temporum accuratè.

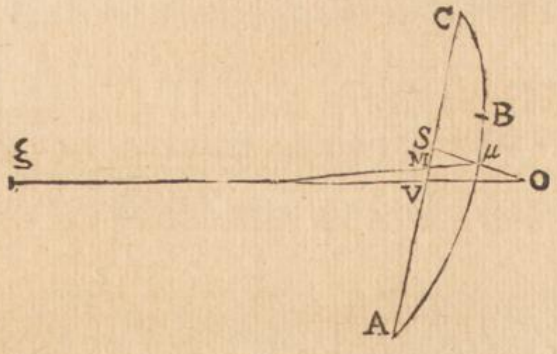
138. Quoniam coincidentibus punctis B, $\mu$, chorda A C dividitur in E in ratione temporum accuratè, iisdem verò punctis non coincidentibus, hæc chorda dividitur in ratione temporum quamproximè tantùm, quò propius erit punctum B vertici parabolæ $\mu$, eò magis accuratè dividetur chorda A C in duo segmenta quæ temporum rationem habeant. Observandum est chordam A C magis accuratè dividi in ratione temporum, si B distet à vertice $\mu$ versus C quam si ab eodem vertice $\mu$, versus A, æquali intervallo distet. Quoniam enim parabolæ portio $\mu$ A vertici principali propior est, ea fit curvior & à tangente $\mu$ X, magis deflectit quam portio $\mu$ C, à vertice $\mu$, remotior. Quare si investiganda sint tria temporis momenta quibus cometa in parabolæ locis tribus A, B, C, versatur ità ut A E sit ad A C, ut temporum intervalla accuratè, sumenda sunt prædicta tempora ferè æqualia. Nam ob exiguas trajectoriæ parabolicæ portiones astronomicis observationibus subjectas,

pune-

## *Scholium.*

Si jungatur $\mu\xi$ secans $AC$ in $\delta$, & in ea capiatur $\xi n$, quæ sit ad $\mu B$ ut 27 $MI$ ad 16 $M\mu$: acta $Bn$ secabit chordam $AC$ in

punctum E, non multum distat à chordæ medio puncto I. Oportet autem intervallum illud, ubi cometa tardior est, paulò majus esse altero; cometa enim existente in $\mu$, ubi chorda $\delta C$, dividitur accurate in ratione temporum; erit recta EC, major quam AE, hoc est, tempus quo cometa tunc tardior (cor. 3. prop. 40. lib. huj.) describit arcum BC, majus est tempore quo idem cometa factus velocior describit arcum BA. Accuratius itaque eligentur tempora parum inæqualia ut punctum E potius abeat versus C, quam versus A, ob rationem modò allatam.




139. Si vertex $\mu$, segmenti parabolici $A\mu C$ parum distet à vertice principali, sitque punctum B proximum puncto $\mu$, recta $S\mu$, ex parabolæ umbilico S, ad verticem $\mu$, ducta dividet chordam AC, in M, ferè in ratione temporum, ut ex præcedentibus patet.

140. Si fuerit recta $S\mu$, admodum magna respectu abscissæ $\mu I$, erit SV, tripla ipsius MV. Quoniam enim rectæ SVO, $SM\mu$; in hoc casu pro parallelis haberi possunt, erit IV ad VM ut IO ad $\mu O$, hoc est, (per constr. Lem. 8.) ut 3 ad 1.

141. Iisdem positis, erit $V\xi = 3VS + 3I\mu$; quoniam enim (per constr.) $S\xi = 2SO$, erit $O\xi = 3SO = 3SV + 3VO$. Jam utrinque auferatur VO, fiet $V\xi = 3SV + 2VO$. Sed ob rectas VO, $M\mu$ parallelas, VO est ad $M\mu$, ut IO ad $I\mu$, hoc est, ut 3 ad 2, ideóque $2VO = 3M\mu$. Præterea rectæ $S\mu$, $I\mu$, æquales constituunt angulos cum rectâ tangente parabolam in $\mu$, quæ est chordæ AC parallela (per theor. 3. de parab. & lem. 4. de conic.). Quare æquales sunt anguli $MI\mu$, $IM\mu$, ac proindè recta $M\mu = I\mu$; undè fit $3I\mu = 2VO$, & $V\xi = 3VS + 3I\mu$. 141

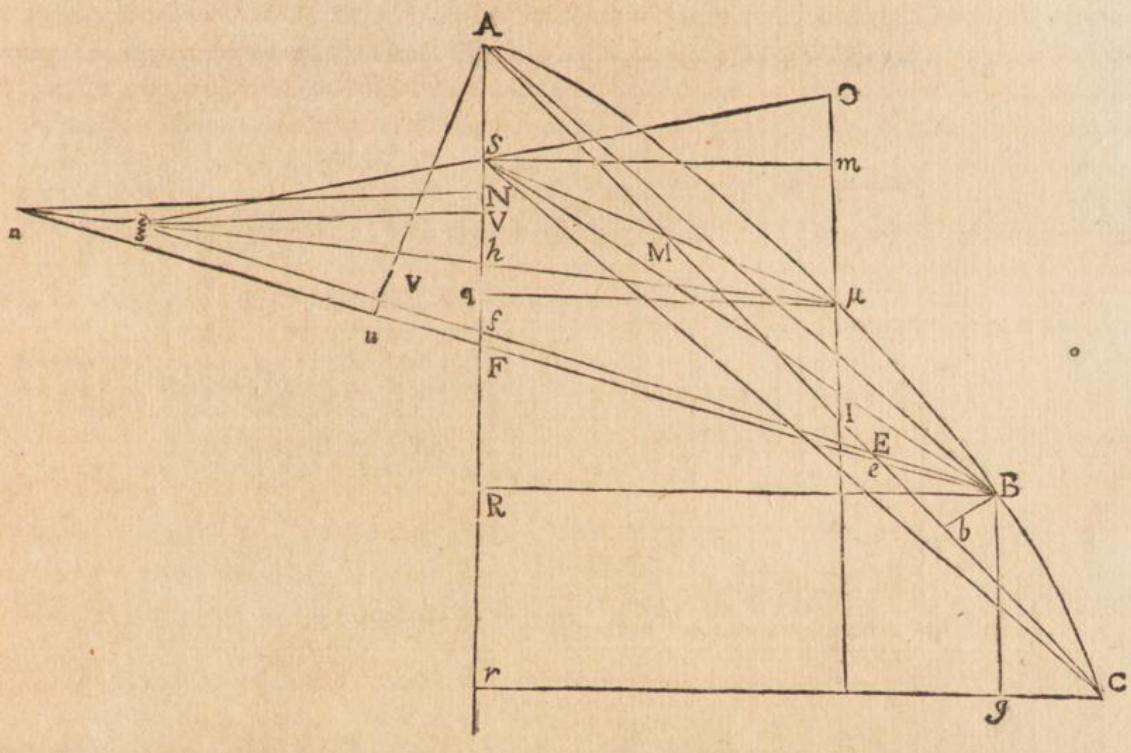
in ratione temporum (e) magis accuratè quam priùs. Jaceat autem punctum $u$ ultra punctum $\xi$, si punctum $B$ magis distat à

142. (e) 142. * *Magis accuratè quam priùs.* Sit A vertex principalis paraboiæ, S umbilicus, $AS = f$. ideóque latus rectum principale $= 4f$. Ponatur $KB = y$, $rC = x$, erit area $ASBC = \frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$, & area $ASBA = \frac{y^3 + 12f^2y}{24f}$ (theor. 4. de parab.); ac proinde area ASBC, est ad aream ASBA, ut $\frac{x^3+12f^2x}{24f}$ ad $\frac{y^3+12f^2y}{24f}$, seu ut $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$, id est, in ratione temporum accurate. Præterea est $AC = \sqrt{Ar^2 + rC^2} = \frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$; quare si fiat $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$ ut $\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$ ad $AE = \frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f(x^3+12f^2x)}$, erit quoque recta AC ad hanc rectam AE. in ratione temporum accuratè.

Jam verò investigandus est valor rectæ AE, qui prodit ex constructione Lemmatis præcedentis. Ex umbilico S, erigatur ad $\mu O$ perpendicularis S m, hæc erit æqualis ordinatæ $q\mu$. Deinde (theor. 1. de parab.) $q\mu$, dimidia est ipsius rC, seu $\frac{1}{2}x$, & $\mu m = qS = \frac{xx-16ff}{16f}$. Præterea est $\mu I = 2\mu O$ (per constr.) & $\mu I = \frac{AI^2}{4S\mu}$ (165 & theor. 2. de parab.). Sed est $AI^2 = \frac{x^4+16f^2x^2}{64f^2}$, & $S\mu^2 = \left(\frac{x^2-16f^2}{16f}\right)^2 + \frac{1}{4}xx$, quare est $\mu O$ seu $\frac{AI^2}{8S\mu} = \frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x}$, ac proindè $mO = \mu O - m\mu = \frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}$, ideóque $SO = \sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2}$, & $\xi O = \sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2}$.

Insuper ex puncto $\xi$, ad abscissam AR erectâ perpendiculari $\xi V$, ob similitudinem triangulorum SmO, $S\xi V$, fit $SO : q\mu = \xi S : \xi V$, ideóque $\xi V = x$. Præterea $SO : mO = S\xi : SV$, ac proinde $SV = 2mO$, hincque prodit $AV = AS + 2mO$, & $VR = AR - AS - 2mO$. Sed ob triangulorum similitudinem $\xi V (x) : BR (y) = Vf : Rf$, & componendo, $\xi V + BR : BR = Vf + Rf : Rf$, quare $Rf = \frac{VR+BR}{\xi V + BR}y$, datur itaque Rf, per $x$ & $y$. Præterea $fB^2 = RB^2 + Rf^2$, sed $RB : Bf = \xi V : \xi f = \frac{\xi V \times Bf}{RB} = \frac{x \times \sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$, & hinc $\xi B = \sqrt{RB^2+Rf^2} + \frac{x \times \sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$. Deinde in triangulo ABC, dantur latera AB, AC, & præterea datur latus BC; ductâ enim Bg perpendiculari ad rC, erit $BC = \sqrt{Bg^2+gC^2} = \sqrt{Rr^2 + (RB - rC)^2}$; datur itaque perpendicularis $Bb = \sqrt{\frac{3}{4}}BC^2$. Insuper ducatur AV perpendicularis ad AB, ob similitudinem triangulorum AVf, BRf, erit $Af : AV = Rf : RB$, ideóque $AV = \frac{RB \times Af}{Rf}$. Denique ductâ Bb, perpendiculari ad AC, similia erunt triangula EAV, Bbe, ac proinde $Bb : bE = AV : AE$, & invertendo $Bb : AV = bE : AE$, atque, componendo $Bb + AV : AV = bE + AE : AE$, hinc $AE = \frac{Ab}{}$

à vertice principali parabolæ quam punctum $\mu$; & citra, si minus distat ab eodem vertice.




$\frac{Ab \times AV}{Bb + AV}$. Jam loco Ab, Bb, AV, substitutis eorum valoribus modò inventis prodit AE, paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

Investigandus supereſt valor rectæ Ae, qui prodit ex constructione scholii hujus. Quoniam similia sunt triangula ξSh, ξOμ, erit ξS : Sh = ξO : Oμ, hinc Sh = $\frac{\xi S \times O\mu}{\xi O}$; Sed inventa est suprà recta Sq, invenietur itaque qh, ac proindè etiam $h\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2}$. Præterea ξS : SO = ξh : hμ, quarè ξh = $\frac{S\xi \times \sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$, ac proindè tota recta $\xi\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2} + S\xi \times \frac{\sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$. 142

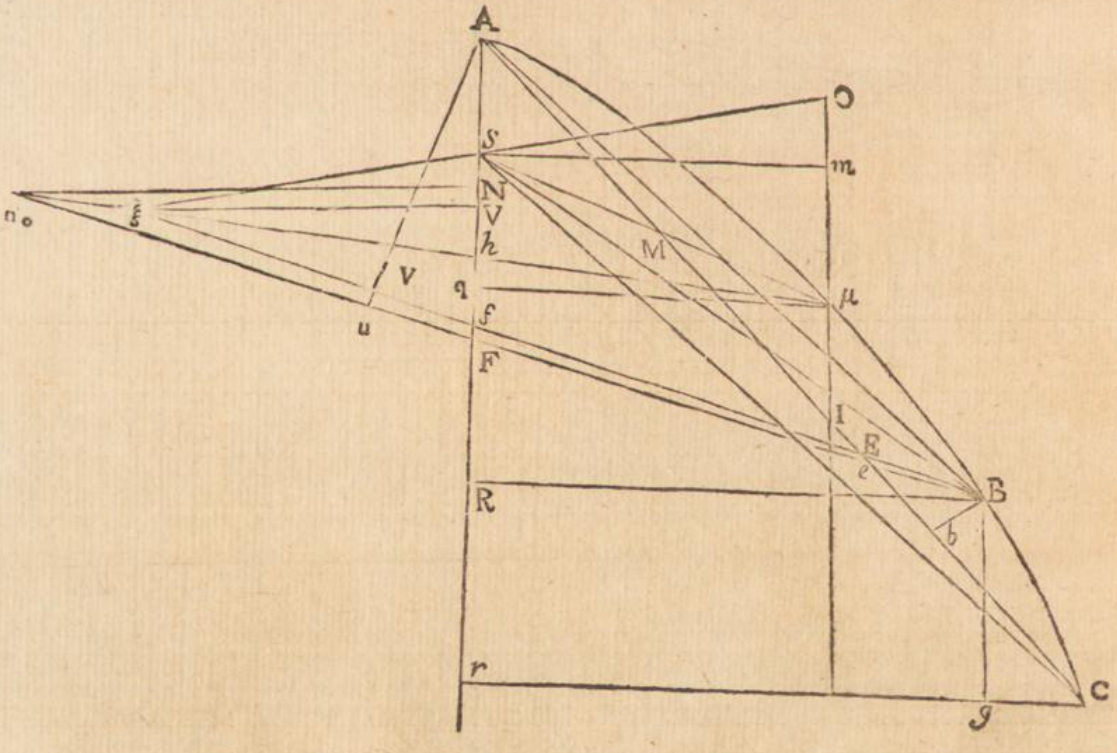
Deindè (per constr.) fit $\xi n = \frac{27MI \times \mu B}{16M\mu}$. Sed AM : MI = AS : Iμ, ac proindè, componendo AM + MI : MI = AS + Iμ : Iμ, invenietur itaque MI, ideóque tota recta nμ. Insuper hμ : qh = hr : hM, invenietur itaque hN, ac proindè & Nn, ob triangulum hrN, rectangulum.

DE MUNDI SYSTEMATE.

lum. Præterea (ex præced.) inventa est $hR$, ideóque etiam datur $nR$. Jam fiat $rN : NF = BR : RF$, & invertendo $NF : RF = rN : BR$, atque componendo $NF + RF : RF = rN + BR : BR$, hinc $RF = \frac{BR \times NR}{rN + BR}$, ideóque datur $BF = \sqrt{BR^2 + RF^2}$. Deinde $BF : BR = rF : FN$, & inde $rF = \frac{BF \times FN}{BR}$, atque recta tota $rB = \frac{BF \times FN}{BR} + \sqrt{BR^2 + RF^2}$.

142.

Ducatur recta $Au$, perpendicularis ad $AB$, erit ob triangulorum $AuF$, $RBF$, similitudinem $AF : Au = RF : RB$, idcó-




que $Au = \frac{RB \times AF}{RF}$, & hinc prorsus ut suprà habetur $Ae = \frac{Ab \times Au}{Bb + Au}$. Ex hactenus dictis patet dari rectas $AE$, $Ae$, per $x$, $y$, & quantitates constantes. Jam loco $Ab$, $Bb$, $Au$, substitutis eorum valoribus analyticis, fit $Ae$, paulò major quam $AE$, & paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

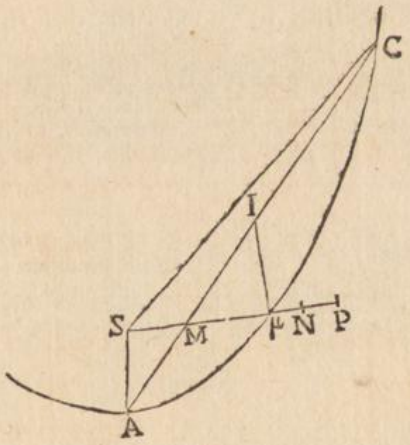
Quarè recta $Bn$, secabit chordam $AC$, in $e$, in ratione temporum magis accuratè quàm recta $\xi B$.

Idem scholium facilius demonstrari potest hoc modo. Quoniam $Ae = \frac{Ab \times Au}{Ab + Au} = Ab - \frac{Ab \times Ab}{Au + Bb}$ (ex dem.) erit $Ae$ semper minor quam $Ab$. Jam verò factâ analogiâ $x^3 + 12f^2x : y^3 + 12f^2y =$

## (f) LEMMA IX.

*Rectæ* I $\mu$ *&* $\mu$ M *&* *longitudo* $\frac{AIq}{4S\mu}$ *æquantur inter se.*

Nam $4S\mu$ est latus rectum parabolæ pertinens ad verticem $\mu$.




## LEMMA X.

*Si producatur* S $\mu$ *ad* N *&* P, *ut* $\mu$ N *sit pars tertia ipsius* $\mu$ I, *&* SP *sit ad* SN *ut* SN *ad* S $\mu$. *Cometa, quo tempore des-*

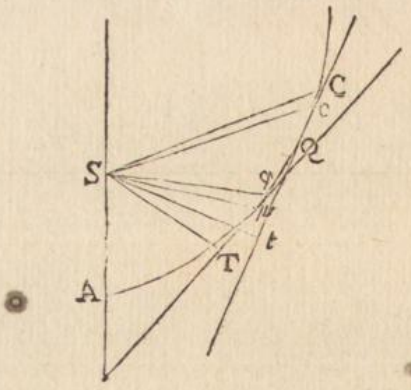
$\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f} : \frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$, si A e æqualis foret huic quarto termino haberetur ratio temporum accuratè (prop. 1. lib. 1.). Sed quartus ille terminus major est rectâ Ae; nam terminus ille major est quam chorda AB, est enim AB $= \frac{\sqrt{y^4+16f^2z^2}}{4f} = \sqrt{x^3+12f^2x} \times \frac{\sqrt{y^4+16f^2z^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$ hæc autem quantitas minor est quam $\frac{y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$. Sed (per constr.) ità ducitur $\mu$n, ut recta nB semper secet chordam AC in puncto e, quod proximius est puncto C quam punctum E; quarè cum recta Ae semper minor sit verâ, major tamen quam AE, hæc magis quam illa ad justum valorem accedet, ac proindè recta nB, secat chordam AC, in ratione temporum magis accuratè quam recta $\xi$B. Res eodem modo demonstratur, ubicumque sumatur punctum A. 1426

(f) * *Lemma IX.* (Patet per num. 139. lib. huj. & theor. 1. & 2. de parab. lib. 1.).

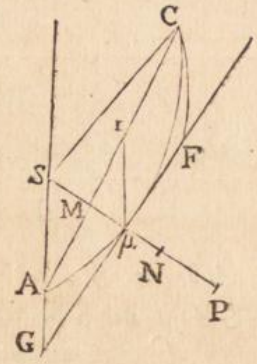
DE MUNDI SYSTEMATE.

*deſcribit arcum* A μ C, *ſi progrederetur eâ ſemper cum velocitate quam habet in altitudine ipſi* SP *æquali, deſcriberet longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam ſi cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; (g) area, quam radio ad punctum *S* ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ parabolicæ *ASC*μ. (h) Ideoque contentum ſub longitudine in tangente deſcriptâ & longitudine $S\mu$




minimis trilinea ASCμ, SμQ conſtituentibus. Quia verò æqualia inſumuntur tempora ad percurrendas lineas AC, μQ (ex hyp.) ex æqualibus numero triangulis componuntur ſpatia ASCμ, SμQ, ac proinde triangulum SμQ, æquale eſt areæ parabolicæ, ASCμ.




142. (g) * *Area quam radio.* Cometa velocitate quam habet in μ, relictâ parabolâ, progrediatur uniformiter in rectâ μQ, quæ parabolam tangit in μ, area SμQ, quam radio ad punctum S, ducto deſcriberet, æqualis eſſet areæ parabolicæ ASCμ, quam eodem tempore deſcribit. Sumantur enim lineolæ Cc, qμ, à cometa deſcriptæ & à parabolæ umbilico S, ad tangentes Ct, μT, erigantur perpendiculares St, ST, velocitas in C, eſt ad velocitatem in μ, ut ST ad St (cor. 1. prop. 1. lib. 1.) ſed velocitates in C, & μ, ſunt ut ſpatia eodem tempore percurſa, putà Cc & qμ; eſt igitur Cc ad μq ut ST ad St. Quarè triangulum Sμq, æquale eſt triangulo CSc. Iſtud autem ubique obtinet in triangulis

(h) * *Ideóque.* Quoniam recta Sμ cum tangente in μ, & chordâ AC, æquales conſtituit angulos (Lem. 4. de conicis), ſpatium contentum ſub longitudine deſcriptâ in tangente & rectâ Sμ, erit ad ſpatium contentum ſub chordâ AC, & rectâ SM, ut area ASCμ, ad triangulum ASC, id eſt, ut triangulum SAC + ſegm. parab. CAc ad triangulum SAC, id eſt, ut triangulum $SAC + \frac{2}{3}$ paralle-

$S\mu$ esset ad contentum sub longitudinibus $AC$ & $SM$, ut area $ASC\mu$ ad triangulum $ASC$, id est, ut $SN$ ad $SM$. Quare $AC$ est ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad $SN$. Cum autem velocitas cometæ in altitudine $SP$ sit (per corol. 6. prop. XVI. lib. 1.) ad ejus velocitatem in

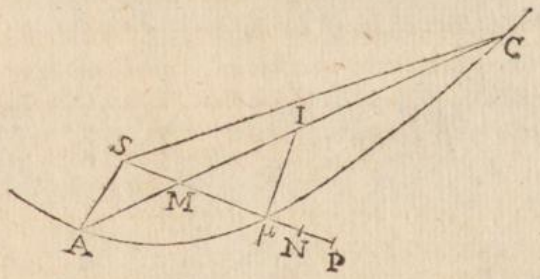



fig. 24.

altitudine $S\mu$, in subduplicatâ ratione $SP$ ad $S\mu$ inversè, id est, in ratione $S\mu$ ad $SN$; (i) longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad $SN$. Igitur $AC$ & longitudo hâc novâ veloci-

lelogrammi AGFC, ad triangulum ASC, hoc est, ut $AC \times \frac{1}{2} SM + AC \times \frac{2}{3} I\mu$ ad $AC \times \frac{1}{2} SM$, sivè ut $SM + \frac{4}{3} I\mu$ ad SM. Sed $\mu N$, sumpta est æqualis $\frac{1}{3} I\mu$, & est $M\mu = \mu I$ (num. 139.). Quare $MN = \frac{4}{3} I\mu$. Est igitur spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente & rectâ $S\mu$, ad spatium contentum sub chordâ AC, & rectâ SM, ut $SM + MN$ ad SM, hoc est, ut SN ad SM: Unde si longitudo descripta in tangente dicatur L, erit $L \times S\mu : AC \times SM = SN : SM$, ideóque longitudo descripta in tangente erit ad chordam AC, ut $\frac{SN}{S\mu}$ ad $\frac{SM}{SM}$, hoc est, ut SN ad $S\mu$. 142.

(i) * *Longitudo.* Nam longitudines iisdem temporibus uniformi motu descriptæ, sunt ut velocitates (5. lib. 1.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

locitate descripta, cum sint ad longitudinem in tangente descriptam in eâdem ratione, æquantur inter se. *Q. E. D.*

(k) *Corol.* Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$, eodem tempore describeret chordam $AC$ quamproximè.

## LEMMA XI.

*Si cometa motu omni privatus de altitudine* SN *seu* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in solem, & eâ semper vi uniformiter continuatâ urgeretur in solem, quâ urgetur sub initio; idem semisse temporis, quo in orbe suo describit arcum* AC, *descensu suo describeret spatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam cometa, quo tempore describit arcum parabolicum $AC$, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine $SP$ (per lemma novissimum) describet chordam $AC$, ideoque (per corol. 7. prop. XVI. lib. 1.) eodem tempore in circulo, cujus semidiameter esset $SP$, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum, cujus longitudo esset ad arcus parabolici chordam $AC$, in subduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in solem in altitudine $SP$, cadendo de altitudine illâ in solem, describeret semisse temporis illius ((l) per corol. 9. prop. IV. lib. 1.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis $SP$, id est, spatium $\frac{AIq}{4S\mu}$. (m) Unde cùm pondus

$\frac{AI^2}{4SP}$

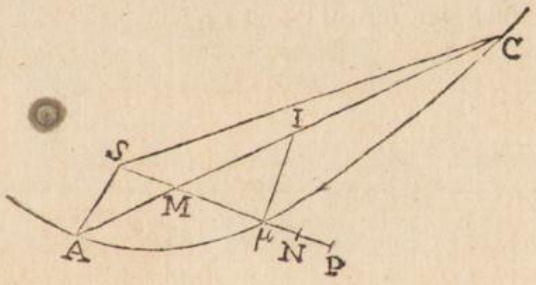
co-

242. (k) * *Corol.* Si $S\mu$, sit admodum magna respectu $\mu N$, tres geometricè proportionales $S\mu$, SN, SP, erunt etiam arithmeticè proportionales quamproximè, id est NP, æquabitur $\mu N$, sive trienti ipsius $I\mu$, ideóque $\mu P$, æqualis quamproximè $\frac{2}{3}$ ipsius $I\mu$. Quare patet collarium.

(l) * *Per corol. 9. prop. IV. lib. 1.* Vel per num. 201. ejusdem lib.

(m) * *Unde cum pondus cometæ.* Gravitas acceleratrix cometæ versus Solem in distantiâ SN, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in distantiâ SP, ut $SP^2$ ad $SN^2$, hoc est, ob proportionales SP, SN, $S\mu$, ut SP ad $S\mu$.

cometæ in ſolem in altitudine $SN$ ſit ad ipſius pondus in ſolem in altitudine $SP$, ut $SP$ ad $S\mu$: cometa pondere quod habet in altitudine $SN$ eodem tempore, in ſolem cadendo, deſcri- LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROB. XXI.




bet ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, (n) id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

*Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.*

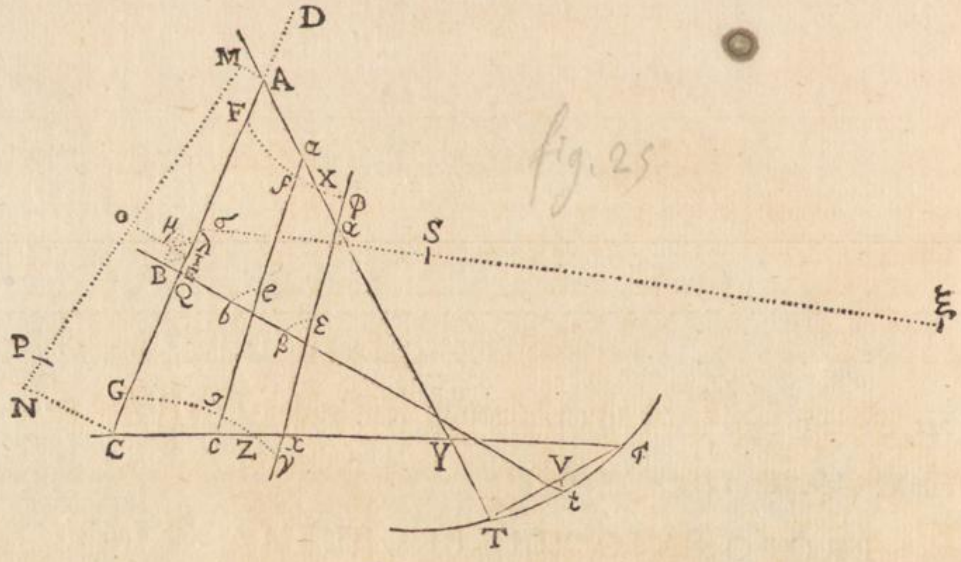
Problema hocce longè difficillimum multimodè aggreſſus, compoſui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

Seligantur tres obſervationes (o) æqualibus temporum intervallis

(n) * *Id eſt.* (Lem. IX.). *lis.* Ratio patet per not. 138. 142.
(o) * *Æqualibus temporum interval-*

DE MUNDI SYSTEMATE.

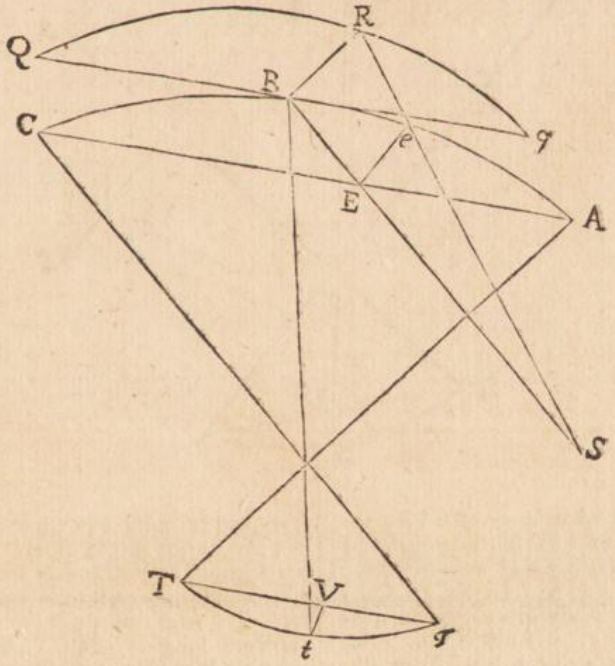
vallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum *E* (in fig. lem. VIII.) incidat in punctum *M* quamproximè, & inde aberret versus *I* potius quam versus *A*. (P) Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus cometæ locus per lemma sextum.




Designet *S* solem, *T*, *t*, τ tria loca terræ in orbe magno, *TA*, *tB*, τ*C* observatas tres longitudines cometæ, *V* tempus inter observationem primam & secundam, *W* tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri telluris à sole distantiâ, describere posset, quæque (per corol. 3. prop. XL. lib. III.) invenienda est, & *tV* perpendiculum in chordam *T*τ. In observatâ longitudine mediâ *tB* sumatur utcunque punctum *B* pro loco cometæ in plano ecliptiæ, & inde versus

142. (P). * *Si tales observationes.* (Ibid.).

versus solem *S* ducatur linea *BE*, quæ sit ad sagittam *tV*, ut contentum sub *SB* & *St quad.* ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt *SB* & (q) tangens latitudinis cometæ in observatione secundâ ad radium *tB*. Et per punctum *E* agatur (per hujus lem. VII.) recta *AEC*, cujus partes *AE*, *EC*, ad rectas *TA* & $_{\tau}C$ terminatæ, sint ad invicem ut tempora *V* & *W*: & (r) & erunt *A* & *C* loca cometæ in plano eclip-

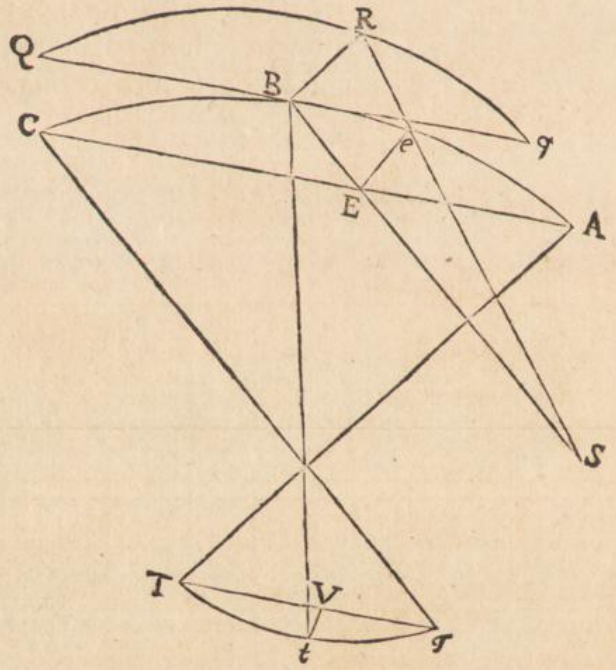



(q) * *Et tangens latitudinis cometæ.* Ex puncto B, ad planum Ecclipticæ erecta intelligatur normalis, hæc erit tangens latitudinis cometæ in secundâ observatione, sumpto tB pro radio.

(r) * *Et erunt A & C loca cometæ.* Quoniam (ex hyp.) B est vestigium cometæ in plano Ecclipticæ, & BR ad planum Ecclipticæ normaliter ducta, tangens latitudinis observatæ ex t ad radium tB, patet punctum R esse verum cometæ locum, atque RS distantiam cometæ à Sole in observatione secundâ. Per E, agatur Ee, ad BR, parallela quæ (per prop. 8. lib. XI. elem.) normalis est ad planum Ecclipticæ, jacetque in plano trianguli SBR, occurrat hæc ipsi SR in e. Jam verò recta Re, est ad rectam tV, in ratione compositâ ex Re, ad BE, & BE ad tV. Sed (per prop. 11. lib. 6. elem.) Re est ad BE ut RS ad BS & BE est ad tV, ut $St^2 \times SB$ ad $SR^3$. Quare Ee est ad tV, in ratione compositâ ex ratione SR ad BS, & ratione 142

eclipticæ in obſervatione primâ ac tertiâ quamproximè, ſi modo *B* ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ.

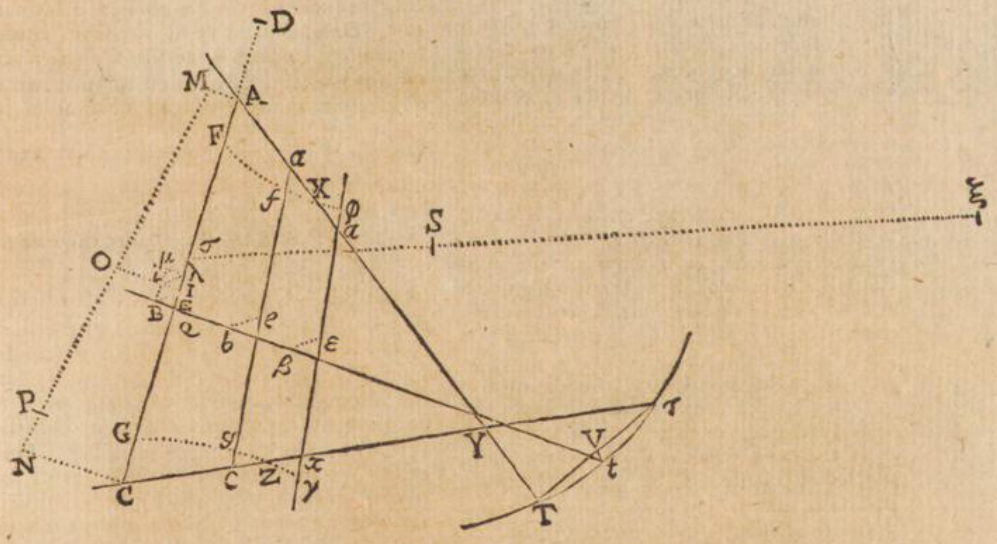
Ad




142. tione $St^2 \times SB$ ad cubum rectæ SB; ratio autem quæ ex iſtis binis componitur eadem eſt cum ratione $St^2$ ad $SR^2$, hinc Re eſt ad BE, ut $St^2$ ad $SB^2$. Quia verò tV eſt æqualis quamproximè quadrato arcûs Tt per diametrum orbis magni diviſo (182. lib. 1.) erit recta tV, quamproximè ſpatium per quod terra è quiete demiſſa vi ſuæ gravitatis caderet verſus Solem, dum ſemiſſem arcûs Tt, deſcribet, ſi eâdem ubique gravitate acceleratrice uniformiter continuatâ urgeretur quâ urgetur in loco t, (202. lib. 1.). Præterea gravitas acceleratrix verſus ſolem in loco t, eſt ad gravitatem acceleratricem verſus eundem in loco R, ut $SR^2$ ad $St^2$, & ſpatia eodem tempore, urgentibus illis viribus deorſum verſus Solem, deſcripta, ſunt inter ſe ut vires (Lem. X. Lib. I.); Quare recta Re, eſt ſpatium per quod cometa è quiete ex R demiſſus verſus Solem caderet ſemiſſe temporis quo Terra deſcribit arcum Tt, hoc eſt, ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit trajectoriæ ſuæ arcum interceptum inter duas longitudines TA, TC, ideóque punctum R, eſt in arcûs iſtius chordâ. Undè ſi tam arcûs trajectoriæ QRq binis longitudinibus TA, TC terminati quam puncti e, concipiantur veſtigia normalibus ad planum Eccliptiæ demiſſis ſignata, nempè A, B, C & E, erit punctum E in chordâ arcûs ABC. Sed chorda arcûs ABC dividitur à rectâ SB ferè in ratione temporum quibus cometa ad Eclipticam reductus, deſcribit arcus AB, BC, (165.) & (per conſtr.) in eâdem ratione dividitur recta AC, nullaque alia hiſce conditionibus poteſt ſatisfacere. Cùm igitur oporteat chordam arcûs qui

eſt

Ad $AC$ biſectam in $I$ erige perpendiculum $Ii$. Per punctum $B$ age occultam $Bi$ ipſi $AC$ parallelam. Junge occultam $Si$ ſecantem $AC$ in $\lambda$, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per ſolem $S$ age occultam $\sigma\xi$ æqualem




$3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis $A$, $E$, $C$, $I$, à puncto $B$ verſus punctum $\xi$ duc occultam novam $BE$, quæ ſit ad priorem $BE$ in duplicata ratione diſtantiæ $BS$ ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum $E$ iterum duc rectam $AEC$ eâdem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes $AE$ & $EC$ ſint ad invicem, ut tem-

eſt veſtigium portionis trajectoriæ inter longitudines T A, T C interceptæ, à rectis T A, T C terminari & per E tranſire & in E dividi in ratione temporum, cumque recta A C haſce conditiones ſola & unica obtineat, evidens eſt rectam A C eſſe chordam prædicti arcûs, ac proinde puncta A & C ſunt quamproxime veſtigia cometæ in plano Ecliptiæ in obſervationibus primâ & tertiâ, ſi modò B, ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ. 142.

DE MUNDI SYSTEMATE.

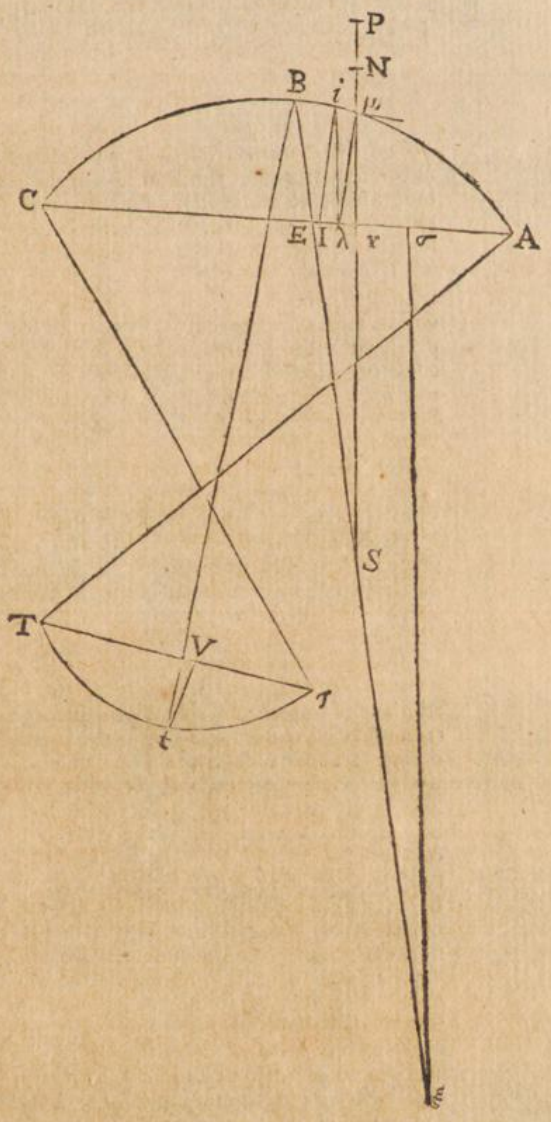
tempora inter obſervationes *V* & *W*. Et erunt *A* & *C* loca cometæ (f) magis accuratè.

Ad

142. (f) * *Magis accuratè.* Quoniam (per conſtr. præced.) aſſumptus eſt locus B vero non ſatis proximus, & licet accuratè ſumptus fuiſſet, tamen loca A & C, inde deducta non ſunt ſatis accuratè definita, hinc adhiberi debet aliqua correctio. Manente conſtructione Newtonianâ, concipiantur demiſſa à ſingulis trajectoriæ cometicæ punctis perpendicula ad planum Ecclipticæ, prædictis perpendiculis in plano Ecclipticæ ſignabitur curva parabolica A B C, cujus umbilicus S. Hujus arcûs A B C, rectis T A, T C comprehenſi chorda eſt quamproximè recta C A, quæ biſariam dividitur in I, (ex dem.). Jam verò in prædicto arcu ſumptum eſt punctum B, non procul à vertice ſegmenti A B C, nam capta ſunt tria obſervationum tempora æqualibus ferè intervallis ab invicem diſtantia, ita tamen ut tempus ſit paulò majus ubi cometa tardiùs movetur. Præterea ducta eſt recta ad C A parallela concurrens in i cum normali erectâ à puncto I ad rectam C A, junctaque eſt ſecans S i, completumque parallelogrammum i I λ μ. Quia verò reſpectu immenſæ Solis diſtantiæ, evaneſcit diſtantia punctorum I, μ; erit α ferè vertex ſegmenti A B C. Jungatur μ S, ſecans chordam A C in Y, erit μ Y, ferè parallela i λ, ob immenſam puncti S diſtantiam, ideóque λ γ, æqualis rectæ i μ, ac proindè & ipſi i λ. Sed (ex conſtr.) I σ ſumpta eſt tripla ipſius i λ, quarè eſt etiam tripla ipſius λ γ & reliquæ Y σ, ideóque junctæ σ S, (165) ea ipſa eſt recta σ S, quæ exhibetur in Lem. 8. id eſt, in rectâ σ S, productâ verſus S, reperitur punctum ξ, à quo ducta quævis recta chordam A C arcumque C B A ſecans, chordam ſecat in ſegmenta quæ eandem habent rationem cum temporibus quibus reſpondentes arcus à cometâ deſcribuntur. Sed (ex conſtr.) $\sigma\xi = 3S\sigma + 3\,i\lambda$ & $i\lambda = I\mu$, ſunt enim rectæ i λ, I μ, diametri ejuſdem parallelogrammi rectanguli, hinc $\sigma\xi = 3\sigma s + 3\,I\mu$. Quarè (140) punctum ξ, ſuprà inventum, illud eſt ex quo ducta utcumque recta dividit chordam C A in ratione temporum quibus binæ partes arcûs A C ab eâdem rectâ productâ notatæ, à cometâ deſcribuntur. Deletâ igitur, ad vitandam confuſionem, priore B E verſus S ductâ, acta eſt nova verſus ξ, quæ eſt ad priorem ut quadratum ipſius S B, ad quadratum ipſius $S\mu + \frac{1}{3}\,i\lambda$, hoc eſt propter æquales $i\lambda$, $I\mu$, ad quadratum ipſius $S\mu + \frac{1}{3}I\mu$, & S B eſt quamproximè æqualis ipſi S μ. Quarè nova B E, eſt ad priorem B E, ut $S\mu^2$, ad $SN^2$, poſitâ μ N triente ipſius I μ, ſivè i λ, ut in conſtr. Lem. X. Deindè gravitas acceleratrix verſus Solem in loco N, eſt ad gravitatem acceleratricem verſus eundem in loco B, vel μ, ut $SB^2$ vel $S\mu^2$ ad $SN^2$. Præterea gravitates acceleratrices verſus ſolem in diſtantiis diverſis, manentibus dictis viribus, ſunt ut ſpatia eodem tempore verſus ſolem cadendo deſcripta; eſt igitur nova B E, ad priorem B E, ut ſpatium verſus ſolem cadendo percurſum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco N, ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit arcum longitudinibus T A, T C, comprehenſum, ad ſpatium eodem tempore verſus ſolem cadendo deſcriptum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco B. Sed æquales ſunt hujus analogiæ conſequentes, quare æquantur etiam antecedentes, ideóque nova recta B E æquatur ſpatio à grave cadente verſus ſolem percurſo, ſemiſſe temporis quo cometa arcum A B C, in Ecclipticâ deſcribit, urgente vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in diſtantiâ S N, à ſole obtinet. At (Lem XI) ſpatium per quod corpus decidit verſus ſolem ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit arcum A B C, cum urgetur vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in loco N ob-

tinet;

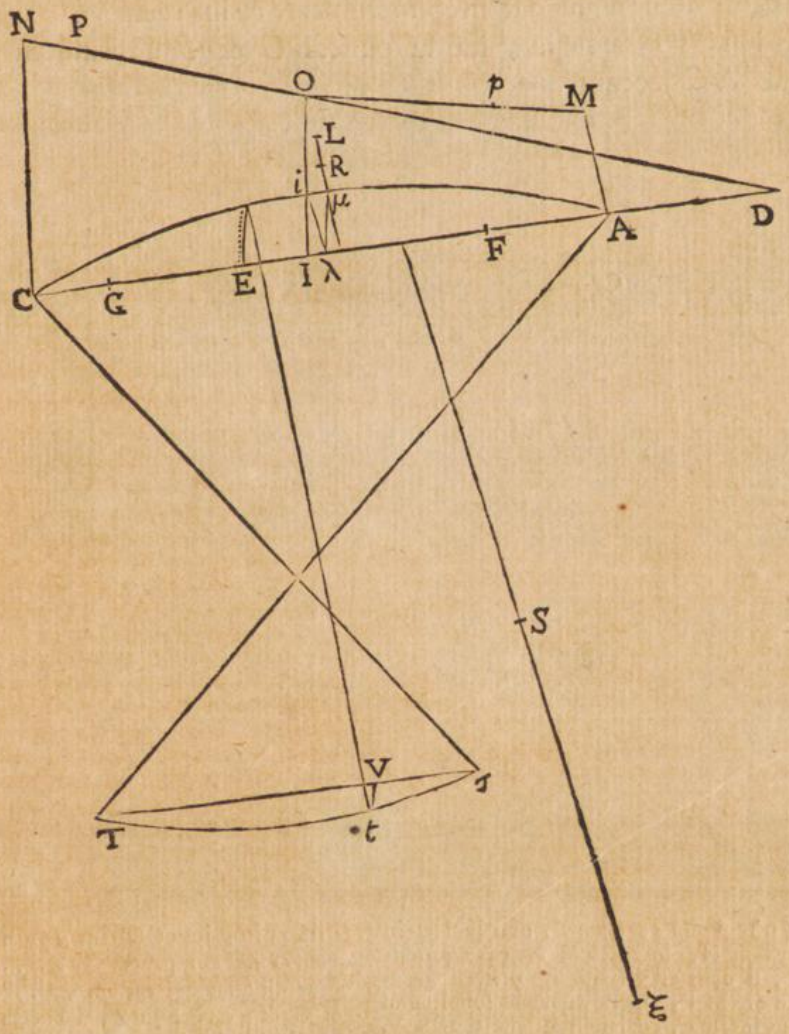
Ad $AC$ biſectam in $I$ erigantur perpendicula $AM$, $CN$, $IO$, quorum $AM$ & $CN$ ſint tangentes latitudinum in obſervatione primâ ac tertiâ ad radios $TA$ & $\tau C$. Jungatur $MN$ ſecans




tinet, æquale eſt rectæ $\mu Y$, ſegmento ipſius $\mu S$, inter verticem $\mu$ & chordam $AC$ intercepto, ac proinde æquatur quamproxime ipſi $BE$ ſegmento rectæ $B\xi$, inter punctum $B$ ipſi $\mu$ proximum & chordam $AC$ comprehenſo. Unde punctum $E$ eſt in chordâ $AC$ magis accurate quam anteà, hoc eſt, chorda arcûs qui eſt veſtigium portionis trajectoriæ cometicæ in plano Ecclipticæ, inter longitudines $TA$, $TC$ interceptæ, per punctum $E$ ultimò inventum tranſit quamproximè. Porrò chorda prædicta per $E$ traducta inter $TA$, $TC$, ità locari debet ut $AE$, ſit ad $EC$, ſicut tempus quo cometa deſcribit Ecclipticæ arcum inter longitudines $TA$ & $tB$, ad tempus quo arcum inter $tB$ & $TC$ deſcribit (Lem. 8.) ſed $AC$ ità (per Lem. 8) acta eſt per $E$, ut $AE$ ſit ad $EC$ in eâdem illâ ratione, nempè ſicut tempus inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam. Rectè igitur acta eſt $AC$, per $E$ ſcilicet tranſiens & diviſa in $E$ ut oportebat, ac proinde ſi modò punctum $B$, recte fuerit aſſumptum pro cometæ veſtigio in obſervatione ſecundâ, puncta $A$, $C$ ſunt ejuſdem veſtigia quamproximè in obſervationibus primâ & tertiâ.

cans $IO$ in $O$. Constituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In $IA$ productâ capiatur $ID$ æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Deinde in $MN$ versus $N$ capiatur $MP$, quæ sit ad longitudinem supra inventam X, in subduplicatâ ratione mediocris distantiæ telluris à sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam $OD$. Si punctum $P$ incidat in punctum $N$, (t) erunt $A$, $B$, $C$ tria loca cometæ,

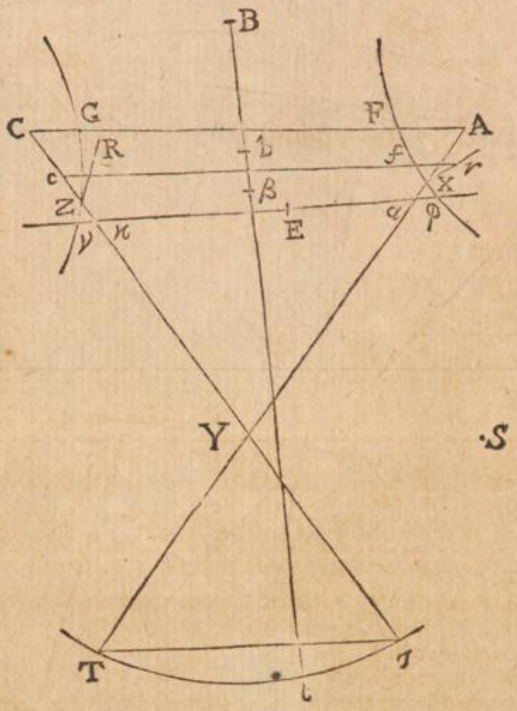
142. (t) * *Erunt A, B, C.* Supereſt jam ut dignoſcatur an punctum B in mediâ longitudine rectè fuerit aſſumptum cometæ veſtigium, ut error hinc ortus, ſi quis fuerit, corrigatur, reliquis quæ hactenus facta ſunt manentibus. Deleto priore parallelogrammo $iI\lambda\mu$, ad priorem minuſque accuratam chordam CA conſtituto, deſcribatur alterum ad poſteriorem & accuratiorem chordam CA, eâdem adhibitâ conſtructione ac priùs. Ex punctis A, I, C, erigantur ad CA normales AM, IO, CN, ſitque AM tangens notæ latitudinis in obſervatione primâ ad radium TA, & CN tangens latitudinis in obſervatione tertiâ ad radium TC; jungatur MN ſecans IO in O. Si erigatur trapezium ACNM normaliter ad planum Eccliptiæ manente rectâ CA, erunt puncta M, N loca vera cometæ, ſi modò punctum B ſit ejus veſtigium in plano Eccliptiæ in obſervatione ſecundâ, & planum tranſiens per tria puncta M, O, N, eſt planum trajectoriæ cometicæ, ideoque recta MN eſt chorda arcus trajectoriæ parabolicæ à cometâ deſcriptæ inter obſervationem primam & tertiam, & SM, SN ſunt diſtantiæ cometæ à ſole in obſervatione primâ & tertiâ reſpectivè, hoc eſt, diſtantia vera cujuſvis puncti trajectoriæ cometicæ à Sole eſt hypothenuſa trianguli rectanguli cujus alterum latus eſt diſtantia à ſole veſtigii illius puncti in plano Eccliptiæ, alterum autem eſt perpendiculum ex iſto veſtigio normaliter ad planum Eccliptiæ excitatum & ad punctum trajectoriæ terminatum. Quia verò aliqua ex iſtis perpendiculis ſunt longiora ut NC, quædam breviora ut MA, inter hæc medium quoddam uſurpetur, putà hic IO. Et univerſaliter loquendo, diſtantia cujuſvis puncti trajectoriæ cometicæ à ſole erit quamproximè hypothenuſa trianguli rectanguli cujus alterum latus eſt diſtantia puncti analogi in veſtigio trajectoriæ deſcripto & alterum latus eſt ipſa recta IO. Quibus poſitis in IA, eâve productâ capiatur $ID = S\mu + \frac{2}{3}i\lambda = SR$, factâ $LR = L\mu$, & jungatur DO, hæc quamproxime æquabitur puncti trajectoriæ cujus $\mu$ eſt veſtigium diſtantiæ à ſole auctæ duabus tertiis rectæ interjectæ inter punctum iſtud & chordam arcûs trajectoriæ, ipſam ſcilicet MN in trapezio ACNM, id eſt, recta DO. æqualis eſt rectæ in plano trajectoriæ cometæ analogæ ipſi SR in ejus veſtigio in plano Eccliptiæ, hoc eſt DO æqualis eſt rectæ SR in parabolâ (Lem. X.). Jam (per cor. 3 prop. 40.) conferatur velocitas cometæ, dum in parabolicâ ſuâ trajectoriâ movetur in diſtantiâ à ſole æquali rectæ DO, cum velocitate telluris circà ſolem, & definiatur linea quam cometa, cum prædictâ velocitate æquabiliter motus, percurreret toto tempore quo tellus arcum $\tau t T$ deſcribit, ſive toto tempore quo cometa arcum ABC in Eccliptiâ percurrit, in partibus arcûs $T t \tau$ à tellure interim percurſi. Id autem facilè præſtatur modo ſequenti. Calculo inveniatur longitudo arcûs $\tau t T$ à tellure deſcripti inter obſervationem primam & tertiam, poſito quovis numero rotundo pro mediocri diſtantiâ terræ à ſole, longitudo putà MP quæ eſt ad longitudinem priùs inventam X, in ſubduplicatâ ratione diametri orbis magni ad rectam notam DO, quæque proinde dabitur, eſt ipſa longitudo quæſita, ea nempe quam, cometa æquabiliter latus cum velocitate quam trajectoriam ſuam parabolicam deſcribens habet ad diſtantiam à ſole æqualem rectæ DO, percurreret tem-




tempore quo cometa arcum cujus chorda MN revera percurrit. Nam (per cor. 3. prop. 40.) velocitas cometæ in hâc distantiâ DO, est ad velocitatem telluris in prædictâ ratione. Sed (per Lem. X.) dicta longitudo MP æqualis est chordæ arcûs quem cometa isto tempore revera describit; Quare si reperiatur MP æqualis chordæ MN, hoc est, si punctum P incidat in punctum N recte assumptum fuit punctum B in longitudine secundò observata pro vestigio cometæ, ideóque erunt A, B, C, tria loca cometæ per quæ orbis ejus in plano Ecliptica describi debet. 142.

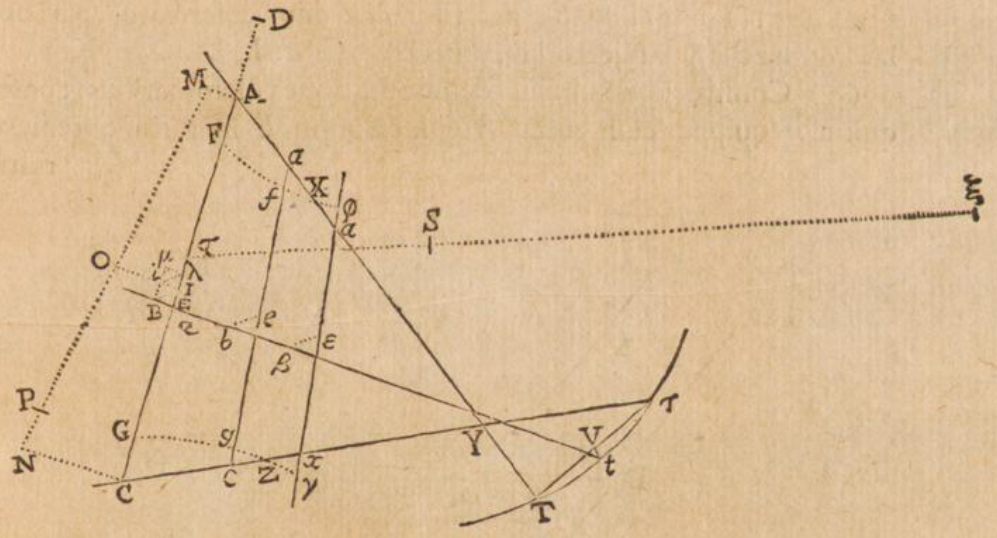
DE MUNDI SYSTEMATE.

tæ, per quæ orbis ejus in plano eclipticæ describi debet. (u) Sin punctum *P* non incidat in punctum *N*; in rectâ *AC* capiatur *CG* ipsi *NP* æqualis, ita ut puncta *G* & *P* ad easdem partes rectæ *NC* jaceant. Ea-




142. (u) * *Sin punctum* P, non incidat in punctum N, in rectâ M N eâve productâ, si opus est, (vid. fig. præced.) capiantur M P, N P æquales longitudini prius inventæ, capiantur etiam C G, C F, æquales M P, N P, ità ut G & P ad easdem partes rectæ N C jaceant. Præterea eâdem methodo quâ ex assumpto puncto B, inventa sunt puncta E, A, C, G, ex assumptis aliis punctis b & β, inveniantur nova puncta e, a, c, g, & ε, α, κ, γ. Quod si longitudo prius inventa M P, minor fuerit quam M N, aut A G, vel C F, punctum b, sumendum erit propius puncto Y, in quo C τ & A T concurrunt; & ità porrò, ità ut saltem α γ, minor fiat quam α κ. Per puncta G, g, γ, describatur circulus qui rectam τ C, secabit inter G & κ, putà in Z, si puncta nova b, β, sumpta fuerint, ut jam diximus. Similiter per puncta F, f, φ, describatur circulus rectam T A, intersecans in X, erunt puncta Z, X, loca cometæ ad Ecclipticam reducta, sivè cometæ vestigia in observatione primâ & tertiâ, si B sit ejusdem vestigium in observatione secundâ. Idem similiter obtinet in a, c, & b, item in α, κ & β. Jam verò demonstratum est locum B, esse vestigium cometæ in observa-

Eadem methodo, quâ punctâ $E$, $A$, $C$, $G$, ex assumpto puncto $B$ inventa sunt, invenientur ex assumptis utcunque punctis aliis $b$ & $\beta$ puncta nova $e$, $a$, $c$, $g$ & $\varepsilon$, $\alpha$, $\varkappa$, $\gamma$. Deinde si per $G$, $g$, $\gamma$ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, secans rectam $\tau C$ in $Z$: erit $Z$ locus cometæ in plano ecliptícæ. Et si in

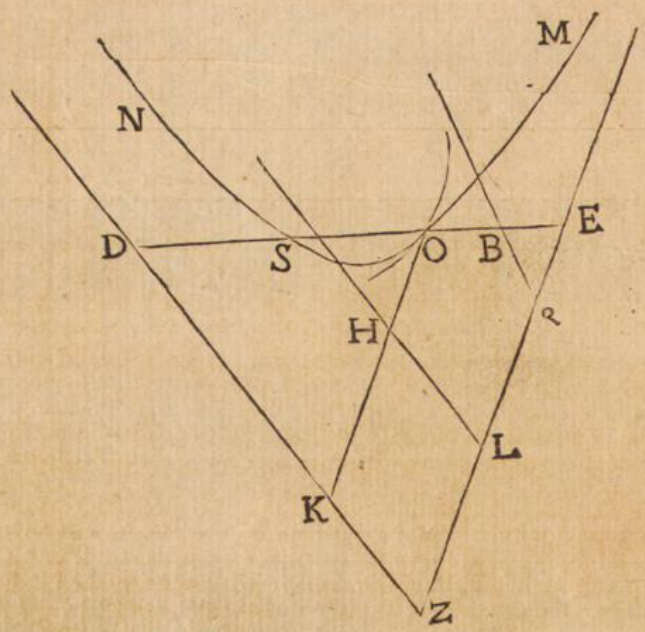



servatione secundâ, si puncta N, P, coincidant, itemque A & F; quare si reliquis manentibus, coincidant puncta C, G, erit C, vestigium cometæ in observatione tertiâ. Similiter coincidentibus punctis A, F, erit A, vestigium cometæ in observatione primâ. Ut autem puncta illa coinciderent, productus est circulus transiens per tria puncta G, g, γ, rectam τC, secans in Z. Cùm igitur punctum Z, sit tam in loco punctorum C, nempe rectâ τC, quam in loco punctorum G, nempe circulo, quandò punctum C reperitur in Z, punctum G in illo etiam reperietur, id est, in isto casu coincident puncta C, G, ideóque punctum Z est verum cometæ vestigium in plano Ecliptícæ in observatione tertiâ, huic enim conveniunt omnes conditiones requisitæ. Similiter ob easdem rationes, punctum X est verum cometæ vestigium in observatione primâ. Quare si ex puncto Z, ad planum Ecliptícæ excitata intelligatur normalis ZR æqualis tangenti latitudinis notæ in observatione tertiâ ad radium τZ, erit R locus verus cometæ in orbe proprio. Similiter ad planum Ecliptícæ erigatur perpendicularis XY, æqualis tangenti latitudinis in observatione primâ ad radium TX, punctum Y, erit alter cometæ locus in orbe proprio. Quare (per prop. 19. lib. 1.) umbilico S, per loca bina R, r, describatur parabola, hæc erit trajectoria cometæ. Quia verò parabolæ per puncta R, r, & umbilico S, descriptæ duplex positio esse potest (ut patet ex constr. prop. 19. lib. 1.) ex eodem umbilico S, & binis punctis R, r, duæ describi poterunt parabolæ; utra autem pro orbe cometæ sumenda sit ex aliâ quâvis cometæ observatione manifestum erit. Nam locus cometæ qui ex alterâ harum parabolarum colligetur, cum observato loco conveniet, locus autem ex alterâ parabolâ deductus nequaquam observationibus congruet. 142

DE MUNDI SYSTEMATE.

$AC$, $ae$, $\alpha\kappa$ capiantur $AF$, $af$, $\alpha\phi$ ipsis $CG$, $cg$, $\kappa\gamma$ respectivè æquales, & per puncta $F$, $f$, $\phi$ ducatur circumferentia circuli $Ff\phi$, secans rectam $AT$ in $X$; erit punctum $X$ alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta $X$ & $Z$ erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios $TX$ & $\tau Z$; & habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per prop. XIX. lib. I.) umbilico $S$, per loca illa duo describatur parabola, & hæc erit trajectoria cometæ. *Q. E. I.*

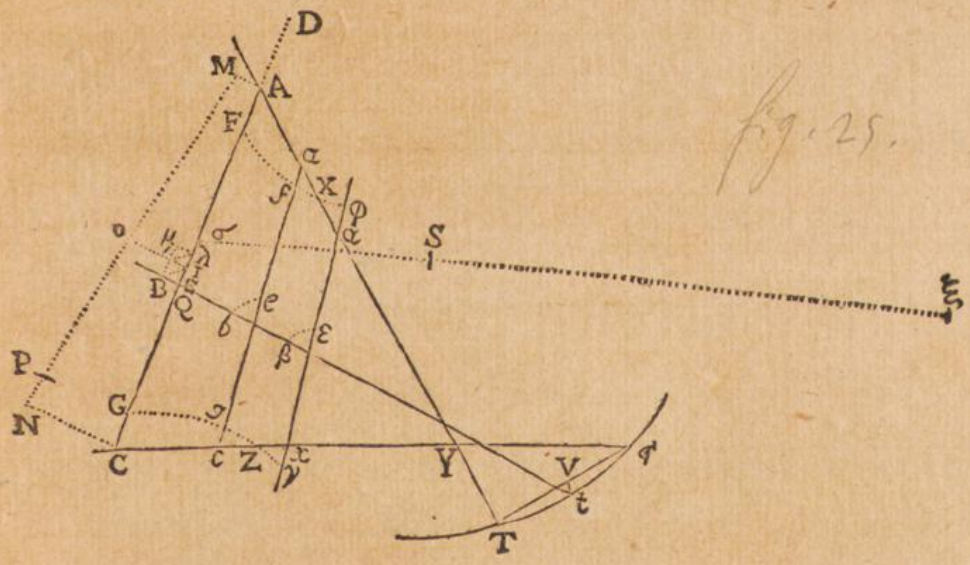
(x) Constructionis hujus demonstratio ex lemmatibus consequitur: quippe cum recta $AC$ secetur in $E$ in ratione temporum,




143. (x) * *Constructionis hujus demonstratio.* Patet ex notis præced.

143. Lemma. Sit angulus rectilineus A Q B datumque punctum S; item sit curva M O N, talis ut per S ductâ quávis rectâ S E sit B E, anguli lateribus intercepta, æqualis rectæ S O, erit curva MON, hyperbola. Nam ducatur S L, ad B Q, parallela, occurrensque ipsi A Q in L, in rectâ Q L productâ capiatur L Z = L Q, agaturque Z D ad Q B parallela, itemque ducatur O K parallela ad Q Z: ob S O = B E (per hyp.) erit H O = Q E. Quare cum sit S H : H O = S L : L E = S L − S H : L E − H O = L H : L Q = L H : H K, erit S H × H K = H O × L H, hoc est, S L

rum, per lemma VII, ut oportet per lem. VIII: & $BE$ per lem XI. sit pars rectæ $BS$ vel $B\beta$ in plano eclipticæ arcui $ABC$, & chordæ $AEC$ interjecta; & $MP$ (per corol. lem. x.) lon- LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.




gitudo sit chordæ arcus, quem cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi $MN$ æqualis fuerit, si modo $B$ sit verus cometæ locus in plano eclipticæ.

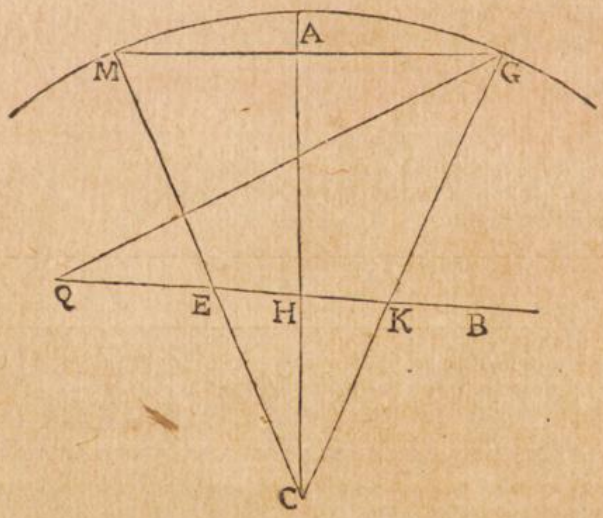
Cæterum puncta $B$, $b$, $\beta$ non quælibet, sed vero proxima eli-

$SL \times HK - LH \times HK = KO \times LH - HK \times LH$. Unde erit $SL \times HK = KO \times LH$, vel $ZL \times LS = ZK \times KO$, ideóque curva MON, est hyperbola cujus asymptoti ZA, ZS (Lem. 1. de con.).

144. Corol. Hinc per datum punctum S, recta linea duci potest ità ut pars rectæ BE, lateribus anguli dati EQB, intercepta, æqualis sit rectæ datæ. Nam descriptâ hyperbolâ MON, centro S, intervallo datam rectam æquante, describatur circulus hyperbolam intersecans in O, & producatur SOE, erit $B\beta$ æqualis rectæ datæ SO (143). 144.

De Mundi Systemate.

(γ) eligere convenit. Si angulus $AQt$, in quo vestigium orbis in plano eclipticæ descriptum secat rectam $tB$, præter propter innotescat; in angulo illo ducenda erit recta occulta $AC$, quæ



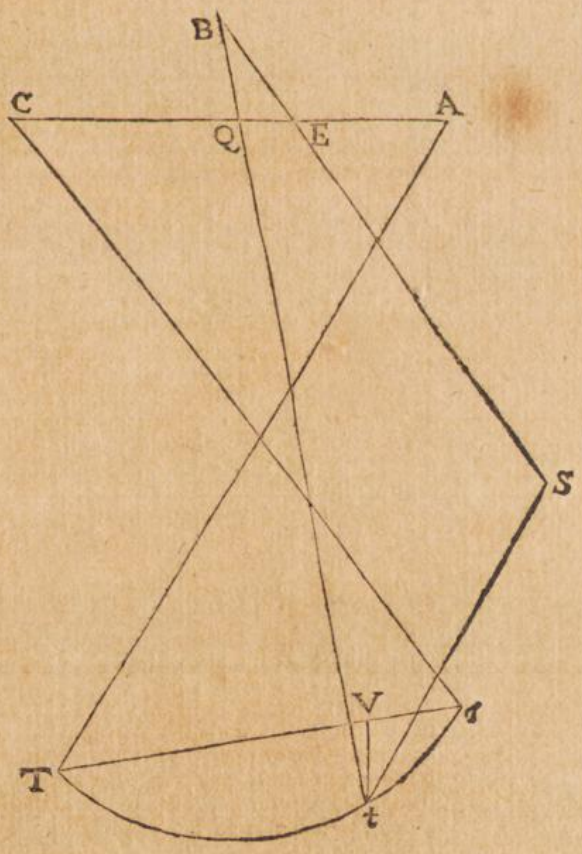

145. 145. Newtonus in arithmeticâ universali præcedentis corollarii constructionem quæ fit per conchoidem more veterum, anteponendam esse ait constructioni quæ Sectiones Conicas adhibet. Quare veterum constructionem utpotè simpliciorem hic quoque subjungemus. Sic autem describitur conchois. Agatur nempè recta QB, ad quam erigatur normalis AH, deindè ex puncto C, tanquam polo ità ducantur rectæ quotcumque CM, rectam QB secantes in E, ut semper sit EM, æqualis rectæ datæ AE, curva in quâ sunt puncta M, A dicitur conchois. Jam verò inter latera anguli GQB, ducere oporteat rectam GK, quæ transeat per punctum datum C, & æqualis sit rectæ datæ CK, puncto C tanquam polo & intervallo dato AH=CK describatur conchois quæ occurrat rectæ CG, in G patet fore KG, æqualem rectæ datæ CK. Q.E.F.

(γ) * *Eligere convenit.* Si præter propter innotescat angulus quem vestigium orbitæ cometicæ continet cum rectâ terram & cometam in observatione secundâ conjun-

quæ ſit ad $\frac{4}{3}T_7$ in ſubduplicatâ ratione $SQ$ ad $St$. Et agendo rectam $SEB$, cujus pars $EB$ æquetur longitudini $Vt$, determinabi-

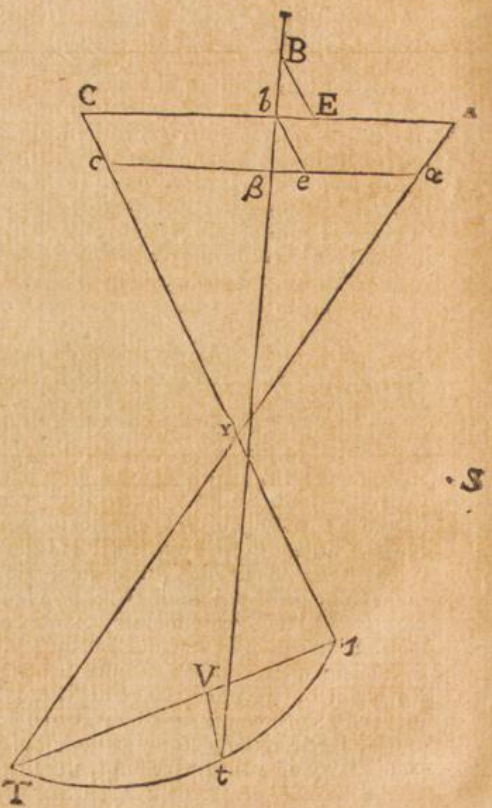
jungente, ſive huic æqualis angulus AQt (Lem. 4. de con.) quem chorda AC continet cum rectâ tB, id quod præſtari poterit per num. 133. tunc punctum B, primò aſſumendum hoc modo determinabitur. Ducatur recta AC, rectis poſitione datis TA, TC utrinque comprehenſa, rectamque tB, poſitione datam, in angulo æquali dato in Q interſecans quæ ſit ad $\sqrt{2} \times Tt$, hoc eſt, proxime ad $\frac{4}{3}$ Tt, in ſubduplicatâ ratione St ad SQ, & agatur per S, recta SEB, tali ut pars EB à cruribus anguli AQB intercepta, æqualis ſit rectæ tV (144. 145.) punctum B, ità definitum, eſt illud ipſum quod commodè primâ vice uſurpari poterit pro veſtigio cometæ in plano Eccliptiæ. Ponatur B, eſſe veſtigium cometæ in plano Eccliptiæ & arcum parabolicum per A, C, B tranſeuntem eſſe veſtigium arcûs trajectoriæ inter obſervationem primam & tertiam deſcripti. Jam verò in hypotheſi quod gravitas acceleratrix versùs ſolem eâdem ſit in diſtantiâ telluris à ſole, atquè in diſtantiâ cometæ ab eodem, quæ eſt hypotheſis Galilæi de gravitate à verâ non multum diſtans, æquales erunt BE, tV, ut pote ſpatia cadendo versùs ſolem eodem tempore percurſa à cometâ & à tellure, ac proindè erit AC chorda parabolæ ad $\sqrt{2} \times Tt$ chordam circuli cujus centrum cum umbilico parabolæ coincidit in ſubduplicatâ ratione rectæ St, ad rectam SE, (Cor. 7. prop. 16. lib. 1). Sed ſumpta eſt AC ad $\sqrt{2} \times Tt$ in ſubduplicatâ ratione St ad SQ, & AC ſecat rectam tB in angulo AQt, ſicut oportebat, atque BE æqualis eſt ipſi tV; Quare recta AC obtinet quamproximè omnes conditiones requiſitas ut ſit chorda arcûs qui eſt veſtigium trajectoriæ cometicæ inter longitudinem primam TA, & tertiam interceptæ ac proindè punctum B, habet omnes conditiones ut ſit proximè veſtigium cometæ in obſervatione ſecundâ. Rectè igitur determinatum eſt punctum B, quod primâ vice uſurpare licet.

1447.



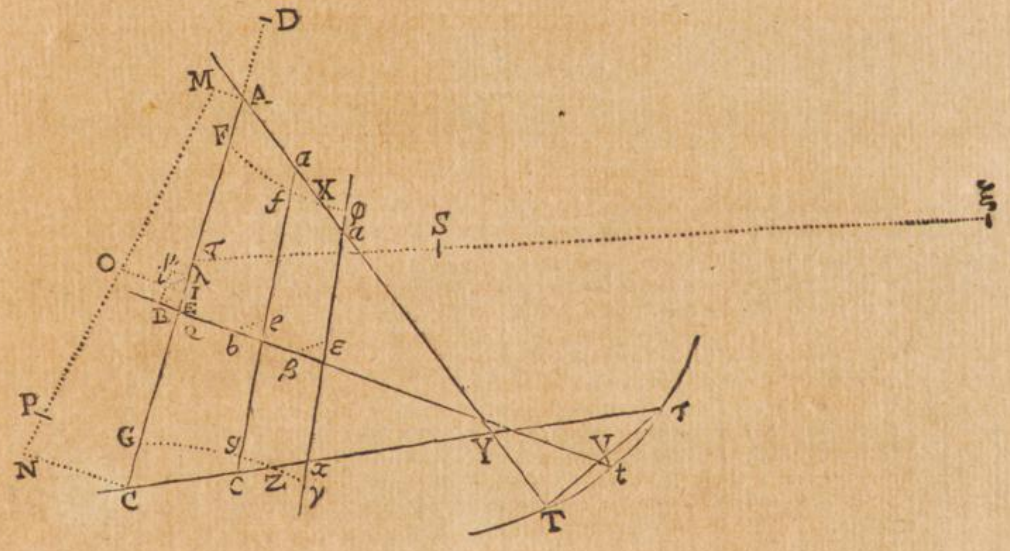
nabitur punctum *B* quod prim vice usurpare licet. (z) Tum rectâ *AC* deletâ & secundùm præcedentem constructionem iterum ductâ, & inventâ insuper longitudine *MP*; in *tB* capiatur punctum *b*, eâ lege, ut si *TA*, *τC* se mutuò secuerint in *Y*, sit distantia *Yb* ad distantiam *YB*, in ratione compositâ ex ratione *MP* ad *MN* & ratione subduplicatâ *SB* ad *Sb*. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium *β* si modo

145. (z) * *Tum rectâ AC, deletâ.* Determinato puncto B, quod primâ vice licet usurpare, cætera quæ deinceps assumuntur puncta nempè b, β, aliam constructionem postulant. Nec satis est quod punctum b, sumatur propius puncto Y, dum linea MP, minor est quam AC vel MN (in fig. Newt.) & contrà. Sed quia ducere oportet rectam AC, quæ sit æqualis longitudini MP, capiatur in tB punctum b, eâ lege ut sit distantia Yb, ad distantiam YB, in ratione compositâ ex ratione MP ad AC, & ratione subduplicatâ SB ad Sb. Ex hactenus dictis patet cur prior ratio componens adhibeatur; cum enim invenienda sit AC, quæ sit longitudini MP æqualis, si illa hâc sit major aut minor, minuenda erit vel augenda donec æquales fiant, æquarentur autem per solam priorem rationem si MP foret constans. Quia verò variante AC, perpetuò quoque variabilis est recta MP, ideò adhibenda est altera ratio. Jam in parabolis per puncta A, B, C, & a, b, c, descriptis, chordæ arcuum ABC, abc, in quibus æquales sunt rectæ BE, be, ad umbilicum S tendentes inter verticem & chordam interceptæ, sunt in ratione subduplicatâ rectarum SB, Sb (ut colligitur ex theor. 1. & 2. de parab.). Præterea (ex dem.) æquales sunt rectæ BE, be quamproximè; sunt enim spatia à cometâ versus solem cadendo in diversis ab illo distantiis eodem tempore percursa, & vestigium cometæ in observatione secundâ proximum est vertici arcûs ABC, seu vestigii portionis trajectoriæ à cometâ inter observationem primam & tertiam descriptæ. Quare habetur punctum b, co-




metæ

dò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes duæ ut plurimum ſufficerint. Nam ſi diſtantia $Bb$ perexigua obvenerit; poſtquam inventa ſunt puncta $F$, $f$ & $G$, $g$,




actæ rectæ $Ff$ & $Gg$ ſecabunt $TA$ & $\tau C$ in (*) punctis quæſitis $X$ & $Z$.

*Exem-*

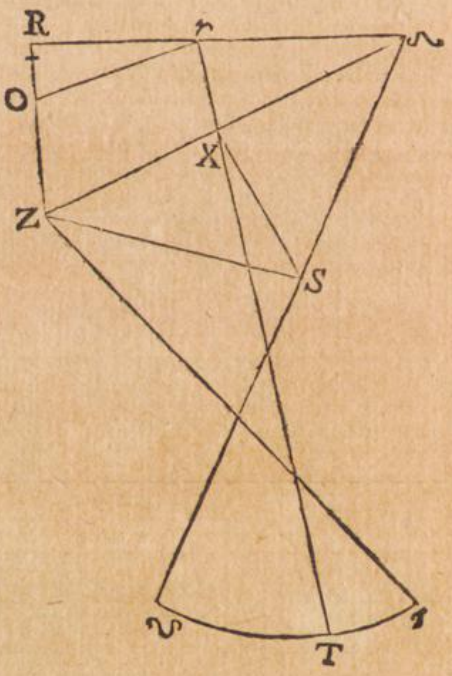
metæ veſtigium in plano Eccliptícæ, non tamen accuratum, ſed verò proximum duntaxat.

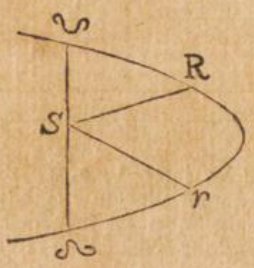
(*) * *In punctis quæſitis X & Z.* (Ut patet ex notâ u, in hanc prop.).

146. Si elliptica cometæ orbita magis accuratè obſervationibus ſatisfacere deprehendatur, ea ſic poterit deſcribi. Reperiatur veſtigium cometæ in plano Eccliptícæ in obſervatione ſecundâ, eundem ordinem ſitumque obtinet veſtigium illud inter puncta B, b, β, quem punctum Z, inter C, c, ϰ, vel X, inter A, a, α. Ex veſtigio ſic invento, ad planum Eccliptícæ erigatur normalis quæ eſt tangens latitudinis in obſervatione ſecundâ ad radium æqualem diſtantiæ inter locum t, dictumque veſtigium. Hujus perpendiculi extremum punctum ſignabit locum cometæ in orbitâ propriâ ſecundò obſervatum. Denique umbilico S, per puncta X, Z, & punctum modò inventum deſcribatur ellipſis (prop. 20. lib. 1.), hæc erit quæſita cometæ trajectoria. 146.

DE MUNDI SYSTEMATE.

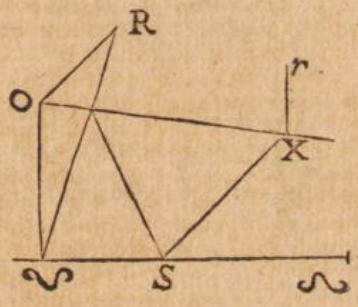
147. Ex præcedentis problematis solutione colligi possunt positio lineæ nodorum trajectoriæ & tempus quo cometa nodos tenet. Iisdem manentibus, & per easdem litteras designatis ut supra, producantur rectæ ZX, Rr, donec concurrant in ☊, jungan urque SZ, SX, S☊. Jam verò (ex præced.) data sunt omnia puncta S, Z, X, ideóque trianguli SZX, tam latera quam anguli ac proindè innotescit etiam angulus SX☊. Ex loco r, ducatur rO, ad ZX parallela rectæ RZ, occurrens in O, erunt triangula ROr & & rX☊, æquiangula, ideóque cum ex notis lateribus Or = ZX, & OR, differentiâ notarum rectarum RZ & rX unà cum angulo recto ROr, innotescant reliqua latera & anguli, dabuntur quoque anguli trianguli rX☊. Sed datur in hoc triangulo latus unum Xr, dabuntur ergò & reliqua nempè X☊ & r☊. Deindè in triangulo ☊XS, nota sunt latera XS, X☊, cum angulo intercepto SX☊, innotescet itaque angulus XS☊. Sed datur (per observ.) positio rectæ SX, sivè angulus quem facit cum TX. Nam in triangulo XTS, dantur latera TS, TX & angulus XTS, distantia inter locum solis cognitum locumque cometæ primò observatum. Unde innotescit TXS, ac proindè & positio rectæ ☊S♈, hoc est, dabuntur loca nodorum è sole visa. Quod si æquales fuerint rectæ ZR, Xr, nodorum linea parallela est rectæ ZX, ideóque positione cognita.

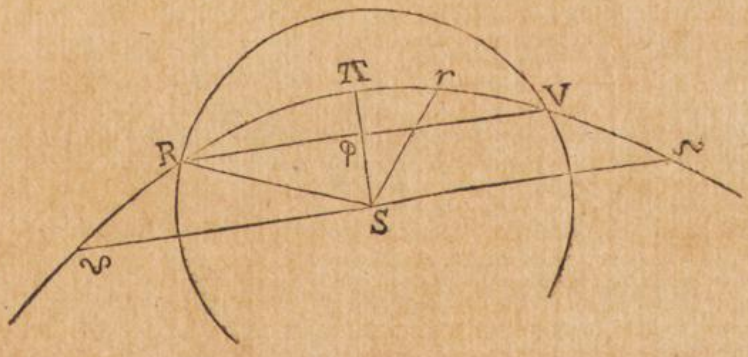



Ad determinandum tempus quo cometa in nodo versatur, sit Rr, trajectoria cometæ (per prop. præced.) descripta, sitque superius inventa nodorum linea ☊S♈, trajectoriæ in ☊ & ☊ occurrens, erit (prop. 1. lib. 1.) intervallum temporis inter observationem primam & momentum quo cometa ad nodum ☊ appellit, ad intervallum temporis inter observationem primam & tertiam ut area r☊S, ad aream RSr; sed arearum r☊S, RSr, nota est ratio (per theor. 4. de parab. vel num. 142.) notum igitur est tempus quo cometa nodum ☊, tenet. Pari modo innotescit tempus quo cometa ad nodum alterum ♈ appellit.

148. Iisdem manentibus, determinabitur inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eccliptícæ. Ex puncto O ad ☍ S ☌, nodorum lineam erigatur perpendicularis O ☍, jungaturque R ☍. In triangulo O S ☍, præter rectum ad ☍, dantur (147.) angulus O S ☍ & latus O S, quare datur O ☍. Deinde in triangulo R O ☍, dantur latera circà rectum O R & O ☍, ideóque notus erit angulus O ☍ R, qui eſt inclinatio plani trajectoriæ ad planum Eccliptícæ.




149. Facilè obtineri poteſt tempus quo cometa perihelium tenet. Umbilico S, per puncta R, r, deſcribatur trajectoria cometæ. Centro S, per alterutrum punctorum putà R, deſcribatur circulus trajectoriæ denuò occurrens in V, jungaturque R V, ad quam ex puncto S demittatur perpendicularis S φ, quæ producatur donec parabolæ occurrat in π, erit π trajectoriæ perihelium; & proindè recta ipſius S π quadrupla, erit ejuſdem latus rectum principale. Cum enim umbilicus S, in parabolæ axe reperiatur, circulus centro S deſcriptus, parabolam interſecabit in duobus punctis ab axe æqualiter diſtantibus ac proindè axi normalis erit R V interſectiones conjungens; Quare S φ eſt axis & π vertex parabolæ, ſivè trajectoriæ perihelium & quadrupla S π parameter diametri cujus π eſt vertex (theor. 2. de parab.) hoc eſt, latus rectum principale. Jam capiatur tempus cujus intervallum ab obſervatione primâ, dum cometa verſabatur in r, eſt ad intervallum temporis inter obſervationem primam & tertiam ut area r S π ad aream R r S, habebitur illud ipſum tempus quo cometa perihelium occupat.

150. Hinc etiam cometæ perigæum ejuſque tempus determinabitur. Cum enim detur tempus inter obſervationem primam & tertiam interceptum, quo ſcilicet data area r R S, à cometa radio ad ſolem ducto deſcribitur, data quoque erit area uno die ſimiliter deſcripta. Præterea datur r, locus cometæ in obſervatione primâ, quare dabuntur loca cometæ in proprio orbe ad dies ſingulos. Sed dantur loca telluris in orbitâ ſuâ, notuſque eſt ſitus mutuus inter telluris orbitam & cometæ trajectoriam. Undè innoteſcet tempus quo cometa eſt terræ proximus, hoc eſt, tempus quo cometa in perigæo verſatur.

*Exem-*

DE MUNDE SYSTEMATE.

*Exemplum.*

Proponatur cometa anni 1680. Huius motum à *Flamſtedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, tabula ſequens exhibet.

| | Tem. appar. | Tem. verum | Long. Solis. | Cometæ Longitudo. | Lat bor. |
|---|---|---|---|---|---|
| | h. ′ | h. ′ ″ | ° ′ ″ | ° ′ ″ | ° ′ ″ |
| 1680. *Dec.* 12 | 4 . 46 | 4 . 46 . 0 | ♍ 1 . 51 . 23 | ♍ 6 . 32 . 30 | 8 . 28 . 0 |
| 21 | 6 . 32½ | 6 . 36 . 59 | 11 . 6 . 44 | ♒ 5 . 8 . 12 | 21 . 42 . 13 |
| 24 | 6 . 12 | 6 . 17 . 52 | 14 . 9 . 26 | 18 . 49 . 23 | 25 . 23 . 5 |
| 26 | 5 . 14 | 5 . 20 . 44 | 16 . 9 . 22 | 28 . 24 . 13 | 27 . 0 . 52 |
| 29 | 7 . 55 | 8 . 3 . 2 | 19 . 19 . 43 | ☾ 13 . 10 . 41 | 28 . 9 . 58 |
| 30 | 8 . 2 | 8 . 10 . 26 | 20 . 21 . 9 | 17 . 38 . 20 | 28 . 11 . 53 |
| 1681. *Jan.* 5 | 5 . 51 | 6 . 1 . 38 | 26 . 22 . 18 | ♈ 8 . 48 . 53 | 26 . 15 . 7 |
| 9 | 6 . 49 | 7 . 0 . 53 | ♒ 0 . 29 . 2 | 18 . 44 . 4 | 24 . 11 . 56 |
| 10 | 5 . 54 | 6 . 6 . 10 | 1 . 27 . 43 | 20 . 40 . 50 | 23 . 43 . 52 |
| 13 | 6 . 56 | 7 . 8 . 55 | 4 . 33 . 20 | 25 . 59 . 48 | 22 . 17 . 28 |
| 25 | 7 . 44 | 7 . 58 . 42 | 16 . 45 . 36 | ♉ 9 . 35 . 0 | 17 . 56 . 30 |
| 30 | 8 . 7 | 8 . 21 . 53 | 21 . 49 . 58 | 13 . 19 . 51 | 16 . 42 . 18 |
| *Feb.* 2 | 6 . 20 | 6 . 34 . 51 | 24 . 46 . 59 | 15 . 13 . 53 | 16 . 4 . 1 |
| 5 | 6 . 50 | 7 . 4 . 41 | 27 . 49 . 51 | 16 . 59 . 6 | 15 . 27 . 3 |

His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

| | Tem. appar. | Cometæ Longitudo | Cometæ Lat. bor. |
|---|---|---|---|
| 1681. *Feb.* 25 | 8 h . 30 ′ | ♉ 26° . 18′ . 35″ | 12° . 46′ . 46″ |
| 27 | 8 . 15 | 27 . 4 . 30 | 12 . 36 . 12 |
| *Mar.* 1 | 11 . 0 | 27 . 52 . 42 | 12 . 23 . 40 |
| 2 | 8 . 0 | 28 . 12 . 48 | 12 . 19 . 38 |
| 5 | 11 . 30 | 29 . 18 . 0 | 12 . 3 . 16 |
| 7 | 9 . 30 | ♊ 0 . 4 . 0 | 11 . 57 . 0 |
| 9 | 8 . 30 | 0 . 43 . 4 | 11 . 45 . 52 |

Hæ obſervationes teleſcopio ſeptupedali, & micrometro filiſque in foco teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis

tis & positiones fixarum inter se & positiones cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam quartæ magnitudinis in sinistro calcaneo Persei (*Bayero o*) *B* stellam sequentem tertiæ magnitudinis in sinistro pede (*Bayero ?*) & *C* stellam sextæ magnitudinis (*Bayero n*) in talo ejusdem pedis, ac *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Z*, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stellas alias minores in eodem pede.



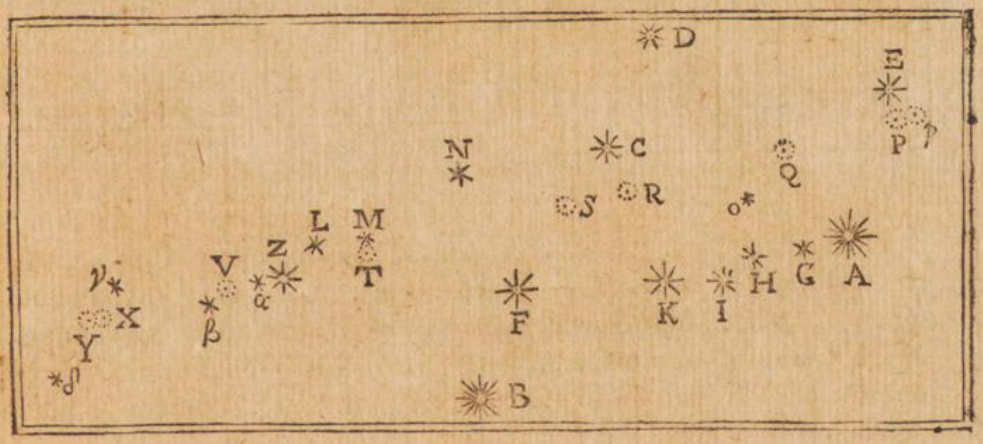



fig. 26.

Sintque *n*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, loca cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantiâ *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$ *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$, *DI* $53\frac{5}{11}$ *AK* $38\frac{2}{3}$ *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas *D* & *E*, sic ut distantia stellæ *D* ab hâc rectâ esset $\frac{1}{8}$ *CD*. *LM* erat ad *LN* ut 2 ad 9, & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Tandem *Poundius* noſter iterum obſervavit poſitiones harum fixarum inter ſe, & earum longitudines & latitudines in tabulam ſequentem retulit.

| Fixarum | Longitudines. | Lat. boreæ. |
|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ |
| A | ♉ 26.41.50 | 12. 8.36 |
| B | 28.40.23 | 11.17.54 |
| C | 27.58.30 | 12.40.25 |
| E | 26.27.17 | 12.52. 7 |
| F | 28.28.37 | 11.52.22 |
| G | 26.56. 8 | 12. 4.58 |
| H | 27.11.45 | 12. 2. 1 |
| I | 27.25. 2 | 11.53.11 |
| K | 27.42. 7 | 11.53.26 |

| Fixarum | Longitudines. | Lat. boreæ. |
|---|---|---|
| | ° ′ ″ | ° ′ ″ |
| L | ♉ 29.33.34 | 12. 7.48 |
| M | 29.18.54 | 12. 7.20 |
| N | 28.48.29 | 12.31. 9 |
| Z | 29.44.48 | 11.57.13 |
| α | 29.52. 3 | 11.55.48 |
| β | ♊ 0. 8.23 | 11.48.56 |
| γ | 0.40.10 | 11.55.18 |
| δ | 1. 3.20 | 11.30.42 |

Poſitiones vero cometæ ad has fixas obſervabam ut ſequitur.

Die veneris *Feb.* 25. ſt. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in $p$ exiſtentis diſtantia à ſtellâ $E$ erat minor quam $\frac{3}{13} AE$, major quam $\frac{1}{5} AE$, ideoque æqualis $\frac{3}{14} AE$ proxime: & angulus $ApE$ nonnihil obtuſus erat, ſed ferè rectus. Nempe ſi demitteretur ad $pE$ perpendiculum ab $A$, diſtantia cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{5} pE$.

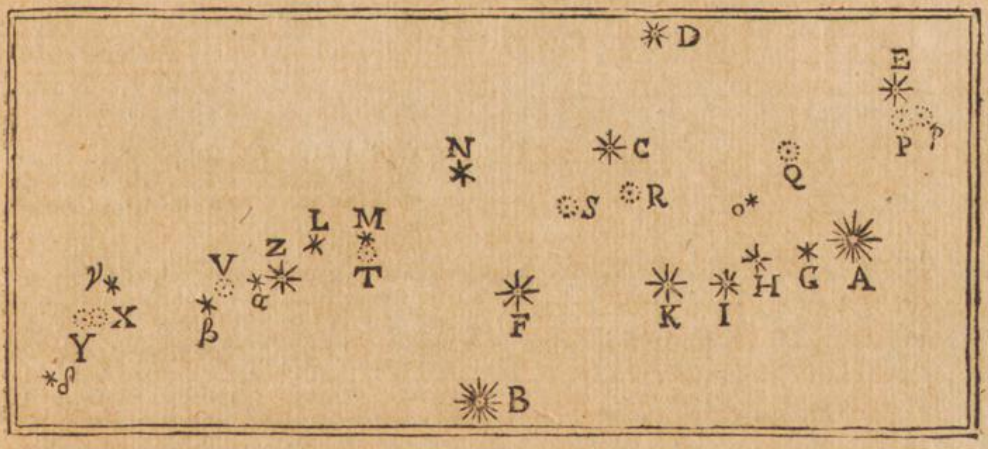
Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, cometæ in $P$ exiſtentis diſtantia à ſtellâ $E$ erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}} AE$, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}} AE$, ideoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}} AE$, ſeu $\frac{8}{39} AE$ quamproximè. A perpendiculo autem à ſtellâ $A$ ad rectam $PE$ demiſſo diſtantia cometæ erat $\frac{4}{5} PE$.

Die ſolis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in $Q$ exiſtentis diſtantia à ſtellâ $O$ æquabat diſtantiam ſtellarum $O$ & $H$, & recta $QO$ producta tranſibat inter ſtellas $K$ & $B$. Poſitionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. cometa in $R$ exiſtens, ſtellis

ſtellis *K* & *C* accuratè interjacebat, & rectæ *CRK* pars *CR* paulo major erat quam $\frac{1}{3}CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{8}CR$, ideoque æqualis $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{16}CR$ ſeu $\frac{16}{45}CK$. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. cometæ exiſtentis in *S* diſtantia à ſtellâ *C* erat $\frac{4}{9}FC$ quamproximè. Diſtantia ſtellæ *F* à rectâ *CS* producta erat $\frac{1}{24}FC$; & diſtantia ſtellæ *B* ab eâdem rectâ, erat quintuplo major quàm diſtantia ſtellæ *F*. Item recta *NS* producta tranſibat inter ſtellas *H* & *I*, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ *H* quam ſtellæ *I*.




Die ſaturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. p. m. cometâ exiſtente in *T*, recta *MT* æqualis erat $\frac{1}{2}ML$, & recta *LT* producta tranſibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quam *B*, auferens à *BF* quintam vel ſextam ejus partem verſus *F*. Et *MT* producta tranſibat extra ſpatium *BF* ad partes ſtellæ *B*, quadruplo propior exiſtens ſtellæ *B* quam ſtellæ *F*. Erat *M* ſtella perexigua quæ per teleſcopium videri vix potuit, & *L* ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

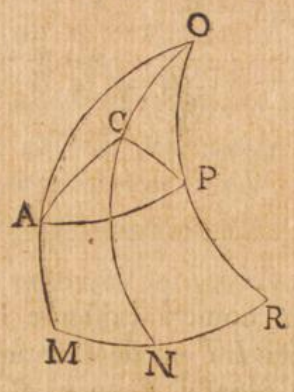
Die lunæ *Mart.* 7 hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. cometæ exiſtente in *V*, recta $V\alpha$ producta tranſibat inter *B* & *F*, auferens à *BF* verſus *F* $\frac{1}{16}BF$, & erat ad rectam $V\beta$ ut 5 ad 4. Et diſtantia cometæ à rectâ $\alpha\beta$ erat $\frac{1}{2}V\beta$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Die mercurii *Mart.* 9. hora $8\frac{1}{2}$ p. m. cometa existente in *X*, recta $\gamma X$ æqualis erat $\frac{1}{4}\gamma\delta$, & perpendiculum demissum à stellâ $\delta$ ad rectam $\gamma X$ erat $\frac{2}{5}\gamma\delta$.

Eâdem nocte horâ 12, cometa existente in *Y*, recta $\gamma Y$ æqualis erat $\frac{1}{3}\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}\gamma\delta$, & perpendiculum demissum à stellâ $\delta$ ad rectam $\gamma Y$ æqualis erat $\frac{1}{6}\gamma\delta$ vel $\frac{1}{7}\gamma\delta$ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam distinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes derivabam (a) longitudines & latitudines cometæ, & *Poundius* noster ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, & loca correcta habentur supra. Micrometro parùm affa-




149. (a) 149. * *Longitudines & latitudines.* Si observentur distantiæ cometæ à duabus fixis quarum longitudines & latitudines notæ sunt, invenientur cometæ longitudo & latitudo ad tempus observationis. Referat MR, portionem Ecclipticæ cujus polus O, sint A, P duæ stellæ quarum longitudines & latitudines datæ sunt, sitque C cometa cujus distantia à duabus stellis A, P nota sit. In triangulo AOP, ex datis AO, PO complementis latitudinum stellarum & angulo AOP cujus mensura est arcus MR differentia longitudinum, dabitur AF distantia stellarum, atque innotescet angulus OPA. Jam verò in triangulo ACP dantur omnia latera, unde invenietur angulus CPA, quo subtracto ex angulo OPA relinquetur angulus OPC. Quare dabitur angulus POC cujus mensura est arcus NR differentia scilicet longitudinum stellæ P & cometæ C. Item innotescet arcus OC, qui est complementum latitudinis cometæ. Eâdem prorsus ratione, si observentur distantiæ cometæ à duabus fixis quarum ascensiones rectæ & declinationes notæ sunt, inde colligentur ascensio recta & declinatio cometæ.

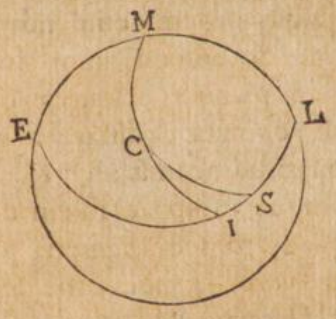
150. Datis declinatione & ascensione rectâ alicujus stellæ fixæ, inveniri possunt declinatio & ascensio recta cometæ, modò tamen stella & cometa transire viciissim possint per campum telescopii immoti aut alio quocumque modo obtineatur differentia declinationis & ascensionis rectæ inter fixam & cometam (39 lib. 3.) & hinc dabuntur cometæ longitudo & latitudo (17. lib. 3.)

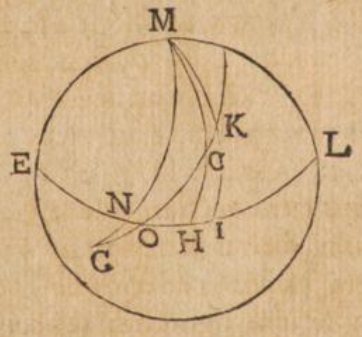
151. Datis cometæ longitudine & latitudine, simulque notâ longitudine solis, datur distantia cometæ à sole. Sit enim EL portio Ecclipticæ, Sol in S, latitudo

affabrè conſtructo uſus ſum, ſed longitudinum tamen & latitudinum errores (quâtenus ex obſervationibus noſtris oriantur) minutum unum primum vix ſuperant. Cometa autem (juxta obſervationes noſtras) in fine motus ſui notabiliter deflectere cœpit boream verſus, à parallelo quem in fine menſis *Februarii* tenuerat.



Jam




do cometæ CI; in triangulo CIS, ad I rectangulo (7. lib. 3.) datur latus CI, itemque notum eſt latus IS differentia longitudinum ſolis & cometæ, ideoque innoteſcit diſtantia cometæ à ſole CS.

152. Si duobus diebus ſeſe invicem immediatè ſubſequentibus obſerventur longitudines H, I & latitudines CH, KI cometæ alicujus, dabitur arcus KC quem cometa motu diurno proprio deſcripſit. Quoniam enim in triangulo KMC, datur angulus quem metitur arcus I H longitudinum differentia, ſimulque nota ſunt latera KM, CM, quæ ſunt datarum latitudinum KI, CH complementa, innoteſcet arcus KC. Si verò altera latitudo fuerit auſtralis, putà CH, altera Borealis ut GN, latus GM eſt ſumma latitudinis GN & quadrantis NM, ac proindè etiam in hoc caſu dabitur arcus CG.

153. Iiſdem manentibus, inveniri poteſt nodus O orbitæ cometæ datis enim in triangulo MCK lateribus MC, MK, cum angulo intercepto M quem metitur longitudinum datarum differentia HI, dabitur angulus MKC, qui ex 180°. ſubductus, relinquit angulum OKI. Jam verò datis triangulo OKI, ad I rectangulo, latitudine IK, & angulo OKI, invenitur angulus IOK, daturque arcus OI, quo addito longitudini I, obtinetur diſtantia nodi O à principio arietis. Ex præcedentibus patet datis duabus aſcenſionibus rectis & declinationibus inveniri quoque motum cometæ proprium, inclinationem orbitæ ad æquatorem & punctum in quo orbita illa æquatorem interſecat. 152

154. Iiſdem poſitis ſit K locus cometæ primò obſervatus, à loco nodi O ſubtrahatur longitudo cometæ I, relinquetur arcus OI. Datis in triangulo KOI, ad I rectangulo, lateribus KI, OI, dabitur arcus KO quem cometa à primo obſervationis die uſque ad Eccliptícam deſcripſit. Jam verò arcus KO conferatur cum arcubus deſcriptis ab initio obſervationis cometæ in K, ad datum uſque aliquod momentum ſingulis diebus pro arbitrio aſſumptum. Hinc proportionali parte adhibitâ, circiter colligetur tempus quo cometa ſecuit Eccliptícam. Simili modo invenietur tempus quo trajecit æquatorem.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Jam ad orbem cometæ determinandum; ſelegi ex obſervationibus hactenus deſcriptis, tres quas *Flamſtedius* habuit *Dec.* 21. *Jan.* 5. & *Jan.* 25. (b) Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 ſunt ſemidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam aſſumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* primâ vice 412, $S_\mu$ 9503, $t_\lambda$ 413: *BE* ſecundâ vice 421, *OD* 10186, *X* 8528,4 *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* 25. Unde ad operationem ſecundam collegi liſtantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem tandem diſtantias *TX* 4775 & $_\tau Z$ 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus deſcendentem in ☋ & aſcendentem in ♈ 1 gr. 53′; inclinationem plani ejus ad planum eclipticæ 61 gr. 20′ ½; verticem ejus (ſeu perihelium cometæ) diſtare à nodo 8 gr. 38′, & eſſe in ♐ 27 gr. 43′ cum latitudine auſtrali 7 gr′. 34′; & ejus latus rectum eſſe 236,8, areamque radio ad ſolem ducto ſingulis diebus deſcriptam 93585, quadrato ſemidiametri orbis magni poſito 100000000; cometam verò in hoc orbe ſecundum ſeriem ſignorum proceſſiſſe, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. p. m. in vertice orbis ſeu perihelio fuiſſe. Hæc omnia per ſcalam partium æqualium & chordas angulorum ex tabulâ ſinuum naturalium collectas determinavi graphicè; conſtruendo ſchema ſatis amplum, in quo videlicet ſemidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis eſſet digitis 16⅔ pedis *Anglicani*.

Tan-

156. 155. Si cometa primò obſervetur in eâdem rectâ cum duabus fixis, deinde in aliâ quoque rectâ cum duabus aliis fixis obſervetur, accurate trajectis per quatuor illas ſtellas duobus filis in ſuperficie globi cœleſtis, interſectio filorum determinabit locum cometæ pro tempore obſervationis. Si eodem modo definiantur alia cometæ loca, illius ſemita in ſuperficie globi cœleſtis delineabitur.

156. Accuratè deſignatis in ſuperficie globi cometæ locis, filum duobus locis applicatum per cætera omnia propemodum tranſire videbitur; Hæc igitur loca ferè ſunt in peripheriâ circuli maximi, ideóque cometa ex terrâ in circuli maximi peripheriâ incedere apparebit. Quare ſi filum per duo loca tranſiens extendatur donec Ecclipticam & æquatorem ſecet, habebuntur locus nodi, & inclinatio orbitæ cometicæ, ſimulque punctum in quo cometa trajicit æquatorem.

(b) * *Ex his inveni.* Quâ ratione ſequentes determinationes poſſint inveniri vel graphicè vel arithmeticè, patet ex conſtructione prop. præced. & ex iis quæ huic propoſitioni addidimus.

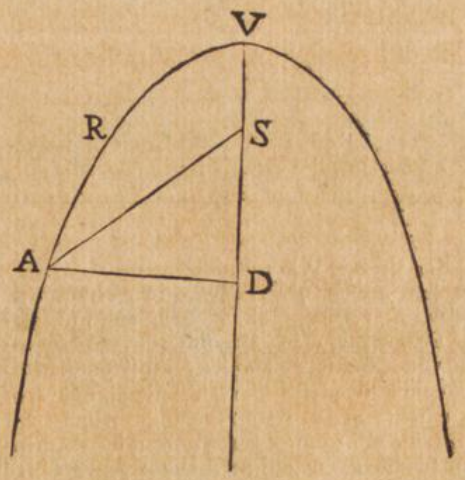
Tandem ut constaret an cometa in orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in tabulâ sequente videre licet.

| | Distant. Comet. a Sole. | Long. Collect. | Lat. Collect. | Long. Obs. | Lat. Obs. | Differ. Long. | Differ. Lat. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | gr. | gr. | gr. , | gr. , | , | , |
| *Dec.* 12 | 2792 | ♍ 6 . 32′ | 8 . 18′ 1/2 | ♍ 6.31 1/3 | 8.26 | + 1 | − 7 1/2 |
| 29 | 8403 | ♐ 13 . 13 2/3 | 28 . 0 | ♐ 13.11 3/4 | 28.10 1/12 | + 2 | − 10 1/12 |
| *Feb.* 5 | 16669 | ♉ 17 . 0 | 15 . 29 2/3 | ♉ 16.59 7/8 | 15.27 2/3 | + 0 | + 2 1/4 |
| *Mar.* 5 | 21737 | 29 . 19 3/4 | 12 . 4 | 29.20 6/7 | 12. 3 1/2 | − 1 | + 1/2 |

Postea vero *Halleius* noster orbitam (c) per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ♋ & ♍ 1gr. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad eclipticam 61gr. 20′

357.

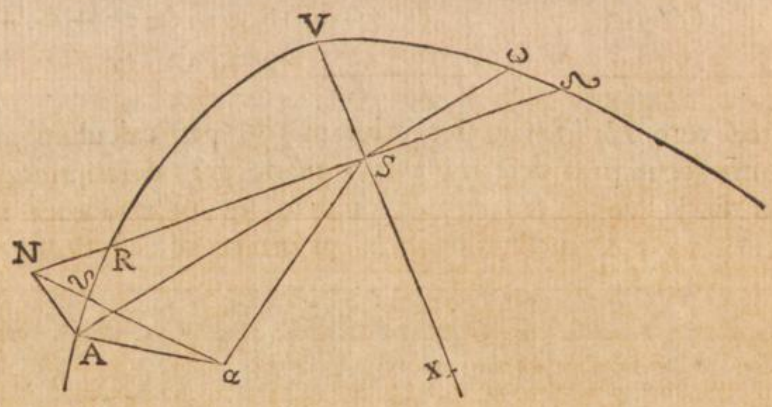
(c) 157. * *Per calculum arithmeticum.* Calculi hujus instituendi methodum exponemus. Sit S Sol, V R A orbita cometæ parabolica, cujus vertex V, sitque VS, distantia umbilici à vertice = $f$, erit parabolæ latus rectum principale = $4f$. Fiat AD = $x$, erit spatium V R A S = $\frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$ (140). Ponatur area illa dato rectilineo æqualis putà $bb$, habebitur æquatio $24fbb = x^3 + 12f^2x$. Resolutâ hâc æquatione cubicâ per vulgares algebræ regulas, vel per constructionem geometricam, adhibitis parabolâ & circulo, innotescet ordinatim applicata A D. Datâ autem AD, dabitur VD, (per theor. 2. de parab.) quare nota quoque erit recta composita ex DV & VS, cui æqualis est recta S A, (ibid.), ideóque recta illa dabitur magnitudine. Præterea datur etiam D A, quare nota est ratio inter S A & A D, id est, inter radium & sinum rectum anguli A S D, quem scilicet S A cum axe comprehendit, ideóque datur angulus ille. Sed data est S A longitudine, quare rectæ S A longitudo & inclinatio ad axem calculo determinari possunt.



De Mundi Systemate.

20 $\frac{1}{3}$, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* 8$^{d}$. 0$^{h}$. 4$'$: diſtantiam vero perihelii à nodo aſcendente in orbitâ cometæ menſuratam invenit eſſe 98$^{gr}$. 20$'$, & latus rectum parabolæ eſſe 2430 partium, exiſtente mediocri ſolis à terrâ diſtantiâ partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accuratè inſtituto, loca cometæ ad obſervationum tempora computavit, ut ſequitur.

Tem-




158. 158. Referat ☊ ω V, Cometæ trajectoriam in cujus umbilico S collocatur Sol, ſitque ω punctum quod cometa occupavit in aliquâ harum obſervationum quarum ope trajectoria definita fuit. Trajectoriæ hujus ſit axis V X poſitione datus; innoteſcat tempus quo cometa in perihelio V verſatur, ſitque ☊ ♈ linea nodorum poſitione cognitâ. Si cometæ trajectoria inventa fuerit parabolica, capiatur ſpatium quod ſit ad ſpatium ω V S, cognitum (per theor. 4. de parab.) ut intervallum inter tempus datum & ſuprà inventum momentum quo cometa perihelium attingit, ad intervallum inter prædictum momentum & obſervationem cometæ in ω; ponatur ſpatium illud dato rectilineo, puta *b b*, æquale. Deinde (157.) ipſi *b b* æquale fiat ſpatium parabolicum V R A S, & inveniatur tam poſitio quam magnitudo rectæ S A reſpectu S V, cujus poſitio & magnitudo reſpectu diſtantiæ aphelii terræ à ſole priùs notæ ſunt. At ſi cometæ trajectoria deprehendatur elliptica, per methodos in prop. 31. libr. 1. expoſitas, ducatur recta SA, talis ut area V R A S, ſit ad totam ellipſeos aream, ſicut intervallum inter tempus datum & momentum quo perihelium occupat integrum cometæ tempus periodicum quod ex dato orbitæ cometicæ axe principali cognitum eſt, dabiturque rectâ S A tam poſitione quam magnitudine. Jam verò in utroque caſu ex A ad nodorum lineam ♈ ☊ erigatur normalis A N, rectæ ♈ ☊ occurrens in N; ex eodem A, ad Eccliptícæ planum demittatur perpendiculum

| Tempus verum. | Distantia Cometæ à ⊙ | Long. comp. | Lat. comp. | Errores in. Long | Lat. |
|---|---|---|---|---|---|
| d. h. ′ | | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | ′ ″ | ′ ″ |
| *Dec.* 12. 4.46 | 28028 | ♍ 6.29.25 | 8.26. 0 Bor. | − 3. 5 | − 2. 0 |
| 21. 6.37 | 61076 | ♒ 5. 6.30 | 21.43.20 | − 1.42 | + 1. 7 |
| 24. 6.18 | 70008 | 18.48.20 | 25.22.40 | − 1. 3 | − 0.25 |
| 26. 5.21 | 75576 | 28.22.45 | 27. 1.36 | − 1.28 | + 0.44 |
| 29. 8. 3 | 14021 | ♓ 13.12.40 | 28.10.10 | + 1.59 | + 0.12 |
| 30. 8.10 | 86661 | 17.40. 5 | 28.11.20 | + 1.45 | − 0.33 |
| *Jan.* 5. 6. 1½ | 101440 | ♈ 8.49.49 | 26.15.15 | + 0.56 | + 0. 8 |
| 9. 7. 0 | 110959 | 18.44.36 | 24.12.54 | + 0.32 | + 0.58 |
| 10. 6. 6 | 113162 | 20.41. 0 | 23.44.10 | + 0.10 | + 0.18 |
| 13. 7. 9 | 120000 | 26. 0.21 | 22.17.30 | + 0.33 | + 0. 2 |
| 25. 7.59 | 145370 | ♉ 9.33.40 | 17.57.55 | − 1.20 | + 1.25 |
| 30. 8.22 | 155303 | 13.17.41 | 16.42. 7 | − 2.10 | − 0.11 |
| *Feb.* 2. 6.35 | 160951 | 15.11.11 | 16. 4.15 | − 2.42 | + 0.14 |
| 5. 7. 4½ | 166686 | 16.58.25 | 15.29.13 | − 0.41 | + 2.10 |
| 25. 8.41 | 202570 | 26.15.46 | 12.48. 0 | − 2.49 | + 1.14 |
| *Mar.* 5.11.39 | 216205 | 29.18.35 | 12. 5.40 | + 0.35 | + 2.24 |

Apparuit etiam hic cometa menſe *Novembri* præcedente & *Coburgi* in *Saxoniâ* à D^no. *Gottfried Kirch* obſervatus eſt diebus menſis hujus quarto, ſexto & undecimo, ſtylo veteri; & ex poſitionibus ejus ad proximas ſtellas fixas ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accuratè obſervatis, ac differentia longitudinum *Coburgi* & *Londini* graduum undecim & locis fixarum à *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca cometæ determinavit ut ſequitur.

*No-*

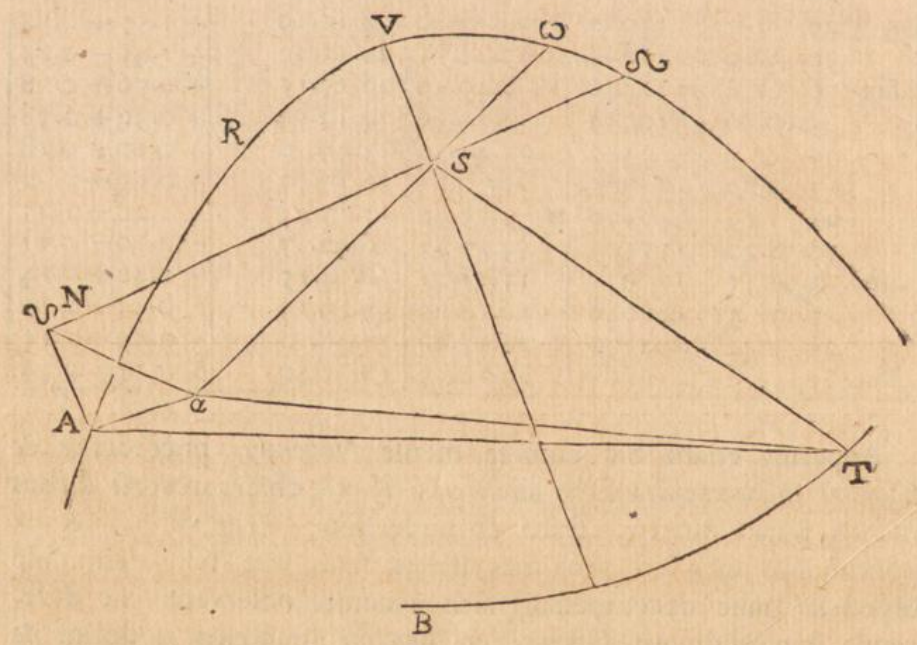
lum eidem rectæ occurrens in a, junganturque aN, aS, erit angulus ANa, inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecliptice ac proinde cognitus (146). Deinde quoniam noti ſunt anguli VSA, VSN, notus quoque erit angulus NSA, horum ſumma vel differentia. Quare in triangulo rectangulo NaA, datis latere NA, & angulo ANa, innotescent reliqua latera Na & Aa. Præterea in triangulo rectangulo SNa, dantur latera SN & Na, ideóque dabuntur latus Sa, & angulus NSa. Sed (145.) datur poſitio rectæ SN, quare nota erit poſitio rectæ Sa, hoc eſt, cometæ longitudo heliocentrica, ſive locus cometæ heliocentricus ad Ecliptican reductus. Denique in triangulo SAa rectangulo ad a, nota ſunt omnia latera, ac proinde dabitur angulus ASa, latitudo cometæ heliocentrica. Ex his quoque patet viciſſim inveniri poſſe tempus quo cometa datum in orbe ſuo locum tenet. 158.

DE MUNDI SYSTEMATE.

*Novem.* $3^d$. $17^h$. $2'$, tempore apparente *Londini*, cometa erat in ♌ 29gr. $51'$. cum lat. bor. 1gr. $17'$. $45''$,

*Novem.* $5^d$. $15^h$. $58'$ cometa erat in ♍ 3gr. $23'$ cum lat. bor. 1gr. $6'$.

*No-*




159. 159. Iisdem manentibus sit BT orbis magnus, sitque tellus in T ad tempus datum. Jungantur TA, Ta, erit planum trianguli TAa, ad planum Ecclipticæ normale (prop 18. lib. 11 elem.). Jam in triangulo TSa, in plano Ecclipticæ datur latus Sa, (158.), notumque est latus ST, ex theoriâ telluris, & utrumque latus in partibus mediocris distantiæ telluris à sole expressum habetur. Præterea ob latera illa positione cognita, datur angulus TSa, ab illis comprehensus, quare innotescent latus Ta, & angulus STa; Sed datur TS positione, nempe locus solis ad tempus datum, nota igitur est positio rectæ Ta, hoc est, cometæ longitudo geocentrica, sive locus cometæ geocentricus ad Ecclipticam reductus. Deindè in triangulo rectangulo AaT, dantur latera duo in partibus mediocris distantiæ telluris à sole expressa (158 & ex theoriâ telluris). Quare innotescet angulus ATa, hoc est, cometæ latitudo geocentrica, itemque dabitur hypothenusa TA, distantia scilicet cometæ à terrâ. Ex his itaque patet quomodo ad data observationum tempora, instituto calculo, loca cometæ possint computari. Clariss. Halleius iisdem usus principiis ad definiendos cometarum motus maximo labore tabulas construxit. Harum tabularum normam videat Lector in ejusdem Celeberrimi Viri opusculo quod inscribitur: come-

*Novem.* 10d. 16h. 31′ cometa æqualiter distabat à stellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum verò attigit rectam eâsdem jungentem, sed parum abfuit ab eâ. In stellarum catalogo *Flamstediano* σ tunc habuit ♍ 14gr. 15′ cum lat. bor. 1gr. 41′ ferè, τ verò ♍ 17gr. $3\frac{1}{2}$, cum lat austr. 0gr. 34′. Et medium punctum inter has stellas fuit ♍ 15gr. $39\frac{1}{4}$, cum lat. bor. 0gr. $33\frac{1}{2}$. Sit distantia cometæ à rectâ illâ 10′ vel 12′ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7′, & differentia latitudinum $7\frac{1}{2}$, circiter. Et inde cometa erat in ♍ 15gr. 32′ cum lat. bor. 26′ circiter.

Observatio prima ex situ cometæ ad parvas quasdam fixas abundè satis accurata fuit. Secunda etiam satis accurata fuit. In tertia, quæ minùs accurata fuit, error minutorum sex vel septem subesse potuit, & vix major. Longitudo verò cometæ in observatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29gr. 30′. 22″. latitudo borealis 1gr. 25′. 7″. & distantia ejus à sole 115546.

Porro *Halleius* observando quod cometa insignis intervallo annorum 575 quater apparuisset, scilicet mense *Septembri* post cædem *Julii Cæsaris*, anno *Christi* 531 *Lampadio* & *Oreste Coss.* anno *Christi* 1106 mense *Februario*, & sub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ & insigni (præterquam quod sub mortem

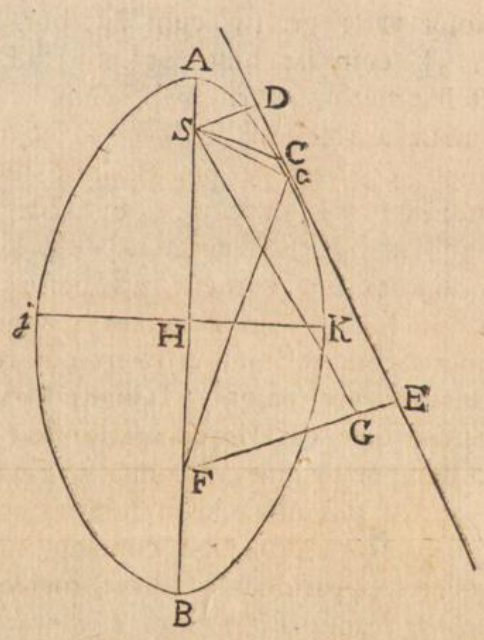
cometographia, seu Astronomiæ cometicæ Synopsis.

160. Si cometæ orbitas ellipticas describere & duas Kepleri leges observare ponantur, hoc est, si temporum periodicorum quadrata sint ut cubi mediocrium distantiarum à sole & areæ ellipticæ radiis ad solem ductis sint temporibus proportionales, facilè determinabitur orbitæ cometicæ magnitudo, omnesque motûs cometarum circumstantiæ definientur, quod elegantissimè præstitit D. Bouguer in monum. Paris. an. 1733. Clarissimi Viri methodum hic adjungemus.

Ex datis tribus observationibus à se invicem parum distantibus, inveniatur cometæ velocitas in aliquo orbitæ suæ loco, & exigua ejusdem orbitæ portio determinetur. Quoniam tria observationum tempora parum à se invicem distant, portio orbitæ hoc temporis intervallo descripta considerari poterit tanquam linea recta vel ipsamet tangens orbitæ motu uniformi percursa, ideoque portio hæc rectilinea orbitæ & ipsa cometæ velocitas inveniri poterunt per Lem 4. & per ea quæ huic lemmati addidimus. Idem quoque obtinebitur duplici elegantissimâ methodo quæ in monum. Paris. loco citato legitur. 160.

De Mundi Systemate.

tem *Cæsaris*, cauda ob incommodam telluris positionem minùs ap-




160. His præmissis, sit S sol, C c exigua orbitæ cometicæ portio ex tribus observationibus determinata. Quoniam nota est S C, distantia scilicet cometæ à sole atque etiam innotescit angulus S C D, dabitur perpendicularis SD, hujus anguli SCD sinus, sumpto S C, pro radio. Dicatur $SC = a$, $SD = b$, designet $e$, spatiolum C c, tempusculo $f$ percursum, sitque $x = AB$, seu axi principali ellipseos quam cometa circà solem in umbilico S, positum integro tempore periodico $t$, describit. Ut determinentur quantitates $x$ & $t$, conferre oportet motum cometæ cum motu cognito planetæ alicujus. Sit $q$ axis principalis ellipseos quam planeta describit, $n$ tempus periodicum, dicaturque $p$ peripheria circuli cujus diameter est $q$. Quoniam axis principalis ellipseos est summa maximæ & minimæ distantiæ planetæ à sole, erit distantia mediocris planetæ à sole æqualis dimidio axi principali, hoc est $\frac{1}{2}x$ est distantia mediocris cometæ, & $\frac{1}{2}q$ distantia mediocris planetæ. Jam verò fiat (per leg. 1. Kepleri.) $\frac{1}{8}q^3 : n^2 = \frac{1}{8}x^3 : t^2$ hinc fit $t = \frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}$. Invenienda superest altera expressio temporis periodici $t$. Quoniam C c, est portio orbitæ admodum exigua, sector C S c, considerari poterit instar trianguli evanescentis cujus area $\frac{1}{2}SD \times Cc = \frac{1}{2}be$. Quarè, per alteram Kepleri

apparuisset:) quæsivit orbem ellipticum cujus axis major esset par-

pleri regulam, dicatur $\frac{1}{2}\ b\ e$ est ad $f$, ut area tota ellipseos ACBI, ad integrum tempus periodicum $t$, unde habetur $t = \frac{f}{\frac{1}{2}be} \times$ ACBI. Nunc ut obtineatur area ACBI, ex puncto C, ad alterum umbilicum F, agatur recta $CF = AB - SC = x - a$ (theor. 3. de ellipsi). Ex eodem umbilico F, ad tangentem Cc productam in E, demittatur perpendicularis FE, sitque SG parallela rectæ DE, triangula rectangula SCD, FCE similia sunt, ob angulos SCD, FCE, æquales (theor. 4. de ellipsi.) ideóque $SC\ (a) : SD\ (b) = FC\ (x-a) : FE = \frac{bx-ab}{a}$, ac proinde FG, seu $FE - SD = \frac{bx-2ab}{a}$.

Deinde (ob eorumdem triangulorum similitudinem) $SC\ (a) : CD\ (\sqrt{a^2-b^2}) = FC\ (x-a) : CE = \frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2}$, & hinc DE, vel SG, seu $CE + CD = \frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{a^2-b^2} = \frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. Sed $FG = \frac{bx-2ab}{a}$ (ex dem.), quarè est $SF = \frac{\sqrt{b^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2+a^2x^2-b^2x^2}}{a^2} = \sqrt{\frac{a^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2}{a^2}}$; ideóque distantia SH vel FH umbilici alterutrius à centro $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2}{a^2}}$. Jam (ob triangulum SIH rectangulum in H, & per theor. 3. de ellipsi) erit $IH = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - \frac{a^2x^2+4ab^2x-4a^2b^2}{4a^2}} = \frac{b}{a}\sqrt{ax-a^2}$ ac proinde axis minor $IK = \frac{2b}{a}\sqrt{ax-a^2}$, & factum ex axe majori in minorem $= \frac{2bx}{a}\sqrt{ax-a^2}$. Sed est factum illud area rectanguli orbitæ ellipticæ circumscripti, & præterea (249. lib. 1.) area rectanguli hujus est ad aream ellipseos ut quadratum axis AB, ad aream circuli huic quadrato inscripti; quarè $q^2 : \frac{1}{4}qp = \frac{2bx}{a}\sqrt{ax-a^2} : ACBI = \frac{bpx}{2aq}\sqrt{ax-a^2}$. Tandem in ultimâ expressione temporis periodici loco areæ ACBI, substituatur illius valor modo inventus, fiet $t = \frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax-a^2}$, collatisque duobus ipsius $t$ valoribus, habebitur $\frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}} = \frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax-a^2}$, & reductâ æquatione $x = \frac{af^2p^2q}{f^2p^2q-ae^2n^2}$. Jam si in expressionibus axis minoris & temporis periodici substituatur valor ipsius $x$, erit axis minor $IK = 2be\sqrt{\frac{a}{f^2p^2q-ae^2n^2}}$ & tempus periodicum $= f^3p^3n \times \frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^2p^2q-ae^2n^2}^{\frac{3}{2}}$. Hinc patet determinari posse omnia quæ ad cometarum motus pertinent.

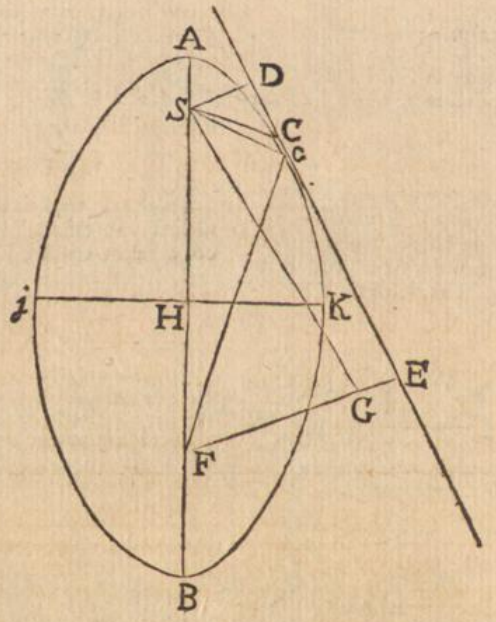
161. Si formulæ modò inventæ quantitatibus finitis & positivis exprimantur, orbita ACBI erit elliptica, ideóque cometa reditum habebit. Quia verò circulus est species quædam ellipsis, cometa circulum quoque poterit describere, in eo autem casu æquales erunt distantiæ SA, SC, SB, axisque AB duplus fiet distantiæ SC, ac proinde $\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q-ae^2n^2} = 2a$, & hinc $e = \frac{fp}{n}\sqrt{\frac{q}{2a}}$, valor scilicet spatioli Cc à cometa tempore $f$ percurs. Si ea sit cometæ velocitas ut fiat $ae^2n^2 = f^2p^2q$, tunc infinito æquales evadent expressiones axis majoris, minoris & temporis periodici; quare orbita cometæ mutabitur in ellipsim infinite oblongatam seu parabolam, ideóque cometa reditum non habet. Tandem si $ae^2n^2$, sit major quam $f^2$



LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI. 161.

De Mundi Systemate.

partium 1382957, existente mediocri distantiâ telluris à sole par-




162. $f^2 p^2 q$, negativa fit expressio axis majoris & orbita abit in hyperbolam ac proindè cometa nunquam futurus est iterum conspicuus.

162. Ut prædictæ formulæ ad calculum reducantur, cometarum motus cum telluris motu conferatur. Sit $q$ dupla distantia mediocris terræ à Sole, $p$ peripheria circuli cujus diameter $q$, $n$ annus sydereus seu intervallum 365. dier. $6^{hor.}$. $9'$: fiat mediocris distantia telluris à sole partium 10000000, ideòque $q = 20000000$, & $p = 62831853$, spatium Cc unius diei intervallo cometa ponatur descripsisse. His valoribus substitutis in formulis præcedentibus erit $x = \frac{591826599553557939 \times a}{591826599553557939 - ae^2}$ & $t = \frac{1859278095175402232 \times a^{\frac{3}{2}}}{591826599553557939 - ae^2{}^{\frac{3}{2}}}$. Jam nihil ampliùs faciendum supereset, nisi ut in casibus particularibus loco $a$, & $e$, substituantur valores per observationem determinati. Utrum verò cometa rediturus sit vel non cognoscetur, si quantitas $ae^2$, minor majorve reperiatur numero constanti 591826599553557939. Minùs prolixus fiet calculus, si distantiam mediocrem telluris à sole ponamus partium 10000, tunc enim erit $x = \frac{591826599 \times a}{591826599 - ae^2}$, & $t = \frac{1859278095 \times a\sqrt{a}}{591826599 - ae^2 \times \sqrt{591826599 - ae^2}}$. Exemplo sit cometa qui annis 1729. 1730. apparuit. Ex observationibus Clariss. Cassini colligitur die $13^{a}$. Octobris an. 1729. distantiam SC cometæ à sole, fuisse partium 42998, exiguam orbitæ portionem diei unius intervallo descriptam, fuisse partium $122\frac{452}{10000}$, atque angulum DCS, fuisse 82°. 11'. Hinc invenitur quantitas $ae^2$ major quam 591826599, ideóque

(161)

partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 (d) revolvi possit. Et ponendo nodum ascendentem in ♋ 2gr. 2′; inclinationem plani orbis ad planum ecliptiæ 61gr. 6′. 48″.; perihelium cometæ in hoc plano ♑ 22gr. 44′. 25″; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7d. 23h. 9′; distantiam perihelii à nodo ascendente in plano ecliptiæ 9gr. 17′. 35″; & axem conjugatum 18481,2: (e) computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex observationibus deducta quam in hoc orbe computata exhibentur in tabulâ sequente.

(161) orbita cometæ est hyperbola, ac proindè expectandus non est hujus cometæ regressus. Cæterùm hæc vera sunt in eâ duntaxat hypothesi quod cometæ duas Keppleri leges observent.

(d) 163. * *Revolvi possit.* Quadrata temporum periodicorum in cometis æque ac in planetis ponantur ut cubi mediocrium distantiarum à sole, tempus periodicum cometæ dicatur $t$, tempus periodicum terræ circà solem dicatur T, distantia mediocris terræ à sole sit D, axis major ellipseos à cometa descriptæ sit $2a$, ideóque mediocris distantia cometæ à sole $= a$, erit $T^2 : t^2 = D^3 : a^3$. Fiat D = 10000 partibus T = 365 dieb. 6hor. 9′ = 525969′, $t$ = 575 annis, invenietur $2a$, seu axis major ellipseos à Cometâ descriptæ, partium 1382957, existente mediocri distantiâ telluris à sole earumdem partium 10000. in hoc igitur orbe cometa annis 575 revolvi potest. 163.

(e) * *Computavit motum cometæ.* Ratio computi ineundi patet ex num. 158. 159. vel etiam ex methodo Clariss. D. Bouguer num. 160. & seq.

Tem-

DE MUNDI SYSTEMATE.

| Tempus verum | Long. obſ. | Lat. Bor. obſ. | Long. comp. | Lat. comp. | Errores in Long. | Errores in Lat. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| d. h. | gr. | gr. | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | ′ ″ | ′ ″ |
| *Nov.* 3.16.47″ | ♌ 29.51′. 0″ | 1.17.45″ | ♌ 29 51.22 | 1.17.32 B | +0.22 | −0.13 |
| 5.15.37 | ♍ 3.23. 0 | 1. 6. 0 | ♍ 3.24.32 | 1. 6. 9 | +1.32 | +0. 9 |
| 10.16.18 | 15.32. 0 | 0.27. 0 | 15.33. 2 | 0.25. 7 | +1. 2 | −1.53 |
| 16.17. 0 | | | ♎ 8 16.45 | 0.53. 7 A | | |
| 18.21.34 | | | 18.52.15 | 1.26.54 | | |
| 20.17. 0 | | | 28.10.36 | 1.53.35 | | |
| 23.17. 5 | | | ♏ 13.22.42 | 2.29. 0 | | |
| *Dec.* 12. 4.46 | ♐ 6.32.30 | 8.28. 0 | ♐ 6 31.20 | 8.29. 6 B | −1.10 | +1. 6 |
| 21. 6.37 | ♒ 5. 8.12 | 21.42.13 | ♒ 5. 6. 4 | 21.44.42 | −1.58 | +2.29 |
| 24. 6.18 | 18.49.23 | 25.23. 5 | 18.47.30 | 25.23.35 | −1.53 | +0.30 |
| 26 5.21 | 28.24.13 | 27. 0 52 | 28.21.42 | 27. 2. 1 | −2.31 | +1. 9 |
| 29. 8. 3 | ♓ 13.10.41 | 28. 9.58 | ♓ 13.11.14 | 28.10.38 | +0.33 | +0.40 |
| 30. 8.10 | 17 38.20 | 28.11.53 | 17.38.27 | 28.11.37 | +0. 7 | −0.16 |
| *Jan.* 5. 6. 1½ | ♈ 8.48.53 | 26.15. 7 | ♈ 8.48.51 | 26.14.57 | −0. 2 | −0.10 |
| 9. 7. 1 | 18.44. 4 | 24.11.56 | 18.43.51 | 24.12.17 | −0.13 | +0.21 |
| 10. 6. 6 | 20 40.50 | 23.43.32 | 20 40 23 | 23 43.25 | −0.27 | −0. 7 |
| 13. 7. 9 | 25.59.48 | 22.17.28 | 26. 0. 8 | 22.16.32 | +0.20 | −0.56 |
| 25. 7.59 | ♉ 9.35. 0 | 17.56.30 | ♉ 9.34.11 | 17.56. 6 | −0.49 | −0.24 |
| 30. 8 22 | 13.19.51 | 16.42.18 | 13.18.28 | 16.40. 5 | −1.23 | −2.13 |
| *Feb.* 2. 6.35 | 15.13.53 | 16. 4. 1 | 15.11.59 | 16. 2. 7 | −1.54 | −1.54 |
| 5. 7. 4½ | 16.59. 6 | 15.27. 3 | 16.59.17 | 15.27. 0 | +0.11 | −0. 3 |
| 25. 8.41 | 26.18.35 | 12.46.46 | 26.16 59 | 12.45.22 | −1.36 | −1.24 |
| *Mar.* 1.11.10 | 27.52.42 | 12.23.40 | 27.51.47 | 12.22.28 | −0.55 | −1.12 |
| 5.11.39 | 29.18. 0 | 12. 3.26 | 29.20.11 | 12. 2.50 | +2.11 | −0.26 |
| 9. 8.38 | ♊ 0.43. 4 | 11.45.52 | ♊ 0.42.43 | 11 45.35 | −0.21 | −0.17 |

Obſervationes cometæ hujus à principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam deſcripto, quam motus planetarum congruere ſolent cum eorum theoriis, & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto hoc tempore apparuit, ejuſque orbem hic rectè definitum fuiſſe.

In tabulâ præcedente omiſimus obſervationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus obſervatus fuit. *Ponthæus* utique & ſocii, *Novem.* 17. ſt. vet. horâ ſextâ matutinâ *Romæ*, id eſt, hora 5. 10′ *Londini*, filis ad fixas applicatis, cometam obſervarunt in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0gr. 40′. Extant eorum obſervationes in tractatu, quem *Ponthæus* de hoc cometâ in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtolâ ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8gr. 30′.

30′. cum latitudine auſtrali 0gr. 30′. Eâdem horâ *Galletius Avenioni* (id eſt, hora matutina 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8gr. ſine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8gr. 16′. 45″ cum latitudine auſtrali 0gr. 53′. 7″.

*Nov.* 18. horâ matutinâ 6. 30′ *Romæ* (id eſt, horâ 5. 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 20′ *Cellius* in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 00′. *Galletius* autem horâ matutinâ 5. 30′ *Avenioni* cometam vidit in ♎ 13gr. 00′, cum latitudine auſtrali 1gr. 00′. Et *R. P. Ango* in Academiâ *Flexienſi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 5. 9′ *Londini*) cometam vidit in medio inter ſtellas duas parvas, quarum una media eſt trium in recta linea in virginis auſtrali manu *Bayero* ψ, & altera eſt extrema alæ *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12gr. 46′. cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Novâ-Angliâ* in latitudine 42½ graduum, horâ quintâ matutinâ, (id eſt *Londini* horâ matutinâ 9. 44′) cometa viſus eſt prope ♎ 14gr. cum latitudine auſtrali 1gr. 30′, uti à cl. *Halleio* accepi.

*Nov.* 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat à ſpicâ ♍ quaſi 2gr. boreazephyrum verſus. Erat autem ſpica in ♎ 19gr. 23. 47″ cum lat. auſtr. 2gr. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. *Boſtoniæ* in *Novâ Angliâ*, cometa diſtabat à ſpica ♍ gradu uno, differentia latitudinum exiſtente 40′. Eodem die in Inſula *Jamaicâ*, cometa diſtabat à ſpicâ intervallo quaſi gradus unius. Eodem die D. *Arthurus Stoer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. 38½ gr., horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 10ª *Londini*) cometam vidit ſupra ſpicam ♍, & cum ſpicâ propemodum conjunctum, exiſtente diſtantiâ inter eoſdem quaſi ¾ gr. Et (f) ex his obſervationibus inter ſe collatis colligo quod hora 9.44′ *Londini* cometa erat in ♎ 18gr. 50′ cum latitudine auſtrali 1gr. 25′. circiter. Cometa autem

(f) * *Ex his obſervationibus inter ſe collatis* via cometæ inter ſtellas determinatur, & hinc colliguntur cometæ longitudo & latitudo (149.) hor. 9. 44′ Londini, reductione ſcilicet factâ ad meridianum Londinenſem. 163.

De Mundi Systemate.

tem per theoriam jam erat in ♎ 18gr. 52′. 15″ cum latitudine auſtrali 1gr. 26′. 54″.

*Nov.* 20. D. *Montenarus* Aſtronomiæ Profeſſor *Paduenſis*, horâ ſextâ matutinâ *Venetiis* (id eſt, horâ 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23gr. cum latitudine auſtrali 1gr. 30. Eodem die *Boſtoniæ*, diſtabat cometa à ſpicâ ♍, 4gr. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23gr. 24′ circiter.

*Nov.* 21. *Ponthæus* & ſocii hor. mat. $7\frac{1}{4}$ cometam obſervarunt in ♎ 27gr. 50′ cum latitudine auſtrali 1gr. 16′, *Cellius* in ♎ 28gr. *Ango* horâ quintâ matutinâ in ♎ 27gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27gr. 51′. Eodem die in inſulâ *Jamaicâ* cometa viſus eſt prope principium ſcorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum ſpicâ virginis, id eſt, 2gr. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* in *Indiâ Orientali*, (id eſt ad horam noctis præcedentis 11. 20′ *Londini*) capta eſt diſtantia cometæ à ſpicâ ♍ 7gr. 35′ in orientem. In lineâ rectâ erat inter ſpicam & lancem, ideoque verſabatur in ♎ 26gr. 58′ cum lat. auſtrali 1gr. 11′ circiter; & poſt horas 5 & 40′ (ad horam ſcilicet quintam matitunam *Londini*) erat in ♎ 28gr. 12′ cum lat. auſtr. 1gr. 16. Per theoriam vero cometa jam erat in ♎ 28gr. 10′. 36″, cum latitudine auſtrali 1gr. 53′. 35″.

*Nov.* 22. Cometa viſus eſt à *Montenaro* in ♍ 2gr. 33′. *Boſtoniæ* autem in *Novâ-Angliâ* apparuit in ♍ 3gr. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac prius, id eſt, 1gr. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballaſoræ* cometa obſervabatur in ♍ 1gr. 50′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♍ 3gr. 5′ circiter. Eodem die *Londini* hora mat. $6\frac{1}{2}$ *Hookius* noſter cometam vidit in ♍ 3gr. 30′ circiter, idque in lineâ rectâ quæ tranſit per ſpicam virginis & cor leonis non exactè quidem, ſed à lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea à cometâ per ſpicam ducta, hoc die & ſequentibus tranſibat per auſtrale latus cordis leonis interpoſito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & ſpicam virginis tranſiens, eclipticam ſecuit in ♍ 3gr. 46′; in angulo 2gr. 51′.

Et

Et si cometa locatus fuisset in hâc lineâ in ♍ 3gr. ejus latitudo fuisset 2gr 26′. Sed cum cometa consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil distaret ab hâc lineâ boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem spicæ ♍, eratque 1gr. 30′ circiter, & consentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuò augebatur, ideoque jam sensibiliter major erat quam 1gr. 30′. Inter limites autem jam constitutos 2gr. 26′ & 1gr. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1gr. 58′ circiter. Cauda cometæ, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad spicam ♍, declinans aliquantulum à stellâ istâ, juxta *Hookium* in austrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit sensibilis, & cauda æquatori fere parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione solis boream versus.

*Nov.* 23. st. vet. horâ quintâ matutinâ *Noriburgi* (id est hora $4\frac{1}{2}$ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♍ 8gr. 8′, cum latitudine australi 2gr. 31′, captis scilicet ejus distantiis à stellis fixis.

*Nov.* 24. Ante ortum solis cometa visus est à *Montenaro* in ♍ 12gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & spicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hockii*, perpetuò augebatur; ideoque jam paulò major erat quam 1gr. 58′; & magnitudine mediocri, sine notabili errore, statui potest 2gr. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam & decrevisse volunt, & *Cellius* & observator in *Novâ-Angliâ* eandem ferè magnitudinem retinuisse, scilicet gradus unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes *Ponthæi* & *Cellii*, ex præsertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & ex *Galletii*: meliores sunt ex quæ per positiones cometæ ad fixas à *Montenaro*, *Hockio*, *Angone* & observatore in *Novâ-Angliâ*, & nonnunquam à *Ponthæo* & *Cellio* sunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♍ 11gr. 45′;

DE MUNDI SYSTEMATE.

ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♑ 13gr. circiter. Per theoriam vero cometa jam erat in ♑ 13gr. 22′. 42″.

*Nov.* 25. Ante ortum solis *Montenarus* cometam observavit in ♑ 17¾gr. circiter. Et *Cellius* observavit eodem tempore quod cometa erat in linea recta inter stellam lucidam in dextro femore virginis & lancem australem libræ, & hæc recta secat viam cometæ in ♑ 18gr. 36′. Per theoriam verò cometa jam erat in ♑ 18⅓gr. circiter.

Congruunt igitur hæ observationes cum theoriâ quâtenus congruunt inter se, & congruendo probant unum & eundem fuisse cometam, qui toto tempore à quarto die *Novembris* ad usque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis (g) secuit planum ecliptiæ, & propterea non fuit rectilinea. Ecliptiam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus cometæ plurimum deflectebatur à circulo maximo. Nam & mense *Novembri* cursus ejus tribus saltem gradibus ab ecliptica in austrum declinabat, & postea mense *Decembri* gradibus 29 vergebat ab ecliptica in septentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in solem & redibat à sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per signa novem, à leonis scilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter signum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigesimum *Novembris* descripsit gradus circiter quinque singulis diebus: dein motu retardato inter *Novemb.* 26. & *Decemb.* 12, spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea verò motu iterum accelerato, descripsit gradus ferè quinque singulis die-

163. (g) * *Bis secuit planum Ecclipticæ.* Tempus quo cometa secat Ecclipticam invenire potest per num. 145. & 154.

dibus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque easdem observat leges cum theoriâ planetarum, & cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera.



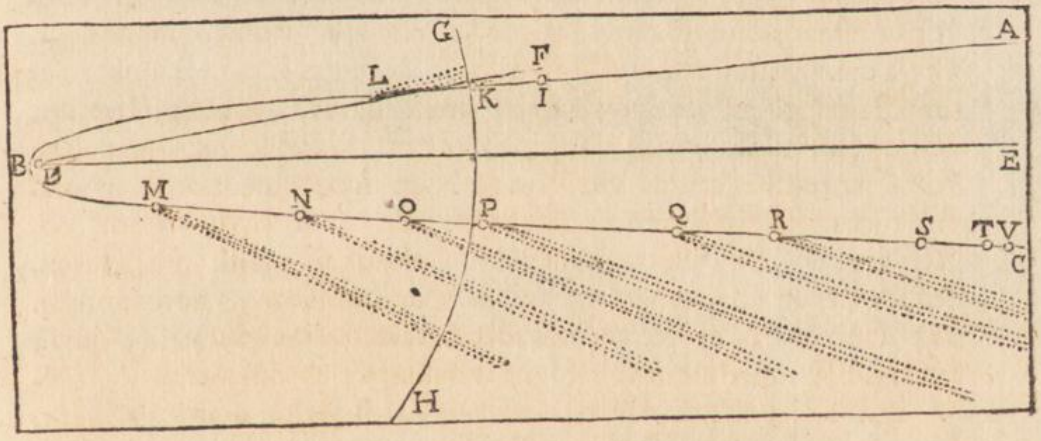



fig. 27.

Cæterùm trajectoriam quam cometa descripsit, & caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi *A B C* denotat trajectoriam cometæ, *D* solem, *D F* trajectoriæ axem, *D F* lineam nodorum, *G H* intersectionem sphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, *I* locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, *K* locum ejusdem *Nov.* 11, *L* locum *Nov.* 19, *M* locum *Dec.* 12, *N* locum *Dec.* 21, *O* locum *Decemb* 29, *P* locum *Jan.* 5. *sequent.* *Q* locum *Jan.* 25, *R* locum *Feb.* 5, *S* locum *Feb.* 25, *T* locum *Mar.* 5, & *V* locum *Mar.* 9. Observationes vero sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

*Nov.* 4. & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta non nisi semissem gradus unius longa tubo decempedali visa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30gr. longa, solique directè

DE MUNDI SYSTEMATE.

oppoſita in *Novâ-Angliâ* cernebatur, & protendebatur uſque ad ſtellam ♂, quæ tunc erat in ♍ 9gr. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda viſa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (obſervante *Flamſtedio*) tranſibat per medium diſtantiæ inter caudam ſerpentis Ophiuchi & ſtellam δ in aquilæ auſtrali alâ, & deſinebat prope ſtellas *A*, ω, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♈ 19½gr. cum latitudine boreali circiter. *Dec.* 11. Cauda ſurgebat ad uſque caput ſagittæ (*Bayero* α, β,) deſinens in ♈ 26gr. 43′, cum latitudine boreali 38gr. 34′. *Dec.* 12. Cauda tranſibat per medium ſagittæ, nec longè ultra protendebatur, deſinens in ♒ 4gr. cum latitudine boreali 42½gr. circiter. Intelligenda ſunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obſcuriore, in cœlo forſan magis ſereno, cauda *Dec.* 12, hora 5. 40′ *Romæ* (obſervante *Ponthæo*) ſupra cygni uropygium ad gradus 10 ſeſe extulit; atque ab hac ſtellâ ejus latus ad occaſum & boream min. 45 deſtitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum ſuperiorem, ideoque medium ejus diſtabat à ſtellâ illâ 2gr. 15′ auſtrum verſus, & terminus ſuperior erat in ♉ 22gr. cum latitudine boreali 61gr. Et hinc longa erat cauda 70gr. circiter. *Dec.* 21. Eadem ſurgebat fere ad cathedram *Caſſiopeiæ*, æqualiter diſtans à β & *Schedir*, & diſtantiam ab utrâque diſtantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque deſinens in ♈ 24gr. cum latitudine 47½gr. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* ſitam ad ſiniſtram, & intervallum ſtellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54gr; ideoque deſinebat in ♉ 19gr. cum latitudine 35gr. *Jan.* 5. Cauda tetigit ſtellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & ſtellam μ in ejus cingulo ad latus ſiniſtrum; & (juxta obſervationes noſtras) longa erat 40gr.; curva autem erat & convexo latere ſpectabat ad auſtrum. Cum circulo per ſolem & caput cometæ tranſeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce ſatis ſenſibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce

ce tenuissimâ desinebat è regione stellæ « in latere *Persei*. Distantia termini caudæ à circulo solem & cometam jungente erat 3gr. 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}$gr. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & nocte unâ & alterâ sequente ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulò ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accuratè, ideoque declinabat ab oppositione solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit. *Feb.* 25. & deinceps cometa sine caudâ apparuit. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quod corpora cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes terræ, solis & planetarum, cometa hicce in transitu suo per viciniam solis statim dissipari debuisset. Est enim calor solis ut radiorum densitas, hoc est, reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à sole. Ideoque cum distantiâ cometæ à centro solis *Decemb.* 8 ubi in perihelio versabatur, esset ad distantiam terræ à centro solis ut 6 ad 1000 circiter, calor solis apud cometam eo tempore erat ad calorem solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si (i) recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor

(i) * *Si rectè conjector.* Hanc Newtoni conjecturam experimenta confirmant. In transact. philosoph num. 270. describitur tabula caloris gradus exhibens. (Hujus tabulæ constructionem jam exposuimus in not. ad cor. 4 prop. 8. lib. 3.). Ex relatis ab autore experimentis colligitur calorem ferri, quantum levioris ignis auxilio fieri potuit, candefacti, circiter fuisse $2\frac{1}{2}$ majorem quam calor aquæ ebullientis. Hinc ignis vehementioris ope aucto calore ferri cadentis, rectè conjectatur Newtonus calorem hujus ferri quasi triplo vel quadruplo majorem fieri quam calor aquæ ebullientis. 163

DE MUNDI SYSTEMATE.

calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud cometam in perihelio versantem ex radiis solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad solem concepit, & calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aëre consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic terræ æqualis, id est, pedes plùs minùs 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: (k) & optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porrò notandum est quod cometa mense *Decembri*, ubi ad solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & splendidiorem quam antea mense *Novembri*, ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ è cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem solis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. (l) Et indè colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu nucleus cometæ per calorem suum emittit. Cæ-

163. (k) * *Et optarim rationem veram.* Clariss. Hermannus Boerhaave in elementis Chemiæ, diligentissimis experimentis se invenisse refert eò diutius calorem in corporibus retineri quo majora sunt, cæteris paribus. Si autem corpora ejusdem diametri ejusdemque caloris, diversæ sint densitatis, quæ densiora sunt, caloris quoque sunt tenaciora; densitas enim ignem coercet, illiusque egressum ex intimis partibus retardat. Quia verò intimæ corporum partes innumeris modis variari atque inter se permisceri possunt, hinc patet in ipsâ caloris conservatione non leves varietates oriri posse. Hæ sunt fortasse latentes causæ quæ Newtonum in eam suspicionem induxerunt durationem scilicet caloris augeri in minori ratione quam eâ diametri.

(l) * *Et indè colligere videor.* Hanc sententiam pluribus argumentis deinceps confirmat Newtonus.

Cæterùm de cometarum caudis triplex eſt opinio; eas vel jubar eſſe ſolis per tranſlucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius à capite cometæ in terram, vel denique nubem eſſe ſeu vaporem à capite cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes à ſole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientiâ rerum opticarum. Nam jubar ſolis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aërem ſemper volitantibus: ideoque in aëre fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius eſt & ægriùs ſentitur: in cœlis autem ſine materiâ reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quâtenus in jubare eſt, ſed quâtenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce ſolis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux fixarum & planetarum diſtinctè ad nos tranſmiſſa demonſtrat medium cœleſte nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id, quoniam rariſſimè contingit, adſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aëris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde eſt quòd ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos ſine omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in cometis, cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni:

DE MUNDI SYSTEMATE.

(m) ſciendum eſt quod lux fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ verò nullæ: cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa. Sic enim cometa anni 1680, menſe *Decembri*, quo tempore caput luce ſuâ vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis & ultrà: poſtea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſimâ, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulò ultrà: ut ſupra dictum eſt. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de ſolis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui cometa anni 1680. *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$. p. m. *Londini*, verſabatur in ♐ 8gr. 41′, cum latitudine boreali 28gr. 6′, ſole exiſtente in ♑ 18gr. 26′. Et cometa anni 1577. *Dec.* 29 verſabatur in ♐ 8gr. 41′ cum latitudine boreali 28gr. 40′, ſole etiam exiſtente in ♑ 18gr. 26′ circiter. Utroque in caſu terra verſabatur in eodem loco, & cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen caſu cauda cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione ſolis aquilonem verſus; in poſteriore verò (ex obſervationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, ſupereſt ut phænomena caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à ſole averſas aſcen-

263. (m) * *Sciendum eſt.* Ut notum eſt ex teleſcopiorum theoriâ apud omnes paſſim rerum opticarum & catoptricarum ſcriptores. Sed eâ potiſſimum legi merentur quæ de lucis intenſitate, viſionis diſtinctione & teleſcopiorum beneficiis dedit Clariſſ. Vir Robert Smith in eximio opere optico.

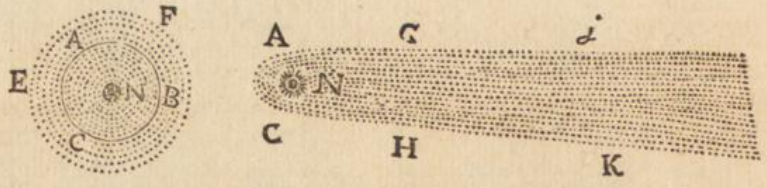
ascendere confirmatur ex (a) legibus quas observant. Ut quòd in planis orbium cometarum per solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quòd spectatori in his planis constituto apparent in partibus à sole directè aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem cometæ, ut & ubi caput cometæ ad solem propiùs accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ: Præterea

(a) 164. * *Ex legibus quas observant.* Leges illæ quas observant cometarum caudæ cum prædictâ Newtoni sententiâ apprimè congruunt. Cauda à cometæ capite vaporis instar in altum, id est, in partes à sole aversas assurgens in plano orbis cometæ per solem transeunte jacere debet; in æthere enim quieto nulla est ratio cur ad hanc potius quam ad illam partem deflectat. Quia autem vapor à capite exiens duos motus simul componit, alterum scilicet ascensus recti à sole, alterum verò progressus capitis, hinc fit ut cauda non directe à sole aversa sit, sed aliquantulum inde deviet in eas partes quas cometæ caput in orbe suo progrediens relinquit; si tamen spectator in orbis cometici plano per solem transeunte constituatur, deviatio caudæ nusquam sentitur, quia tota in plano isto jacet. Licet vapor assurgens motum capitis participet, tamen propter aliqualem ætheris resistentiam, minus velociter quam caput ipsum progreditur, & quò altius ascendit vapor eò fit rarior, id est, quò longior est cauda eò majorem experitur resistentiam, ideóque præcedens caudæ latus quod scilicet proximus est partibus ad quas tendit comera, convexum erit, sequens verò concavum ac proinde cauda non à sole duntaxat aversa est, sed etiam incurvatur. Hæc à sole deviatio & curvatura eò minor est quò recta solem cometamque conjungens obliquior est ad cometæ orbitam; si enim cometa directe à sole vel ad solem tenderet, cauda quoque foret recta & à sole directè aversa. Hinc patet in ipso cometæ perihelio maximam esse caudæ deviationem maximamque curvaturam; tunc enim recta solem & cometam conjungens ad orbem cometæ normalis est. Præterea ob prædictam licet admodum exiguam ætheris resistentiam, convexa caudæ facies in ætherem incurrens densior est, ac proinde lucidior & distinctius terminata apparebit quam facies concava. Hæc sunt præcipua caudarum phænomena quibus satisfacit Newtoni opinio. Hinc caudas à capitibus oriri & in regiones à sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. 165.

165. Descriptis opinionibus de cometarum caudis adjungenda est illa quam Clariss. D. De Mairan in eximio opere de aurorâ Boreali his tuetur rationum momentis. Cometas ad solem proximè accedere observationibus compertum est; Hinc Newtonianæ attractionis legibus consentaneum videtur ut aliquam solaris atmosphæræ materiam cometa attrahat Cur autem materia hæc instar comæ vento agitatæ dispergatur & ad solis oppositum dirigatur ex radiorum solarium impulsione oriri potest. Plurimis enim experimentis certum est solares radios omni prorsus impulsionis vi non carere. Clariss Hombergius varia materiæ levissimæ filamenta radiis solaribus in vitri ustorii foco objecta notabiliter impelli observavit Lamellam quoque elasticam ità ligneæ tabulæ affixit ut extremitas una libere penderet, collectis vitri ustorii ope solaribus radiis

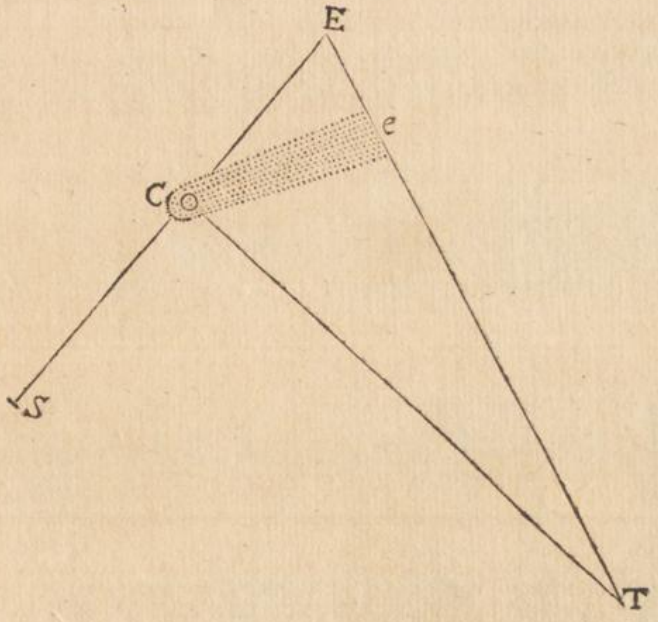
DE MUNDI SYSTEMATE.

terea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideo quod cauda convexo sui latere partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ à sole per caput cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quâ caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre nostro fumus corporis cujusvis igniti petit supe-




165. exposita hæc lamella instar penduli sensibiliter ibat & redibat. Quamvis autem levissima sit hic apud nos radiorum solarium impulsio, maxima tamen esse potest in spatiis liberrimis in quibus cometæ deferuntur, præsertim cum tenuissima sit materia quæ cometarum caudas componit. Jam verò concipiatur cometa N, apparenti cinctus atmosphærâ E D F, in transitu scilicet prope solem collectâ, ità ut in majori à cometæ nucleo N, distantiâ levior ratiorque semper fiat hæc materia, quemadmodum in apparenti cometarum atmosphærâ solet observari. Sphæra interior A B C, ex iis ponatur constare particulis quæ radiorum solarium impulsioni possint resistere, e contrà verò orbis superior A F B D C E, leviores contineat particulas quæ huic impulsioni cedant, manifestum est radiorum solarium impulsione projici versus solis oppositionem materiæ vestigium B G H j K, quod figuram caudarum repræsentat. Ex dictis patet hanc sententiam cum Newtonianis principiis consentire; et quidem Newtonus describens posteà Kepleri opinionem quæ eâdem fere est, ab eâ non videtur alienus.

ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel obliquè ſi corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in ſolem, fumi & vapores aſcendere debent à ſole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel rectà petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel obliquè, ſi corpus progrediendo loca ſemper deſerit à quibus ſuperiores vaporis partes aſcenderant. Et obliquitas iſta minor erit ubi aſcenſus vaporis velocior eſt: nimirum in vicinia ſolis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diverſitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in




166. Longitudo caudæ hoc modo poteſt inveniri. Sit S ſol, C cometa cujus cauda Ce; ex cognitis ſolis & cometæ locis notus erit angulus TCE, dataque (per obſerv.) deviatione caudæ à ſolis oppoſito, dabitur angulus ECe, ac proinde innoteſcet angulus TCe, quem ſcilicet cauda efficit cum rectâ terram & cometam jungente. Præterea (per obſerv.) innoteſcit angulus ad terram CTe, quem cauda ſubtendit, quare (per theoriam cometæ) datâ cometæ diſtantiâ à terrâ, dabitur caudæ longitudo. 166

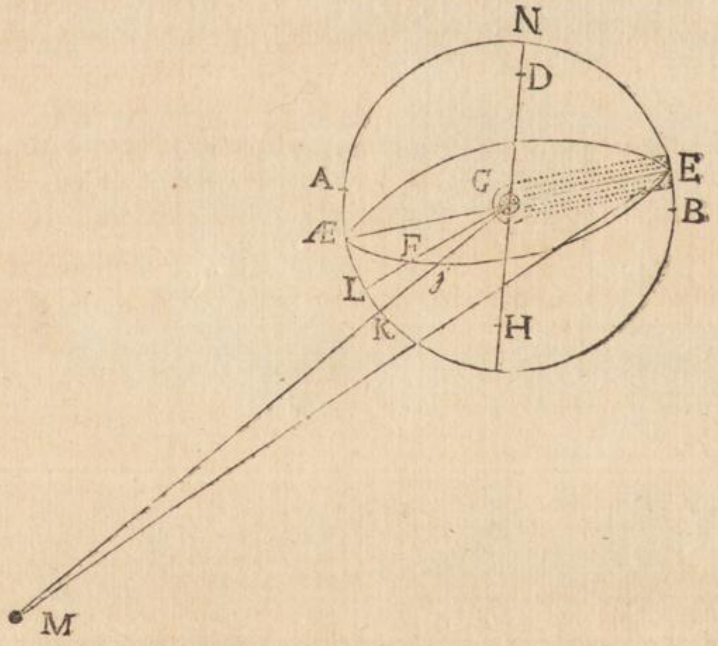
DE MUNDI SYSTEMATE.

in columnæ latere præcedente paulo recentior eſt, ideo etiam is ibidem aliquanto denſior erit, lucemque propterea copioſius reflectet, & limite minus indiſtincto terminabitur. De caudarum agitationibus ſubitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque deſcribunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aëris noſtri, & motibus nubium caudas aliquâ ex parte obſcurantium oriantur; vel forte à partibus viæ lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi poſſint, ac tanquam earum partes ſpectari.

Vapores autem, qui ſpatiis tam immenſis implendis ſufficiant, ex cometarum atmoſphæris oriri poſſe, intelligetur ex raritate aëris noſtri. Nam aër juxta ſuperficiem terræ ſpatium occupat quaſi 850 partibus majus quàm aqua ejuſdem ponderis, ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejuſdem eſt ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejuſdem. Columna autem aëris ad ſummitatem atmoſphæræ aſſurgens æquat pondere ſuo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea ſi

167. 167. Novam elegantemque methodum ad cometarum motus in orbe parabolico computandos nobiſcum, ſuâ humanitate, communicavit Clariſſ. Vir & in rebus Mathematicis Verſatiſſimus D. De Chezeaux. Methodum hanc deſcribere longius foret, paucis duntaxat exponemus quâ ratione longitudinem atque deviationem caudæ inveſtigat. Sit cometa in puncto G circà quod tanquam centrum deſcribatur ſphæra cujus radii GA, GE, ſint æquales longitudini caudæ cometæ. Concipiatur in hâc ſphærâ planum Eccliptícæ parallelum habens polos in D & H, itemque concipiatur planum AKEB parallelum orbitæ veræ cometæ habens polum unum in G, ſit terra in M, ejus longitudo e cometâ viſa & ad planum orbitæ AKEB reducta, exprimetur per arcum KB, latitudo autem per arcum Kj. Quia verò datur (per obſerv.) longitudo cometæ è terrâ viſa, dabitur longitudo terræ e cometâ viſa; ſed datur latitudo cometæ (per obſerv.) & (per theoriam cometæ) habetur inclinatio plani AKEB, ad planum Eccliptícæ, itemque innoteſcit locus nodi B. Quare (per trigon. ſphær.) invenietur longitudo terræ reſpectu plani AKEB, cujus menſura eſt arcus BNAK, dabiturque latitudo Kj. Jam verò ductâ lineâ ME, ex terrâ M, ad extremitatem caudæ E, cujus extremitatis longitudo & latitudo è terra viſæ (per obſerv.) notæ ſunt, agatur GF parallela rectæ EM, eodem planè modo ac ſuprà innoteſcet poſitio puncti F in ſuperficie ſpheræ reſpectu plani AKEB, deſcriptoque arcu circuli maximi GFL, invenientur arcus BNAL & FL. Sed in triangulo ſphærico GjF, datis latere Gj, complemento ſcilicet ad jK, & latere GF, complemento ad FL, atque latere Fj, menſurâ anguli FGj, qui æqualis eſt angulo GME, invenietur angulus GFj. Tandem concipiatur planum circuli maximi tranſiens per puncta F, j, per centrum G, commune ſphæræ & cometæ atque per extremitatem caudæ E, cujuſque ſectio cum plano ANB, ſit recta EGÆ, formabitur alterum triangulum ſphæricum ÆFL, cujus

si columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Indè verò (per regulam (b) multis experimentis confirmatam, quod compressio aëris sit ut pondus atmosphæræ incumbentis, quodque gravitas sit reciprocè ut quadratum




jus jam innotescunt angulus ÆFL & latus FL, quare dabitur latus ÆL, ac proindè etiam dabitur arcus BAÆ, ob datum arcum BAL; innotescet præterea arcus BE, atque obtinebitur arcus ÆF, qui additus arcui Fj, dabit arcum Æj, ideóque dabitur arcus Ej, mensura anguli rectilinei jGE, vel MGE. Datis autem in triangulo rectilineo MGE, angulis MGE, GME & latere GM, dabitur latus GE, hoc est, longitudo caudæ. Si itaque habeatur distantia cometæ à terrâ in partibus mediocris distantiæ terræ à sole expressa, in iisdem quoque partibus obtinebitur longitudo caudæ. Quoniam verò (ex theoriâ cometæ) datur distantia cometæ à nodo ex sole visa, si ex hâc distantiâ subtrahatur arcus BE, habebitur angulus quem recta per solem & cometam ducta comprehendit cum caudâ GE, hoc est, deviatio cometæ à sole. 167.

(b) * *Multis experimentis confirmatam.* Experimenta illa referunt passim rerum Physicarum scriptores, sed præsertim Clariss. Muskembroek in Physicâ. Videantur etiam transactiones Philosophicæ an. 1671. num. 73.

dratum distantiæ locorum à centro terræ) computationem (c) per corol. prop. XXII. lib. II. ineundo, inveni quod aër, si ascendatur à superficie terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quam apud nos in ratione longè majori, quam spatii omnis infra orbem saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus aëris nostri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram saturni & longè ultrà. Proindè cum aër adhuc altior in immensum rarescat; & coma seu atmosphæra cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quàm rarissima. Et quamvis ob longè crassiorem cometarum atmosphæram, magnamque corporum gravitationem solem versus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in se mutuò, fieri possit ut aër in spatiis cœlestibus inque cometarum caudis non adeò rarescat; perexiguam tamen quantitatem

168. (c) 168. * *Per corol. prop. XXII.* Sit (in figurâ prop. XXII.) S centrum terræ, S A ejusdem semidiameter mediocris pedum $19615800 = r$, A B pedum 850, & ideò S P $= 19616650 = a$, S F $= 2r$, dignitas hyperbolæ $fah = rr$, ideóque A a $= r$, F f $= \frac{1}{2}r$, & B b $= \frac{rr}{a}$ ac proinde A a $-$ F f $= \frac{1}{2}r$ & A a $-$ B b $= \frac{ar - rr}{a}$. Densitas A H seu S t $= m = 33$, densitas B j, seu S u $= n = 32$, & densitas F N, sive S Z $= d$. His positis, (ex naturâ hyperbolæ per theor. 4. de hyperbolâ), erit area t h n z, ad aream t h i u, ut L. $\frac{m}{d}$ ad L. $\frac{m}{n}$, & (per Cor. Prop. XXII. lib. 2.) erit L. $\frac{m}{d}$ : L. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}r : \frac{ar - rr}{a} = a : 2a - 2r$, ideóque L. $\frac{m}{d} = \frac{a}{2a - 2r} \times$ L. $\frac{33}{32}$. Est autem $\frac{a}{2a - 2r} = \frac{196166\frac{5}{10}}{170}$, & ex tabulis vulgaribus L. $\frac{33}{32} = 0.0133639$. Quarè L. $\frac{m}{d} = 154.20879349$. Densitas ergò aeris in A seu in superficie telluris se habet ad densitatem aeris in F, seu in distantiâ semidiametri telluris ab eâdem superficie ut numerus respondens logarithmo 154. 20879349 ad unitatem. Porro logarithmo 3.2087100 in tabulis vulgaribus respondet numerus 1617 & ideò logarithmo 3.20879349 respondere debet numerus unitate fere integrâ major quam 1617. Logarithmo igitur invento 154.20879349 respondet numerus major quam 1617 cum 151 zeris adscriptis. Jam verò semidiameter terræ sit ut prius 19615800 pedum. Parallaxis solis ponatur 10″ cujus sinus rectus est partium 485 posito radio partium 10000000. Quoniam semidiameter orbis magni est ad semidiametrum terræ ut radius ad sinum parallaxis solis (30. lib. 3.) erit semidiameter orbis magni pedum circiter 5000000000000. Sed semidiameter orbis Saturni circiter decuplo major est (phæn. 4.) erit igitur hæc semidiameter

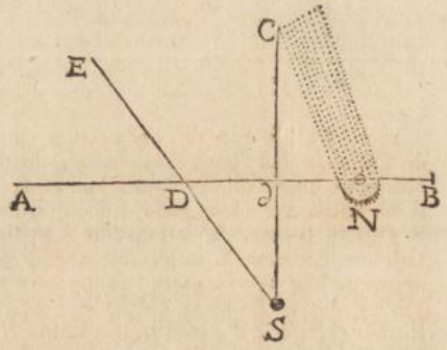
pedum

tatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas transluccentibus. Atmosphæra terrestris luce solis splendens, crassitudine suâ paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem solis in jubare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, (d) cognosci ferè potest ducendo rectam a termino caudæ

pedum 500000000000, ideóque diameter ped. 1000000000000, sive digitorum 12000000000000. Est igitur sphæra Saturni ad globum cujus diameter est digitus unus ut præcedentis numeri cubus sive 1728 cum annexis 39 cyphris ad unitatem; sed ratio illa multo minor est ratione densitatum modò inventâ; Quarè globus aëris nostri digitum unum latus eâ cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram Saturni & longè ultrà.

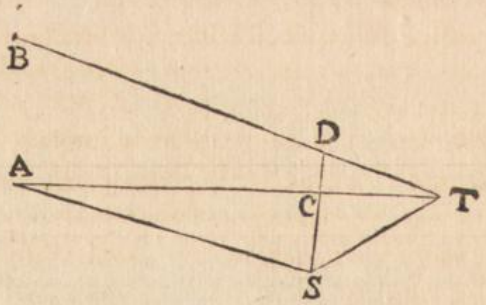
(d) 169. * *Cognosci ferè potest.* Referat S solem, A B trajectoriæ cometicæ portionem. Sit N cometæ nucleus ab A versus B progrediens, C terminus caudæ. Ducatur recta à termino illo C ad solem, punctum d, ubi recta trajectoriam secat, designabit locum ex quo vapor in termino caudæ ascendere cæpit à capite, si vapor ille rectâ ascendat à sole. Quia autem vapor non rectâ ascendit à sole sed vergit versus partes A, quas cometa reliquit (164) agatur recta S E, parallela longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) recta illa à lineâ caudæ divergat, atque trajectoriam cometæ alicubi intersecet: putà in D. vapor qui nunc terminum caudæ constituit à nucleo cœpit ascendere dum cometa in trajectoriæ suæ loco D versabatur; hic enim vapor cum motu ascensûs à sole, motum cometæ progressivum quem ante ascensum suum habebat, componit. Sed per varias methodos paulò ante explicatas in- 168.




veniri potest tempus quo cometa locum D occupavit & potest definiri quanto temporis spatio opus sit ut cometa trajectoriæ portionem D N, longitudine datam, percurrat, ideóque habebitur proximè tempus quo vapor ad terminum caudæ ascendit. Simili modo determinati potest temporis spatium quo vapor ascendit ad datum caudæ punctum.

DE MUNDI SYSTEMATE.

dæ ad ſolem, & notando locum ubi recta illa trajectoriam ſecat. Nam vapor in termino caudæ, ſi recta aſcendat à ſole, aſcendere cœpit à capite, quo tempore caput erat in loco interſectionis. At vapor non rectà aſcendit à ſole, ſed motum cometæ, quem ante aſcenſum ſuum habebat, retinendo, & cum motu aſcenſus ſui eundem componendo, aſcendit obliquè. Unde verior erit problematis ſolutio, ut recta illa, quæ orbem ſecat, parallela ſit longitudini caudæ, vel potiùs (ob motum cur-




176. 176. Ex his quæ de cometarum caudis hactenus dicta ſunt, cometarum, quandiù nobis conſpicui ſunt, maxima poſſibilis diſtantia à ſole & terrâ definiri poteſt. Referat S ſolem, T terram, S T A diſtantiam cometæ à ſole, ſitque A T B, apparens longitudo caudæ. Quoniam lux propagatur à termino caudæ ſecundùm lineam rectam T B, reperitur terminus ille alicubi in lineâ T B, putà in D. Jungatur D S, ſecans lineam T A in C, & quia cauda ſemper opponitur ſoli quam proxime, ideóque ſol, caput cometæ & terminus caudæ jacent in directum, reperitur caput cometæ in C. Rectæ T B, agatur parallela S A, occurrens lineæ T A, in A, caput cometæ C neceſſariò reperietur inter T & A, nam terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ T B, & lineæ omnes ut S D, quæ ab S ad lineam T B duci poſſunt, ſecant lineam T A, alicubi inter T & A. Quare cometa non poteſt longius abeſſe à terrâ quam intervallo T A, nec à ſole quam intervallo S A ultrà ſolem, vel S T, citrà. Exemplo ſit cometa an. 1680. cometa ille die 11. Dec. diſtabat 9°. à ſole & longitudo caudæ erat 35°. Quare conſtruatur triangulum T S A, cujus angulus T æqualis ſit diſtantiæ 9°. & angulus A ſeu angulus A T B æqualis ſit longitudini caudæ 35°., erit S A ad S T, id eſt, limes maximæ poſſibilis diſtantiæ cometæ à ſole ad ſemidiametrum orbis magni ut ſinus anguli T, ad ſinum anguli A, hoc eſt, ut 3. ad 11. circiter. Quarè cometa eo tempore minus diſtabat à ſole quam $\frac{3}{11}$ partibus diſtantiæ terræ à ſole, & propterea verſabatur aut intrà orbem

curvilineum cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25. aſcendere cœperat à capite ante *Dec.* 11. ideóque aſcenſu ſuo toto, dies plus 45 conſumpſerat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, aſcenderat ſpatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii cometæ elapſi fuerant. Vapor igitur ſub initio in viciniâ ſolis celerrimè aſcendebat, & poſtea cum motu per gravitatem ſuam ſemper retardato aſcendere pergebat; & aſcendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiù apparuit, ex vapore ferè omni conſtabat, qui à tempore perihelii aſcenderat; & vapor, qui primus aſcendit, & terminum caudæ compoſuit, non priùs evanuit quam ob nimiam ſuam tam à ſole illuſtrante quam ab oculis noſtris diſtantiam videri deſiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves ſunt, non aſcendunt motu celeri & perpetuò à capitibus & mox evaneſcunt, ſed ſunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentiſſimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere ſub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. Et (e) hinc rurſus colligitur ſpatia cœleſtia vi reſiſtendi deſtitui; utpote in quibus non ſolùm ſolida planetarum & cometarum corpora, ſed etiam rariſſimi caudarum vapores motus ſuos velociſſimos liberrimè peragunt ac diutiſſimè conſervant.

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROB. XXI.

Aſ-

bem Mercurii aut inter orbem illum & terram. Rurſus die 21. Decembr. diſtantia cometæ à ſole erat $32^{\circ}\frac{2}{5}$. & longitudo caudæ 70°. ergò ut ſinus $32^{\circ}\frac{2}{5}$. ad ſinum 70°, hoc eſt, ut 4 ad 7, ità erat limes intervalli inter cometam & ſolem ad diſtantiam terræ à ſole & propterea nondum cometa exceſſerat ex orbe veneris. Die 28. Decembr. diſtantia cometæ à ſole erat 55°. & longitudo caudæ 56°. Quæ, iiſdem calculi veſtigiis inſiſtendo, limes intervalli inter cometam & ſolem, nondum æquabat diſtantiam terræ à ſole & propterea cometa nondum exceſſerat ex orbe telluris. Hâc methodo quam ex Newtoni opuſculo de mundi ſyſtemate deſcripſimus, aliorum cometarum diſtantias limitando inventum eſt cometas omnes, quandiù ſe nobis oſtendunt, verſari intrà ſpatium ſphæricum centro ſole & intervallo ſolis ac terræ vel duplicato vel ad ſummum triplicato deſcriptum. 170.

(e) * *Et hinc rurſus colligitur.* Legantur quæ dicta ſunt in ſcholio prop. XI. lib. 2.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Aſcenſum caudarum ex atmoſphæris capitum & progreſſum in partes à ſole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longè tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt à (f) ratione prorſus alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ impeditiſſimis in regionibus noſtris à radiis ſolis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à ſole aſcendere. Cum autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideóque ſervatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potiùs oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum aſcenderit à ſole? Nam radii ſolares non agitant media, quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes eâ actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam eâ raritate gravitatem ſuam ſpecificam, quâ priùs tendebat in ſolem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa ſolem & eâ actione conantur à ſole recedere, at ſolis atmoſphæra & materia cœlorum vel planè quieſcit, vel motu ſolo quem à ſolis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in viciniâ ſolis, ubi orbes curviores ſunt, & cometæ intra denſiorem & eâ ratione graviorem ſolis atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quàm longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus ſolem gravitando, movebuntur circa ſolem in ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in

170. (f) * *Non eſt a ratione prorſus alienum* (165.).

in ſolem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant à capitibus ſolem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit, ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel ſimul in ſolem cadent, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quò minùs caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem à cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque facillimè accipiant & poſtea liberrimè ſervent.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel indè poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potiùs ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad ſolem caudæ novæ breviuſculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & ſubindè in periheliis cometarum illorum, qui ad uſque atmoſphæram ſolis deſcendent, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuò rareſcit ac dilatatur. Quâ ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem latior ſit quam juxta caput cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deindè paulatim in planetas per gravitatem ſuam attrahi, & cum eorum atmoſphæris miſceri rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad conſtitutionem terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem ſolis vapores copioſè ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut (g) aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuò ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò creſcunt, dein magnâ ex

(g) * *Ut aliqui cum ratione philoſophantur.* Horumce philoſophorum rationes videre eſt paſſim apud omnes cultiores phyſicos. Legantur tranſact. philoſop. an. 1687. 1694. 1729 & monum. Acad. Pariſ. an. 1703. 170.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles terræ aridæ in dies augetur, & liquores, nisi aliundè augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porrò suspicor spiritum illum, qui aëris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipuè venire.

Atmosphæræ cometarum in descensu eorum in solem excurrendo in caudas, diminuuntur, & (eâ certè in parte quæ solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à sole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; si modo phænomena eorum *Hevelius* rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modo ad solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus à sole ac terrâ distantiis obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decembri* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at mense *Novembri* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigiensi*, *Novem.* 19. cometa hicce luce suâ quantumvis plumbeâ & obtusâ, æquabat spicam virginis, & clarius micabat quam postea. Et *Montenaro Nov.* 20, st. vet. cometa apparebat major stellis primæ magnitudinis, existente caudâ duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longè cedere cometæ, qui mense *Novembri* ante solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, apparuerint subobs-

obſcura & exigua. Nam anno 1668. *Mart.* 5. ſt. nov. horâ ſeptimâ veſpertinâ *R. P. Valentinus Eſtancius*, *Braſiliæ* agens, cometam vidit horizonti proximum ad occaſum ſolis brumalem, capite minimo & vix conſpicuo, caudâ verò ſuprà modum fulgente, ut ſtantes in littore ſpeciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis ſplendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in auſtrum vergens, & horizonti ferè parallela. Tantus autem ſplendor tres ſolùm dies durabat, ſubindè notabiliter decreſcens; & interea decreſcente ſplendore aucta eſt magnitudine cauda. Undè etiam in *Luſitaniâ* quartam ferè cœli partem (id eſt, gradus 45) occupaſſe dicitur ab occidente in orientem ſplendore cum inſigni protenſa; nec tamen tota apparuit, capite ſemper in his regionibus infrà horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento ſplendoris manifeſtum eſt, quod caput à ſole receſſit, eique proximum fuit initio, pro more cometæ anni 1680. Et in chronico *Saxonico* ſimilis legitur cometa anni 1106. *cujus ſtella erat parva & obſcura* (ut ille anni 1680) *ſed ſplendor qui ex ea exivit valde clarus & quaſi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmenſi* Monacho. Apparuit initio menſis *Februarii*, ac deinceps circa veſperam, ad occaſum ſolis brumalem. Indè verò & ex ſitu caudæ colligitur caput fuiſſe ſoli vicinum. *A ſole*, inquit *Matthæus Pariſienſis*, *diſtabat quaſi cubito uno*, *ab horâ tertiâ* (rectius ſextâ) *uſque ad horam nonam radium ex ſe longum emittens.* Talis etiam erat ardentiſſimus ille cometa ab *Ariſtotele* deſcriptus lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conſpectum eſt, eo quod ante ſolem vel ſaltem ſub radiis ſolaribus occidiſſet, ſequente vero die quantum potuit viſum eſt. Nam quam minima fieri poteſt diſtantia ſolem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* (caudæ ſcilicet) *nondum apparebat capitis ſparſus ignis, ſed procedente tempore* (ait Ariſtoteles) *cum* (cauda) *jam minus flagraret, reddita eſt* (capiti) *cometæ ſua facies. Et ſplendorem ſuum ad tertiam uſque cœli partem* (id eſt, ad 60gr.) *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* (an. 4. olymp. 101.) *& aſcendens*

DE MUNDI SYSTEMATE.

*dens uſque ad cingulum oronis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis ſolaribus caudatiſſimus emerſit, ſtellas primæ magnitudinis æquare vel paulo ſuperare videbatur, ſed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas brevio es habuere. Horum aliqui jovem, alii venerem vel etiam lunam æquaſſe traduntur.

(h) Diximus cometas eſſe genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa ſolem revolventium. Et quemamodum è planetis non caudatis minores eſſe ſolent, qui in orbibus minoribus & ſoli propioribus gyrantur, ſic etiam cometas, qui in periheliis ſuis ad ſolem propiùs accedunt, ut plurimum minores eſſe, ne ſolem attractione ſuâ nimis agitent, rationi conſentaneum videtur. (i) Orbium verò tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iiſdem orbibus poſt longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio propoſitio ſequens lumen accendere poteſt.

PRO-

171. (h) 171. * *Diximus cometas eſſe genus planetarum*, idque graviſſimis rationibus confirmatur. Hâc enim factâ hypotheſi, computatiſque per methodos præcedentes cometarum trajectoriis, hujuſmodi trajectoriæ ſemper cum phænomenis congruunt quamproxime. Clariſſ. Halleius ſuſpicatur cometam an. 1531. ab Appiano obſervatum, eundem fuiſſe cum illo qui anno 1607 deſcriptus eſt à Keplero & Longomontano & quem Halleius ipſe redeuntem obſervavit an. 1682. quadrabant enim elementa omnia, ſolaque periodorum inæqualitas adverſari videbatur. Verum tanta non fuit inæqualitas illa ut cauſis phyſicis adſcribi non poſſit. Saturni enim motus à cæteris planetis & præſertim à jove ità perturbatur ut per aliquot dies integros incertum ſit hujus planetæ tempus periodicum. Rectè etiam animadvertit Clariſſ. Caſſinus in Mon. Pariſ. 1699. cometam diverſis temporibus obſervatum ideóque pro duobus cometis uſurpatum, unum eundemque eſſe poſſe, licet non conveniant inter ſe omnia motuum elementa; fieri ſcilicet poteſt ut unus idemque cometa bis obſervatus non ſecet Ecclipticam ſub eodem angulo & in iiſdem locis, ut cometæ hujus velocitas in perigæo non ſit eadem. Talibus enim erroribus aliiſque plurimis Luna eſt obnoxia. Cæterum Clariſſ. Halleius diligenter perpenſis motibus cometæ an 1682. hujus cometæ reditum anno 1758. futurum eſſe prædixit.

(i) * *Orbium verò tranſverſas diametros & revolutionum tempora periodica.* Hæc duo obtineri poſſunt per methodum num 160. expoſitam.

## PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

*Inventam cometæ trajectoriam corrigere.*

*Operatio* 1. Aſſumatur poſitio plani trajectoriæ, per propoſitionem ſuperiorem inventa; & ſeligantur tria loca cometæ obſervationibus accuratiſſimis definita, & ab invicem quàmmaximè diſtantia; ſitque A tempus inter primam & ſecundam, ac B tempus inter ſecundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo (k) in perigæo verſari convenit, vel ſaltem non longè à perigæo abeſſe. (l) Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in aſſumpto illo plano trajectoriæ. Deindè per loca illa inventa, circa centrum ſolis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope prop. XXI lib. 1. inſtitutas, deſcribatur ſectio conica: (m) & ejus areæ, radiis à ſole ad loca inventa ductis terminatæ, ſunto D & E; nempe D area inter obſervationem pri-

(k) * *In perigæo verſari convenit.* Verſante enim cometa in perigæo vel ſaltem non longe à perigæo, illius motus magis accurate definitur.

(l) * *Ex his locis apparentibus.* Inveniantur per operationes trigonometricas (ut in prop. præced.) loca tria vera cometæ in aſſumpto illo plano trajectoriæ tanquam accurato, hoc eſt, inveniantur tria prius definiti plani puncta in quibus cometa eandem longitudinem ac latitudinem obtineret quam revera habere obſervatur.

(m) * *Ejus areæ.* Ex datâ cometæ ſemitâ ejuſque partium magnitudine reſpectu ſemitæ telluris ejuſque partium, dabitur velocitas quâ cometa illam deſcribit ideóque dabitur tempus quo cometa areas duas jam inventas percurrit. Tempus illud totum dicatur T, capiaturque numerus C, qui ſit ad 1, ut tempus inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam, hoc eſt, ut A ad B. Sumatur præterea G ad 1, ut areæ inter obſervationem primam & ſecundam ad aream inter obſervationem ſecundam & tertiam, id eſt, ut D ad E; eadem quoque erit ratio inter tempora quibus areæ illæ radiis ad ſolem ductis deſcribentur. Sit S, tempus verum inter obſervationem primam & tertiam. Si reperiatur T = S, & G = C, inventa plani trajectoriæ poſitio vera erit & accurata, nullâ indigens correctione. Sin aliter erit T — S, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam ortus nimirum ex poſitione plani trajectoriæ minus accuratâ, & G — C, erit error ex eâdem cauſâ ortus in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam, ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam, ut patet; nam in utroque caſu unitas uſurpatur pro conſequente rationis inter bina tempora. 171

DE MUNDI SYSTEMATE.

primam & ſecundam, & E area inter ſecundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E velocitate cometæ per prop. XVI. lib. 1. inventa deſcribi debet.

*Oper.* 2. (n) Augeatur longitudo nodorum plani trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & ſervetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis obſervatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut ſuprà: deinde etiam orbis per loca illa tranſiens, & (o) ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint *d* & *e*, nec non tempus totum *t*, quo area tota *d*+*e* deſcribi debeat.

*Oper.* 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex obſervatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbiſque per loca illa tranſiens, (p) ut & ejuſdem areæ duæ inter obſervationes deſcriptæ, quæ ſint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota δ+ε deſcribi debeat.

(q) Jam ſit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & *g* ad 1 ut *d* ad *e*, & γ ad 1 ut δ ad ε; ſitque S tempus verum inter

171. (n) * *Longitudo nodorum*, per num. 145. inventa

(o) * *Et ejuſdem areæ duæ.* Harumce arearum inter tres obſervationes radiis ad ſolem ductis deſcriptarum ratio ſit ut g, ad 1; ſitque t, tempus totum quo cometa utramque aream deſcriberet. Si deprehendatur t=S & g=C, aſſumpta plani poſitio vera erit & accurata. Sin aliter, erit, ut ſupra in operatione 1ª, t−S, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam, & g−C error in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam. Uterque hic error oritur ex poſitione non ſatis accuratâ plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ.

(p) * *Ut & ejuſdem areæ duæ.* Sint areæ illæ ut γ ad 1, ſitque τ tempus totum quo area tota δ+ε, deſcribi debeat. Si fuerit τ=S & γ=C, aſſumpta plani trajectoriæ poſitio vera eſt & accurata. Sin contrà, erit τ−S, error in tempore toto inter obſervationem primam & tertiam, & γ−C, error in ratione temporis inter obſervationem primam & ſecundam ad tempus inter obſervationem ſecundam & tertiam.

(q) * *Jam ſit C ad* 1. Iiſdem ſervatis denominationibus quas adhibet Newtonus, inſtituatur operatio per regulam falſæ poſitionis. Ad inveniendum errorem ortum ex aſſumptâ inclinatione plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ, fiat juxta prædictam regulam, ut differentia errorum T−τ ad differentiam poſitionum T−S, ità

ter observationem primam ac tertiam; & signis + & − probè observatis quærantur numeri $m$ & $n$, eâ lege, ut sit $2G-2C = mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et si in operatione primâ I designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum ecliptícæ & K longitudinem nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum ecliptícæ, & $K+mP$ vera longitudo nodi. (r) Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, $r$ & $\varrho$ designent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respectivè: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum

ità error Q, ad quartam quantitatem, erit hæc ipsa quantitas $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$, error inclinationis plani in toto scilicet tempore inter observationem primam & tertiam. Simili modo dicatur, $G-\gamma : G-C = Q : \frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$, erit quantitas $\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$ error ejusdem inclinationis in ratione inter bina trium observationum tempora. Similiter error longitudinis nodi in toto tempore inter observationem primam & tertiam invenitur $\frac{T-S}{T-t}\times P$, error verò in ratione inter bina tempora est $\frac{G-C}{G-g}\times P$. Est itaque vera & correcta inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ $I+\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$, sive $I+\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$; & vera longitudo nodi est $K+\frac{T-S}{T-t}\times P$ vel $K+\frac{G-C}{G-g}\times P$. Jam verò quoniam corrigendus est error uterque tam in toto tempore quam in ratione inter bina tempora, ponamus $\frac{T-S}{T-t}\times P$ & $\frac{G-C}{C-g}\times P$, separatim æquari $m\times P$ hoc est $\frac{T-S}{T-t}=m$ & $\frac{G-C}{G-g}=m$.

Ponamus quoque $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$ & $\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q = n\times Q$, id est $\frac{T-S}{T-\tau}=n$, & $\frac{G-C}{G-\gamma}=n$. Hinc proveniet $mT-mt=T-S$ & $mG-mg=G-C$; item $nT-n\tau=T-S$, & $nG-ng=G-C$, unde fit $2T-2S = mT-mt+nT-n\tau$, & $2G-2C = mG-mg+nG-n\gamma$. Quare si tales quærantur numeri m & n, ut sit $2G-2C = mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S = mT-mt+nT-n\tau$, erit $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$ & $\frac{G-C}{T-\tau}\times Q = n\times Q$. Similiter fiet $\frac{T-S}{T-t}\times P$ & $\frac{G-C}{G-g}\times P = mP$, ac proindè error inclinationis plani trajectoriæ erit nQ & error longitudinis nodi mP. Quare vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecliptícæ erit $I+nQ$, & $K+mP$ vera longitudo nodi. Hæc omnia patent ex notis in tres operationes præcedentes. 171.

(r) * *Ac denique.* Nota sint latera recta trium trajectoriarum in operatione primâ, secundâ & tertiâ descriptarum. Designet R, latus rectum primæ trajectoriæ, r secundæ, $\varrho$ tertiæ, & trajectoriæ quam cometa describit desideretur verum latus rectum; per regulam falsæ positionis eâdem plane methodo quam modò adhibui-

DE MUNDI SYSTEMATE.

verum latus rectum, & $\frac{1}{L+m\,l-mL+n\lambda-nL}$ verum latus transversum trajectoriæ quam cometa describit. (f) Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. *Q. E. I.*

Cæterùm cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem cometam, in eodem orbe revolventem. (t) Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypothesi quod sint parabolicæ. Nam hujusmodi trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ cometæ anni 1680, quam cum observationibus suprà contuli, sed etiam ex eâ

172. hibuimus poterit inveniri. Ut obtineatur vera longitudo nodi, additur ejus longitudini in primo plano excessus longitudinis assumptæ in plano secundo suprà præcedentem ductus in m, & ut habeatur vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ, additur inclinationi plani primi, excessus inclinationis assumptæ in plano tertio suprà inclinationem præcedentem ductus in n. Sed trajectoria cometæ ejusque latus rectum corrigi debent tum ob correctam longitudinem nodi, tum ob correctam inclinationem plani ad planum Ecclipticæ, quare lateri recto trajectoriæ in primo plano descriptæ sivè ipsi R, addi debet $m\,r-m\,R$, excessus scilicet lateris recti in plano secundo suprà latus rectum in plano primo ductus in m. Addere insuper oportet $n\varrho-n\,R$, qui est excessus lateris recti in plano tertio suprà latus rectum in primo ductus in n, ideóque erit $R+m\,r-m\,R+n\varrho-n\,R$, verum latus rectum. Simili modo patet datis lateribus transversis in operatione primâ, secundâ & tertiâ respectivè $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$, esse verum latus transversum trajectoriæ $\frac{1}{L+m\,l-m\,L+n\lambda-n\,L}$.

(f) 172. * *Dato autem latere transverso.* Accuratè descriptâ cometæ trajectoriâ (per methodos præced.) si deprehendatur ellipsim solis centro tanquam umbilico descriptam, non verò parabolam per determinata trajectoriæ puncta transire, cometa in orbem redibit & dato latere tranverso trajectoriæ hujus, dabitur tempus periodicum; erit scilicet, quadratum temporis periodici cometæ ad quadratum temporis periodici telluris circà solem ut cubus majoris axis orbitæ cometicæ ad cubum majoris axis orbitæ terrestris (160).

(t) * *Et tum demum* (160).

eâ cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines & latitudines hujus cometæ computavit, sed minus accuratè. Ex iisdem observationibus *Halleius* noster (u) loca cometæ hujus denuò computavit, & tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum ascendentem in ☊ 21gr. 13′. 55″., inclinationem orbitæ ad planum ecliptícæ 21gr. 18′. 40″, distantiam perihelii à nodo in orbitâ 49gr. 27′. 30″. Perihelium in ♌ 8gr. 40′. 30″ cum latitudine austrinâ heliocentricâ 16gr. 1′. 45″. Cometam in perihelio *Novemb.* 24d. 11h. 52′. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13h. 8 *Gedani*, stylo veteri, & latus rectum parabolæ 410286, existente mediocri terræ à sole distantiâ 100000. Quam probe loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum observationibus, patebit ex tabulâ sequente ab *Halleio* supputatâ.

(u) * *Loca cometæ hujus denuò computavit.* Varias computi hujus ineundi methodos suprà tradidimus. 172.

DE MUNDI SYSTEMATE.

| Temp. Appar. Gedani, ft. vet. | Obſervatæ Cometæ diſtantiæ. | | Loca obſervata. | Loca computata in Orbe |
|---|---|---|---|---|
| *Decemb.* | | gr. ″ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ |
| 3 h. 18 h. 29 ½ | à Corde Leonis | 46 . 24 . 20 | Long. ♎ 7. 1. 0 | ♎ 7 . 1 . 29 |
| | à Spica Virginis | 22 . 52 . 10 | Lat. auſt. 21.39. 0 | 21 . 38 . 50 |
| 4 . 18 . 1½ | à Corde Leonis | 46 . 2 . 45 | Long ♎ 16.15. 0 | ♎ 0 . 6 . 5 |
| | à Spica Virginis | 23 . 52 . 40 | Lat auſt. 22 24. 0 | 22 . 24 . 0 |
| 7 . 17 . 48 | à Corde Leonis | 44 . 48 . 0 | Long ♎ 3. 0. 0 | ♎ 3 . 7 . 33 |
| | à Spica Virginis | 27 . 56 . 40 | Lat. auſt 25 . . . 0 | 25 . 21 . 40 |
| 17 . 14 . 43 | à Corde Leonis | 53 . 15 . 15 | Long ♏ 2. . . 0 | ♏ 2 . 56 . 0 |
| | ab Hum. Orionis dext. | 45 . 43 . 30 | Lat. auſt. 49 25. 0 | 49 . 25 . 0 |
| 19 . 9 . 25 | à Procyone | 35 . 13 . 50 | Long. ♐ 28.40 30 | ♐ 28 . 43 . 0 |
| | à Lucid. Mandib. Ceti | 52 . 6 . 0 | Lat. auſt . . . 0 | 45 . 46 . 0 |
| 20 . 9 . 53½ | à Procyone | 40 . 49 . 0 | Long. ♐ 13 . 3. . | ♐ 13 . 5 . 0 |
| | à Lucid. Mandib. Ceti | 40 . 4 . 0 | Lat. auſt. 39.54 0 | 39 . 53 . 0 |
| 21 . 9 . 9½ | ab Hum. dext. Orionis | 26 . 21 . 25 | Long ♐ 2.16 0 | ♐ 2 . 8 . 30 |
| | à Lucid. Mandib. Ceti | 29 . 28 . 0 | Lat. auſt. 33.41. 0 | 33 . 39 . 40 |
| 22 . 9 . 0 | ab Hum. dext. Orionis | 29 . 47 . 0 | Long. ♉ 24 24. 0 | ♉ 24 . 27 . 0 |
| | à Lucid. Mandib. Ceti | 20 . 29 . 30 | Lat. auſt. 27.45. 0 | 27 . 46 . 0 |
| 26 . 7 . 58 | à Lucida Arietis | 23 . 20 . 0 | Long. ♉ 9. 0. 0 | ♉ 9 . 2 . 28 |
| | ab Aldebaran | 26 . 44 . 0 | Lat. auſt. 12.36. 0 | 12 . 34 . 13 |
| 27 . 6 . 45 | à Lucida Arietis | 20 . 45 . 0 | Long. ♉ 7. 5.40 | ♉ 7 . 8 . 45 |
| | ab Aldebaran | 28 . 10 . 0 | Lat. auſt. 10.22. 0 | 10 . 22 . 13 |
| 28 . 7 . 39 | à Lucida Arietis | 18 . 29 . 0 | Long. ♉ 5.24 45 | ♉ 5 . 27 . 2 |
| | à Palilicio | 29 . 37 . 0 | Lat. auſt. 8.22.50 | 8 . 23 . 27 |
| 31 . 6 . 45 | à Cing. Androm. | 30 . 48 . 10 | Long. ♉ 2. 7.40 | ♉ 2 . 8 . 20 |
| | à Palilicio | 32 . 53 . 30 | Lat. auſt. 4.13. 0 | 4 16 . 25 |
| *Jan. 1665.* | | | Long. ♈ 28.24.47 | ♈ 28 . 24 . 0 |
| 7 . 7 . 37½ | à Cing. Androm. | 25 . 11 . 0 | Lat. bor. 0.54. 0 | 0 . 53 . 0 |
| | à Palilicio | 37 . 12 . 25 | | |
| 13 . 7 . 0 | à capite Androm. | 28 . 7 . 10 | Long. ♈ 27. 6.54 | ♈ 27 . 6 . 39 |
| | à Palilicio | 38 . 55 . 20 | Lat. bor. 3. 6.50 | 3 . 7 . 40 |
| 24 . 7 . 29 | à Cin. Androm. | 20 . 32 . 5 | Long. ♈ 26.29.15 | ♈ 26 . 28 . 50 |
| | à Palilicio | 40 . 5 . 0 | Lat bor. 5.25 50 | 5 . 26 . 0 |
| *Feb.* | | | Long. ♈ 27.24.46 | ♈ 27 . 24 . 55 |
| 7 . 8 . 37 | | | Lat. bor. 7. 3.26 | 7 . 3 . 15 |
| 22 . 8 . 46 | | | Long. ♈ 28.29.46 | ♈ 28 . 29 . 58 |
| | | | Lat. bor. 8 12.26 | 8 10 . 25 |
| *Mar.* | | | Long. ♈ 29.18.15 | ♈ 29 . 18 . 20 |
| 1 . 8 . 16 | | | Lat. bor. 8 36.26 | 8 . 36 . 12 |
| 7 . 8 . 37 | | | Long ♈ 0. 2.48 | ♉ 0 . 2 . 42 |
| | | | Lat. bor. 8.56.30 | 8 . 56 . 56 |

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis quam in ſequentibus vocabo γ, erat in ♈ 28gr. 30′. 15″ cum latitudine boreali 7gr. 8′. 58″. eScunda arietis erat in ♈ 29gr. 17′.

17′. 18″ cum latitudine boreali 8gr. 28′. 16″. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo *A*, erat in ♈ 28gr. 24′. 45″ cum latitudine boreali 8gr. 28′. 33″. Cometa vero *Feb.* 7ᵈ. 7′. 30″ *Pariſiis* (id eſt *Feb.* 7ᵈ. 8′. 37″ *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis ♑ & *A* rectangulum ad ♑. Et diſtantia cometæ à ſtella ♑ æqualis erat diſtantiæ ſtellarum ♑ & *A*, id eſt 1gr. 19′. 46″ in circulo magno, atque ideo ea erat 1gr. 20′. 26″ in parallelo latitudinis ſtellæ ♑. Quare ſi de longitudine ſtellæ ♑ detrahatur longitudo 1gr. 20′. 26″, manebit longitudo cometæ ♈ 27gr. 9′. 49″. *Auzoutius* ex hâc ſuâ obſervatione cometam poſuit in ♈ 27gr. 0′ circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26gr. 59′ 24″. Ratione mediocri poſui eundem in ♈ 27gr. 4′. 46″. Ex eâdem obſervatione *Auzoutius* latitudinem cometæ jam poſuit 7gr. & 4′ vel 5′ boream verſus. Eandem rectius poſuiſſet 7gr. 3′. 29″, exiſtente ſcilicet differentia latitudinum cometæ & ſtellæ ♑ æquali differentiæ longitudinum ſtellarum ♑ & *A*.

*Feb.* 22ᵈ. 7ʰ. 30′ *Londini*, id eſt *Feb.* 22ᵈ. 8ʰ. 46′ *Gedani*, diſtantia cometæ à ſtella *A*, juxta obſervationem *Hookii* à ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* à *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam *A* & primam arietis, ſeu 15′. 57″. Et diſtantia cometæ à linea jungente ſtellam *A* & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt 4′. Ideoque cometa erat in ♈ 28gr. 29′. 46″, cum lat. bor. 8gr. 12′. 36″.

*Mart.* 1ᵈ. 7ʰ. 0′ *Londini*, id eſt *Mart.* 1ᵈ. 8ʰ. 16′ *Gedani*, cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantia inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad 1gr. 33′, ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia cometæ à ſecunda arietis erat 8′. 16″ ſecundum *Hookium*, vel 8′. 5″ ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri 8′. 10″. Cometa vero ſecundum *Gottignies* jam modo prætergreſſus fuerat ſecundam arietis quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti,

De Mundi Systemate.

fecti, id est 1′. 35″ circiter (quocum satis consentit *Auzoutius*) vel paulo minorem secundum *Hookium*, puta 1′. Quare si ad longitudinem primæ arietis addatur 1′, & ad latitudinem ejus 8′. 10″, habebitur longitudo cometæ ♈ 29gr. 18′, & latitudo borealis 8gr. 36′. 26″.

*Mart.* 7ᵈ. 7ʰ. 30′ *Parisiis* (id est *Mart.* 7ᵈ. 8ʰ. 37′ *Gedani*) ex observationibus *Auzoutii* distantiâ cometæ à secundâ arietis æqualis erat distantiæ secundæ arietis à stellâ *A*, id est 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ & secundæ arietis erat 45′ vel 46′, vel ratione mediocri 45. 30″. Ideoque cometa erat in ♉ 0gr. 2′. 48″. Ex schemate observationum *Auzoutii*, quod *Petitus* construxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54. Sed sculptor viam cometæ sub finem motus ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in schemate observationum *Auzoutii* à se constructo incurvationem irregularem correxit, & sic latitudinem cometæ fecit esse 8gr. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere potest 8gr. 56′, vel 8gr. 57′.

Visus etiam fuit hic cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ 0gr. 18′, cum lat. bor. 9gr. 3½ circiter.

Apparuit hic cometa menses tres, signaque ferè sex descripsit, & uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus à circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, theoriâ à principio ad finem cum observationibus non minus accuratè congruit, quam theoriæ planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter nodum ascendentem & perihelium, seu constituendo (ˣ) angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriusque (& hujus & superioris) paral-

1712. (ˣ) * *Angulum illum* inter nodum ascendentem & perihelium invenerat Halleius 49°. 27′. 30″, constituto autem angulo illo 49°. 27′. 18″, computationibusque repetitis, subducta inveniuntur duo minuta prima circiter, ut oportet, & theoriâ à prin-

parallaxis annua insignis fuit, & (y) indè demonstratur motus annuus terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano ecliptícæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; inclinatio orbitæ ad eclipticam 83gr. 11′; perihelium in ♐ 25gr. 29′. 30″; distantia perihelia à sole 56020, existente radio orbis magni 100000, & tempore perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis à *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

| 1683 Temp. Æquat | Locus Solis | Cometæ Long. Comp. | Lat. Bor. Comp. | Cometæ Long. Obs. | Lat. Bor. Observ. | Differ. Long. | Differ. Lat. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d. h. ′ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | ′ ″ | ′ ″ |
| *Jul.* 13.12.55 | ♌ 1. 2.30 | ♋ 13. 5.42 | 29.28.12 | ♋ 13. 6.42 | 29.28.20 | +1. 0 | +0. 7 |
| 15.11.15 | 2.5 .12 | 1 .37.4 | 29.34. 0 | 11 39 43 | 29.34.50 | +1.55 | +0.50 |
| 17.10.20 | 4.45 45 | 10. 7. 6 | 29.33.30 | 10. 8 40 | 29.34. 0 | +1.34 | +0.30 |
| 23.11.40 | 10. 8.21 | 5.10.27 | 28.51.42 | 5.11.30 | 28.50.28 | +1. 3 | −1.14 |
| 25.14. 5 | 12.35.28 | 3.27.53 | 24.24.47 | 3.27 0 | 28 23 40 | −0.53 | −1. 7 |
| 31 9.42 | 18. 9 22 | ♊ 27 55. 3 | 26.22.52 | ♊ 27.54.24 | 26 22.25 | −0.39 | −0.27 |
| 31.14 55 | 18.21.53 | 27.41. 7 | 26.16.57 | 27.41. 8 | 26.14 50 | +0. 1 | −2. 7 |
| *Aug.* 2.14.56 | 20.17.16 | 25.29.32 | 25.16.19 | 25.28.46 | ♌ 17.28 | −0.46 | +1 9 |
| 4.10.49 | 22. 2.50 | 23. 8.20 | 24.10.49 | 23 16.55 | 24.12.19 | −1.25 | +1.30 |
| 6.10. 9 | 23.56.45 | 20.42.23 | 22.47. 5 | 20 40 32 | 22.49. | −1.51 | +2. 0 |
| 9.10.26 | 26.50.52 | 16. 7.57 | 20. 6.37 | 16. 5.55 | 20. 6.10 | −2. 2 | −0.27 |
| 15.14. 1 | ♍ 2.47.13 | 3.30.48 | 11.37.33 | 3 26.18 | 11.32. 1 | −4.30 | −5.32 |
| 16.15.10 | 3.48. 2 | 0 43. 7 | 9.34.16 | 0.41.5 | 9.34.13 | −1.12 | −0. 3 |
| 18.15.44 | 5.45.33 | ♌ 24. 52. 53 | 5.11.15 Austr | ♉ 24.49. 5 | 5. 9.11 Aust. | −3.48 | −2. 4 |
| 22.14.44 | 9 35.49 | 11. 7.14 | 5.16.58 | 11. 7.12 | 5.16.58 | −0. 2 | −0. 3 |
| 23.15.52 | 10.36.48 | 7. 2.18 | 8.17. 9 | 7. 1.37 | 8.16 41 | −1. 1 | −0.28 |
| 26 16. 2 | 13.31.10 | ♈ 24. 45. 31 | 16.38. 0 | ♈ 24 44. 0 | 16 38 20 | −1.31 | +0.20 |

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus ascendens (computante *Hal-*

principio ad finem cum observationibus congruit. Corrigendam esse theoriam duobus minutis primis circiter ex observatione cometæ, ubi motus ejus velocissimus fuit, colligitur.

(y) * *Et indè demonstratur.* † Quâ ratione annua cometarum parallaxis cum telluris quiete conciliari possit legatur apud Ricciolium in almagesto, Tacquetum in Astronomiâ alioque passim, ubi de Planetarum retrogradationibus agunt. 172.

DE MUNDI SYSTEMATE.

*Halleio*) erat in ♉ 21gr. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 17gr. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2gr 52′. 50″. Distantia perihelia à sole 58328, existente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii *Sept.* 4ᵈ. 7ʰ. 39′. Loca verò ex observationibus *Flamstedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

| 1682. Temp. Appar. | Locus Solis | Cometæ Long. Comp. | Lat. Bor. Comp. | Cometæ Long. Obs. | Lat. Bor. Obser. | Differ. Long. | Differ. Lat. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d. h. | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | gr. ′ ″ | ′ ″ | ′ ″ |
| *Aug* 19 16.38 | ♍ 7. 0. 7 | ♌ 18.14.28 | 25.50. 7 | ♌ 18.14.40 | 25.49 55 | − 0.12 | +0.12 |
| 20.15.38 | 7.55.52 | 24.46.23 | 26.14.42 | 24.46.22 | 26.12.52 | +0 1 | +1.50 |
| 21. 8.21 | 8.36.14 | 29.37.15 | 26.20. 3 | 29 38. 2 | 26.17 37 | − 0 47 | +2.26 |
| 22. 8. 8 | 9.33.55 | ♍ 6.29.53 | 26. 8.42 | ♍ 6.30. 3 | 26. 7.12 | − 0.10 | +1.30 |
| 29. 8.20 | 16.22.40 | ♎ 12.37.54 | 18.37.47 | ♎ 12 37.49 | 18.34 5 | +0. 5 | +3.42 |
| 30. 7.45 | 17.19.41 | 15.36. 1 | 17.26.43 | 15.35.18 | 17.27.17 | +0.43 | −0.34 |
| *Sept.* 1. 7.33 | 19.16. 9 | 20.30.53 | 15.13. 0 | 20.27. 4 | 15. 9.49 | +3.49 | +3.11 |
| 4. 7.22 | 22. 1.28 | 25.42. 0 | 12.23.48 | 25 40.58 | 12.22. 0 | +1. 2 | +1.48 |
| 5. 7.32 | 23.10.29 | 27. 0.46 | 11.33. 8 | 26 59.24 | 11.33.51 | +1.22 | −0.43 |
| 8. 7.16 | 26. 5.58 | 29.58.44 | 9.26.46 | 29 58.45 | 9.26.43 | − 0. 1 | +0. 3 |
| 9. 7.26 | 27. 5. 9 | ♏ 0 44.10 | 8.49.10 | ♏ 0 44. 4 | 8.48.25 | +0. 6 | +0.45 |

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus ascendens (computante D. *Bradleo*, astronomiæ apud *Oxonienses* professore *Savilliano*) erat in ♈ 14gr. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum eclipticæ 49gr. 59′. Perihelium in ♉ 12gr. 15′. 20″. Distantia perihelia à sole 998651, existente radio orbis magni 1000000, & tempore æquato perihelii *Septem.* 16ᵈ. 16ʰ. 10′. Loca verò cometæ in hoc orbe à *Bradleo* computata, & cum locis à seipso & patruo suo D. *Poundio*, & à D. *Halleio* observatis collata exhibentur in tabulâ sequente.

| 1723. Temp. Æquat. | Comet. Long. Observat. | Lat Bor. Observat. | Comet. Long. Comput. | Lat. Bor. Comput. | Differ. Long. | Differ. Latit. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| d. h. | ♒ ° ′ ″ | ° ′ ″ | ♒ ° ′ ″ | ° ′ ″ | ″ | ″ |
| *Octob.* 9. 8. 5 | 7. 22. 15 | 5. 2. 0 | 7. 21. 26 | 5. 2 47 | + 49 | − 47 |
| 10. 6. 21 | 6. 41. 12 | 7. 44. 13 | 6. 41. 42 | 7. 43. 18 | − 50 | + 55 |
| 12. 7. 22 | 5. 39. 58 | 11. 55. 0 | 5. 40. 19 | 11. 54. 55 | − 21 | + 5 |
| 14. 8. 57 | 4. 59. 49 | 14. 43. 50 | 5. 0. 37 | 14. 44 1 | − 48 | − 11 |
| 15. 6. 35 | 4. 47. 41 | 15. 40. 51 | 4. 47. 45 | 15 40 55 | − 4 | − 4 |
| 21. 6. 22 | 4. 2. 32 | 19. 41. 49 | 4. 2. 21 | 10. 42. 3 | + 11 | − 14 |
| 22. 6. 24 | 3. 59. 2 | 20. 8. 12 | 3. 59. 10 | 20. 8. 17 | − 8 | − 5 |
| 24. 8. 2 | 3. 55. 29 | 20. 55. 18 | 3. 55 11 | 20. 55. 9 | + 18 | + 9 |
| 29. 8. 56 | 3. 56. 17 | 22. 20. 27 | 3. 56. 42 | 22. 20. 10 | − 25 | + 7 |
| 30. 6. 20 | 3. 58. 9 | 22. 32. 28 | 3. 58. 17 | 22. 32. 12 | − 8 | + 16 |
| *Nov.* 5. 5. 3 | 4. 16. 30 | 23. 38. 33 | 4. 16. 23 | 23. 38. 7 | + 7 | + 26 |
| 8. 7. 6 | 4. 29. 36 | 24. 4. 30 | 4. 29. 54 | 24. 4. 40 | − 18 | − 10 |
| 14. 6. 20 | 5. 2. 16 | 24. 48. 46 | 5. 2. 51 | 24. 48. 6 | − 35 | + 30 |
| 20. 7. 45 | 5. 42. 20 | 25. 24. 45 | 5. 43. 13 | 25. 25. 17 | − 53 | − 32 |
| *Dec.* 7. 6. 45 | 8. 4. 13 | 26. 54. 18 | 8. 3. 55 | 26. 53 42 | + 18 | + 36 |

His exemplis abundè ſatis manifeſtum eſt, quod motus cometarum per theoriam à nobis expoſitam non minus accuratè exhibentur, quam ſolent motus planetarum per eorum theorias. (z) Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari poſſunt, & tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem ſciri, & tum demum orbium ellipticorum latera tranſverſa & apheliorum altitudines innoteſcent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, deſcripſit orbem, cujus nodus aſcendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat 17gr. 2′; perihelium erat in ♒ 2gr. 16′; & diſtantia perihelia à ſole erat 58680, exiſtente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio *Octob.* 16d. 3h. 50′. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic cometa ſpatio annorum 75, & (a) axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}$ : 75 × 75 ad 1, ſeu 1778 ad

(z) * *Et propterea.* Quomodò hæc omnia fieri poſſint variis methodis ſuprà expoſuimus.

(a) * *Et axis major* orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni ut radix cubica numeri 75 × 75 ad 1 (172). 172.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad 100 circiter. Et (b) distantia aphelia cometæ hujus à sole, erit ad distantiam mediocrem terræ à sole, ut 35 ad 1 circiter. (c) Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellipticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt, si cometa, spatio annorum septuaginta quinque, in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altiùs ascendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam apheliorum à sole distantiam, & longam moram in apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proindè non est expectandum ut cometa idem in eodem orbe, & iisdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quam quæ à causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, (d) cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, sed indè migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis suis, ubi tardissimè moventur, quamlongissimè distent ab invicem, & se mutuò quam minime trahant. Quâ de causâ cometæ, qui altiùs descendunt, ideoque tardissimè moventur in apheliis, debent altiùs ascendere.

Co-

173. (b) * *Et distantia aphelia.* Quoniam distantia perihelia cometæ à sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000 erit eadem distantia perihelia 29, circiter existente radio orbis magni 100, ac proindè distantia aphelia quæ est differentia inter axem majorem orbitæ cometicæ 1778 & distantiam perihelium 29, erit earumdem partium 1749, ideóque distantia aphelia cometæ hujus à sole erit ad distantiam mediocrem terræ à sole ut 1749 ad 29, hoc est, ut 35 ad 1 circiter.

(c) * *Quibus cognitis.* (Per prop. 20. lib. 1.).

(d) 173. * *Cur cometæ non comprehendantur Zodiaco.* Ex observato sæpe sæpius cometarum cursu retrogrado deduxit Newtonus cometas non comprehendi Zodiaco more planetarum, sed indè migrare & motibus variis in omnes cœlorum regiones excurrere. Attamen Clariss. Cassinus in monum. Paris. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos reduxit. Verum eo artificio utitur Vir Doctissimus ut distantiam cometæ à terrâ vel sole pro arbitrio assumat, & modò tellurem inter solem & cometam, modò cometam inter solem & telluram ac denique solem inter cometam & tellurem, pro necessitate, collocet. Quâ ratione id fieri possit non satis intelligitur, nisi ignota omninò fingatur cometarum theoria; concesso enim aliquo cometarum systemate, distantias illas pro lubitu usurpare non licet, sed ex datis motuum elementis, cometarum distantia totaque trajectoria determi-

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat à sole in perihelio suo quam parte sextâ diametri solis; & propter summam velocitatem in viciniâ illâ, & densitatem aliquam atmosphæræ solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari, & propiùs ad solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad solem, incidet is tandem in corpus solis. Sed & in aphelio ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari potest, & subindè in solem

terminantur. Sic Halleius definivit trajectoriam cometæ qui annis 1664. & 1665. apparuit. Ut autem retrogradum hujus cometæ motum ad directum reducat Clariss. Cassinus talem huic cometæ motum tribuit qui cum Halleii computo nequaquam convenit. Quam probe tamen cum observationibus theoria congruat ostendit tabula paulò antè exhibita. Quamvis itaque retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosâ arte reduxerit Cassinus, non id tamen satis esse arbitramur ut eam rejiciamus cometarum theoriam quæ phænomenis apprimè respondet, atque incerti sinè ullâ theoriâ erremus. Prætereà talem orbitam prædicto cometæ assignat Cassinus ut extrà orbem annuum ferè non excurrat; Quod si res ità se haberet, hic cometa in conspectum citò rediisset, cometas enim ad maximam quoquè distantiam conspicuos esse constat ex defectu parallaxeos. Nec feliciori successu ad motum directum reduci posse videtur motus retrogradus cometæ an. 1680. Nam præterquam quod omnem cometarum theoriam fictis ad arbitrium hypothesibus everti necesse sit, in explicatione Cassini gravissima occurrit difficultas cujus vim totam sensit Clariss. Vir. Oporteret scilicet ut cometa ille paulò ante 27am. diem Novembris per nodum descendentem transierit & versus diem 17m. Decembris ad nodum ascendentem pervenerit, ideóque cometa breviori quam unius mensis intervallo, totum spatium quod est infrà planum Ecclipticæ trajeciisset. Porrò tanta velocitas caret verisimilitudine, nec conciliari posse videtur cum observatis longo temporis spatio hujus cometæ motibus; hic enim Astronomorum oculis citò sese subduxisset. Singulas explicationes quæ in loco cit. monum. Paris. leguntur percurrere longius foret, satis erit addere eas hoc potissimum fine excogitatas fuisse ut nempe servaretur & à gravissimâ objectione liberaretur vorticum hypothesis. Verum his explicationibus cæteroquin ingeniosissimis nondum tamen propositus finis obtineri videtur; hanc enim difficultatem effugientes vorticum patroni, in aliam incurrunt. Oporteret siquidem ut cometarum vortices ipsum saltem telluris vorticem intersecarent, quod sine vorticum perturbatione ac tandem destructione fieri posse non intelligitur. Alias hypotheses finxerunt alii. Quidam cometas habuerunt tanquam planetas non circà solem nostrum, sed circa alium velut centrum revolventes. Nonnulli eos habuerunt velut satellites planetæ cujusdam primarii in nostro vortice constituti, qui tamen ob maximam illius à nobis distantiam conspici non potest, ità ut cometæ seu satellites sese nobis duntaxat conspicuos præbeant, dum in inferiori & telluris proximiori orbitarum suarum parte versantur. Sed à Newtonianâ cometarum theoriâ quæ phænomenis consentanea est nequaquam nos removere debent hypotheses illæ quæ eam duntaxat ob causam subtiliter inventæ sunt ut servaretur vorticum hypothesis quam aliis multis difficultatibus premi passim ostendimus. Cæterum quidquid de hâc materiâ diximus & ipsa, prout nobis visum est, rei veritas & commentatorum officium à nobis postulabant.

173.

DE MUNDI SYSTEMATE

solem incidere. (e) Sic etiam stellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, cometis in ipsas incidentibus refici possunt, & novo alimento accensæ pro stellis novis haberi. Hujus generis sunt stellæ fixæ, quæ subito apparent, & sub initio quam maximè splendent, & subindè paulatim evanescunt. Talis fuit stella in cathedrâ Cassiopeiæ quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, lustrando illam cœli partem nocte serena minimè vidit; at nocte proximâ (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus splendidiorem, & luce suâ vix cedentem veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejusdem mensis ubi maximè splenduit; & ex eo tempore paulatim decrescentem & spatio mensium sexdecim evanescentem observavit. Mense *Novembri*, ubi primùm apparuit, venerem luce suâ æquabat. Mense *Decembri*

174. (e) 174. * *Sic etiam stellæ fixæ.* De stellarum variationibus nonnulla hic afferemus quæ habet Clariss. D. De Maupertuis in eximio opusculo de figuris astrorum & in mon. Paris. an. 1734. Fixas, quæ sunt totidem soles, variis donatas esse figuris & ex iis aliquas ad figuram planam vel planitiem accedere non repugnat. Nam à sphæroide propemodum sphærico per innumeros gradus depressionis versus polos tandem devenitur ad planum circulare, si continuò varietur ratio vis centrifugæ ad gravitatem, ut patet ex num 56. His positis, ratio reddi poterit cur fixæ quædam nunc appareant, nunc evanescant, cur mutetur apparens stellarum quarumdam magnitudo, nec non etiam cur stellæ aliquæ quasi recens accensæ oriri vitæ sint, quædam verò quasi extinctæ videri desierint. Si in stellarum numero reperiantur aliquæ ad figuram planam accedentes, illæ dum faciem suam nobis obvertunt, sphærarum instar apparebunt. Si autem respectu nostri situm suum mutent, magis vel minus stellarum illarum splendor decrescet, prout hoc vel illo modo sese nobis ostendent, ac tandem exiguæ crassitiei latus exhibeant & satis longe à nobis distent, conspectui nostro sese omninò subducent. Quomodò autem fixæ respectu nostri positionem suam mutent explicari potest, si ponamus circà stellam compressam revolvere planetam aliquam ingentis molis aut cometam in orbitâ valde excentricâ & ad æquatorem stellæ inclinata; in hâc enim hypothesi, planeta ad perihelium suum accedens juxtà attractionis leges inclinationem fixæ planæ perturbabit, & hinc fieri poterit ut partem lucidam disci nobis obversam conspiciamus quæ ob exiguam lateris compressi crassitiem oculos nostros antèà effugiebat. Ex his quoque intelligitur fieri posse ut circà planetam congregetur annulus saturni annulo similis, si nempe cometa cujus cauda ex vaporibus tenuissimis æstu solis in perihelio elevatis componitur, ad planetam aliquem maximè potentem proximè accederet. Hic enim vaporum torrens attractionis vi ad revolvendum circà planetam annuli instar posset detorqueri; imò impossibile non foret ipsum quoque corpus cometæ circà planetam rapi & sic planeta satellitem acquireret. Haberet autem planeta satellitem sine annulo, si cometa destitueretur caudâ, sed adjicietur etiam annulus, si cometa caudam habuerit, atque annulus aderit sine satellite, si cauda duntaxat à planeta attrahatur. Hæc sunt quæ ad hunc Newtoni locum præcipuè referuntur; cæterùm in laudatis opusculis elegantissima sunt problemata quæ consulat Lector.

*bri* nonnihil diminuta jovem æquare videbatur. Anno 1573, menſe *Januario* minor erat jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evaſit æqualis. Menſe *Aprili* & *Maio* ſtellis ſecundæ magnitudinis, *Junio*, *Julio* & *Auguſto* ſtellis tertiæ magnitudinis, *Septembri*, *Octobri* & *Novembri* ſtellis quartæ, *Decembri* & anni 1574, menſe *Januario* ſtellis quintæ, & menſe *Februario* ſtellis ſextæ magnitudinis æqualis videbatur, & menſe *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac ſplendidus, poſtea flavus, & anni 1573 menſe *Martio* rutilans inſtar martis aut ſtellæ aldebaran, *Maio* autem albitudinem ſublividam induxit, qualem in ſaturno cernimus, quem colorem uſque in finem ſervavit, ſemper tamen obſcurior facta. Talis etiam fuit ſtella in dextro pede ſerpentarii, quam *Keplerî* diſcipuli anno 1604, die 30 *Septembris* ſt. vet. apparere cœpiſſe obſervarunt, & luce ſuâ ſtellam jovis ſuperaſſe, cum nocte præcedente minimè apparuiſſet. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, & ſpatio menſium quindecim vel ſexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam ſtellâ novâ ſupra modum ſplendente *Hipparchus* ad fixas obſervandas & in catalogum referendas excitatus fuiſſe dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent & evaneſcunt, quæque paulatim creſcunt, & luce ſua fixas tertiæ magnitudinis vix unquam ſuperant, videntur eſſe generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obſcuram per vices oſtendere. Vapores autem, qui ex ſole & ſtellis fixis & caudis cometarum oriuntur, incidere poſſunt per gravitatem ſuam in atmoſphæras planetarum & ibi condenſari & converti in aquam & ſpiritus humidos, & ſubindè per lentum calorem in ſales, & ſulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & ſubſtantias alias terreſtres paulatim migrare.

SCHO-

De Mundi Systemate.

## SCHOLIUM GENERALE.

(f) Hypotheſis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unuſquiſque radio ad ſolem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent eſſe in duplicatâ ratione diſtantiarum à ſole. Ut periodica planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à ſole, tempora periodica partium vorticis deberent eſſe in ſeſquiplicatâ diſtantiarum proportione. Ut vortices minores circum ſaturnum, jovem & alios planetas gyrati conſerventur & tranquillè natent in vortice ſolis, tempora periodica partium vorticis ſolaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones ſolis & planetarum circum axes ſuos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus cometarum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant, & per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valdè eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non poteſt, niſi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre noſtro, ſolam aëris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat, ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par eſt ratio ſpatiorum cœleſtium, quæ ſunt ſuprà atmoſphæram terræ. Corpora omnia in iſtis ſpatiis liberrimè moveri debent; & propterea planetæ & cometæ in orbibus ſpecie & poſitione datis ſecundum leges ſuprà expoſitas perpetuò revolvi. Perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitùs acquirere per leges haſce minimè potuerunt.

Planetæ ſex principales revolvuntur circum ſolem in circulis ſoli concentricis, eâdem motus directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum terram, jovem & ſaturnum in circulis concentricis, eâdem motus directio-

174. (f) * *Hypotheſis vorticum.* (Prop. 52. 2. & not. 173. lib. huj.). lib. 2. cum coroll. ſchol. prop. 40. lib.

tione, in planis orbium planetarum quamproximè. (g) Et hi omnes motus regulares originem non habent ex cauſis mechanicis; ſiquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes liberè feruntur. Quo motus genere cometæ per orbes planetarum celerrimè & facillimè tranſeunt, & in apheliis ſuis ubi tardiores ſunt & diutius morantur; quàm longiſſimè diſtant ab invicem, ut ſe mutuò quam minimè trahant. Elegantiſſima hæcce ſolis, planetarum & cometarum compages non niſi conſilio & dominio entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et ſi ſtellæ fixæ ſint centra ſimilium ſyſtematum, hæc omnia ſimili conſilio conſtructa ſuberunt *Unius* dominio: præſertim cum lux fixarum ſit ejuſdem naturæ ac lux ſolis, & ſyſtemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum ſyſtemata per gravitatem ſuam in ſe mutuò cadant, hic eadem immenſum ab invicem diſtantiam poſuerit.

Hic omnia regit non ut anima mundi, ſed ut univerſorum dominus. Et propter dominium ſuum, dominus deus (*) Παντοκράτωρ dici ſolet. Nam deus eſt vox relativa & ad ſervos refertur: & deitas eſt dominatio Dei, non in corpus proprium, uti ſentiunt quibus deus eſt anima mundi, ſed in ſervos. Deus ſummus eſt ens æternum, infinitum, abſolutè perfectum: ſed ens utcunque perfectum ſine dominio non eſt dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus veſter, deus *Iſraelis*, deus deorum, & dominus dominorum: ſed non dicimus æternus meus, æter-

(g) * *Et hi omnes motus regulares.* Celeberrimi Viri Joannes & Daniel Bernoullius, prior in phyſicâ cœleſti, poſterior in diſquiſitionibus Phyſico-Aſtronomicis mechanicam horumce motuum cauſam ex vorticibus repetunt. Sed cum mechanicæ explicationes illæ omnibus obnoxiæ ſint difficultatibus quibus vorticum hypotheſim premi jam oſtendimus, huic rei diutiùs non immorabimur. Satis erit deſcribere verba quæ habet Johan. Bernoullius mentionem faciens de hoc ipſo Newtoni loco. (Si cauſæ illæ non ſunt mechanicæ, erunt præternaturales & miraculo tribuendæ; ſed magnum Philoſophum non decet ad miraculum recurrere, ubi alicujus phænomeni quæritur explicatio.). Numquid pari jure carteſianum Philoſophum poſſumus interrogare quânam cauſâ mechanicâ vortices ſecundùm varias directiones ferantur, cur planetarum circumſolarium vortices ab occidente in orientem moveantur? ubi phænomenon aliquod ad primam cauſam deductum eſt, hic hærere cauſamque mechanicam ulteriùs non quærere, magnum Philoſophum non dedecet. 174.

(*) Id eſt Imperator univerſalis.

De Mundi Systemate.

æternus veſter, æternus *Iſraelis*, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox deus paſſim (†) ſignificat dominum: ſed omnis dominus non eſt deus. Dominatio entis ſpiritualis deum conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ ſequitur deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe, vel ſummè perfectum. Æternus eſt & infinitus, omnipotens & omniſciens, id eſt, durat ab æterno in æternum, & adeſt ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoſcit, quæ fiunt aut fieri poſſunt. Non eſt æternitas & infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio & ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper, & adeſt ubique, & exiſtendo ſemper & ubique, durationem & ſpatium conſtituit. Cum unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*, certè rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam*, *nuſquam*. Omnis anima ſentiens diverſis temporibus, & in diverſis ſenſuum, & motuum organis eadem eſt perſona indiviſibilis. Partes dantur ſucceſſivæ in duratione, coexiſtentes in ſpatio, neutræ in perſona hominis ſeu principio ejus cogitante; & multò minus in ſubſtantia cogitante dei. Omnis homo, quatenus res ſentiens, eſt unus & idem homo durante vitâ ſuâ in omnibus & ſingulis ſenſuum organis. Deus eſt unus & idem deus ſemper & ubique. Omnipræſens eſt non per *vi tutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantia ſubſiſtere non poteſt. In ipſo (‡) continentur & moventur univerſa, ſed ſine mutuâ paſſione. Deus nihil

(†) *Pocokus* noſter vocem *dei* deducit à voce *Arabicâ du*, (& in caſu aliquo *di*,) quæ dominum ſignificat. Et hoc ſenſu principes vocantur dii, *Pſal.* lxxxiv. 6 & *Joan.* x. 45. Et *Moſes* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod.* iv. 16. & vii. 1.) Et eodem ſenſu animæ principum mortuorum olim à gentibus vocabantur dii, ſed falſo propter defectum dominii. (*Nota Autoris*).

(‡) Ita ſentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Naturâ deorum, *lib.* 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius*, Georgic. *lib.* iv *v* 220. & Æneid. *lib.* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* 1. ſub initio *Aratus* in Phænom. ſub initio. Ita etiam ſcriptores ſacri ut *Paulus* in Act. xvii. 27. 28. *Johannes* in Evang xiv. 2. *Moſes* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Pſal. cxxxix. 7. 8. 9. *Salmon* 1. Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12. 13.

nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistentiam ex omnipræsentiâ dei. Deum summum necessariò existere in confesso est: Et eâdem necessitate *semper* est & *ubique*. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi, & agendi, sed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, sic nos ideam non habemus modorum, quibus deus sapientissimus sentit & intelligit omnia. Corpore omni & figurâ corporeâ prorsus destituitur, ideoque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus substantia minimè cognoscimus. Videmus tantùm corporum figuras & colores, audimus tantùm sonos, tangimus tantùm superficies externas, olfacimus odores solos, & gustamus sapores: intimas substantias nullo sensu, nullâ actione reflexâ cognoscimus; & multò minùs ideam habemus substantiæ dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates ejus & attributa, & per sapientissimas & optimas rerum structuras & causas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut servi, & deus sine dominio, providentiâ, & causis finalibus nihil aliud est quam fatum & natura. A cæcâ necessitate metaphysicâ, quæ utique eadem est semper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diversitas, ab ideis & voluntate entis necessariò existentis solummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, irasci, pugnare, fabricare, condere, construere. Nam sermo omnis de deo à rebus humanis per similitudinem aliquam desumitur, non perfectam quidem, sed aliqualem tamen. Et hæc de deo, de

13. 14. *Jeremiæ* xxiii. 23. 24. Fingebant autem idololatræ solem, lunam, & astra, animas hominum & alias mundi partes esse partes dei summi & ideò colendas sed falsò. (*Nota Autoris*).

De Mundi Systemate.

de quo utique ex phænomenis differere, ad philosophiam naturalem pertinet.

Hactenus phænomena cælorum & maris nostri per vim gravitatis exposui, sed causam gravitatis nondùm assignavi. Oritur utique hæc vis à causâ aliquâ, quæ penetrat ad usque centra solis & planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum, in quas agit (ut solent causæ mechanicæ) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; & cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicatâ ratione distantiarum. Gravitas in solem componitur ex gravitatibus in singulas solis particulas, & recedendo à sole decrescit accuratè in duplicatâ ratione distantiarum ad usque orbem saturni, (h) ut ex quiete apheliorum planetarum manifestum est, & ad usque ultima cometarum aphelia, si modo aphelia illa quiescant. Rationem verò harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondùm potui deducere, & hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypothesis* vocanda est, & hypotheses seu metaphysicæ, seu physicæ, seu qualitatum occultarum, seu mechanicæ, in *philosophiâ experimentali* locum non habent. In hâc philosophiâ propositiones deducuntur ex phænomenis, & reddUntur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quod gravitas reverà existat, & agat secundum leges à nobis expositas, & ad corporum cælestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuò attrahunt, & contiguæ factæ cohærent: & corpora electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuscula vicina; & lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & sensatio omnis excitatur, & membra ani-

274. (h) * *Ut ex quiete apheliorum.* (Prop. 2. lib. huj.).

animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus ſcilicet hujus ſpiritus per ſolida nervorum capillamenta ab externis ſenſuum organis ad cerebrum & à cerebro in muſculos propagatis. (i) Sed hæc paucis exponi non poſſunt; neque adeſt ſufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus ſpiritus accuratè determinari & monſtrari debent.



(i) * *Sed hæc paucis exponi non poſſunt.* De hoc ſubtiliſſimo ſpiritu plurimas quæſtiones ſibi proponit Newtonus in tractatu opticæ. 1748

*FINIS.*

# INDEX LIBRI TERTII.

REGULÆ PHILOSOPHANDI. Pag. 2.
PHOENOMENA. 6
PROPOSITIONES. 22

# INDEX PROPOSITIONUM TOTIUS OPERIS.

## *IN TOMO PRIMO.*

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS. LEX I. *Corpus omne perseverat in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quâtenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare.* Pag. 20

LEX II. *Mutatio motus proportionalis est vi motrici impressæ & fit secundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.* 21

LEX III. *Actioni contraria semper & æqualis est reactio: sivè corporum duorum actiones in se mutuò semper sunt æquales & in contrarias partes diriguntur.* 23

PROPOSITIO I. THEOREMA I. *Areæ quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis, describunt, & in planis immobilibus consistunt & sunt temporibus proportionales.* 89

PROP II. THEOR. II. *Corpus omne quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ & radio ducto ad punctum vel*

*vel immobile vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeturque à vi centripetâ tendente ad idem punctum.* Pag. 92

PROP. III. THEOR. III. *Corpus omne quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.* 94

PROP. IV. THEOR. IV. *Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorumdem circulorum tendere, & esse inter se ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.* 96

PROP. V. PROBLEMA I. *Datâ quibuscunque in locis velocitate quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.* 105

PROP. VI. THEOR. V. *Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur & arcum quemvis jamjam nascente tempore quàm minimo describat & sagitta arcûs duci intelligatur quæ cordam bisecet & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcûs, ut sagitta directè & tempus bis inversè.* 106

PROP. VII. PROBL. II. *Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.* 111

PROP. VIII. PROBL. III. *Moveatur corpus in semicirculo* PQA: *ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeò longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS, *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.* 114

PROP. IX. PROBL. IV. *Gyretur corpus in spirali* PQS *secante radios omnes* SP, SQ &c. *in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.* 136

PROP. X. PROBL. V. *Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.* 137

PROP. XI. PROBL. VI. *Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.*

*ſeos.* Pag. 153

PROP. XII. PROBL. VII. *Moveatur corpus in Hyperbolâ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.* 156

PROP. XIII PROBL. VIII. *Moveatur corpus in perimetro Paraboles: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.* 160

PROP. XIV. THEOR. VI. *Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia ſunt in duplicatâ ratione arearum quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore deſcribunt.* 163

PROP. XV. THEOR. VII. *Iiſdem poſitis, dico quod tempora periodica in ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicatâ majorum axium.* 164

PROP. XVI. THEOR. VIII. *Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione perpendiculorum inversè & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.* 165

PROP. XVII. PROBL. IX. *Poſito quod vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita; requiritur linea quam corpus deſcribit de loco dato cum datâ velocitate ſecundùm datam rectam egrediens.* 170

PROP. XVIII. PROBL. X. *Datis umbilico & axibus principalibus deſcribere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data & rectas poſitione datas contingent.* 176

PROP. XIX. PROBL. XI. *Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.* 176

PROP. XX. PROBL. XII. *Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.* 178

PROP.

PROP. XXI. PROBL. XIII. *Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.* Pag. 185

PROP. XXII. PROBL. XIV. *Trajectoriam per data quinque puncta describere.* 207

PROP. XXIII. PROBL. XV. *Trajectoriam describere quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.* 210

PROP. XXIV. PROBL. XVI. *Trajectoriam describere quæ per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.* 214

PROP. XXV. PROBL. XVII. *Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit & rectas tres continget positione datas.* 223

PROP. XXVI. PROBL. XVIII. *Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.* 226

PROP. XXVII. PROBL. XIX. *Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas continget.* 232

PROP. XXVIII. PROBL. XX. *Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.* 250

PROP. XXIX. PROBL. XXI. *Trajectoriam specie datam describere quæ à rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie, & proportione datas.* 256

PROP. XXX. PROBL. XXII. *Corporis in data trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum.* 259

PROP. XXXI. PROBL. XXIII. *Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.* 270

PROP. XXXII. PROBL. XXIV. *Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, spatia definire quæ corpus rectà cadendo datis temporibus describit.* 292

PROP. XXXIII. THEOR. IX. *Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum describentis, in subdu-*

*plicatâ ratione quam* AC *diſtantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A *habet ad figuræ ſemidiametrum principalem* ½ AB. Pag. 294

PROP. XXXIV. THEOR. X. *Si figura* BED *parabola eſt, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis eſt velocitati quâ corpus centro* B *dimidio intervalli ſui* BC *circulum uniformiter deſcribere poteſt.* 297

PROP. XXXV. THEOR. XI. *Iiſdem poſitis dico quod area figuræ* DES, *radio indefinito* SD *deſcripta, æqualis ſit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando eodem tempore deſcribere poteſt.* 298

PROP. XXXVI. PROBL. XXV. *Corporis de loco dato* A *cadentis determinare tempora deſcenſus.* 301

PROP. XXXVII. PROBL. XXVI. *Corporis de loco dato ſursùm vel deorsùm projecti definire tempora aſcenſus vel deſcenſus.* 302

PROP. XXXVIII. THEOR. XII. *Poſito quod vis centripeta proportionalis ſit altitudini ſeu diſtantiæ locorum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & ſpatia deſcripta, ſunt arcubus arcuumque ſinibus rectis & ſinibus verſis reſpectivè proportionalia.* 303

PROP. XXXIX. PROBL. XXVII. *Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ, & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectà aſcendentis vel deſcendentis tùm velocitas in locis ſingulis, tùm tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.* 305

PROP. XL. THEOR. XIII. *Si corpus cogente vi quâcunque centripetâ moveatur utcunque, & corpus aliud rectà aſcendat vel deſcendat, ſintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum caſu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.* 312

PROP. XLI. PROBL XXVIII. *Poſitâ cujuſcunque generis vi centripetâ & conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.* 318

PROP.

PROP. XLII. PROBL. XXIX. *Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate secundùm datam rectam egressi.* Pag. 332

PROP. XLIII. PROBL. XXX. *Efficiendum est ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quiescente.* 334

PROP. XLIV. THEOR. XIV. *Differentia virium quibus corpus in orbe quiescente & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt est in triplicatâ ratione communis altitudinis inversè.* 336

PROP. XLV. PROBL. XXXI. *Orbium qui sunt circulis maximè finitimi requiruntur motus apsidum.* 348

PROP. XLVI. PROBL. XXXII. *Positâ cujuscunque generis vi centripetâ datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis; requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundùm rectam in plano illo datam egressi.* 361

PROP. XLVII. THEOR. XV. *Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent ellipses & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque discurrendo singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.* 362

PROP. XLVIII. THEOR. XVI. *Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque Cycloïdem vel Epicycloïdem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcûs dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.* 364

PROP. XLIX. THEOR. XVII. *Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad du-*

*duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi.* Pag. 364

PROP. L. PROBL. XXXIII. *Facere ut corpus pendulum oſcilletur in Cycloide datâ.* 370

PROP. LI. THEOR. XVIII. *Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum* C *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque à centro & hâc ſolâ vi agente corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro Cycloïdis* QRS*: dico quod oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.* 374

PROP. LII. PROBL. XXXIV. *Definire & velocitates pendulorum in locis ſingulis & tempora quibus oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.* 377

PROP. LIII. PROBL. XXXV. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.* 384

PROP. LIV. PROBL. XXXVI. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis invenire tempora quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.* 390

PROP. LV. THEOR. XIX. *Si corpus movetur in ſuperficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium tranſit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.* 392

PROP. LVI. PROBL. XXXVII. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum Lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curvâ cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt trajectoria quam Corpus in eadem ſuperficie deſcribet, de loco dato, datâ cum velocitate, versùm plagam in ſuperficie illâ datam egreſſum.* 396

PROP. LVII. THEOR. XX. *Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circùm commune centrum gravitatis, & circùm ſe mutuò figuras ſimiles.* 404

PROP. LVIII. THEOR. XXI. *Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò*

*mutuò trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quòd figuris, quas corpora sic mota describunt circùm se mutuò, potest figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.* Pag. 406

PROP. LIX. THEOR. XXII. *Corporum duorum S & P circa commune gravitatis centrum C revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyrantis, & figuris quas corpora circùm se mutuò describunt figuram similem & æqualem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius S, ad summam corporum S+P.* 409

PROP. LX. THEOR. XXIII. *Si corpora duo S & P, viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S+P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam & Corpus illud alterum S.* 410

PROP. LXI. THEOR. XXIV. *Si corpora duo viribus quibusvis se mutuò trahentia, neque aliàs agitata vel impedita quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiæ corporum à centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.* 411

PROP. LXII. PROBL. XXXVIII. *Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuò trahunt, ac de locis datis demittuntur determinare motus.* 412

PROP. LXIII. PROBL. XXXIX. *Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuò trahunt, deque locis datis, secundùm datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.* 412

PROP. LXIV. PROBL. XL. *Viribus quibus corpora se mutuò trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum à centris: re-*

*quiruntur motus plurium corporum inter se.* Pag. 415

PROP. LXV. THEOR. XXV. *Corpora plura quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorumdem centris, moveri posse inter se in ellipsibus & radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quamproximè.* 418

PROP. LXVI. THEOR. XXVI. *Si corpora tria quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuò trahant; & attractioness acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quàm si maximum illud vel à minoribus non attractum quiescat, vel multò minùs vel multò magis attractum; aut multò minùs aut multò magis agitetur.* 421

PROP. LXVII. THEOR. XXVII. *Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* PT, *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipsum ductis, describere potest.* 459

PROP. LXVIII. THEOR. XXVIII. *Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* P & T, *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quàm si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minùs attractum aut multò magis aut multò minùs agitetur.* 460

PROP. LXIX. THEOR. XXIX. *In systemate corporum plurium* A, B, C, D, *&c. Si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B,

B, C, D, &c. *viribus acceleratricibus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente, & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, &c. *viribus quæ ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à trahente: erunt abſolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut ſunt ipſa corpora* A, B, *quorum ſunt vires.* Pag. 462

PROP. LXX. THEOR. XXX. *Si ad ſphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intrà ſuperficiem conſtitutum his viribus nullam in partem attrahitur.* 465

PROP. LXXI. THEOR. XXXI. *Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahitur ad centrum ſphæræ; vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.* 466

PROP. LXXII. THEOR. XXXII. *Si ad ſphæræ cujuſvis puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis; ac detur tùm ſphæræ denſitas, tùm ratio Diametri ſphæræ ad diſtantiam corpuſculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpuſculum attrahitur, proportionalis erit ſemidiatro ſphæræ.* 468

PROP. LXXIII. THEOR. XXXIII. *Si ad ſphæræ alicujus datæ puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis: dico quod corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.* 470

PROP. LXXIV. THEOR. XXXIV. *Iiſdem poſitis dico quod corpuſculum extra ſphæram conſtitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.* 470

PROP. LXXV. THEOR. XXXV. *Si ad ſphæræ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicatâ ratione diſtantiarum à punctis, dico quod ſphæra quævis alia ſimilaris ab eadem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.* 471

PROP. LXXVI. THEOR. XXXVI. *Si ſphæræ in progreſſu à centro*

*tro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſunt undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque decreſcit in duplicatâ ratione diſtantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.* Pag. 474

PROP. LXXVII. THEOR. XXXVII. *Si ad ſingula ſphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales diſtantiis punctorum à corporibus attractis: dico quòd vis compoſita, quâ ſphæræ duæ ſe mutuò trahent, eſt ut diſtantia inter centra ſphærarum.* 476

PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII. *Si ſphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam ſint utcunque diſſimilares & inæquabiles, in progreſſu verò per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares; & vis attractiva puncti cujuſque ſit ut diſtantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujuſmodi ſphæræ duæ ſe mutuò trahunt ſit proportionalis diſtantiæ inter centra ſphærarum.* 478

PROP. LXXIX. THEOR. XXXIX. *Si ſuperficies ab latitudinem infinitè diminutam jamjam evaneſcens* EFfe, *convolutione ſui circa axem* PS, *deſcribat ſolidum ſphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ ſolidum illud trahit corpuſculum ſitum in* P, *eſt in ratione compoſitâ ex ratione ſolidi* DE*q*×Ff, *& ratione vis quâ particula data in loco* Ff *traheret idem corpuſculum.* 481

PROP. LXXX. THEOR. XL. *Si ad ſphæræ alicujus* ABE, *centro* S *deſcriptæ, particulas ſingulas æquales tendant æquales vires centripetæ; & ad ſphæræ* AB, *in quo corpuſculum aliquod* B *locatur, erigantur de punctis ſingulis* D *perpendicula* DE *ſphæræ occurrentia in* E, *& in ipſis capiantur longitudines* DN, *quæ ſint ut quantitas* $\frac{DE^{q} \times PS}{PE}$ *& vis, quam ſphæræ particu-*

*la*

*la ſita in axe ad diſtantiam* PE *exercet in corpuſculum* P *trahitur verſus ſphæram, eſt ut area* ANB *comprehenſa ſub axe ſphæræ* AB, *& lineâ curvâ* ANB, *quam punctum* N *perpetuò tangit.* Pag. 483

PROP. LXXXI. PROBL. XLI. *Stantibus jam poſitis, menſuranda eſt area* ANB. 486

PROP. LXXXII. THEOR. XLI. *In ſphærâ centro* S, *intervallo* SA *deſcripta, ſi capiantur* SI, SA, SP, *continuè proportionales: dico quod corpuſculi intra ſphæram, in loco quovis* I, *attractio eſt ad attractionem ipſius extra ſphæram, in loco* P, *in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro* IS, PS, *& ſubduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.* 496

PROP. LXXXIII. PROBL. XLII. *Invenire vim quâ corpuſculum in centro ſphæræ locatum ad ejus ſegmentum quodcunque attrahitur.* 500

PROP. LXXXIV. PROBL. XLIII. *Invenire vim, quâ corpuſculum, extra centrum ſphæræ in axe ſegmenti cujuſvis locatum, attrahitur ab eodem ſegmento.* 502

PROP. LXXXV. THEOR. XLII. *Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum eſt, attractio longè fortior ſit, quàm cum vel minimo intervallo ſeparantur ab invicem: vires particularum trahentis, in receſſu corporis attracti, decreſcunt in ratione pluſquam duplicatâ diſtantiarum à particulis.* 503

PROP. LXXXVI. THEOR. XLIII. *Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in receſſu corporis attracti decreſcunt in triplicatâ vel pluſquam triplicatâ ratione diſtantiarum à particulis, attractio longè fortior erit in contactu, quàm cùm trahens & attractum intervallo vel minimo ſeparantur ab invicem.* 503

PROP. LXXXVII. THEOR. XLIV. *Si corpora duo ſibi invicem ſimilia, & ex materiâ æqualiter attractivâ conſtantia, ſeorſim attrahant corpuſcula ſibi ipſis proportionalia & ad ſe ſimiliter poſita: attractiones acceleratrices corpuſculorum in corpora tota, erunt ut attractiones acceleratrices corpuſculorum in eorum par-*

*ticulas totis proportionales, & in totis similiter positas.* Pag. 504

PROP. LXXXVIII. THEOR. XLV. *Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis, & eadem erit cum vi globi ex materiâ consimili & æquali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.* 506

PROP. LXXXIX. THEOR. XLVI. *Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.* 508

PROP. XC. PROBL. XLIV. *Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quacunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.* ibid.

PROP. XCI. PROBL. XLV. *Invenire attractionem Corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrescentes.* 511

PROP. XCII. PROBL. XLVI. *Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.* 520

PROP. XCIII. THEOR. XLVII. *Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu à solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquàm quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi à plano, & index ternario minor quàm index potestatis distantiarum.* 522

PROP. XCIV. THEOR. XLVIII. *Si media duo similaria, spatio pla-*

*planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.* Pag. 535

PROP. XCV. THEOR. XLIX. *Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.* 536

PROP. XCVI. THEOR. L. *Iisdem positis, & quod motus ante incidentiam velocior sit quàm postea, dico quòd corpus inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.* 537

PROP. XCVII. PROBL. XLVII. *Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerare possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.* 542

PROP. XCVIII. PROBL. XLVIII. *Iisdem positis, & circa axem* AB *descriptâ superficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam* EF *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.* 546

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI PRIMI.

# INDEX
## PROPOSITIONUM
# LIBRI SECUNDI
## *IN TOMO SECUNDO.*

PROPOSITIO I. THEOREMA I. *Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentia amissus, est ut spatium movendo confectum.* Pag. 17

PROP. II. THEOR. II. *Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.* 18

PROP. III. PROBL. I. *Corporis cui, dùm in medio similari rectà ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.* 20

PROP. IV. PROBL. II. *Posito quòd vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum projectilis in eodem resistentiam velocitati proportionalem patientis.* 27

PROP. V. THEOR. III. *Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur; tempora verò sumantur in progressione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione geometricâ inveniè, & quòd spatia sunt æqualia quæ singulis temporibus describuntur.* 46

PROP. VI. THEOR. IV. *Corpora sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita & solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciprocè ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amit-*

*amittunt partes velocitatum proportionales totis.* Pag. 52

PROP. VII. THEOR. V. *Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in ratione duplicatâ velocitatum, temporibus quæ ſunt ut motus primi directè & reſiſtentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.* ibid.

PROP. VIII. THEOR. VI. *Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectà aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) inveſtigentur vires abſolutæ; dico quod vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione geometricâ.* 61

PROP. IX. THEOR. VII. *Poſitis jam demonſtratis, dico quod ſi tangentes angulorum ſectoris circularis & ſectoris hyperbolici ſumantur velocitatibus proportionales, exiſtente radio juſtæ magnitudinis: erit tempus omne aſcendendi ad locum ſummum ut ſector circuli, & tempus omne deſcendendi à loco ſummo ut ſector hyperbolæ.* 64

PROP. X. PROBL. III. *Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.* 79

PROP. XI. THEOR. VIII. *Si corpori reſiſtitur, partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem ſolâ vi inſitâ in medio ſimilari movetur: ſumantur autem tempora in progreſſione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progreſſione geometricâ.* 121

PROP. XII. THEOR. IX. *Iiſdem poſitis, dico quòd ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progreſſione geometricâ.* 123

PROP. XIII. THEOR. X. *Poſito quod corpus ab uniformi gravi-*

*gravitate deorsùm attractum rectà ascendit vel descendit; & quòd eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis à centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contrà.* Pag. 125

PROP. XIV. THEOR. XI. *Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmeticâ; si vires ex resistentiâ & gravitate compositæ sumantur in progressione geometricâ.* 131

PROP. XV. THEOR. XII. *Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta in duplicatâ ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.* 146

PROP. XVI. THEOR. XIII. *Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.* 158

PROP. XVII. PROBL. IV. *Invenire & vim centripetam & medii resistentiam, quâ corpus in datâ spirali, datâ velocitatis lege revolvi potest.* 160

PROP. XVIII. PROBL. V. *Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.* 161

PROP. XIX. THEOR. XIV. *Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (sepositâ condensationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & sine omni motu à pressione illâ orto permanent in locis suis.* 166

PRO-

PROP. XX. THEOR. XV. *Si fluidi ſphærici & in æqualibus à centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis, partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.* Pag. 168

PROP. XXI. THEOR. XVI. *Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ diſtantiis ſuis à centro reciprocè proportionali deorsùm trahentur: dico quod, ſi diſtantiæ illæ ſumantur continuè proportionales, denſitates fluidi in iiſdem diſtantiis erunt etiam continuè proportionales.* 174

PROP. XXII. THEOR. XVII. *Sit fluidi cujuſdam denſitas compreſſioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis diſtantiarum ſuarum à centro reciprocè proportionali deorsùm trahantur: dico quod ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione muſicâ, denſitates fluidi in his diſtantiis erunt in progreſſione geometricâ.* 177

PROP. XXIII. THEOR. XVIII. *Si fluidi ex particulis ſe mutuò fugentibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuò fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.* 186

PROP. XXIV. THEOR. XIX. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oſcillationum in vacuo.* 189

PROP. XXV. THEOR. XX. *Corpora funependula quibus, in medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloïde eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.* 194

PROP. XXVI. THEOR. XXI. *Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in Cycloïde ſunt Iſochronæ.* 197

PROP.

PROP. XXVII. THEOR. XXII. *Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quamproximè.* Pag. 198

PROP. XXVIII. THEOR. XXIII. *Si corpori funependulo in Cycloïde oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcûs descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.* 202

PROP. XXIX. PROBL. VI. *Posito quod corpori in Cycloïde oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis invenire resistentiam in locis singulis.* 204

PROP. XXX. THEOR. XXIV. *Si recta* AB *æqualis sit Cycloïdis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcûs punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum & arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* BKa *à perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.* 212

PROP. XXXI. THEOR. XXV. *Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione, differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.* 219

PROP. XXXII. THEOR. XXVI. *Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ in altero) & si non tangant se mutuò quæ in eodem sunt systemate nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugant se mutuò, nisi viribus accelera-*

*tri-*

*ratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri.* Pag. 250

PROP. XXXIII. THEOR. XXVII. *Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis partium systematum.* 254

PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII. *Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundùm plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplò minor quàm resistentia cylindri.* 258

PROP. XXXV. PROBL. VII. *Si medium rarum ex particulis quàmminimis quiescentibus æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.* 275

PROP. XXXVI. PROBL. VIII. *Aquæ, de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis, definire motum.* 280

PROP. XXXVII. THEOR. XXIX. *Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundùm longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dùm quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè.* 301

PROP. XXXVIII. THEOR. XXX. *Globi in fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè.* 312

PROP. XXXIX. THEOR. XXXI. *Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus interea dùm octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum*

*hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſuprà circulum maximum globi, & ratione denſitatis fluidi ad denſitatem globi quamproximè.* Pag. 316

PROP. XL. PROBL. IX. *Globi, in medio fluidiſſimo compreſſo progredientis invenire reſiſtentiam per phænomena.* 316

PROP. XLI. THEOR. XXXII. *Preſſio non propagatur per fluidum ſecundùm lineas rectas, niſi ubi particulæ fluidi in directum jacent.* 340

PROP. XLII. THEOR. XXXIII. *Motus omnis per fluidum propagatus divergit à recto tramte in ſpatia immota.* 342

PROP. XLIII. THEOR. XXXIV. *Corpus omne tremulum in medio elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in medio verò non elaſtico motum circularem excitabit.* 353

PROP. XLIV. THEOR. XXXV. *Si aqua in canalis cruribus erectis* KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat, conſtruatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua aſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.* 355

PROP. XLV. THEOR. XXXVI. *Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.* 357

PROP. XLVI. PROBL. X. *Invenire velocitatem undarum.* *ibid.*

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII. *Pulſibus per fluidum propagatis, ſingulæ fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis penduli.* 360

PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII. *Pulſuum in fluido elaſtico propagato velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè & ſubduplicatâ ratione denſitatis inversè; ſi modo fluidi vis elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.* 384

PROP. XLIX. PROBL. XI. *Datis medii denſitate & vi elaſticâ, invenire velocitatem pulſuum.* 387

PROP. L. PROBL. XII. *Invenire pulſuum diſtani as.* 390

PRO-

PROP. LI. THEOR. XXXIX. *Si cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.* Pag. 398

PROP. LII. THEOR. XL. *Si sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro sphæræ.* 403

PROP. LIII. THEOR. XLI. *Corpora quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, & eadem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem & cursus determinationem moventur.* 419

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI SECUNDI.

# INDEX
## PROPOSITIONUM
# LIBRI TERTII
## *IN TOMO III. PARTE PRIMA.*

PROPOSITIO I. THEOREMA I. *Vires quibus Planetæ circumjoviales perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis & esse reciprocè ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.* Pag. 22

PROP. II. THEOR. II. *Vires quibus Planetæ primarii perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus suis retinentur, respicere solem & esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.* ibid.

PROP. III. THEOR. III. *Vim quâ Luna retinetur in orbe suo, respicere Terram & esse reciprocè ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.* 23

PROP. IV. THEOR. IV. *Lunam gravitare in Terram & vi gravitatis retrahi semper à motu rectilineo & in orbe suo retineri.* 25

PROP. V. THEOR. V. *Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, circum saturnios in Saturnum & circumsolares in Solem & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.* 31

PROP. VI. THEOR. VI. *Corpora omnia in Planetas singulos gravitare & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus distantiis à centro Planetæ proportionalia esse quantitati materiæ in singulis.* 33

PROP. VII. THEOR. VII. *Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.* 43

PROP. VIII. THEOR. VIII. *Si globorum duorum in se mutuò gravitantium materia, undique in regionibus quæ à centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus globi alterutrius in alterum recipro-*

*ciprocè ut quadratum distantiæ inter centra.* Pag. 45

PROP. IX. THEOR. IX. *Gravitatem pergendo à superficiebus planetarum deorsùm decrescere in ratione distantiarum à centro quamproximè.* 53

PROP. X. THEOR. X. *Motus Planetarum in Cœlis diutissimè conservari posse.* 53

PROP. XI. THEOR. XI. *Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere.* 58

PROP. XII. THEOR. XII. *Solem motu perpetuò agitari; sed nunquam longè discedere à communi gravitatis centro planetarum omnium.* 58

PROP. XIII. THEOR. XIII. *Planetæ moventur in ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.* 60

PROP. XIV. THEOR. XIV. *Orbium aphelia & nodi quiescunt.* 62

PROP. XV. PROBL. I. *Invenire orbium principales diametros.* 66

PROP. XVI. PROBL. II. *Invenire orbium excentricitates & aphelia.* 67

PROP. XVII. THEOR. XV. *Planetarum motus diurnos uniformes esse; & librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.* 68

PROP. XVIII. THEOR. XVI. *Axes Planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.* 72

PROP. XIX. PROBL. III. *Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.* 73

PROP. XX. PROBL. IV. *Invenire & inter se comparare pondera corporum in terræ huius regionibus diversis.* 103

PROP. XXI. THEOR. XVII. *Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Ecclipticam & bis redire ad positionem priorem.* 117

PROP. XXII. THEOR. XVIII. *Motus omnes lunares ex allatis principiis consequi.* 119

PROP. XXIII. PROBL. V. *Motus inæquales satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.* 120

PROP. XXIV. THEOR. XIX. *Fluxum ac refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.* 122

## *IN TOMO III. PARTE SECUNDA.*

PROP. XXV. PROBL. VI. *Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.* Pag. 375

PROP. XXVI. PROBL. VII. *Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari describit.* 379

PROP. XXVII. PROBL. VIII. *Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam à Terrâ.* 391

PROP. XXVIII. PROBL. IX. *Invenire Diametros orbis in quo Luna, sine excentricitate moveri deberet.* 392

PROP. XXIX. PROBL. X. *Invenire variationem Lunæ.* 400

PROP. XXX. PROBL. XI. *Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe circulari.* 407

PROP. XXXI. PROBL. XII. *Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe elliptico.* 424

PROP. XXXII. PROBL. XIII. *Invenire motum medium nodorum Lunæ.* 435

PROP. XXXIII. PROBL. XIV. *Invenire motum verum nodorum Lunæ.* 445

PROP. XXXIV. PROBL. XV. *Invenire variationem horariam inclinationis orbis Lunaris ad planum Ecliptica.* 464

PROP. XXXV. PROBL. XVI. *Dato tempore invenire inclinationem orbis Lunaris ad planum Ecliptica.* 471

PROP. XXXVI. PROBL. XVII. *Invenire vim Solis ad Mare movendum.* 537

PROP. XXXVII. PROBL. XVIII. *Invenire vim Lunæ ad mare movendum.* 539

PROP. XXXVIII. PROBL. XIX. *Invenire figuram corporis Lunæ.* 547

PROP. XXXIX. PROBL. XX. *Invenire præcessionem Æquinoctiorum.* 560

PROP. XL. THEOR. XX. *Cometas in sectionibus conicis umbilicos*

*cos in centro Solis habentibus moveri & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere.* Pag. 578

PROP. XLI. PROBL. XXI. *Cometæ in Parabola moti trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.* 597

PROP. XLII. PROBL. XXII. *Inventam Cometæ trajectoriam corrigere.* 657

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI TERTII, ET TOTIUS OPERIS.



