www.e-rara.ch

Philosophiae naturalis principia mathematica

Newton, Isaac

Genevae, 1739-1742

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 1325

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-13513

Sectio I. De motu corporum quibus restitur in ratione velocitatis.

www.e-rara.ch
Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Visual Library

DE
DE MOTU CORPORUM
LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

(*) *De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.*

(*) LEMMA

generales resistentiæ notiones exponens.

1. Non potest corpus in medio fluido moveri atque in illud agere, quin ex fluidi reactione vim seu resistentiam aliquam patiatur. Vis illa resistentiæ, proportionalis est decrementó motûs quod dato tempore generat, & illius directio directioni mobilis semper opposita est (per mot. Leg. 2. & 3.) Quapropter datá corporis massá, resistentia est ut velocitatis decrementum quod dato tempore producit; datá enim mobilis massá, motûs decrementum est ut decrementum velocitatis (6. Lib. 1.). 1.

2. Vis resistentiæ quam momento quolibet temporis experitur corpus est ut motûs decrementum directé & temporis men-

mentum inversè. Nam resistentia dato temporis momento est ut motûs decrementum directè (1) & dato motûs decremento est inversè ut momentum temporis quo motûs decrementum generatur. Si enim subduplo vel subtriplo temporis momento, idem motûs incrementum vel decrementum generetur, vis generans dupla aut tripla est.

3. Hinc datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè.

4. Quoniam directio vis resistentiæ, directioni mobilis contraria est (1), corpus solâ vi insitâ in medio resistente motum, per rectam lineam continuò fertur, quod etiam evenire debere manifestum est, si corpus vi quâlibet acceleratrice vel retardatrice, secundum vel contrà directionem motûs insiti urgeatur.

5. Resistentia considerari potest tanquam vis retardans & cum vi gravitatis quâ corporum ascendentium motus perpetuò minuitur conferri. Vis enim resistentiæ sicut vis gravitatis infinitè parva est, si conferatur cum vi illâ quâ corpus motu finito cietur, seu quâ spatium finitum finito tempore describit. Nam si resistentiæ quam omni temporis momento patitur corpus, vis esset finita, sive ejusdem generis cum vi finitâ corporis motu finito acti, infinita multitudo resistentiarum momentanearum finito quovis tempore producta, totum corporis motum finito quolibet exiguo tempore extingueret, quod est contrà hyp., quâ supponimus corporis motum tempore aliquo finito in medio resistente perseverare.

6. Hinc corporis in medio resistente moti velocitas finita per spatium infinitè parvum, atque etiam tempore infinite parvo æquabilis censeri potest, neglecto nimirum infinitè parvo velocitatis decremento.

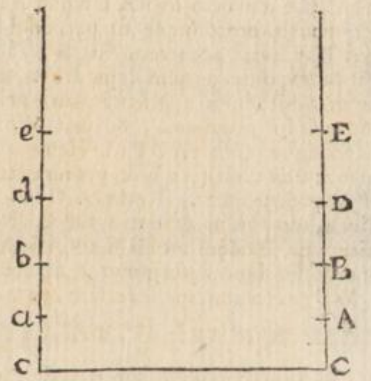
7. JAM verò resistentia corporum in fluidis, cæteris paribus, oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex reactione partium medii; tresque sunt celebriores circà hujus resistentiæ legem hypotheses, quarum Mathematicas consequentias Newtonus hoc libro exponit. 1ª. Hypothesis resistentiam ponit velocitati corporis dati proportionalem, secunda velocitatis quadrato, & tertia partim velocitati, & partim velocitatis quadrato. Præterea cùm experimentis sit cognitum partem quamdam resistentiæ fluidorum uniformem esse, considerandæ sunt quatuor aliæ hypotheses, in quarum primâ resistentia fingatur uniformis; in secundâ partim uniformis & partim velocitati proportionalis; in tertiâ partim uniformis & partim ut quadratum velocitatis, & in quartâ denique partim uniformis, partim ut velocitas, & partim ut velocitatis quadratum. Prima ex his quatuor hypothesibus nihil habet difficultatis, cum uniformis resistentia considerari possit tanquam gravitas constans cùm motum ascendentis corporis retardat; quâ de re satis actum est lib. 1. tres verò quæ sequuntur hypotheses non ægre referri plerumque possunt ad determinationes motuum quas aliæ priores hypotheses (de quibus ab initio actum est) suppeditant, quod deinceps ostendemus.

8. Si medium in quo corpus movetur perfectè fluidum sit, hoc est, partibus constet optimè lævigatis nullâque tenacitate cohærentibus, quæ proindè vi cuicumque illatæ cedant, & cedendo facillimè moveantur inter se, sola ea consideranda est resistentia quæ ex medii reactione ortum ducit, estque illa ut densitas medii & quadratum velocitatis mobilis dati conjunctim. Hæc enim resistentia (per motûs leg. 2. & 3. lib. 1.) est ut quantitas motûs dato tempusculo communicati; sed datâ mobilis velocitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi tempusculo dato movenda, hoc est, ut densitas medii; datâ autem medii densitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda, & ut velocitas quâ quantitas illa fluidi movetur conjunctim, & quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda velocitati mobilis proportionalis est, corpus enim duplo velocius altero, duplo majus spatium in fluido percurret, sicque duplo pluribus particulis occurret. Quare datâ densitate medii, resistentia est ut quadratum celeritatis mobilis, atque adeò si neque fluidi densitas, neque mobilis celeritas data sit, erit resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, atque hæc est resistentia quæ ortum ducit ab inertiâ particularum fluidi quas corpus motum è loco dimovet & quæ in velocioribus motibus sola ferè observatur.

9. Altera resistentia quæ ex tenacitate par-

partium fluidi uniformis nascitur, constans est, aut quod idem est, temporis momento proportionalis, eamque in tardissimis motibus sensibilem faciunt experimenta. Si enim partium fluidi cohæsio sit ubique eadem, vi quâdam determinatâ opus est ut partes illæ separentur, corporique transitum præbeant, quâcumque demum velocitate illud feratur, & ideò vis illa resistentiæ cum vi gravitatis uniformi, quæ corporis ascendentis motum retardat, conferri potest. Nam corpora duo similia & æqualia cum pari velocitate è locis C & c per lineas C E, c e, ad rectam C c normales projiciantur, & in locis æquè altis A & a, B & b, D & d &c. æqualem patiantur resistentiam; corpus quidem C resistentiam experiatur à vi gravitatis constante (quæ in locis A, B, D, E, &c. tantùm agat) oriundam, corpus verò c resistentiam ex tenacitate datâ, vi illi gravitatis æquali, in locis tantùm a, b, d, &c. reagente ortam; in spatiis verò intermediis A B & a b, B D & b d, &c. nullum sit motibus obstaculum; dum corpora perveniunt in A & a, æqualem habent velocitatem, & deindè victis æqualibus in A & a obstaculis, pari adhuc velocitate per spatia minimè resistentia A B & a b, feruntur; & simili modo, ob æquales resistentias in locis B & b per spatia B D & b d simul moventur, & ità deinceps eandem semper velocitatem in locis æquè altis habent. Minuantur jam æqualia illa spatia A B & a b, B D & b d, &c. & eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis & resistentiæ actio vel reactio continua reddatur, & corpora duo eandem ubique resistentiam patientur, & in locis æquè altis eandem velocitatem habebunt. Quarè resistentia quæ ex fluidi tenacitate ortum ducit, potest cum vi gravitatis uniformis comparari, licet medii tenacitas in corpus quiescens (quod quidem vi gravitatis semper urgeretur) agere nullo modo possit.

10. In fluidis igitur tenacitate aliquâ præditis, resistentia est partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis (8. 9.).

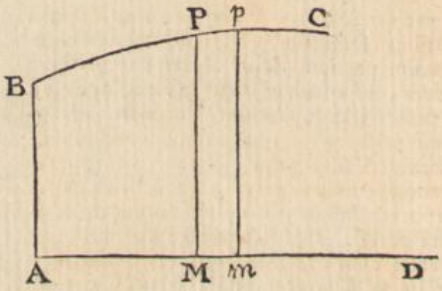


11. LEMMA. In quâcunque resistentiæ hypothesi, corporis tam in medio resistente quam in vacuo moti velocitas finita in singulis locis est ut elementum spatii descripti directè & momentum temporis quo describitur inversè. Velocitas enim uniformis est ut spatium quodcunque descriptum directè & tempus quo id spatium describitur inversè. In medio autem sive resistente sive vacuo velocitas per spatium infinitè parvum æquabilis est (6.). 11

12. Coroll. 1. Hinc temporis momentum est ut momentum seu elementum spatii directè & velocitas inversè; momentum verò spatii ut velocitas & momentum temporis conjunctim.

13. Coroll. 2. Si igitur velocitas dicatur v, spatium descriptum s, tempus quo descriptum est t erit $v = \frac{ds}{dt}$, $vdt = ds$ & $dt = \frac{ds}{v}$, sumptisque fluentibus S. $vdt = s$, & $t = S. \frac{ds}{v}$.

14. Coroll. 3. Si ità descripta fuerit curva BPC ut ejus applicatæ MP, mp, axi AD, normales, exponant velocitatem v, & abscissæ à puncto fixo A sumptæ AM, Am tempus t, erectumque sit perpendiculum AB curvæ occurrens in B, area ABPM exponit spatium tempore t descriptum. Sit enim applicata pm, priori PM infinitè propinqua, & erit $Mm = dt$, adeóque areæ ABPM elementum $MPpm = vdt = ds$ (11) & proindè area $ABPM = S.\ vdt = s$. Recta AD dicatur linea temporum & curva BPC linea celeritatum. Eodem modo si abscissa AM exponeret spatium descriptum s & applicata MP velocitatem inversam, ità ut esset $AM = s$, & $MP = \frac{1}{v}$, area ABPM exponeret tempus quo spatium AM descriptum est; esset enim $MPpm = \frac{ds}{v} = dt$, & hinc area $ABPM = S.\ \frac{ds}{v} = t$.



15. LEMMA. Si corpus datæ massæ solâ vi insitâ in medio resistente moveatur, *decrementum velocitatis*, erit ut *resistentia* & *momentum temporis* conjunctim. *Incrementum* verò *spatii* erit ut *velocitas* & *velocitatis decrementum* directè & *resistentia* inversè. Datâ enim corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè (2) ideóque decrementum velocitatis est ut resistentia & momentum temporis conjunctim. Quod erat 1um. Sed incrementum spatii est ut velocitas & momentum temporis conjunctim (12) momentum verò temporis est ut decrementum velocitatis directè & resistentia inversè (2); Quarè incrementum spatii est ut velocitas & illius decrementum directè & resistentia inversè. Quod erat 2um.

16. Coroll. 1. Hinc resistentia est ut velocitas & illius decrementum directè ac spatii incrementum inversè, & velocitas in suum decrementum ducta, est ut resistentia & incrementum spatii conjunctim.

17. Coroll. 2. Quare si spatium dicatur s, tempus t, velocitas v, resistentia r, erit $rdt = -dv$, & $rds = -vdv$.

18. LEMMA. Si corpus datæ massæ in medio resistente urgeatur vi centripetâ in directione motûs corporis agente; corpore ascendente, erit *velocitatis decrementum* ut *momentum temporis* & *summa vis centripetæ & resistentiæ conjunctim*. Et *velocitas* in *suum decrementum* ducta erit ut *incrementum spatii* & *summa vis centripetæ & resistentiæ* conjunctim.

At corpore descendente, *velocitatis incrementum* erit ut *momentum temporis*, & *differentia inter vim centripetam & vim resistentiæ* conjunctim. Et *velocitas* in *suum incrementum* ducta, erit ut *incrementum* sive elementum *spatii* & *differentia inter vim centripetam ac resistentiam* conjunctim.

Resistentia enim considerari potest tanquam vis continuò retardans (5) & vis centripeta corporis ascendentis motum etiam retardat, ideóque vis tota retardatrix est summa ipsa vis centripetæ & resistentiæ, dum corpus ascendit; sed vis retardatrix in temporis momentum ducta est ut decrementum velocitatis quod producit (2); ergò corpore ascendente, decrementum velocitatis est ut temporis momentum & summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 1um.

Sed momentum temporis est ut incrementum sive elementum spatii directè & velocitas inversè (12). Quarè si corpus ascendat decrementum velocitatis est ut elementum spatii & summa vis centripetæ ac resistentiæ directè, & velocitas inversè, adeóque velocitas in suum decrementum ducta est ut elementum spatii & summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 2um.

Descendente corpore vis centripeta motum

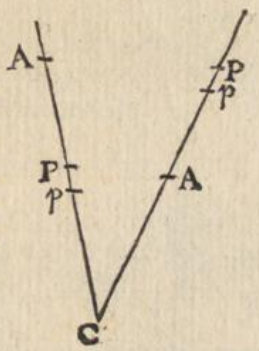
tum corporis accelerat dum resistentia retardat, & ideò si vis centripeta major sit vi resistentiæ, excessus vis centripetæ suprà resistentiam est vis tota accelerans; Si vis centripeta minor est vi resistentiæ, vis tota retardans erit excessus resistentiæ suprà vim centripetam. Quare differentia inter resistentiam & vim centripetam in temporis momentum ducta erit in primo casu ut incrementum velocitatis, & in secundo casu, ut illius decrementum. Quod erat 3um. Sed momentum temporis est ut elementum spatii directè & velocitas inversè (12), quarè velocitas in suum elementum (sive incrementum sit sive decrementum) ducta, est ut elementum spatii, & differentia inter vim centripetam ac resistentiam conjunctim. Quod erat 4um.

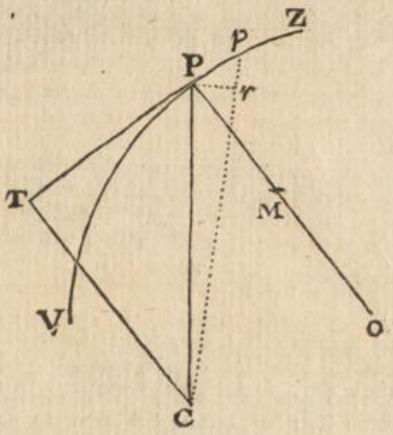
19. Coroll. 1. Unde si vis centripeta dicatur g, resistentia r, spatium s, tempus t, velocitas v erit pro corporis ascensu $gdt+rdt=-dv$, & $gds+rds=-vdv$; & pro corporis descensu, si vis centripeta vi resistentiæ sit major $gdt-rdt=dv$, & $gds-rds=vdv$; at si vis centripeta vi resistentiæ sit minor $rdt=gdt=-dv$, & $rds-gds=-vdv$.

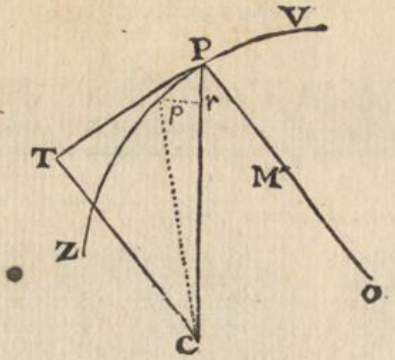
20. Coroll. 2. Si in his formulis ponatur $r=0$, mutabuntur illæ in formulas, quibus motus corporis in medio non resistente determinantur. Quâ ratione motus corporis in medio resistente conferri possunt cum ejusdem motibus in medio non resistente.

21. Coroll. 3. Si corpore descendente, resistentia vi centripetæ æqualis fuerit, corporis celeritas æquabilis manet; nam in formulis $gdt-rdt=dv$, & $rdt-gdt=-dv$, positâ $g=r$, fit $dv=0$, hoc est, velocitatis incrementum vel decrementum nullum.

22. Coroll. 4. Si corpus in lineâ rectâ AC vi centripetâ urgeatur ad punctum datum C, & de loco dato A sursum vel deorsum projiciatur cum velocitate datâ in medio resistente, & spatium AP quod ascendendo vel descendendo describit tempore t dicatur s, data AC dicatur b, & tam in ascensu quam in descensu scribatur $CP=x$, adeóque in ascensu $x-b=s$, & $dx=ds$, in descensu $b-x=s$, & $-dx=ds$; si loco ds substituatur ipsius valor in formulis coroll. 1. (19) erunt illæ pro ascensu $gdx+rdx=-vdv$, & pro descensu $gdx-rdx=-vdv$, quarum una in alteram abit, mutato signo $\pm$ vel $-$, quantitati r præfixo.







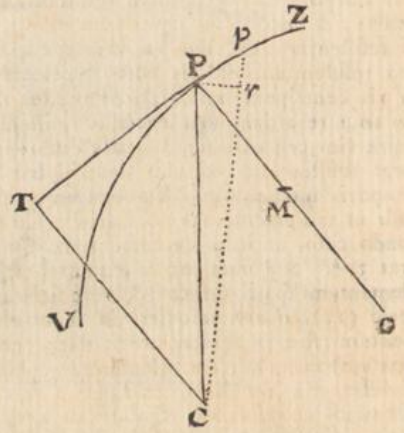
23. LEMMA. Si corpus vi quâlibet centripetâ sollicitatum curvam VPZ in medio resistente aut etiam in vacuo describat, visque centripeta in loco quovis P dividatur in vires duas, quarum altera directionem habeat PO tangenti PT per P ductæ normalem, altera directionem cum tangente congruentem, quadratum velocitatis cor-

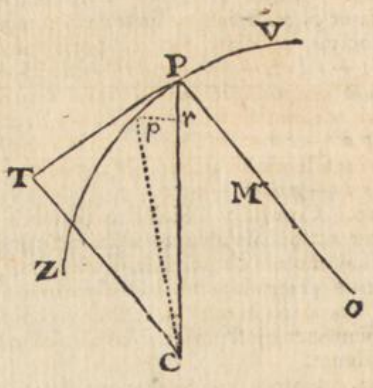
poris in loco P, exponi poterit per factum ex vi normali ductæ in radium circuli curvam VPZ osculantis in P.

Sit PC, totius vis centripetæ directio, PO radius osculi, Pp arcus curvæ infinitè parvus qui usurpari potest pro arcu circuli centro O & radio OP descripti. Velocitas corporis in P dicatur v, quæ per arcum Pp tam in medio resistente quam in vacuo æquabilis est, (6) & totius vis centripetæ pars illa quæ secundum directionem PO agit, seu vis normalis dicatur N & quia vis resistentiæ ut potè semper contraria directioni mobili PT, (1) vim normalem N non afficit, erit vis illa N quâ corpus in arcu Pp retinetur in medio resistente æqualis vi centripetæ quâ corpus idem cum eâdem velocitate æquabili v, in medio non resistente circulum describeret cujus centrum O, & radius OP. Corpus autem vi constante N, sollicitatum in vacuo de loco P cadat per radii partem PM ita ut eo lapsu acquirat celeritatem v quâ in medio non resistente circulum describeret cujus centrum est O & radius est OP; sitque $PM = s$, velocitas eo lapsu acquisita in M erit ergo $= v$, & erit (20. 19.) $Nds = vdv$, sumptisque fluentibus $Ns = \frac{1}{2}vv$, & $2Ns = vv$. Sed altitudo ex quâ corpus vi constante N sollicitatum in vacuo cadere debet ut velocitatem acquirat æqualem illi cum quâ circulum ipsum describit, est æqualis dimidio radii PO, (119. lib. 1.) ergo $2s = PO$ & $2Ns = vv = N \times PO$. Q. E. D.

24. Coroll. 1. Iisdem positis, totius vis centripetæ juxtà directionem PC urgentis ea pars quæ secundum directionem tangentis PT agit, seu vis tangentialis in P dicatur T resistentia ibidem r, arcus VP s, ideoque $Pp = ds$, & si corpus descendit, erit $Tds - rds = vdv$ (18. 19.) quia vis tangentialis motum accelerat & vis resistentiæ eundem retardat, vis autem normalis nec accelerat nec retardat. Sed si corpus ascendit, erit $Tds + rds = -vdv$ (18. 19.) vi tangentiali & resistentiâ motum corporis simul retardantibus.

25. Coroll. 2. Sit C virium centrum, vis tota centripeta in directione PC urgens $= g$, $CP = y$, CT tangenti perpendicularis $= p$, ideoque $PT = \sqrt{yy - pp}$. Ex puncto p, alteri P infinite propinquo demissum sit ad CP perpendiculum pr,



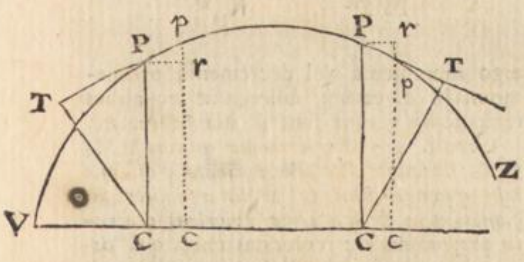


ut sit $pr = dy$, & triangulum Prp, simile triangulo PTC, & erit $Pp(ds) : pr(dy) = PC : PT = g : T = \frac{gdy}{ds}$, ubi observandum est dy, esse affirmativam, quando crescente arcu VP sive s, crescit etiam recta CP, seu y, id est, quando corpus ascendit, & contrà dy esse negativam, dum corpus descendit, adeóque in hoc casu fieri $T = -\frac{gdy}{ds}$. Hi valores vis tangentialis T, substituantur in formulis corollarii 1. & ambæ in hanc mutabuntur, $gdy + rds = -vdv$.

26. Coroll. 3. Quia $Pp(ds) : pr(\pm dy) = PC(y) : PT(\sqrt{yy - pp})$ erit $ds = \pm \frac{ydy}{\sqrt{yy - pp}}$, (signo superiori pro ascensu & inferiori pro descensu usurpato).

pato). Quarè fiet $gdy + rds = gdy \pm \frac{rydy}{\sqrt{yy - pp}} = -vdv$.

27. Coroll. 4. Si radius oſculi PO dicatur R, eſt (23) $R \times N = v^2$, & quia $y : p = g : N$, adeóque $\frac{pg}{y} = N$, fiet $\frac{Rpg}{y} = v^2$; ſed radius oſculi $R = \frac{ydy}{dp}$ (214. lib. 1.) quarè erit $\frac{gpdy}{dp} = v^2$, & $g = \frac{v^2 dp}{pdy}$. Subſtituatur hic valor in formulâ corollarii 2i. & fiet $gdy + rds = \frac{v^2 dp}{p} + rds = -vdv$, & ideò $vdv + \frac{v^2 dp}{p} = -rds$.



28. Coroll. 5. Vis centripetæ directio PC, ſibi ſemper parallela maneat, ut hic aſſumitur vis gravitatis, & per punctum V, in curvâ VPZ datum, ducatur recta VC directioni gravitatis PC perpendicularis, dicanturque ut ſuprà $VP = s$, $Pp = ds$, $CP = y$, $pr = dy$, vis tota gravitatis in P $= g$, reſiſtentia r, velocitas corporis ibidem $= v$, & erit ut in corollariio 2°. $gdy + rds = -vdv$.

29. Coroll. 6. Si in Hypotheſi corollarii 5i. dicantur radius oſculi in $P = R$, vis normalis $= N$, abſciſſa $VC = x$, & Cc ſeu $Pr = dx$, erit ob triangulorum Ppr, CPT ſimilitudinem, $Pp : Pr = PC : TC = g : N$, ſive $ds : dx = g : N = \frac{gdx}{ds}$; ſed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergò $\frac{gdx}{ds} = \frac{v^2}{R}$, & hinc $v^2 = \frac{Rgdx}{ds}$.

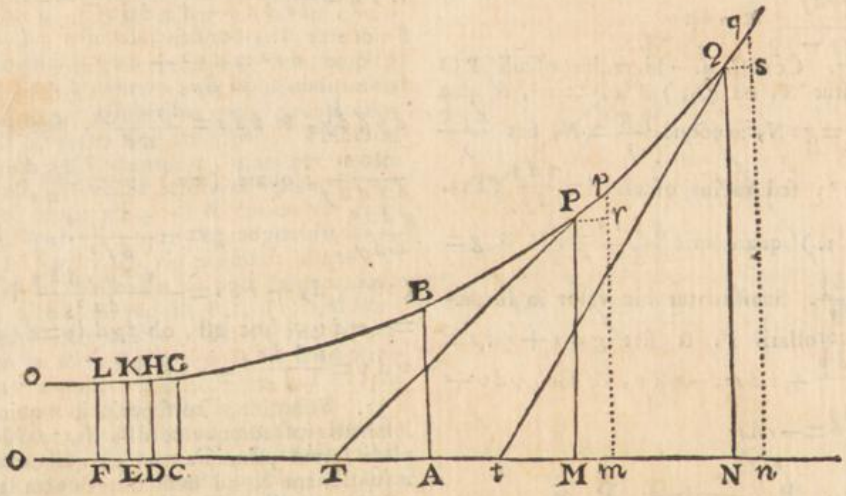
30. Coroll. 7. Eſt autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{ds^2 dy}{dsddx - dxdds} = -\frac{ds^2 dy}{dxdds}$, ſi ponatur dx, conſtans, & ideò $ddx = 0$; Et quia $ds^2 = dy^2 + dx^2$, ſumptiſque fluxionibus, factâ dx, conſtante $dsdds = dyddy$, & $dds = \frac{dyddy}{ds}$, fiet $R = -$ 31
$\frac{ds^3}{dxddy}$; quarè (29) $v^2 = \frac{Rgdx}{ds} = -\frac{gds^2}{ddy}$, ideoque $g = -\frac{v^2 ddy}{ds^2}$, & hinc (28) $gdy + rds = -\frac{v^2 dyddy}{ds^2} + rds = -vdv$, hoc eſt, ob $dyddy = dsdds$, $vdv = \frac{v^2 dds}{ds} - rds$.

31. Scholion. In ſuperioribus quinque lemmatis ipſorumque corollariis, fere complexi ſumus principia omnia, quibus & ad inventionem & ad demonſtrationem motuum in mediis reſiſtentibus uſi ſunt Clariſſ. viri Newt. in hoc Libro; Varignonius in monumentis Academiæ Regiæ an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes Bernoulli ibidem an. 1711. & in actis eruditorum Lipſ. an. 1713. & 1719. Hermannus Lib. 2. Phoronomiæ & in commentariis Academiæ Petropolitanæ, ac Eulerus in opere exquiſito quod de Mechanicâ ſcripſit analyricè. Nunc alia nonnulla de Logarithmicæ proprietatibus, & de methodo maximorum & minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis reſiſtentibus explicandam ſpectant, ſubjungenda ſunt.

LEMMA

præcipuas Logarithmicæ proprietates exponens.

III. Hugenius de hac ipsâ Newtoniani operis parte loquens, in quâ agitur de corporibus in mediis reſiſtentibus motis, (quam ſummâ cum voluptate ſe vidiſſe teſtatur) ait ſe notaſſe lineam curvam quam Logarithmicam aut Logiſticam nuncupat, ſummæ utilitatis eſſe in hoc negotio, & quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonſtrationem Guido Grandus poſtea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare à ſcopo noſtro alienum non duximus.



32. Defin. Sit linea recta NAO secundum quam feratur perpendicularis MP motu uniformi & sibi parallelo, dum in ea perpendiculari MP mobile P velocitate variabili movetur secundum hanc Legem, ut ejus velocitas sit semper proportionalis distantiæ ejus à rectâ NAO, curva ab illo puncto P descripta dicetur *Logarithmica vel Logistica.*

Linea NAO secundum quam perpendicularis PM motu uniformi & sibi parallelo fertur, dicitur *Axis Logarithmicæ*, & lineæ PM, QN perpendiculares in Axem sunt ejus ordinatæ.

Si quædam ex ordinatis Logarithmicæ, ut AB, sit æqualis unitati, punctum axeos A cui insistit censetur abscissarum origo, & abscissæ à parte AM sumptæ, sunt positivæ, à parte AO negativæ & abscissa pertinens ad ordinatam AB sive ad unitatem est ipsum o.

Coroll. 1. *Differentiæ quamminimæ ordinatarum Logarithmicæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.*

In quovis enim puncto Logarithmicæ velocitas axi perpendicularis quâ ordinatæ crescunt vel decrescunt, est ordinatæ proportionalis (ex Def.), sed durante tempusculo infinitè parvo illa velocitas uniformis est censenda, & æqualibus tempusculis incrementa vel decrementa linearum sunt ut velocitates uniformes quibus generantur, ergo incrementa vel decrementa ordinatarum h. e. earum differentiæ æqualibus tempusculis genitæ sunt ut illæ ordinatæ.

Coroll. 2. *Sint ordinatæ quævis PM, QN, ducantur duæ aliæ ordinatæ pm, qn ipsis quamproximæ & ab iis æqualiter distantes, pm & qn erunt prioribus ordinatis proportionales*: Velocitas enim quâ ordinata motu sibi parallelo fertur est uniformis, ideoque eodem tempore ordinata PM ad pm perveniet ac QN ad qn ob æquales distantias, ergo, per Cor. I. differentiæ ordinatarum PM & QN dum per uniunt ad pm & qn erunt iis ipsis ordinatis proportionales, sed adjectis vel detractis iis differentiis à lineis PM & QN fiunt ordinatæ pm, qn, & adjectis vel detractis ex terminis rationis cujusvis, correspondentibus terminis rationis ipsi æqualis non mutatur prio ratio, ergo ordinatæ pm & qn erunt inter se ut PM ad QN, & etiam alternando PM : pm = QN : qn.

Coroll. 3. *Si sumantur in axe puncta C, D, E, F ad distantias æquales & quamminimas, in iisque punctis erigantur ordinatæ, illæ ordine constituent Progressionem Geometricam.* Nam quia ex Hyp. ordinatæ GC & HD, HD & KE sunt quamproximæ & æqualiter distantes, est per Corollarium præcedens GC : HD = HD : KE, eadem ratione est HD : KE = KE : LF, sicque deinceps, unde liquet ordi-

ordinatas GC : HD : KE : LF &c. esse in progressione Geometricâ.

33. *Theor. I. Sumantur in axe Logarithmicæ quatuor puncta, ita ut duo priora æque à se mutuò distent ac duo posteriora, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in proportione Geometricâ.*

Et si sumantur in axe quotlibet puncta æque distantia ordine continuo, ordinatæ iis insistentes erunt in progressione Geometricâ.

Sumantur in axe duo puncta quævis A & E, & alia duo H & K talia ut sit AE = HK, erigantur que in illa puncta ordinatæ AL, EP, HS, KT; dico illas ordinatas fore in proportione Geometricâ.

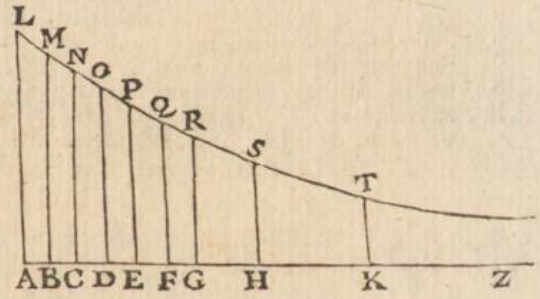
Dividatur tam AE quam HK, in partes infinitè parvas æquales inter se, totidem erunt divisiones in utroque intervallo, erigantur in illa puncta ordinatæ, fient duæ progressiones Geometricæ, in quibus totidem erunt termini & rationes terminorum successivorum æquales erunt, quia ordinatæ in utrâque progressione æqualiter distant; Ergo ex æquo, primus terminus AL prioris progressionis erit ad EP ultimum terminum ejus progressionis, ut HS primus terminus alterius progressionis ad ejus ultimum terminum KT. Q. E. D.

Et si sumantur in axe plura puncta æquè distantia ordine continuo sibi succedentia, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in progressione geometricâ: Probatur ut in Cor. 3. defin.

Coroll. *E converso, si in lineâ quâvis sumantur plura puncta, æquè distantia ordine continuo, & in iis erigantur perpendiculares quæ sint in progressione Geometricâ, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*

Sint enim A, D, G &c. ea puncta æquè distantia dividanturque eorum intervalla in partes æquales quamminimas, totidem erunt in quovis intervallo, assumantur mediæ proportionales inter perpendiculares AL & DO, DO & GR, &c. tot quot sunt divisionum puncta, & in singulis punctis erigantur perpendiculares iis mediis proportionalibus ordine sumptis æquales; Denique curva tangat tam perpendiculares datas AL, DO, GR quam hasce medias, dico eam curvam esse Logarithmicam.

Facile enim liquet ex naturâ progressionum, quod cum sit AL : DO = DO : GR &c. & totidem mediæ proportionales assumantur inter AL & DO, quot assumuntur inter DO & GR, sicque deinceps, formari progressionem continuam constantem ex omnibus illis perpendicularibus tam datis quam inventis, ideo quamlibet ex illis, ut 33.



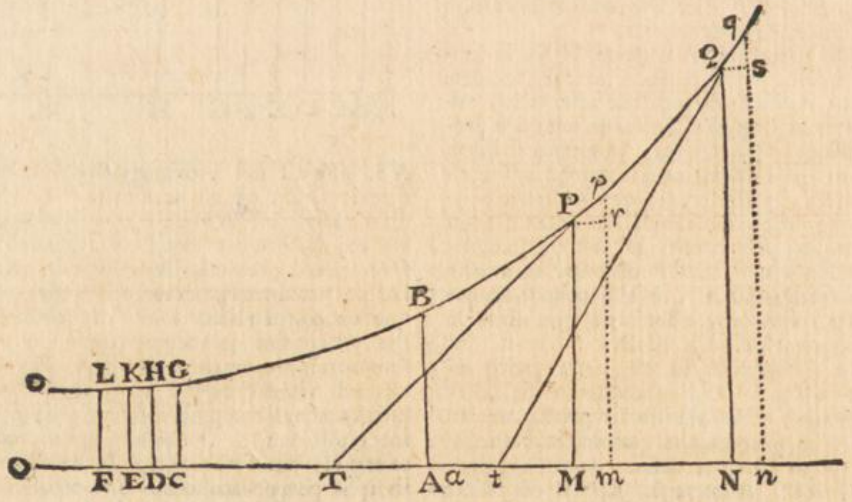
AL, esse ad sibi proximam BM, ut alia quævis DO, est ad proximam PE, unde dividendo, est AL ad suam differentiam à proximâ, ut est etiam DO ad suam differentiam à proximâ, ideóque perpendicularium proximarum differentiæ erunt ubique eis perpendicularibus proportionales; Evanescentibus ergo punctorum in axe sumptorum intervallis, & perpendicularibus ad vicinas æquali ubique celeritate latis & æquali tempusculo (ob æqualitatem intervallorum), velocitates quibus crescunt vel decrescunt perpendiculares erunt iis ipsis perpendicularibus proportionales; Ergo (ex definitione Logarithmicæ) ea curva quæ tanget eas perpendiculares erit Logarithmica.

34. Theor. II. *Abscissæ axis Logarithmicæ, sunt Logarithmi ordinatarum in earum extremo insistentium.* Ferantur hinc inde ab origine axis partes æquales quamminimæ, in extremo singularum erigantur ordinatæ, illæ omnes ordinatæ constituent progressionem Geometricam inter cujus terminos occurrit unitas, earum verò abscissæ erunt in progressione Arithmeticâ propter partium in axe sumptarum æqualitatem, & abscissa quæ unitati respondet est o; Jam autem cum termini progressionis Arithmeticæ inter quos est o ita aptantur terminis progressionis Geometricæ ut o respondeat unitati & reliqui termini sibi respondeant, tum termini progressionis Arithmeticæ sunt Logarithmi terminorum correspondentium pro-

progressionis Geometricæ; Ergo abscissæ Logarithmicæ, sunt Logarithmi ordinatarum correspondentium.

Corol. 2. *Portio axis quæ intercipitur inter duas Ordinatas est Logarithmus rationis quæ intercedit inter illas Ordinatas.* Quotiens enim duarum quantitatum exprimit rationem quæ inter illas intercedit, & differentia Logarithmorum earum quantitum, est logarithmus quotientis earum, sed abscissæ sunt Logarithmi ordinatarum, & portio axis quæ intercipitur inter duas ordinatas est differentia abscissarum sive Logarithmorum ad eas ordinatas pertinentium, ergo illa portio est Logarithmus quantitatis quæ exprimit rationem quæ inter Ordinatas intercedit.

Coroll. 2. *Si dentur duarum aut plurium quantitatum Logarithmi, & à puncto dato rectæ alicujus sumantur longitudines eis Logarithmis æquales, & in earum extremo erigantur perpendiculares quantitatibus quarum sumuntur Logarithmi æquales, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*



In recta O A N sumatur punctum A in quod erigatur perpendicularis A B unitati æqualis, sitque A M logarithmus quantitatis cui æqualis est perpendicularis M P, sit A a differentia progressionis Arithmeticæ ex quâ desumuntur logarithmi, quæ ideò accuratè continebitur in intervallo AM toties quot sunt termini in progressione Geometrica ex qua desumuntur quantitates quarum habentur Logarithmi, quærantur tot mediæ proportionales inter A B & M P quot sunt divisionum puncta inter A & M, & in illa puncta erigantur perpendiculares illis mediis proportionalibus ordine æquales, fiet progressio Geometrica, quæ est ipsa progressio quantitatum quarum abscissæ lineæ O A N quantitate A a successivè auctæ sunt Logarithmi, siquidem in utrâque progressione occurrunt termini A B & M P eodem intervallo in utraque dissiti, sed si in punctis æquidistantibus lineæ cujusvis erigantur perpendiculares in progressione Geometricâ, Logarithmica aliqua earum vertices tanget (Cor. Theor. I.) Ergo si dentur numeri cum suis Logarithmis concipi semper poterit Logarithmica cujus abscissæ sunt illi Logarithmi & cujus ordinatæ sint quantitates quibus respondent.

35. Theor. III. *Axis logarithmicæ est ejus Asymptotus ad quam ab unâ parte accedit propius datâ quâvis quantitate nunquam tamen eam attingit, & à quâ ab alterâ parte longius recedit datâ quâvis quantitate.*

Sint duæ ordinatæ A B, M P quarum una sit alterius dupla vel plusquam dupla, feratur portio axis A M hinc inde secundum axem sine fine, ordinatæ in ea puncta erecta crescent ab unâ parte & ab alterâ decrescent in ratione duplâ vel plus-

quam

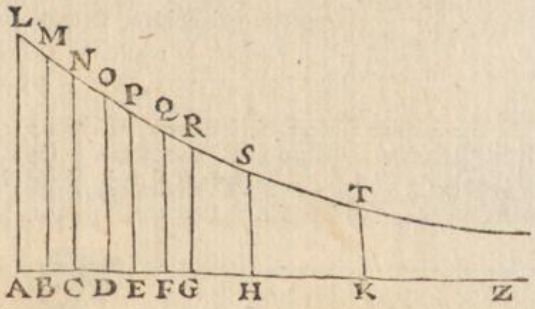
quam duplâ (per Cor. Theor. I.) sed ex Principiis Archimedeis quantitas crescens in progressione duplâ vel plusquam duplâ omnem quantitatem datam tandem excedet, & ex Principiis Euclideis quantitas quævis decrescens in ratione duplâ vel plusquam dupla minor fit quâvis quantitate datâ; Ergo Logarithmicâ longius ab axe recedit, aut propius ad eum accedit quâvis quantitate datâ, numquam tamen eum attinget, attingat enim eum si fieri potest in quodam puncto X, ferendo distantiam AM secundum axem, fiet tandem ut cadat proximè citra X, putà in Y, tum proximè ultra, ut in Z; in puncto Y nondum attinget axem ex Hypothesi, & aliquo intervallo YV ab eo distabit, sed quia YZ = AM debebit esse AB : MP = YV ad ordinatem in Z, qua ideò dabitur, ac per consequens Logarithmica nondum attinget axem in Z, nedum eum attigerit in X. Q. E. D.

36. Theor. IV. *Subtangens Logarithmicæ est constans.* Capiantur enim ubivis in axe particulæ æquales quamminimæ Mm, Nn, erectisque ordinatis MP, mp, & NQ, nq, per puncta P & Q concipiantur tangentes PT, Qt axi occurrentes in T, t; ducantur etiam rectæ Pr, Qs, ordinatis mp, nq perpendiculares. Evanescentibus ordinatarum distantiis Mm, Nn, triangulum Ppr fit simile triangulo TPM, & Triangulum Qqs simile triangulo tQN, ideoque est pr : PM = Pr (sive Mm) : MT, & qs : QN = Nn (sive Mm) : Nt, sed ob distantias Mm, Nn æquales est pm : PM = qn : QN & dividendo est pr : PM = qs : QN, quare Pr (sive Mm) : MT = Nn (sive Mm) : Nt, adeoque MT = Nt. Q. E. D.

Cor. *Hinc cum ordinata sit ad subtangentem constantem ut fluxio ordinatæ ad fluxionem abscissæ, obtinetur Logarithmicæ æquatio fluxionalis.* Abscissa AM dicatur x, ordinata MP y, subtangens MT, s, fluxio Mm erit dx, pr = dy, cumque sit $y : s = dy : dx$, est $ydx = sdy$ æquatio ad logarithmicam.

37. PROBL. I. *Datâ subtangente & duabus ordinatis Logarithmicæ, invenire portionem axis inter eas ordinatas interceptam.*

1ᵒ. Casus major ex illis ordinatis non sit plusquam dupla alterius; major illa ordinata sit LA quæ dicatur y, minor sit GR, differentia earum LA − RG sit b. Portio axis AG inter eas intercepta sit x, divisaque concipiatur in partes æquales infinitè parvas AB = dx, earum numerus (qui infinitus censendus est) dicatur n, erit ergo $ndx = x$; subtangens data sit s, eritque per Corollarium præcedens $y : s = (dy : dx = ndy : ndx =) ndy : x$; hoc autem modo determinatur valor ndy. Concipiantur erectæ omnes ordinatæ in puncta divisionum portionis axis AG, erunt in progressione Geometricâ (per cor. 3. def. n. 32.) & cum earum differentiæ sint ut illæ ordinatæ (per. cor. 1. def. n. 32.) differentiæ successivæ earum ordinatarum erunt in progressione Geometricâ, cujus omnes termini simul sumpti differentiam LA − RG sive b efficient; numerus autem terminorum ejus progressionis erit n, primus terminus dy, secundus invenitur per hanc proportionem LA : MB = $dy : \frac{MB}{LA} dy$ sive (quia MB = $y - dy$ & LA = y) secundus ille terminus erit $\frac{y-dy}{y} dy$, unde juxta Methodum summandi progressiones Geometricas est $b = dy \times \frac{\overline{\frac{y-dy}{y}}^{n} - 1}{\frac{y-dy}{y} - 1}$ $= -\frac{1}{y^{n-1}} \times \overline{y-dy}^{n} - y^{n} =$ (valore $\overline{y-dy}^{n}$ in seriem reducto) $-\frac{1}{y^{n-1}} \times y^{n} - ny^{n-1}dy + n \times \frac{n-1}{2} y^{n-2}dy^{2}$ &c. $-y^{n}$; sive deletis terminis y^{n} & $-y^{n}$, totâque serie per $-y^{n-1}$ divisa est $b = +ndy - nn$



$-\frac{nn-n}{2}y^{-1}dy^2+\frac{n^3-3n^2-2}{2\times 3}y^{-2}dy^3$ &c. sed quoniam n est numerus infinitus, in singulis coefficientibus altissima ejus dignitas sola assumi debet, reliquis terminis neglectis; unde series ad hanc reducitur $b=+ndy-\frac{n^2y^{-1}dy^2}{2}+\frac{n^3y^{-2}dy^3}{2\times 3}$ &c. qui quidem termini finiti sunt, compensatâ dignitate numeri infiniti n per infiniti parvi dy similem dignitatem.

Ex eâ autem serie, per serierum reversionem obtinebitur valor ipsius ndy, sit enim $ndy=Ab+Bb^2+Cb^3+Db^4$ &c.

erit $+ndy=+Ab+Bb^2+Cb^3$ &c.

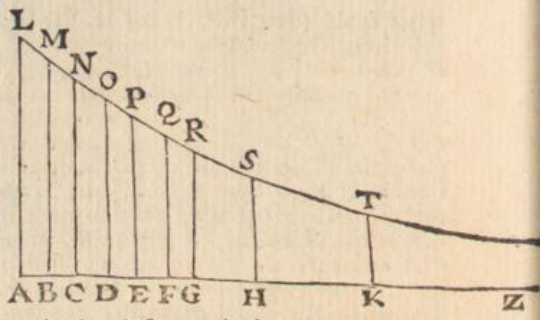
$-\frac{nndy^2}{2y}=\quad -\frac{A^2b^2}{2y}-\frac{2ABb^3}{2y}$

$+\frac{n^3dy^3}{2\times 3y^2}=\quad +\frac{A^3b^3}{2\times 3y^2}$

Cum ergo hi omnes termini debeant efficere b, fiat primus terminus $Ab=b$ erit $A=1$, & reliqui omnes termini debebunt esse æquales 0, suppeditabuntque totidem æquationes ad determinandos coefficientes B, C, D &c. v. gr. est $+Bb^2-\frac{A^2b^2}{2y}=0$, unde invenitur $B=\frac{1}{2y}$; est $Cb^2-\frac{2ABb^3}{2y}+\frac{A^3b^3}{2\times 3y^2}=0$, substitutoque valore A & B divisoque per b^3, est $C=\frac{1}{3y^2}$, sicque de cæteris, unde reperietur $ndy=b+\frac{b^2}{2y}+\frac{b^3}{3y^2}+\frac{b^4}{4y^3}$ &c.

Cum itaque sit $y:s=ndy:x$, erit $x=s\times\frac{b}{y}+\frac{b^2}{2y^2}+\frac{b^3}{3y^3}+\frac{b^4}{4y^4}$ &c. Q. E. I.

Cas. Quod si ordinata LA sit plusquam dupla ordinatæ TK, quæratur media proportionalis inter LA & TK, cujus si LA non sit plusquam dupla, invenietur intervallum abscissum inter eam & LA, ut prius, eritque dimidia pars intervalli quæsiti AK, erit enim LA ad eam mediam, ut ea media ad TK; unde portio axis inter LA & eam mediam, erit æqualis portioni axis inter eam mediam & TK: si LA ejus



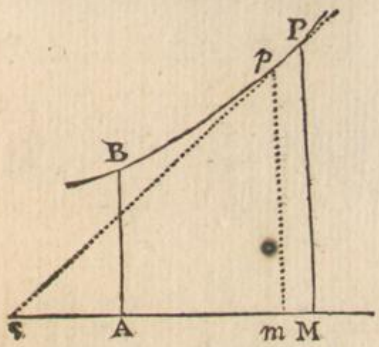
mediæ sit plusquam dupla, quæratur nova media inter LA & priorem mediam, intervallum inter hanc & LA erit quarta pars portionis quæsitæ AK. Quod si LA sit adhuc plusquam dupla istius mediæ repetatur operatio donec media inveniatur cujus LA non sit plusquam dupla, ex cujus intervallo, intervalli AK valorem assignare licebit, eo quo prius usi sumus ratiocinio.

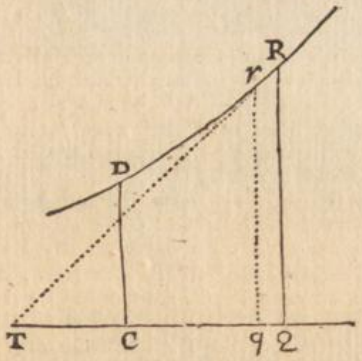
Cor. 1. *Si una ex ordinatis sit unitas, portio axis quæsita* x *erit alterius ordinatæ abscissa, ideoque ejus erit Logarithmus*, positivus quidem si ea ordinata sit unitate major, negativus verò si unitate sit minor.

Cor. 2. Si ordinata GR sit unitas, & ordinata LA ejus dupla, & si subtangens Logarithmicæ sit æqualis unitati, series abscissam exhibens in hanc mutatur $x=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{4\times 16}$ &c. quorum terminorum calculus est facillimus, qui si instituatur, abscissa quæsita invenietur $x=.6931472$.

38. Theor. V. *Sint duæ diversæ Logarithmicæ in utrâque sumantur ordinatæ æquales, abscissæ illis ordinatis correspondentes in utrâque Logarithmicâ erunt ut earum Logarithmicarum subtangentes, adeoque in constanti ratione*,

Sint duæ Logarithmicæ PB, RD prioris subtangens sit $MS=s$, subtangens alterius sit $QT=t$; Ordinatæ PM, RQ in utrâque sumptæ sint æquales dicanturque y; sint ordinatæ BA & DC æquales unitati; abscissa AM dicatur x, & CQ, z; dico fore $s:t=x:z$. Dividatur AM in partes infinite parvas dx, quarum numerus (infinitus) dicatur n. In totidem partes dz dividatur CQ, & concipiantur ordinatæ in omnes divisiones erectæ, illæ ordinatæ erunt in progressione Geometri-





eâ in utroque intervallo, fitque p m ſecundus terminus primæ progreſſionis, & q r ſecundus terminus progreſſionis alterius, erit in primâ $PM : BA = PM^{n-1} : pm^{n-1}$, in ſecunda $RQ : DC = RQ^{n-1} : rq^{n-1}$, ex natura progreſſionis Geometricæ, & quia tres priores termini harum proportionum ex hypotheſi ſunt æquales; æquales etiam erunt pm^{n-1} & rq^{n-1}, ideóque $pm = rq$, & $PM - pm = RQ - rq$, differentiæ ergo proximarum ordinatarum ſunt æquales, dicanturque dy. Eſt autem in prima Logarithmica (per Probl. 1. n. 37.) $y : s = ndy : ndx$ ſive x, & alternando $y : ndy = s : x$; in ſecunda $y : t = ndy : ndz$ ſive z, & alt. $y : ndy = t : z$, eſt ergo $s : x = t : z$ ſive $s : t = x : z$. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc liquet quod (manente unitate) logarithmicæ quarum eædem erunt Subtangentes, in omnibus erunt æquales, quippe ſi ſumantur in iis æquales ordinatæ abſciſſæ etiam æquales erunt.

Cor. 2. Logarithmicæ vero diverſæ ſpeciei dicentur, quarum ſubtangentes erunt diverſæ; & Logarithmi diverſæ ſpeciei dicentur, ubi eiſdem quantitatibus Logarithmi diverſi reſpondebunt, unde etiam Logarithmicæ ad quas pertinent diverſæ illæ Logarithmorum ſpecies, habebunt diverſas ſubtangentes (per hoc Theor.) ideoque erunt diverſæ ſpeciei.

38. v. gr. cum

Cor. 3. *Datis Logarithmis cujuſvis ſpeciei, Logarithmi alius ſpeciei eiſdem numeris reſpondentes inveniri poſſunt, ſi dentur ſubtangentes utriuſque ſpeciei;* Hinc ſi dentur Logarithmi quorum ſubtangens eſt unitas (qui Hyperbolici dicuntur), ſitque data ſubtangens alius ſpeciei .4342944 multiplicentur Logarithmi dati per hunc numerum, habebunturque eorumdem numerorum Logarithmi in hac alterâ ſpecie, ut liquet ex hoc Theor. Ideoque in poſterum per hanc expreſſionem L. x, Intelligemus Logarithmum Hyperbolicum quantitatis x, qui ſi multiplicetur per quantitatem quamlibet ut a, a L. x exprimet Logarithmum x ex eâ ſpecie depromptum quæ habet a pro ſubtangente, eſt enim $1 : a = L. x$ ad eum Logarithmum qui ergo erit a L. x.

39. *Probl. II. Data ordinatâ Logarithmicæ & ejus abſciſſâ, invenire ejus ſubtangentem, dummodo alterius cujuſlibet Logarithmicæ ſubtangens ſit data.*

Datâ ſit ſubtangens Logarithmicæ PB, Logarithmicæ verò RD datâ ſit abſciſſa CQ & ordinata QR, quæritur hujus Logarithmicæ ſubtangens: Quæratur primum abſciſſa quæ in Logarithmica PB reſponderet ordinatæ æquali QR, per Probl. I. ſitque ea AM, fiatque ut AM ad CQ ita ſubtangens data ad quæſitam.

Exemp. In tabulis Logarithmorum, Logarithmus numeri 2. eſt .3010300. ſi ergo concipiatur Logarithmica cujus abſciſſæ ſint Logarithmis tabularum æquales, & cujus ordinatæ ſint æquales numeris eis Logarithmis correſpondentibus, quæraturque ejus Logarithmicæ ſubtangens; inveniatur in altera Logarithmica cujus ſubtangens eſt unitas abſciſſa reſpondens ordinatæ quæ ſit unitatis dupla (per Cor. 2. Prob. I.) quæ eſt .6931472. fiatque ut .6931472. ad .3010300. Ita unitas ad ſubtangentem Logarithmicæ tabularum quæ invenietur .4342944.

Coroll. Hinc dato Logarithmo alicujus numeri deſumpto ex Logarithmica cujus ſubtangens data eſt, habebitur ejus numeri

meri Logarithmus in tabulas, dicendo ut ſubtangens data ad .4342944. ita Logarithmus datus ad ejuſdem numeri Logarithmum in Tabulis.

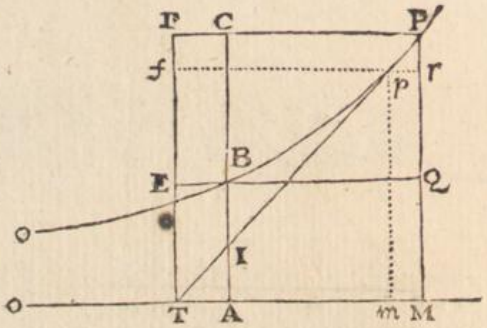
40. Probl. III. *Sit quantitas variabilis, cujus Logarithmus etiam variabilis eſt, ex ejus quantitatis variabilis fluxione, fluxionem ejus Logarithmi determinare.* Concipiatur Logarithmica ad quam pertinet ſpecies Logarithmi quæ aſſumitur; ſit a ejus ſubtangens, ſitque y variabilis propoſita, quæ conſideretur ut ejus Logarithmicæ ordinata, ſitque x ejuſdem Logarithmicæ abſciſſa ei ordinatæ y reſpondens, erit per naturam Logarithmicæ (n. 36) $y\,dx = a\,dy$ & $dx = \frac{a\,dy}{y}$, ſed x eſt Logarithmus ordinatæ y, ergo dx eſt ejus differentia, ergo $dL.y = \frac{a\,dy}{y}$ hoc eſt, differentia Logarithmi eſt differentia variabilis propoſitæ diviſa per ipſam variabilem, & ducta in conſtantem quæ ſit ſubtangens Logarithmicæ ad quam pertinet ſpecies Logarithmi aſſumpti.

Et e converſo, ſi habeatur hæc fluxio $\frac{a\,dy}{y}$, ejus fluens eſt Logarithmus ipſius quantitatis y ex eâ Logarithmicâ deſumptus cujus ſubtangens eſt a.

41. Theor. V. *Spatium Logarithmicum ABPM duabus ordinatis AB, PM arcu BP & abſciſſâ AM comprehenſum, æquale eſt rectangulo ſubtangentis & differentiæ ordinatarum.*

Ductâ enim per punctum P tangente PT, compleatur rectangulum TFPM, agatur per B recta EQ, parallela TM, ſecans TF in E & MP in Q; per m ordinata mp alteri MP infinite propinqua, & per p recta fr parallela TM, occurrens TF in f & MP in r; His poſitis (ob triangula Prp, PMT ſimilia) erit Pr : pr = PM : MT, ſeu PF, ideóque rectangulum Mmpr æquale erit rectangulo PFfr. Quare ſi area logarithmica ABPM diviſa intelligatur in rectangula innumera ut Mp, rectangulum EFPQ diviſum erit in totidem rectangula ut Fr correſpondentibus Mp, æqualia, & proindè area logarithmica ABPM æqualis eſt rectangulo EFPQ. Q. E. D.

Hinc *ſpatium Logarithmicum ABPM eſt ut ordinatarum AB, PM differentia*



PQ, ob datam ſubtangentem TM (36). Trilineum verò logarithmicum BPQ = PQ × MT − AM × BA; & producta AB ut rectæ FP occurrat in C, erit trilineum logarithmicum BPC = AC × CP − CB × MT.

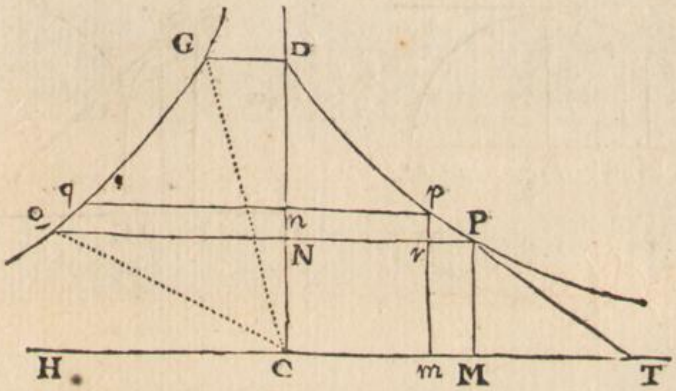
42. Coroll. 1. *Hinc ſpatium logarithmicum infinitè protenſum OOPM, quâ parte logarithmica ad aſymptotum MO continuò accedit, duplum eſt trianguli PTM.* Nam ob diſtantiam infinitam MO evaneſcit ordinata AB, ſitque ſpatium OoPM, æquale rectangulo TFPM, ſub ordinatâ PM & ſubtangente MT contento.

43. Cor. 2. *Tangens PT (producta ſi opus eſt) ſecet ordinatam AB in I, & ſpatium logarithmicum BPC erit ut BI inter logarithmicam & tangentem interceptæ.* Nam ob triangulorum TFP, ICP, ſimilitudinem, eſt TF ad FP, (ſeu AC ad MT) ut CI ad CP, & ideò AC × CP = MT × CI. Quare (41) trilineum BPC = AC × CP − MT × CB = MT × CI − MT × CB = MT × BI. Eſt igitur, ob datam MT, trilineum BPC ut BI.

44. Theor. VI. *Aſymptotis orthogonalibus CH, CD deſcripta ſit hyperbola QqG, & per punctum D in aſymptoto CD datum, logarithmica DpP axem habens CH productum; per punctum D agatur ad hyperbolam ordinata DG, & per punctum alterum quodvis N ordinata NQ quæ producta logarithmicæ occurrat in P; erit area hyperbolica NQGD, ad dignitatem hyperbolæ ſeu ad rectangulum CD × DG, in ratione rectæ NP ad ſubtangentem logarithmicæ.*

Agatur enim altera qp ipſi QP infinitè

44.

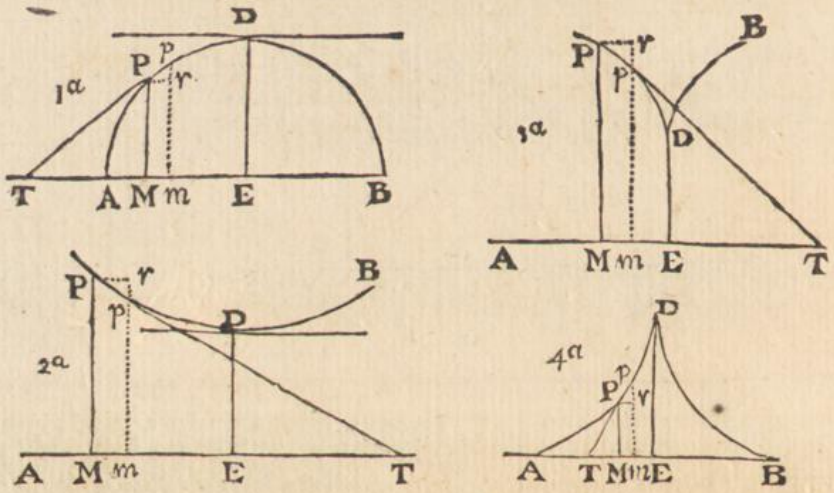


tè propinqua, ex punctis p, P demittantur ad axem CT perpendiculum pm secans QP in r & perpendiculum PM; PT tangat logarithmicam in P; erit ob triangula prP, PMT similia, pr (seu Nn): Pr = PM (seu CN): MT, & (ex naturâ hyperbolæ per theor. 4. de hyp. lib. 1.) NQ : DG = CD : CN; ideóque per compositionem rationum & ex æquo NQ × Nn : Pr × DG = CD : MT; Quarè ob datas CD & MT, summa omnium rectangulorum NQ × Nn, in quæ dividi potest area NQGD, hoc est, hæc area ipsa est ad rectangulum sub datâ GD, & summâ omnium Pr, seu totâ rectâ NP, ut CD ad MT, proindéque NQGD × MT = NP × GD × CD, & hinc NQGD: GD × CD = NP : MT. Q.E.D.

45. Coroll. *Hinc* (ob datas MT, GD, CD) *area hyperbolica NQGD & proindè sector CGQ ipsi æqualis* (377. lib. 1.) *est ut recta NP productio ordinatæ QN, inter asymptotum hyperbolæ CD & logarithmicam intercepta.*

46. Scholium. Cum Ill. Marchio Polenus in Epistolâ ad Hermannum Patavii an. 1729. editâ, ità facilem & expeditam logarithmicæ descriptionem organicam, pro ingenii sui sagacitate invenerit, ut curva illa sectionibus conicis haud difficilius construatur, cumque logarithmica per lineas rectas id præstet quod hyperbola per sectores vel quadrilatera sua, in problematum constructionibus quæ per areas hyperbolicas absolvuntur, loco hyperbolæ non malè usurparetur logarithmica; quamvis si problema ad merum calculum reducatur, æquè benè possint usurpari spatia hyperbolica, quam abscissæ logarithmicæ. Quomodo autem constructiones quæ per spatia hyperbolica fiunt, ad logarithmicam transferantur, pluribus exemplis ostendemus deinceps.

De



De Maximis & Minimis.

47. Theor. *Si quantitas variabilis,* (quam exponat recta PM curvæ PDB ordinata) *ad certum usque terminum D continuò crescat & posteà decrescat, vel contrà decrescat primùm & deindè crescat.* Actaque sit altera ordinata pm priori PM infinitè propinqua, & per punctum P recta Pr abscissæ AP parallela secans pm in r, *ratio incrementi vel decrementi evanescentis pr ordinatæ PM, ad incrementum evanescens Mm abscissæ AM in puncto D ubi ordinata MP omnium maxima vel minima evadit, infinita est vel nulla.*

Per punctum P ducatur PT tangens curvam in P, & abscissæ occurrens in T, & propter similitudinem triangulorum prP PMT, erit pr ad Pr, seu Mm ut PM ad MT. Sed si coincidente puncto P cum D, tangens PT evadat abscissæ AE parallela & proindè MP fiat maxima vel minima ordinata ED ut in figurâ 1ª. & 2ª. punctum T in infinitum abit, & ideò ratio PM ad MT seu ratio pr ad Mm nulla est. Contrà verò si coincidente P cum D, tangens PT cum ordinatâ maximâ vel minima DE conveniat, ut in figurâ 3. & 4. evanescit subtangens MT & ratio PM ad MT, sive pr ad Mm infinita evadit.

48. Coroll. 1. Ut ex datâ æquatione inter abscissam AM & ordinatam MP, inveniatur valor abscissæ AE cui maxima vel minima applicata ED ordinatur, sumenda est æquationis fluxio, & ratio fluxionis ordinatæ ad fluxionem abscissæ, seu ratio pr ad Mm, eaque vel infinito vel nihilo æquanda est, aut quod idem est, factâ Mm constante, fluxio ordinatæ vel infinito vel nihilo æqualis supponenda.

49. Corol. 2. Si quantitas variabilis cujus maximum vel minimum quæritur non sit ordinata curvæ, potest illa supponi æqualis ordinatæ curvæ alicujus in datam quantitatem ductæ, uti si proposita esset quantitas variabilis $ax^2 - x^3$ in quâ a data est, x indeterminata, poneretur $ax^2 - x^3 = bby$, quæ est æquatio ad curvam cujus abscissa est x, & ordinata y, & hinc, sumptis fluxionibus, foret $2axdx - 3x^2dx = bbdy$, & $2ax - 3x^2 = \frac{bbdy}{dx} = 0$ adeóque $2ax - 3xx = 0$ & $x = \frac{2}{3}a$. Si itaque loco x substituatur $\frac{2}{3}a$ in quantitate propositâ, obtinebitur maximum ejus $\frac{4}{9}a^3 - \frac{8}{27}a^3 = \frac{4}{27}a^3$. Idem inventum fuisset brevius, si nullâ factâ suppositione, fluxio variabilis propositæ videlicet $2axdx = 3x^2dx$, nihilo fuisset æquata.

PRO-

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentiâ amissus est ut spatium movendo confectum.

NAM cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc (a) est, ut itineris confecti particula, erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in (b) spatiis liberis sola vi insitâ moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: (c) dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continuè proportionales.

Sit A ad A−B ut B ad B−C & C ad C−D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

PRO-

(a) * *Hoc est, ut itineris confecti particula* (12) ob datum temporis momentum (ex hyp.).

(b) * *In spatiis liberis*, id est, in quibus nullum aliud est obstaculum præter medii resistentiam velocitati proportionalem.

(c) * *Dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest*, hoc est, usque ad motus exstinctionem. (Ostendetur autem infra, in nota f, infinitum tempus requiri ut motus omnis extinguatur, quando resistitur motui in ratione velocitatis). Cum ergo motus ad exstinctionem usque amissus, sit ipse motus totus, & motus amissi sint ut spatia movendo confecta (per Theor.) erit motus totus ad motus partem amissam post datum spatium descriptum, ut spatium ad exstinctionem usque motus descriptum ad illud datum spatium. Unde liquet spatium quod corpus ad motus usque exstinctionem describit finitum esse, cum datam habeat rationem ad spatium finitum. 49.

 * *Erit*

DE MOTU CORPORUM.

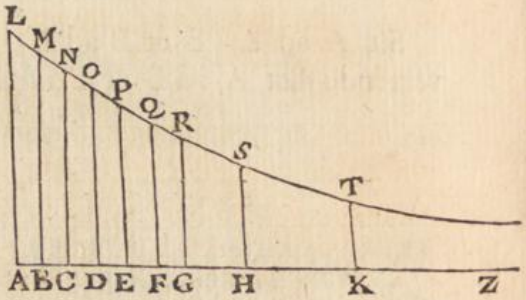
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: (d) erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per lem. 1. lib. 11.) continuè proportionales. (e) Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continuâ, qui per saltum capiuntur omisso passim æquali termino-

(d) * *Erit decrementum velocitatis:* (15) ut resistentia ob datum temporis momentum, ideoque (per hyp.) ut velocitas.

(e) 50. *Proinde si ex æquali* &c. Linea recta AZ in particulas æquales AB, BC, CD &c. divisa, exponat tempus, & perpendicula AL, BM, CN &c. exponant velocitates ipsis singulorum temporum AB, BC, CD &c. initiis; erunt (ex Dem.) velocitates illæ in continuâ progressione geometricâ decrescente. Proindè si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, ut AE, EH, HK &c. erunt velocitates AL, EP, HS &c., ipsis temporum initiis ut termini qui è progressione geometricâ per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum BM, CN &c. & FQ, GR &c. numero. Componuntur autem horum terminorum AL, EP, HS &c., rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis; nimirum ratio AL ad EP, componitur ex rationibus AL ad BM, BM ad CN &c., quæ tum magnitudine, tum numero æquales sunt rationibus EP ad FQ, FQ ad GR &c. ex quibus componitur ratio EP ad SH, & ità porrò. Quarè ratio AL ad EP æqualis est rationi EP ad HS, & hæc æqualis rationi HS ad KT. Manifestum autem est (33) curvam LMNST, ad quam terminantur perpendicula omnia AL, BM, CN &c., esse Logarithmicam.

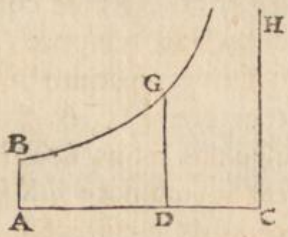


* Nam

norum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter ſe iiſdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compoſitæ inter ſe eædem ſunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, ſunt in progreſſione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ; & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continuè proportionales, erunt in hoc etiam caſu continuè proportionales. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt, earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: ſpatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ (per prop. 1. lib. 11.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi aſymptotis rectangulis *AC*, *CH* deſcribatur hyperbola *BG*, ſintque *AB*, *DG* ad aſymptoton *AC* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum reſiſtentia medii, ipſo motus initio, per lineam quamvis datam *AC*, elapſo autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi poteſt tempus per aream *ABGD*, & ſpatium eo tempore deſcriptum per lineam *AD*. (f) Nam ſi area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decreſcet recta *DC* in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & (g) partes rectæ *AC* æqualibus temporibus deſcriptæ decreſcent in eâdem ratione.



PRO-

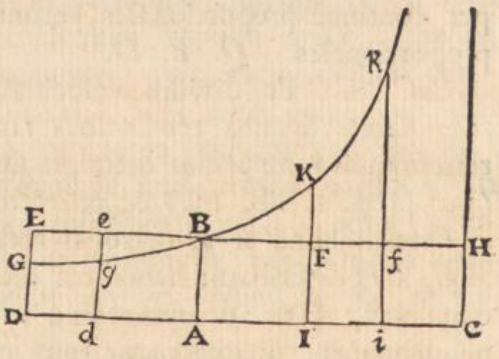
(f) * *Nam ſi area illa per motum puncti D* ſive ordinatæ DG *augeatur uniformiter ad motum temporis*, exhibeatque proinde tempus, *decreſcet recta DC, in ratione geometricâ* (380. lib. 1.) *ad modum velocitatis*, & ideò velocitatem poterit exponere (per caſ. 1. Dem.) & quia recta A C exponit velocitatem ipſo motûs initio, & DC, velocitatem reſiduam elapſo tempore ABGD erit AD ut velocitas amiſſa, atque ideò ut ſpatium deſcriptum (per prop. 1. hujus). Quia verò coincidentibus punctis D & C, area ABGD infinita evadit, manifeſtum eſt tempore infinito finitum ſpatium A C deſcribi. 50.

(g) * *Et partes rectæ AC æqualibus tem-*

PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

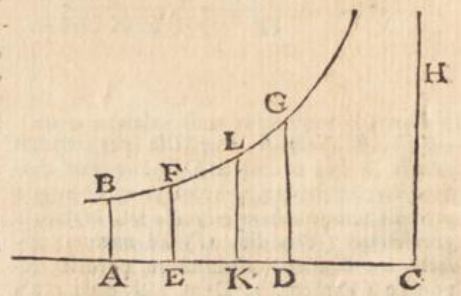
Corporis, cui, dum in medio similari rectà ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & resistentia medii initio ascensus per rectangulum *BADE* sumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*; & corpus ascendendo tempore *DGgd* describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*; tempore *ABKI* spatium descensus *BFK*, atque tempore *IKki* spatium descensus *KFfk*; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABFI*, *ABfi* respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BACH*.

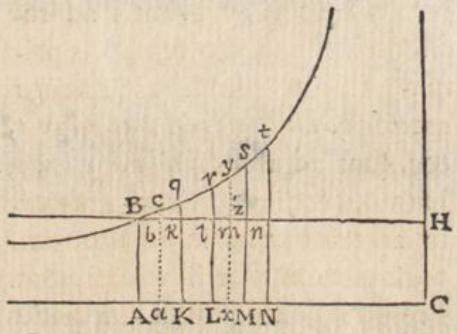


Re-

temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione &c. Nam si area ABGD ductis ordinatis FE, LK in partes æquales ABFE, EFLK, KLGD divisa sit, erunt lineæ CA, CE, CK, CD in progressione geometricâ decrescente (380. lib. 1.) hoc est CA : CE = CE : CK = CK : CD, & dividendo AE : EK = EK : KD = CA : CE. Decrescunt ergo partes rectæ AC in ratione velocitatis. Exponent igitur rectæ AE, EK, KD &c., spatia temporibus ABFE, EFLK, KLGD, descripta, & tota recta AD spatium toto tempore ABGD descriptum.



* Re-



(h) Resolvatur enim rectangulum $BACH$ in rectangula innumera Ak, Kl, Lm, Mn, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, Ak, Al, Am, An, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum æqualium. (i) Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$ ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $MmHC$, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (per motus legem II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn, &c. & (k) propterea (per lem. I. lib. II.) in progressione geometricâ. Quare si rectæ Kk, Ll, Mm, Nn, &c. productæ occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$, &c. (l) æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. (m) Est autem area $ABqK$ (per corol. 3. lem. VII. & lem VIII. lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}kq$ seu AC ad $\frac{1}{2}AK$, hoc

(h) * *Resolvatur enim &c.* Demonstratio quæ sequitur est pro corporis descensu.

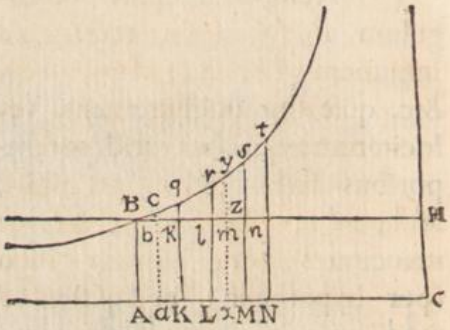
(i) * *Fiat AC ad AK &c.* Cum enim sit AKkB, proportionalis resistentiæ principio temporis secundi, si fiat AKkB ad ABHC seu AK ad AC, ut resistentia illa ad gravitatem, rectangulum AH exponet vim gravitatis datam; & simili modo, cum sit Al, ad Ak, ut resistentia initio temporis tertii ad resistentiam initio temporis secundi, erit, ex æquo perturbate Al ad AH, seu AL ad AC, ut resistentia in principio temporis tertii ad gravitatem & ità deinceps. Quoniam verò gravitas motum corporis cadentis accelerat quem resistentia retardat, de vi gravitatis auferenda est vis resistentiæ ut habeatur vis absoluta quâ corpus deorsum urgetur. 50.

(k) * *Et propterea.* Rectangula ABHC, KkHC, LlHC &c. differentiis suis Ak, Kl &c., proportionalia, erunt in progressione geometricâ (per Lem. I. lib. 2.)

(l) * *Æquales.* (380) lib. I.)

(m) *Est autem area ABqK (per cor. 3. Lem. VII. & lem. VIII lib. I.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}$ kq seu ut AC ad $\frac{1}{2}$ AK.* Etenim per ea Lemmata has areas pro rectí-

hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi. Et ([n]) ſimili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*,



&c.

ctilineis ſumi poſſe conſtat, erigatur in medio partis AK perpendicularis ac ad Hyperbolam uſque, facile conſtabit ex Elementis trapezium ABqK fore ad Triangulum Bkq ut tota ea perpendicularis ac (pro quâ Kq ſumi poterit) ad portionem ejus bc intrà Triangulum comprehenſam, quæ erit (ex conſt. & 2^a. 6^ti. Elem.) $= \frac{1}{2}$ kq, eſt verò ex natura Hyperboles ea perpendicularis ac ad AB, ut AC ad Ca ſive AC $- \frac{1}{2}$ AK & dividendo, eſt ea perpendicularis ac ad ac $-$ ab ſive bc quæ eſt $\frac{1}{2}$ kq ut AC ad AC $-$ AC $+ \frac{1}{2}$ AK ſive $\frac{1}{2}$ AK; Ergo area ABqK eſt ad aream Bqk ut AC ad $\frac{1}{2}$ AK, ſive ut Rectangulum ABCH ad Rect. $\frac{1}{2}$ ABkK, ſeu *ut vis gravitatis* quam exponit Rectang. AH ad *reſiſtentiam in medio temporis primi* quam exponit rectang. Ak, cum enim ſit Ak ut velocitas toto primo tempore acquiſita, erit $\frac{1}{2}$ Ak ut velocitas in medio temporis primi acquiſita, reſiſtentiæ autem ſunt velocitatibus analogæ.

(n) *Et ſimili argumento areæ.* Sumptis enim iſtis areis pro Trapeziis rectilineis: ducantur perpendiculares xzy in medio partium AK, KL, LM, MN ad Hyperbolam uſque, & (ex elementis) facile conſtabit quod area tota ſinguli trapezii (v. gr. rLMs) eſt ad ejus areæ portionem ſupra BH poſitam (nempe rlms) ut linea tota xy per medium trapezii ducta ad ejus partem zy ſupra BH, ſed ex naturâ Hyperbolæ eſt ea perpendicularis xy ad AB ſive xz, ut AC ad abciſſam Cx illi perpendiculari reſpondentem (quæ eſt CL $- \frac{1}{2}$ LM), & dividendo, eſt ea perpendicularis xy ad ejus partem zy ſupra BH, ut AC ad Ax portionem abſciſſæ inter A & eam perpendicularem (hoc eſt, in exemplo aſſumpto, ut AC ad AL $+ \frac{1}{2}$ LM). Ergo area tota ſinguli trapezii ad ejus areæ portionem ſupra BH, ut AC ad Ax portionem abſciſſæ inter A & medium partis cujuſvis aſſumptæ, ſive (aſſumpta communi altitudine AB) ut Rectangulum AH, ad Rectangulum ſub AB & lineâ inter A & medium partis aſſumptæ comprehenſa; ſed illud eſt ut vis gravitatis, hoc ut velocitas ac proinde ut reſiſtentia in medio temporis cui reſpondet pars aſſumpta, ergo alternando, area ſinguli trapezii eſt ad vim gravitatis ut portio trapezii ſupra BH ad reſiſtentiam ſive ad velocitatem in medio temporis cui reſpondet trapezium, ſed areæ totæ trapeziorum ſunt ubique æquales & vis gravitatis ſemper eadem, conſtans ergo eſt eorum ratio, ergo, portiones trapeziorum ſuper BH. ut rlms ſunt ſicut reſiſtentiæ ſive ut velocitates, adeoque ut ſpatia ſingulis tempuſculis quibus reſpondent deſcripta.

* Ar-

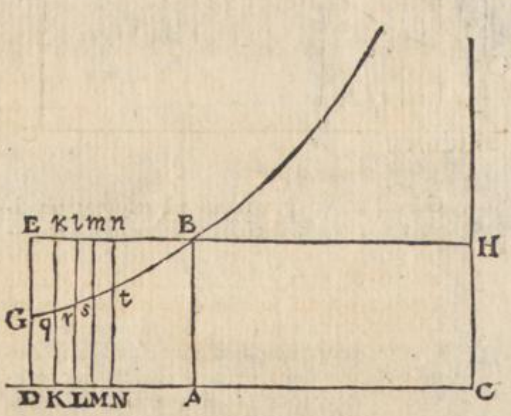
&c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque (o) ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. *Q. E. D.* Et (p) ſimilis eſt demonſtratio motus expoſiti in aſcenſu. *Q. E. D.*

LIBER SECUND. SECTIO I. PROP. III. PROBL. I.

Co-

(o) * *Atquè ideò deſcriptis ſpatiis analogæ.* Spatia enim ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates per Prop. II. hujuſce libri.

(p) *Et ſimilis eſt demonſtratio.* Reſolvatur enim rectangulum D B in rectangula innumera D K, K l, L m, M n &c. quæ ſint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta, & erunt, nihil D k, D l, D m, D n &c., ut velocitates totæ amiſſæ in principio ſingulorum temporum æqualium. Quia igitur totum rectangulum D B, exponit (per hyp.) velocitatem corporis & reſiſtentiam medii velocitati proportionalem initio aſcenſus, rectangula A E, A k, A l, A m, A n &c., exponent velocitates reſiduas, reſiſtentiaſque medii initio ſingulorum temporum æqualium. Fiat A C, ad A k, ſive Rectang. A H ad Rectang. A k, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam principio temporis ſecundi, & vi gravitatis addatur reſiſtentia (quod gravitas & reſiſtentia corporis aſcendentis motum retardent) & erunt D E H C, K k H C, L l H C, M m H C &c., ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum retardatur, atque ideò (per mot. leg. 2.) vel per not. 18.) ut decrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula D k, K l, L m, M n &c., & propterea (per Lem. 1. Lib. 2.) in progreſſione geometricâ. Quarè ſi rectæ K k, L l, M m, N n &c., occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ D G q k, k q r L, L r s M, M s t N &c. æquales, ideóque tum temporibus, tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ.

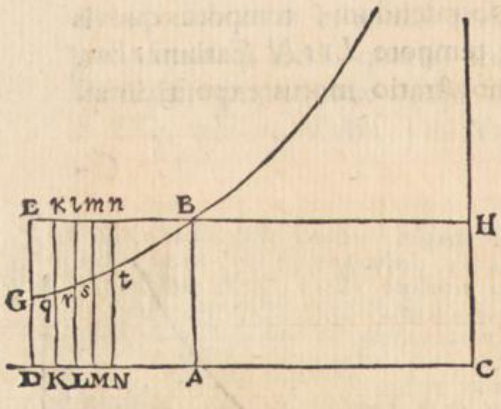


Erigatur in medio partis D K perpendicularis uſque ad E B, erit area D G q K ad aream G E k q ut pars ejus perpendicularis ad Hyperbolam ordinata ad ejus partem reliquam uſque ad E B, ſed (per Theor. 4. de Hyperbola), ea ordinata ad Hyperbolam eſt ad A B ſive ad totam perpendicularem, ut A C ad ejus ordinatæ abſciſſam, ideoque dividendo, eſt ea ordinata ad perpendicularis partem reliquam uſque ad lineam E B, ſive eſt area D G q K ad aream G E K q ut A C ad portionem abſciſſæ inter A & perpendicularem, & aſſumptâ communi altitudine A B, ut Rectangulum A H ad Rectangulum ſub A B & portione abſciſſæ inter A & perpendicularem, ideoque area D G q K ad aream 50.

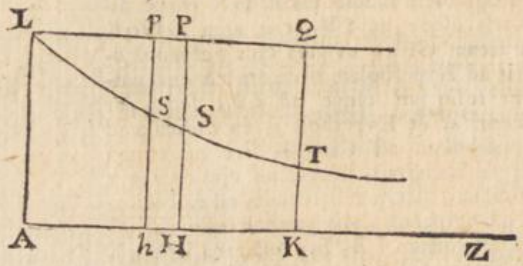
GEkq

DE MOTU CORPORUM.

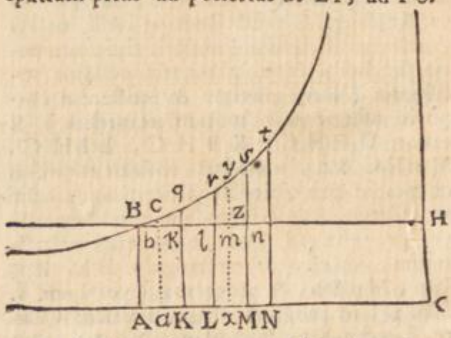
Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim resistentiæ, quâ (q) in fine temporis illius impeditur. *Co-*



GEkq ut vis gravitatis ad resistentiam sive velocitatem residuam in medio temporis primi, cumque vis gravitatis sit ubique eadem & areæ DGqK, qKLr, ubique æquales, areæ GEkq, kqrl, &c. erunt semper ut resistentiæ in singulis temporibus sive ut velocitates, ideoque ut spatia singulis tempusculis descripta, ac per consequens areæ totæ GEnt, erunt ut spatia toto tempore GDNt descripta, dum areæ ABNn erunt ut velocitates in fine eorum temporum residuæ.



51. Si asymptoto AZ descripta sit Logarithmica quævis LST, ad asymptotum versus Z accedens, & ordinata AL exponat velocitatem corporis initio motus, abscissæque AH, AK, exponant tempora; erunt (50)* ordinatæ HS, KT, ut velocitates residuæ elapsis temporibus AH, AK, & ideò ductâ per punctum L rectâ LQ, asymptoto AZ parallelâ, & ordinatas productas HS, KT secante in P, Q, erunt PS, QT ut velocitates amissæ, atquè etiam ut spatia descripta, temporibus AH, AK, vel LP, LQ. Ductâ ordinatâ, hs, alteri HS, infinite propinquâ, spatium velocitate uniformi AL, tempusculo hH descriptum in vacuo, erit ad spatium eodem tempore cum velocitate HS, confectum in medio resistente, ut rectangulum HP × Hh, ad rectangulum SH × Hh, seu aream HSsh (12) & ideò si totum tempus AH in particulas innumeras ut hH divisum sit, erit spatium cum velocitate AL, in vacuo descriptum toto tempore AH, ad spatium eodem tempore percursum in medio resistente ut rectangulum AP ad aream Logarithmicam ALSH; sed area ALSH, æqualis est rectangulo subtangentis Logarithmicæ in PS, (39) & ideò si assumpta sit AL subtangenti æqualis, est area ALSH, æqualis rectangulo AL × PS; Quarè in hâc hypothesi, erit spatium prius ad posterius ut LP, ad PS.



(q) * *In fine temporis illius impeditur.* Est enim velocitas dato tempore, ABrL acquisita, ad velocitatem alio quovis tempore ABtN acquisitam, ut rectangulum Al ad re-

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu, atque etiam earundem differentia in descensu (r) decrescit in progressione geometricâ.

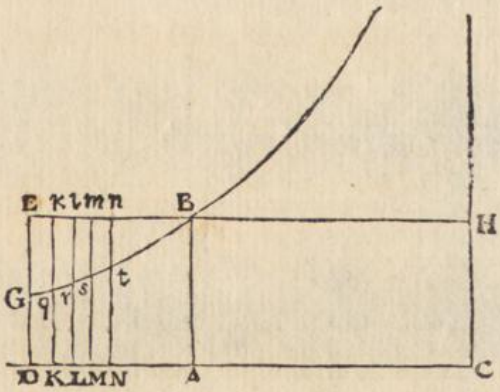
Corol. 3. (f) Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus

rectangulum A n, sive ut linea data AL, ad lineam A N, (ex dem.), & ideò velocitas corporis cadentis cum areâ A B t N, seu cum tempore continuò crescit. Sed coincidentibus puncto N cum puncto C & ordinatâ N t cum asymptoto C H, area A B t N infinita evadit, hoc est, tempus fit infinitum & velocitas maxima; Quarè velocitas maxima quæ etiam *terminalis* dicitur, est ad velocitatem dato quovis tempore A B r L, acquisitam ut AC ad A L, seu ut rectangulum A H, ad rectangulum A I, hoc est, (ex dem.) ut vis gravitatis ad vim resistentiæ in fine temporis A B r L.

(r) * *Decrescit in progressione geometricâ.* In ascensu corporis temporibus D G q k, D G r l, D G s M &c. in arithmeticâ progressione crescentibus, abscissæ C D, C K, C L, &c. in progressione geometricâ decrescunt (380. lib. 1.) sed singulæ abscissæ illæ sunt (ex dem.) ut summa velocitatis maximæ quam exponit linea C A, & velocitatis residuæ quam exponit linea A K vel A L, vel A M &c., in fine temporis D G q k, vel D G r L, vel D G s M &c. Quarè tempore aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis maximæ ac velocitatis in ascensu residuæ decrescit in progressione geometricâ. Simili modo in descensu corporis patet quod crescentibus temporibus (vid fig. notæ super.) A B q k, A B r L, A B s M &c., in progressione arithmeticâ, abscissæ C A, C K, C L, C M &c., decrescunt in progressione geometricâ (380. lib. 1.), sed abscissæ illæ sunt ut differentiæ velocitatis maximæ quam exhibet linea A C & velocitatis acquisitæ quam exponit linea A K, vel A L, vel A M &c., crescente igitur tempore in progressione arithmeticâ, differentia velocitatis maximæ, & velocitatis dato quovis tempore in descensu acquisitæ, decrescit in progressione geometricâ. Hinc si summa illa in ascensu & differentia in descensu numeris exprimantur, erunt tempora ut eorum numerorum Logarithmi.

(f) * *Sed & differentiæ spatiorum.*

Nam si in ascensu corporis capiantur tempora D G q K, K q r L, L r s M, M s t N &c. æqualia, erit spatium primo tempore descriptum ut G E k q = D K × D E − D G q K; spatium tempore secundo descriptum ut q k l r = K L × D E − K q r L (sive quia K q r L = D G q K) = K L × D E − D G q K, & ità de cæteris. Quarè differentia spatiorum primo & secundo tempore descriptorum est ut D K × D E − K L × D E, id est, ob datam D E, ut D K − K L; & simili argumento differentia spatiorum secundi & tertii temporis est ut 51.



K L − L M; differentia spatiorum tertii & quarti temporis ut L M − M N. Erunt igitur differentiæ spatiorum quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur ut differentiæ D K − K L, K L − L M, L M − M N &c., sed (ex dem.) termini D K, K L, L M, M N &c., decrescunt ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Ergò differentiæ D K − K L, K L − L M, L M − M N &c., descrecunt ut D K, K L, L M, M N &c., seu ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Eadem est demonstratio pro descensu.

* Al-

temporum differentiis describuntur, decrescunt in eâdem progressione geometricâ.

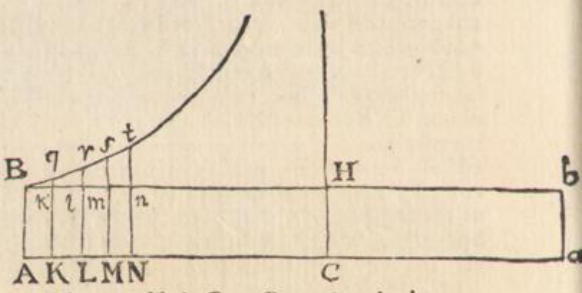
Corol. 4. Spatium verò à corpore descriptum differentia est duorum spatiorum quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & (t) alterum ut velocitas, quæ etiam ipso (u) descensûs initio æquantur inter se. PRO-

(t) * *Alterum ut velocitas.* Nam spatium tempore quovis ABtN, in descensu descriptum, est ut area Btn, est autem area Btn = ABtN − ABnN, & est ABnN ut velocitas tempore ABtN acquisita.

(u) * *Descensûs initio æquantur.* Descensûs initio est area nascens ABqK æqualis rectangulo ABKk.

52. *Scholium.* Ex demonstratis non solùm corporis ascendentis aut e quiete descendentis motus determinatur, sed etiam motus ejusdem datâ cum velocitate deorsum projecti facilè inveniri potest. Nam velocitas projectionis vel æqualis est velocitati maximæ, quam in figuris superioribus exponit linea AC, sive rectangulum AH, aut velocitate maximâ minor est, aut eâ major. Si 1um. motus corporis deorsum verticaliter projecti æquabilis est, ob resistentiam gravitati æqualem & contrariam. Si 2um. in lineâ AC (vid. fig. prop. 3.) capiatur AL, ad AC, ut velocitas projectionis data ad maximam, sive ut resistentia ad gravitatem, & tempore quovis LrtN, corpus describet, spatium Irtn, & in fine illius temporis habebit velocitatem LlnN, eodem modo ac si e quiete cadendo tempore ABrL, acquisivisset datam projectionis velocitatem ABlL, & deinde in motu perseverasset.

53. Verum si velocitas projectionis major sit velocitate maximâ quam corpus cadendo acquirere potest, mutanda erit Newtoni constructio. Cæteris enim manentibus ut in constructione pro corporum descensu, producantur rectæ AC, & BH, ad a & b, ut sit rectangulum ABba ad rectangulum CHba, ut resistentia tota initio motus ad vim gravitatis: velocitas projectionis exponi poterit per rectangulum ABba, cum resistentia sit ipsi semper proportionalis, & corpus descendendo tempore quovis ABtN, describet spatium

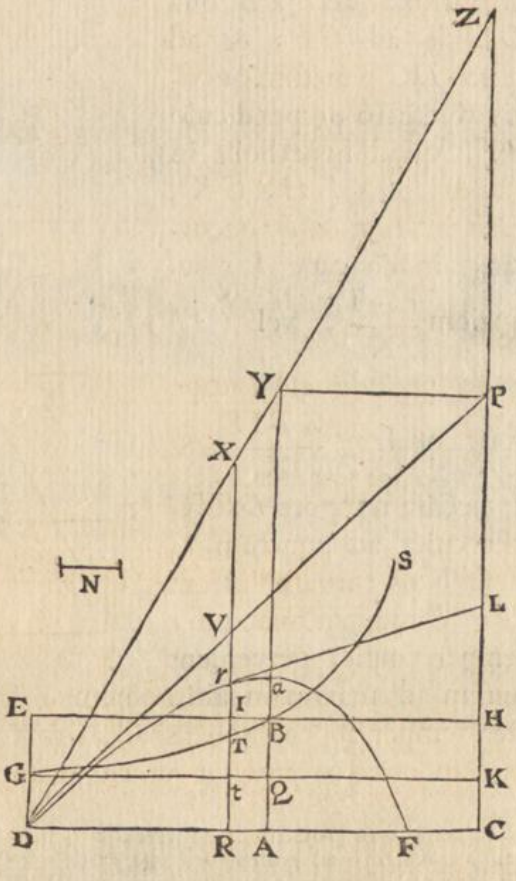


ABba × AN + Ca × Btn, & velocitatem habebit Nnba, & tempore infinito describet spatium infinitum, velocitatemque habebit æqualem terminali sive maximæ velocitati quam corpus e quiete cadendo acquirere potest. Resolvatur enim rectangulum AH in rectangula innumera Ak, Kl, Lm, Mn, &c. quæ sint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta. (cum enim resistentia gravitatem superet, velocitas decrescit) & erunt, nihil Ak, Al, Am, An, &c. ut velocitates amissæ, & ideò rectangula aB, ak, al, am, an, &c., ut velocitates residuæ resistentiis proportionales, principio singulorum temporum æqualium. Quoniam verò gravitas motum accelerat quem resistentia retardat, de vi resistentiæ subducatur gravitas CHba, & manebunt rectangula ABHC, KkHC, LlHC, MmHC, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum æqualium retardatur, atque ideò ut decrementa velocitatum, id est, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn, & propterea per Lem. 1. Lib. 2. in progressione geometricâ. Quare (380. lib. 1.) erunt areæ ABqK, KqrL, LrsM, MstN, &c. æquales, ideóque temporibus semper æqualibus analogæ. Elapso igitur tempore quovis ABtN, corporis velocitas residua erit ut rectangulum Nnba, sive ut recta Na, sed spatia sunt ut velocitas & tempus conjunctim, ergo

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis *D* egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam horizontalem *DC* (x) demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A*, ut (y) sit *DA* ad *AC* ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, & vim gravitatis; vel (z) (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP* ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis *DC*, *CP* describatur hyperbola quævis *GTBS* secans



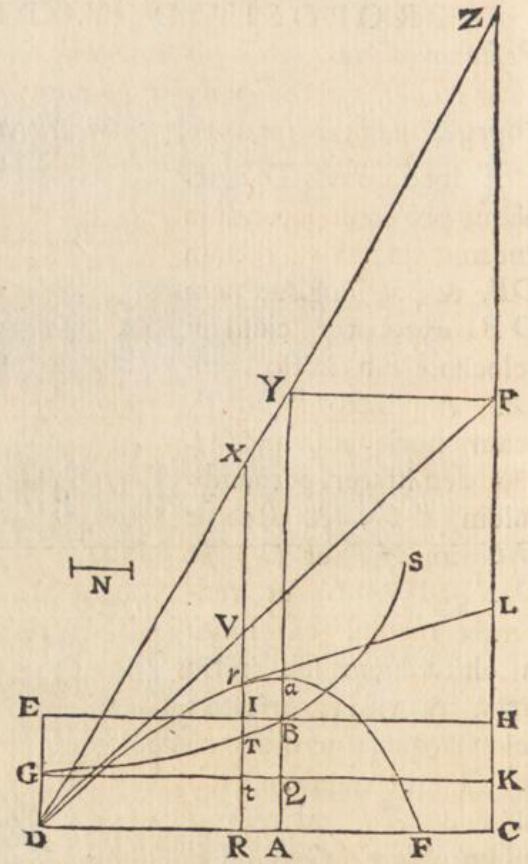
ergo spatia singulis tempusculis descripta, sunt ut ea velocitas Na ducta in tempus MstN, id est ut NC×tN×MN+Ca×tN×MN=ABHC×MN+Ca×MstN, (ob NC×tN=AB×CA, per theor. 4. de Hyp.) Quare (componendo) spatium totum tempore ABtN descriptum, erit ut ABHC×AN+Ca×ABtN=ABba×AN+Ca×Btn, ob ABtN=AB×AN+Btn. Q. E. D.

(x) * *Demittatur perpendiculum PC,* & quoniam DP exponit velocitatem projectionis CP exponet velocitatem verticalem, & DC velocitatem horizontalem, per leg. motûs cor. 1. & 2. 53.

(y) * *Ut sit DA ad AC ut resistentia &c.*, aut, quod idem est (per cor. 1. prop. 111.) ut sit DA ad AC ut velocitas verticalis CP ad velocitatem maximam seu terminalem.

(z) * *Vel (quod perinde est) ut sit rectangulum &c.* Nam cum sit DP ad CP

perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum $DGKC$ cujus latus GK secet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB quâ DC sit ad CP; & ad rectæ DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP in I, t & V occurrat; in eo cape Vr æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel (a) quod perinde est, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, describens curvam lineam $DraF$, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & postea semper appropinquans ad asymptoton PC. Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens rL. *Q. E. I.*



ut velocitas tota projectionis ad velocitatem verticalem, ac proinde ex lege resistentiæ ut resistentia tota sub initio ad resistentiam ex motu in altitudinem, & cum sit DA ad AC ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis (per hypothesim), erit per compositionem rationum & ex æquo DA × DP ad AC × CP ut resistentia tota ex motu projectionis ad vim gravitatis.

(a) * *Vel quod perinde est, cape Rr æqualem &c.* Cum enim sit (per hyp.) N:QB = DC:CP, & DC:CP = DR:RV, ob triangula similia DRV, DCP; erit N:QB = DR:RV, & ideo $RV = \frac{DR \times QB}{N}$. Sed rectangulum GEIt = Gt × GE = DR × QB = GTIE + tGT, & ideo $\frac{GTIE}{N} = \frac{DR \times QB - tGT}{N} = RV - \frac{tGT}{N}$. Quare si capiatur $Vr = \frac{tGT}{N}$, erit $\frac{GTIE}{N} = RV - Vr = Rr$.

* *Æqua-*

Eſt enim N ad QB ut DC ad CP ſeu DR ad RV, ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id eſt $RV - Vr$ ſeu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) (b) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per legum corol 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum aſcenſus, alterum ad latus. Et cum reſiſtentia ſit ut motus, (c) diſtinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, à motu ad latus deſcripta, erit (per prop. 11. hujus) ut (d) linea DR, (e) altitudo verò (per prop. 111. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc eſt, ut linea Rr. Ipſo autem motus initio area $RDGT$ (f) æqualis eſt rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (ſeu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc eſt ad DR ut $AB - AQ$ ſeu QB ad N, id eſt, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem ſub initio. Cum igitur Rr ſemper ſit ut altitudo, ac DR ſemper ut longitudo, atque Rr ad DR ſub initio ut altitudo ad longitudinem: neceſſe eſt

(b) * *Æqualis* $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$ &c. Eſt enim $\frac{DR \times AB - RDGT}{N} = \frac{DR \times RI - RDGT}{N} = \frac{GTIE}{N} = RV - Vr$.

(c) * *Diſtinguetur etiam hæc &c.* In eâ, quam tractamus, reſiſtentiæ hypotheſi motus componere ac dividere licet eodem modo quo componuntur & dividuntur in vacuo; quod in aliis reſiſtentiæ hypotheſibus fieri non poteſt. Cum enim reſiſtentia velocitati proportionalis eſt, ſpatia velocitatibus ſeparatis & conjunctis eodem temporis momento deſcribenda vi reſiſtentiæ minuuntur in eâdem quam habent inter ſe ratione.

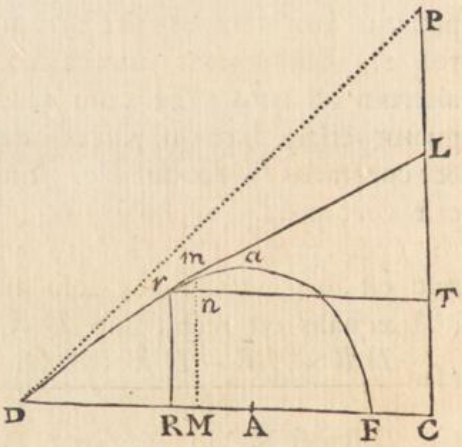
(d) * *Ut linea DR.* Exponitur enim corporis velocitas horizontalis ſub motûs initio per lineam DC. Unde tempus exponi poterit per aream hyperbolicam DRGT, & ſpatium hoc tempore deſcriptum per lineam DR, per cor. prop. 11. hujus. 53.

(e) * *Altitudo vero* &c. Cum enim ſit DA ad AC ut reſiſtentia verticalis ad gravitatem (per hyp.); area GTIE, ſeu ei æqualis $DR \times AB - RDGT$, erit ut altitudo motu verticali deſcripta (per prop. 111. hujus); & quia (per conſtruct.) eſt $Rr = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$, ideoque ob datum N, Rr ut $DR \times AB - RDGT$, erit altitudo ut Rr.

(f) * *Æqualis eſt rectangulo &c.* Nam coincidente puncto t cum G, evaneſcit Tt reſpectu Rt ſeu AQ, fitque area evaneſcens RDGT æqualis RDGt ſeu $DR \times AQ$.

eſt ut Rr ſemper ſit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r (g) perpetuò tangit. *Q. E. D.*

Co-



(g) 54. *Perpetuo tangit.* Quoniam autem DA eſt ad AC ut reſiſtentia ex motu verticali ſub initio orta ad vim gravitatis, tempus totius aſcensûs corporis erit DABG (per Prop. III. hujus), quo etiam tempore percurrit corpus longitudinem DA, & ideo ad maximam ſuam altitudinem a perveniet ubi erit in perpendiculo ABa, & poſtea ſemper appropinquat ad aſymptoton PC (per Cor. Prop. II). Per punctum quodvis trajectoriæ r agatur rT horizontali DC parallela & verticali CP occurrens in T, verticalis Mm ipſi Rr infinite propinqua ſecet rT in n & tangentem rL ſeu curvam in m: & quoniam motus corporis in loco r per arcum rm dividi poteſt in motum horizontalem rn & verticalem nm, erit velocitas horizontalis ad verticalem ut rn ad nm, & ad obliquam ſecundum tangentem curvæ ut rn ad rm. Sed ob ſimilitudinem triangulorum rnm, rTL, eſt rn : mn = rT vel RC : TL, & rn : rm = RC : rL. Quare cum RC ſit ut velocitas horizontalis corpori in loco r reſidua ex velocitate DC quam ſub initio motus habebat in loco D (per Cor. Prop. II.); erit TL ut velocitas verticalis corpori reſidua ex velocitate initiali CP, & rL ut velocitas obliqua in arcu rm ex duabus rT & TL compoſita. Eſt itaque velocitas & proinde reſiſtentia corporis in puncto quovis trajectoriæ r ut curvæ tangens rL.

55. Hinc per datum trajectoriæ punctum r duci poteſt tangens rL. Nam velocitas verticalis LT in loco r eſt ad velocitatem verticalem CP in loco D, ut rectangulum RB ad rectangulum DB (vide figuram textûs) ſive ut RA ad DA (per Prop.. II); ideoque $LT = \frac{CP \times RA}{DA}$.

56. Ex ſuperiori conſtructione facile deducitur æquatio ad trajectoriam DraF. Poſitis enim $DP = b$, $DC = e$, $CP = f$, $AC = g$, $AB = h$, $Rr = y$, & $DR = x$, erit (per theor. 4um. de hyperb. lib. 1.) DC (e): AC (g) = AB (h) : GD = $\frac{gh}{e}$, & RC ($e-x$) : AC (g) = AB (h) : RT = $\frac{gh}{e-x}$, ideoque QB = AB − GD = $\frac{eh-gh}{e}$, & areæ hyperbolicæ RDGT elementum naſcens RT × $dx = \frac{ghdx}{e-x}$, ac proinde area RDGT = gh. S. $\frac{dx}{e-x}$, Præterea (per conſtr.) eſt CP (f) : DC (e) = QB $\frac{(eh-gh)}{e}$: N = $\frac{eh-gh}{f}$, & Rr = y = $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Eſt & DR×AB = hx. Quare erit $y = \frac{fx}{e-g} - \frac{fg}{e-g} \times$ S. $\frac{dx}{e-x}$. Eſt etiam (per conſtr.) DA ſeu $e-g$ ad AC ſeu g ut reſiſtentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis, & ideo per Cor. I. Prop. III. ut *velocitas verticalis*, quam exponit recta CP ſeu f, ad *velocitatem terminalem*; & ideo ſi velocitas terminalis exponatur per lineam a, habebitur

Corol. 1. Eſt igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque ſi producatur RT ad X ut (h) ſit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id eſt, ſi compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY ſecans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Co-

bitur $a = \frac{fg}{e-g}$. Unde fit $y = \frac{ax}{y} - a.S.\frac{dx}{e-x}$ & ſumptis fluxionibus $dy = \frac{a\,dx}{g} - \frac{a\,dx}{e-x}$. Si ponatur RC ſive $e-x=z$, erit $-dx = dz$, & $-\frac{a\,dx}{e-x} = \frac{a\,dz}{z}$, ideoque $-a.S.\frac{dx}{e-x} = a.S.\frac{dz}{z} = a.L.z = a.L.e-x$ (40). Quare erit $y = \frac{ax}{g} + a.L.e-x + Q$ *const.* Et quia evaneſcente y, evaneſcit quoque x, invenitur conſtans $Q = -a.L.e$, & hinc $y = \frac{ax}{g} + a.L.e-x - a.L.e = \frac{ax}{g} - a.L.\frac{e}{e-x}$. Eſt enim $L.e - L.e-x = L.\frac{e}{e-x}$, & ſignis mutatis $L.e-x - L.e = -L.\frac{e}{e-x}$.

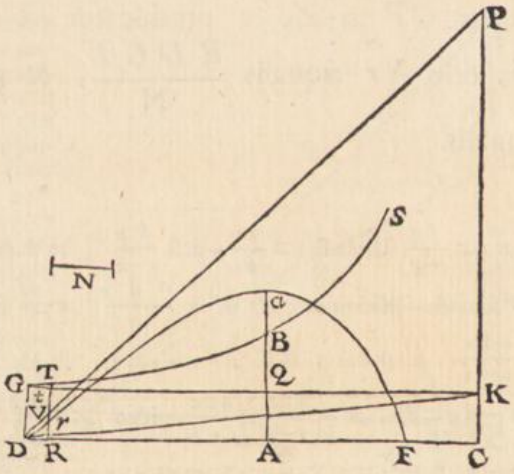
57. Ex hac æquatione alia deducitur inter DV & Vr. Si enim dicantur $DV = v$ & $Vr = z$, erit ob triangula DCP, DRV ſimilia, DP (b) : DV (v) = DC (e) : DR $(x) = \frac{ev}{b}$, & ideo $e - x = \frac{eb - ev}{b}$ & $\frac{e}{e-x} = \frac{b}{b-v}$; ſimiliter erit DC (e) : CP (f) = DR $\left(\frac{ev}{b}\right)$: VR $= \frac{fv}{b}$, ideoque $y = Rr = VR - Vr = \frac{fv}{b} - z$. Quare habebitur $\frac{fv}{b} - z = \frac{aev}{bg} - a.L.\frac{b}{b-v}$, & $z = \frac{fgv - aev}{bg} + a.L.\frac{b}{b-v}$. Sed (ex demonſtr.) $a = \frac{fg}{v-g}$, atque ideo $ae - ag = fg$, & $fg - ae = -ag$; quare erit etiam $z = a.L.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$.

(h) * *Ut ſit RX æqualis* $\frac{DR \times AB}{N}$ *&c.* Hoc enim facto, erit RX ad DR ut data AB ad datam N, ideoque locus punctorum X linea recta quæ tranſit per punctum D, ubi evaneſcente DR evaneſcit quoque RX. Coincidente puncto R cum A fit RX ſeu AY : DA = AB : N, & (per theor. 4. de hyperb.) DC : AC = AB : GD ſeu AQ; & diviſim DC : DA = AB : BQ, per conſtructionem vero CP : DC = BQ : N, ideoque ex æquo CP : DA = AB : N = AY : DA, ac proinde AY = CP. Unde ſi compleatur parallelogrammum ACPY, jungaturque DY ſecans CP in Z, erit DZ linea recta quam punctum X perpetuò tangit. Quoniam igitur $RX = \frac{DR \times AB}{N}$, & $Xr = RX - Rr = \frac{DR \times AB}{N} - \frac{DR \times AB + RDGT}{N}$; erit $Xr = \frac{RDGT}{N}$, & propterea, ob datam N, Xr eſt ut area RDGT, ideoque ut tempus quo corpus ex loco D pervenit in locum r.

* *In*

Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ CR, vel, quod perinde est, innumeræ ZX in progressione geometricâ; erunt totidem Xr in (i) progressione arithmeticâ. Et hinc curva $DraF$ (k) per tabulam logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice D, diametro DG deorsum productâ, & latere recto quod sit ad $2DP$ ut resistentia tota ipso motus initio ad vim gravitatis, parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP, ut in medio uniformi resistente describat curvam $DraF$, ea ipsa erit quâcum exire debet de eodem loco D, secundum eandem rectam DP, ut in spatio non resisten-



(i) * *In progressione arithmeticâ.* Nam (380. lib. 1.) temporibus seu areis RDGT in progressione arithmeticâ crescentibus, abscissæ RC in progressione geometricâ decrescunt, & vice versâ. Quare verticalibus Xr, quæ sunt ut areæ RDGT, in progressione arithmeticâ crescentibus, correspondentes abscissæ RC decrescent in progressione geometricâ, & contra. Sed ob triangulorum DRX, DCZ similitudinem, est DC ad DZ ut DR ad DX, & divisim ut RC ad ZX: quare ob datas DC & DZ, est ZX ad RC in datâ ratione, & ideo ZX crescit vel decrescit in eâdem ratione cum RC.

(k) 58. *Per tabulam Logarithmorum facile delineatur.* Dicantur enim, ut suprà n. 56. $DC = e$, $CP = f$, $AC = g$, $a = \frac{fg}{e-g}$ $DR = x$, $Rr = y$; & erit (56) $y = \frac{ax}{y} - aL\frac{e}{e-x}$. Ob triangula DAY, YPZ similia, est DA seu $e-g$ ad AY vel CP seu f, ut YP vel AC seu g ad PZ, ideoque $PZ = \frac{fg}{e-g} = a$. Triangula similia DRX, YPZ dant etiam YP seu g ad PZ seu a, ut DR seu x ad RX, & propterea $RX = \frac{ax}{g}$. Unde cum sit $RC = e - x$, æquatio $y = \frac{ax}{g} - aL.\frac{e}{e-x}$ fiet $Rr = RX - PZ \times L.\frac{DC}{RC}$. Verum cum $PZ.\ L.\frac{DC}{RC}$ sit Logarithmus rationis DC ad RC in Logarithmica cujus subtangens est a sive PZ, dicendo ut subtangens tabularum ad PZ, ita $L.\frac{DC}{RC}$ è talis desumptus ad ejusdem quantitatis Logarithmum in Logarithmicâ cujus subtangens est PZ. Invenietur itaque $PZ \times L.\frac{DC}{RC}$ ope

sistente describat parabolam. Nam (1) latus rectum parabolæ hujus,

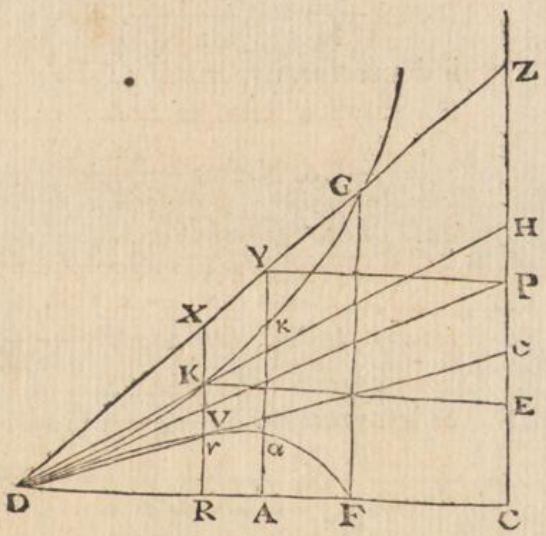
ope tabulæ vulgaris Logarithmorum, & inde obtinebitur R r ordinata ad trajectoriam D r a F, & sic punctum quodlibet r in illa determinabitur.

59. Ex his simplicissima deducitur trajectoriæ D r a F per Logarithmicam constructio. Iisdem enim positis quæ in corollario 1° hujus præscripta sunt, asymptoto C Z & subtangente P Z describatur per punctum D Logarithmica D K k G secans R X in K. Capiatur X r = R K, seu R r = X K, & punctum r erit in trajectoriâ quæsitâ D r a F. Nam si ex puncto K ducatur ad C Z perpendiculum K E, erit C E seu R K Logarithmus rationis D C ad K E vel R C (34), ideoque erit (58) R r = R X − R K = X K, & hinc R K = R X − R r = X r. Q. E. D.

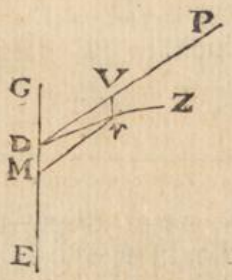
60. Hæc constructio hoc etiam commodi habet, quod statim inveniantur altitudo maxima A a & horizontalis amplitudo D F. Est enim A a = Y k; & si ex puncto G intersectionis Logarithmicæ cum lineâ D Z demittatur ad D C perpendiculum G F, erit D F amplitudo Jactûs: nam coincidente X cum G fit X K seu R r = 0, & ideo coincidit punctum r cum R in horizontali D C. Pariter punctum r, quo trajectoria D r a F rectam quamlibet D c ex puncto D ad C Z ductam secat, invenitur, si capiatur C H æqualis c Z, jungatur D H Logarithmicam secans in K, & ex puncto K demittatur ad D C perpendiculum K R, quod lineam D c secabit in puncto quæsito r; erit enim R K : C H seu Z c = D r : D c = X r : Z c, ideoque X r = R K.

61. Quoniam velocitas projectionis est ad velocitatem terminalem, quæ data est, ut D P ad P Z (58); si manet velocitas projectionis & linea D P, manebit quoque Logarithmicæ subtangens P Z; & ideo una eademque Logarithmicæ species describendæ trajectoriæ D r a F sufficiet, utcumque mutetur projectionis angulus P D C.

(1) 62. *Latus rectum parabolæ hujus &c.* Est enim V r spatium infinite parvum quod corpus vi gravitatis descendendo describit in medio resistente, quodque eodem tempusculo dato describeret in medio non

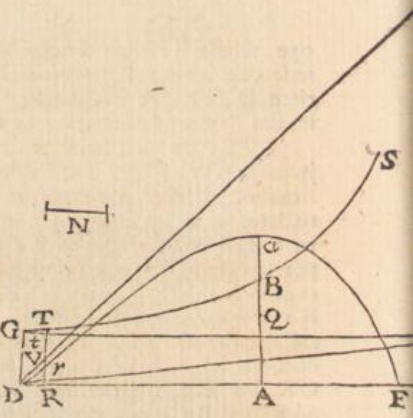


resistente (6). Sed corpus in medio non resistente projectum vi gravitatis describeret arcum parabolæ D r, cujus tangens D P, diameter G D E, abscissa D M = 62.



V r, ordinata M r æqualis & parallela D V (40. lib. 1.), & (per theor. 1. de parabola lib. 1.) rectangulum sub latere recto & abscissâ D M seu V r æquatur quadrato ordinatæ M r seu D V. Quare latus rectum parabolæ hujus ipso motus initio est $\frac{DV^2}{Vr}$.

hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV\ quad.}{Vr}$; & Vr (m) est $\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, si duceretur, hyperbolam GTS tangeret in G, (n) parallela est ipsi DK, ideoque Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id est (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id (o) est (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; (p) hoc est, ut resistentia ad gravitatem. *Q.E.D.*



Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur; & resistentia medii ipso motus initio detur: inveniri potest curva $DraF$, quam corpus idem describet. Nam ex datâ velocitate (q) datur latus rectum parabolæ, ut notum est.

(m) * *Et Vr* est $\frac{tGT}{N}$ (*per constr.*) *seu* $\frac{DR \times Tt}{2N}$; evanescente enim DR seu Gt, triangulum tGT fit $\frac{1}{2}$ Gt×Tt = $\frac{1}{2}$ DR×Tt, & hinc $\frac{tGT}{N} = \frac{DR \times Tt}{2N}$.

(n) * *Parallela est ipsi DK*, ob KC = DG, & subtangentem hyperbolæ æqualem abscissæ DC (per theor. 1. de hyp. lib. 1.). Cum autem evanescit GTt, fit Tt ad tG seu DR ut ordinata GD seu CK ad subtangentem, sive ad DC, & ideo Tt = $\frac{CK \times DR}{DC}$. Et *N* erat $\frac{QB \times DC}{CP}$ (per constr.). Quare si loco *N* & Tt, hi valores substituantur in quantitate $\frac{DR \times Tt}{2N}$ = Vr, invenietur Vr = $\frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$

(o) * *Id est ob proportionales QB & CK, DA & AC &c.* Nam (per theor. 4. de hyp.) AB est ad GD (sive AQ vel CK) ut DC ad AC, & divisim QB est ad CK ut DA ad AC, id est $\frac{QB}{CK} = \frac{DA}{AC}$.

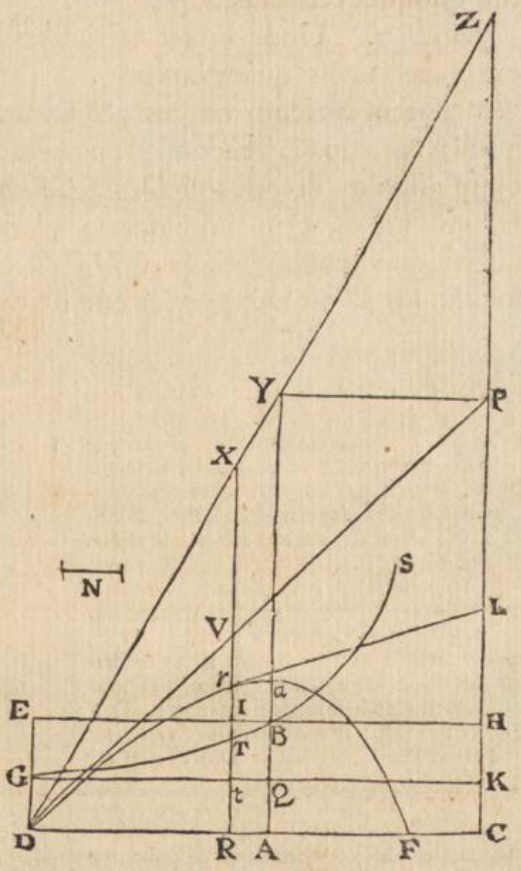
(p) * *Hoc est, ut resistentia ad gravitatem*, per construct. Probl. II.

(q) * *Datur latus rectum parabolæ &c.* Datâ velocitate secundum directionem tangentis DP, datur tum spatium finitum in medio non resistente tempore dato æquabiliter descriptum, tum ex effectu cognito gravitatis in tempore dato, habe-

Et ſumendo $2DP$ ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur DP. Dein ſecando DC in A, ut ſit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eâdem illâ ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum A. (r) Et inde datur curva $DraF$.

Corol. 5. Et contra, ſi datur curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia medii in locis ſingulis r. (f) Nam ex datâ ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motus, tum latus rectum parabolæ: (t) & inde datur etiam velocitas ſub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis r.

Corol. 6. Cum autem longitudo $2DP$ ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in D; & ex auctâ velocitate augeatur reſiſtentia



tur ſpatium verticale finitum Vr eodem tempore vi gravitatis deſcriptum, id eſt, dantur ordinata & abſciſſa parabolæ, quibus datis datur illius latus rectum (per theor. 1. de parab.).

(r) * *Et inde datur curva DraF*, non ſolum conſtructione per hyperbolam, ſed etiam conſtructione illâ quæ Logarithmicam abſolvitur (59). Nam inventâ DP, ſumenda eſt Logarithmicæ ſubtangens PZ ad DP in ratione gravitatis ad reſiſtentiam ſub initio motûs; & ideo Logarithmicæ ſubtangens PZ erit etiam ad DP ut 2 DP ad latus rectum parabolæ. 62.

(f) * *Nam ex datâ ratione* CP × AC ad DP × DA, id eſt (per conſtr.) ratione gravitatis ad reſiſtentiam totam ſub motus initio, dabitur reſiſtentia, ob datam gravitatem (per hyp.); & quia CP × AC eſt ad DP × DA ut 2 DP ad latus rectum parabolæ (per cor. 3.), dabitur illud latus rectum.

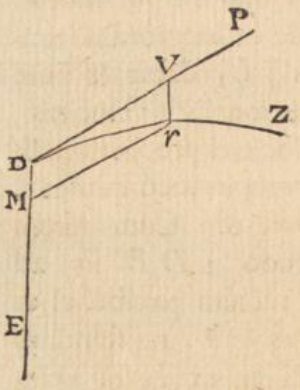
(t) * 63. *Et inde datur etiam velocitas ſub initio motûs.* Nam dato latere recto

in eâdem ratione, (u) at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: (x) patet longitudinem $2DP$ augeri in ratione illâ ſimplici, ideoque velocitati ſemper proportionalem eſſe, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, niſi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam $DraF$ ex phænomenis quamproximè, & inde colligendi reſiſtentiam & velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eâdem cum velocitate, de loco D, ſecundum angulos diverſos CDP, CDp & cognoſcantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, aſſumptâ quâcunque longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod reſiſtentia in D ſit ad gravitatem in ratione quâlibet, & exponatur

parabolæ D r Z, quam grave in medio non reſiſtente deſcribit, & datâ poſitione tangentis D P cum diametro D E, parabola deſcribi poteſt; datur autem in ſingulis locis velocitas corporis gravis parabolam datam deſcribentis: Sit enim abſciſſa D M verticali V r æqualis & parallela, & ordinata M r etiam æqualis & parallela tangenti D V; datur tum velocitas quam corpus grave è puncto V cadendo per altitudinem datam V r habet in r, tum tempus quo altitudinem illam deſcribit, & hinc datur tempus idem quo motu uniformi deſcribit ſpatium datum D V (40. lib. 1.), ideoque datur velocitas uniformis per tangentem D P, quæ eſt ipſa velocitas projectionis in D.

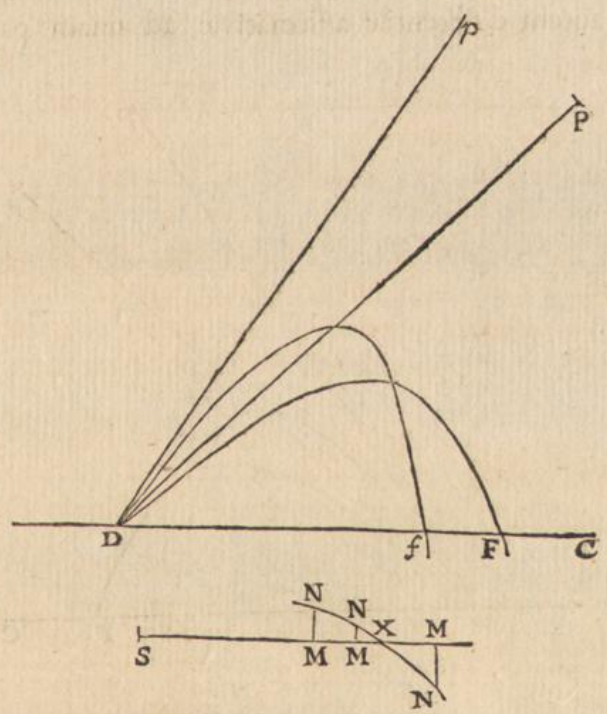
(u) * *At latus rectum parabolæ augeatur.* Nam cum velocitas ſecundum tangentem D V uniformis ſupponatur (40. lib. 1.); Si, dato tempore quo deſcribitur D V, velocitas illa creſcat, creſcet D V in eadem ratione, manente ſpatio verticali V r hoc eodem tempore dato deſcripto; ſed latus rectum parabolæ D r Z eſt $\frac{DV^2}{Vr}$ (per cor. 3.) & quantitas $\frac{DV^2}{Vr}$ manente V r, creſcit ut DV^2. Quare latus rectum parabolæ D r Z augetur in ratione duplicatâ velocitatis.



(x) * *Patet longitudinem* $2DP$ *&c.* Gravitas dicatur G, reſiſtentia initio motûs R, latus rectum parabolæ, ut ſuprà, $\frac{DV^2}{Vr}$; & erit $2DP : \frac{DV^2}{Vr} = G : R$, ideoque $2DP = \frac{G \times DV^2}{R \times Vr}$, hoc eſt, datis V r & G, $2DP$ eſt ut $\frac{DV^2}{R}$, & quia R eſt ut velocitas, ſeu ut D V, erit etiam $2DP$ ut D V, ſive ut velocitas (per notam ſuperiorem).

* 64. *Dein-*

tur ratio illa per longitudinem quamvis *SM*. (y) Deinde per computationem, ex longitudine illâ assumptâ *DP*, inveniantur

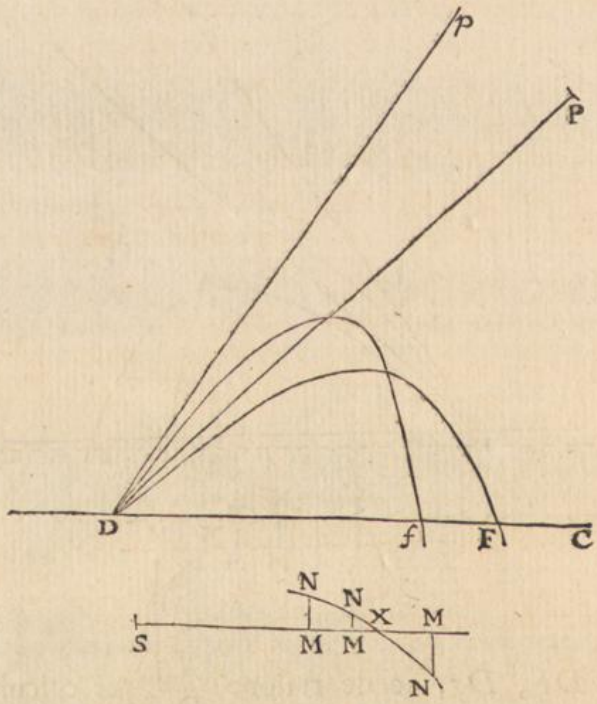


longitudines *DF*, *Df*, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, (z) auferatur ratio eadem per experimentum inventa, &

(y) 64. *Deinde per computationem.* Datâ enim DP longitudine & positione, dantur CP & DC, & datâ ratione resistentiæ in D ad gravitatem dantur DA & AC per constructionem problematis istius: His autem datis, curva DraF (vide figuras superiores) describi potest, & hinc invenitur amplitudo horizontalis DF constructione per hyperbolam vel per logarithmicam (59). Si autem rem voluerimus calculo tractare, uti poterimus æquatione $y = \frac{ax}{g} - a.L.\frac{e}{e-x}$ (63) in qua ut sit $x = DF$, ponenda est $y = 0$, & æquatio fiet $\frac{ax}{g} = L.\frac{e}{e-x}$, ex quâ per regressum serierum, vel per alias approximationes invenietur x per g & e, seu DF per AC & DC. 64.

(z) 65. *Auferatur ratio eadem per experimentum inventa*; & si nihil est residui, recte assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem; si quid residui fuerit, *exponatur differentia per MN*. Nam si recte assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem, curva DraF per constructionem vel per computationem descripta similis est trajectoriæ quam corpus in medio resisten-

exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ



SM, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* secans rectam *SMMM* in *X*, & (a) erit *SX* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam

te reverâ describit, & hinc homologarum in illis curvis linearum debet esse ratio data. Determinatur enim trajectoria vera ex velocitate & angulo projectionis æquali P D C vel p D C, atque ex ratione resistentiæ ad gravitatem datam; & curva per constructionem delineata determinatur per longitudinem assumptam D P vel D p, quæ velocitatem datam semper potest exhibere, per angulum P D C vel p D C, & per rationem linearum D A, A C, seu rationem resistentiæ ad gravitatem, si recte assumpta fuit: quare differentia tota inter veram trajectoriam & curvam hoc modo per constructionem descriptam est in magnitudine linearum homologarum, quarum ratio est eadem in utrâque curvâ. Curvæ igitur illæ similes sunt.

(a) *66. Et erit SX vera ratio resistentiæ ad gravitatem.* Nam ubi M N seu differentia rationum $\frac{F f}{D F}$, quæ per computatio-

invenire oportuit. Ex (b) hac ratione colligenda eſt longitudo *DF* per calculum; & longitudo quæ ſit ad aſſumptam longitudinem *DP*, ut longitudo *DF* per experimentum cognita ad longitudinem *DF* modo inventam, erit vera longitudo *DP*. Quâ inventâ, habetur tum curva linea *DraF* quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

LIBER SECUND. SECTIO I. PROP. IV. PROBL. II.

Scholium.

Cæterum, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis, (†) hypotheſis eſt magis mathematica quam naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, reſiſtentiæ corporum ſunt in dupli-

tionem & per experimentum inventæ ſunt, nulla eſt, ratio reſiſtentiæ ad gravitatem recte aſſumpta fuit (65). Quare cum SM aſſumptam illam rationem exponat, & evaneſcat MN ubi SM fit SX, patet in hoc caſu rationem reſiſtentiæ ad gravitatem recte exponi per lineam SX. Itaque ſi innumeræ abſciſſæ SM aſſumptæ fuiſſent, & innumeræ ordinatæ NM per experimenta determinatæ, curva quam punctum N perpetuò tangit, rationem accuratam reſiſtentiæ ad gravitatem determinaret per ejus interſectionem X cum linea SM; ideoque ſi multa fiunt tentamina, ſicque plura obtineantur puncta N, & per ea ducatur curva regularis NNXN, illa quam proxime punctum X quæſitum determinabit; methodum autem ducendi curvam regularem per plura puncta data mox in Scholio ſumus tradituri.

(b) * *Ex hac ratione colligenda eſt &c.* Sit, exempli cauſâ, ratio aſſumpta reſiſtentiæ ad gravitatem 1 ad 10, ſeu $SM = \frac{1}{10}$; inventa autem ſit $SX = 2SM = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; erit reſiſtentia ad gravitatem ut 1 ad 5. Ex hac ratione & aſſumptâ longitudine DP colligenda eſt longitudo DF ſeu amplitudo jactûs (64); & quoniam inventâ verâ ratione reſiſtentiæ ad gravitatem, trajectoria per calculum vel per conſtructionem inventa ſimilis eſt trajectoriæ quam corpus in medio reſiſtente, reverâ deſcribit (65), erit amplitudo DF per calculum inventa ad amplitudinem DF per experimentum cognitam, ut aſſumpta longitudo DP ad veram longitudinem DP pro trajectoriâ in medio reſiſtente deſcriptâ. Hâc autem longitudine inventâ, habetur (per cor. 4.) tum curva linea DraF quam corpus reipſâ deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis (per cor. 5.). 66.

(†) 67. Ex ſupra demonſtratis determinari poſſent motus corporis in medio quod reſiſtit partim uniformiter, partim in ratione velocitatis. Et quidem ſi corpus ſola vi inſitâ in hoc medio feratur, pars illa reſiſtentiæ quæ eſt uniformis, tanquam vis conſtans gravitatis quâ corporis aſcendentis motus retardatur, conſideranda eſt, & in ſuperioribus conſtructionibus pro corporis aſcenſu, non gravitas, ſed ea reſiſtentia uniformis data per lineam AC, vel per rectangulum AH exponi debet. Si vero corpus in prædicto medio vi gravitatis etiam urgeatur, linea AC gravitatem & reſiſtentiæ partem uniformem ſimul junctas, ſi corpus aſcendit, & exceſſum gravitatis ſupra eam reſiſtentiæ partem uniformem, ſi corpus deſcendit, exponet. Qua ratione cæteris manentibus, determinabuntur motus corporis tum ſolâ vi inſitâ moti, tum vi gravitatis urgente aſcendentis & deſcendentis in medio quod reſiſtit partim in ratione datâ, partim in ratione velocitatis, tum etiam corporis projecti.

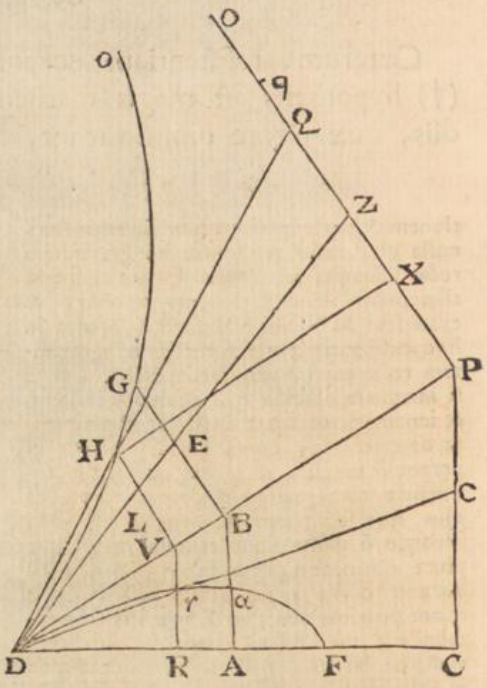
Ete-

plicatâ ratione velocitatum. (c) Etenim actione corporis velocioris comunicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; estque resistentia (per motus leg. II. & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege resistentiæ.

(c) *Etenim actione &c.* Hæc patent per demonstrata (8).

68. Scholium. Ex æquatione ad curvam DraF, quam (57) invenimus, deducitur hujus curvæ per Logarithmicam satis elegans constructio, quâ usi sunt Varignonius & Hermannus. Eam hic exponemus breviter. Deinde cum in superioris propositionis corollario ultimo & alibi postea describenda sit curva regularis quæ per data puncta transeat, hoc problema, quod Newtonus in Epistolâ ad Oldenburgum anno 1676. datâ unum fere ex pulcherrimis dicit quod solvere desideraverit, solvemus.

69. Iisdem positis quæ in superiori constructione Newtoni, sit $DP = b$, $DV = v$, $Vr = z$, & DP ad a ut velocitas projectionis ad velocitatem terminalem; & erit (57) $z = a.L.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. Oportet curvam DraF ex hac æquatione per Logarithmicam construere. In recta PO ad DP normali capiatur $PZ = a$, asymptoto PO & subtangente PZ describatur per punctum D Logarithmica DHO, cujus DZ erit tangens, & per punctum quodvis V in linea DP agatur VH parallela PO Logarithmicæ occurrens in H & tangenti DZ in L, capiaturque verticalis VR pars Vr æqualis HL. Punctum r erit in trajectoria quæsitâ DraF. Nam ducto ex H ad PO perpendiculo HX, erit (per construct.) $VP = HX = b - v$, $PZ = a$, & hinc $PX = HV = PZ \times L.\frac{DP}{HX} = a.L.\frac{b}{b-v}$ (34) Et ob triangula DVL, DPZ similia, $DP(b) : PZ(a) = DV(v) : VL = \frac{av}{b}$. Quare erit $HV - LV = a.L.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = z = Vr$. Q. E. D.



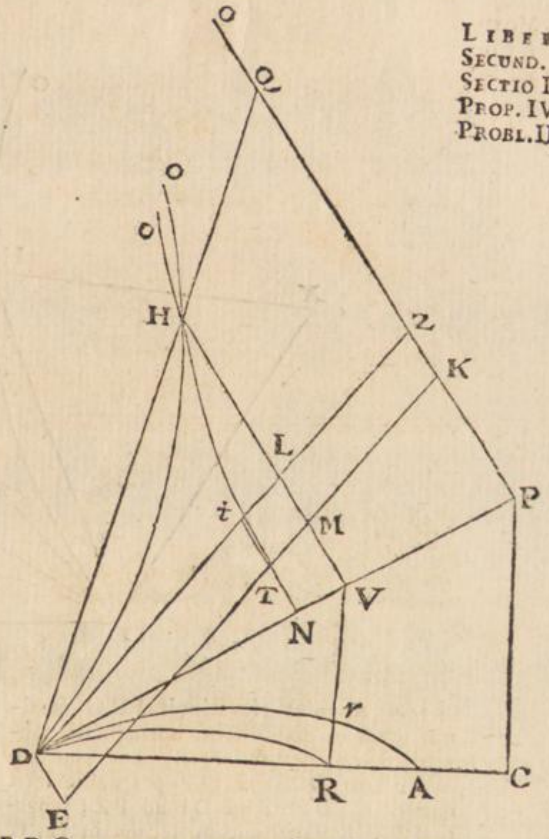
70. Cor. 1. Si per punctum A Newtoni constructione determinatum erigatur verticalis AB secans DP in B, & per B erigatur ad DP perpendiculum BG secans DZ in E & Logarithmicam in G, capiaturque Ba æqualis GE, erit Aa maxima altitudo jactûs.

71. Cor. 2. Punctum r quo trajectoria rectam Dc ex D ductam ad PC, secat, invenitur, si in lineæ ZO capiatur ZQ æqualis Pc, jungantur DQ logarithmicam secans in H, demittatur ex H ad DP, perpendiculum HV, & ex V ad

ad DC perpendiculum VR, quod rectam Dc secabit in puncto quæsito r, atque hinc determinatur etiam horizontalis amplitudo DF, capiendo ZQ æqualem Pc, & reliqua perficiendo ut modò diximus. Nam ob parallelas Vr & Pc, HV & QP, est Pc : Vr = PD : DV = DZ : DL = QZ : HL; sed (per constr.) QZ = Pc: ergo Vr = HL, ideoque punctum r est in trajectoria DraF (69).

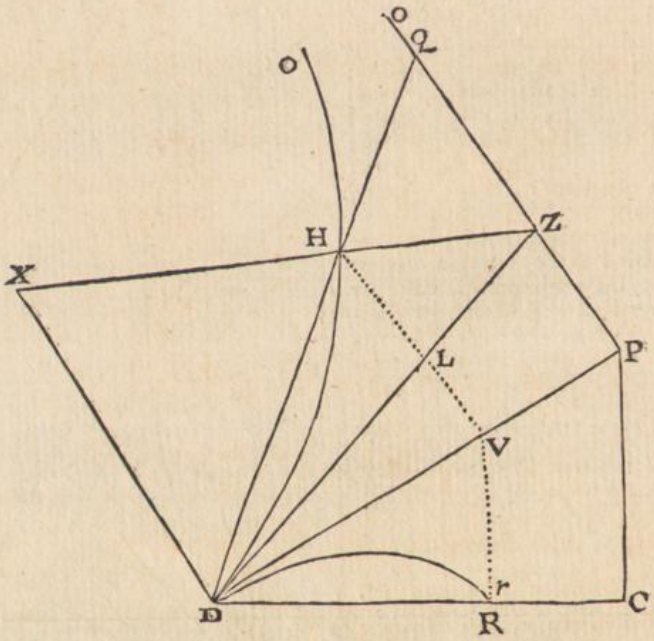
72. Ex demonstratis inveniri potest angulus elevationis PDC, sub quo corpus datâ velocitate DP projectum transibit per punctum r in verticali VR datum. Dicantur DR = c, Rr = e, DZ = f, DL = x, HL = Vr = z, VR = $z + e = y$; & ob triangula DLV, DZP similia erit DZ(f) : DP(b) = DL(x) : DV = $\frac{bx}{f}$, & ob angulum DRV rectum $DV^2 = DR^2 + VR^2$, hoc est, $\frac{bbxx}{ff} = cc + yy$, æquatio ad hyperbolam, cujus diameter transversa est $\frac{2cf}{b}$, diameter cunjugata $2c$, abscissa a centro sumpta x, & ordinata y seu $z + e$, ut calculo inito liquet. Inde autem deducitur hæc constructio. Per punctum D ducatur infra lineam DP recta DE parallela PZ & æqualis Rr, per E agatur EK parallela DZ secans HV in M; & erit LM = DE = Rr = e, ideoque HM = $z + e = y$, atque EM = DL = x, & proinde centrum hyperbolæ est in E; cumque semidiameter transversa sit $\frac{cf}{b} = \frac{DR \times DZ}{DP}$, si capiatur in linea DP pars DN æqualis DR, & per punctum N erigatur ad DP perpendiculum NT, secans EK in T & DZ in t, erit DP ad DZ ut DN seu DR ad Dt seu ET, ideoque $ET = \frac{DR \times DZ}{DP}$, & propterea ET semidiameter transversa, EM abscissa, & MH ordinata hyperbolæ THo, cujus semidiameter conjugata æquatur DR. Hæc itaque hyperbola occursu suo cum Logarithmica DHo determinabit punctum H, ex quo si demittatur ad DP perpendiculum HV secans DZ in L, dabuntur DV & HL æqualis Vr, ideoque dabitur etiam VR = Vr + Rr. His autem datis, datur angulus elevationis PDC, cujus sinus est VR, posito sinu toto DV.

73. Si vero quæratur angulus projectionis



PDC, ut corpus per punctum R in horizontali DC datum transeat, fiet Rr = e = o, & æquatio ad hyperbolam evadet $\frac{bbxx}{ff} = cc + zz$, ob $y = z + e = z$. In constructione vero coincidet punctum E cum puncto D, & T cum t, cæteris manentibus ut supra. Et quia si per hyperbolæ & Logarithmicæ intersectionem H ducatur recta DH secans Po in Q, est QZ = PC (71.); liquet in eo casu esse QZ sinum anguli elevationis PDC, existente radio seu sinu toto DP. Observandum porro est, quod si in his constructionibus hyperbola Logarithmicam nusquam attingat, problema est impossibile, quod si eam bis secet, anguli duo satisfaciunt. Patet quoque datam semper esse rationem diametrorum hyperbolæ, ubicumque situm sit punctum r, vel R; est enim DR ad $\frac{DR \times DZ}{DP}$ in ratione data DP ad DZ. 73.

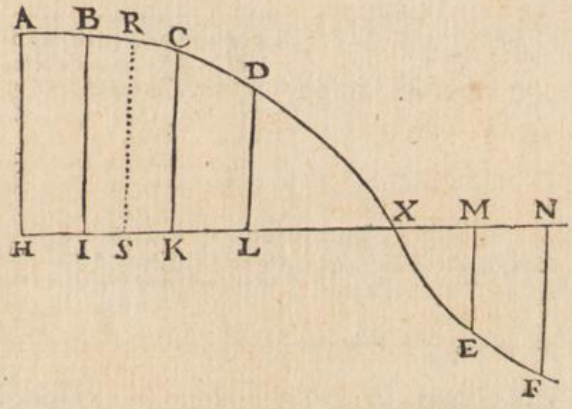
74. An-



74. Angulus elevationis PDC maximæ omnium amplitudini horizontali conveniens ita determinatur. Per punctum D ducatur DX ipsi DP perpendicularis quæ sit ad DP ut est DP ad PZ; jungatur ZX Logarithmicam secans in H, & ex D per H ducatur recta DH secans PO in Q; erit QZ sinus anguli quæsiti, existente sinu toto DP. Sit enim DR amplitudo horizontalis maxima $= c$, $DV = v$, $VR = Vr = z$, & erit ob angulum DRV rectum $vv - zz = cc$, & sumptis fluxionibus $2vdv - 2zdz = 2cdc = 0$ (48), ideoque $vdv = zdz$. Sed (69) $z = aL\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = aLb - aLb - v - \frac{av}{b}$, & sumptis fluxionibus $dz = \frac{adv}{b-v} - \frac{adv}{b} = \frac{avdv}{bb-bv}$. Quare erit $zdz = \frac{azvdv}{bb-bv} = vdv$, & ideo $az = bb - bv$, ac proinde $DP(b) : PZ(a) = HL(z) : PV(b-v)$; verum ob triangulum DVL, DPZ similitudinem est $DP : DZ = PV : ZL$; unde per compositionem rationum & ex æquo $DP^2 : PZ \times DZ = HL : ZL$, & quia $DP^2 = DX \times PZ$ (per constr.), erit $DX : DZ = HL : LZ$. Quapropter punctum H per æquationem $az = bb - bv$ determinatum perpetuo tangit lineam rectam XZ; cumque idem punctum in Logarithmica esse oporteat ut determinetur maxima amplitudo DR, si per intersectionem H rectæ XZ & Logarithmicæ DHo ducatur recta DQ secans Po in Q, habebitur QZ sinus anguli PDC (73) maximæ amplitudini DR convenientis. Q. E. D.

75. Jam si oporteat curvam regularem describere per data quotlibet puncta transeuntem, uti possumus generali methodo, quam Newtonus in arithmeticâ universali tradidit, quamque deinde in problematis 55, 58 & 61. adhibuit. Hæc sunt ipsius verba: Cum curva non datur specie, sed determinanda proponitur, possisque pro arbitrio æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat, & hanc pro eâ designandâ tanquam si daretur assumere, ut ex

ejus



ejus assumptione quomodocumque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinetur. Si itaque curva generis dati per data puncta delineanda sit, assumatur generalis ad curvam illam æquatio cum terminorum coëfficientibus indeterminatis, & curvâ ad rectam aliquam positione datam relatâ, ex singulis punctis datis in rectam illam demittantur perpendiculares aut rectæ aliæ inter se parallelæ, quæ datæ erunt ut & earum abscissæ a dato in rectâ illâ puncto computatæ; deinde in assumptâ æquatione loco abscissæ variabilis x & ordinatæ etiam variabilis y scribantur abscissæ & ordinatæ per puncta data determinatæ, & tot inde obtinebuntur æquationes quot sunt puncta data per quæ curva transire debet, atque ex illis æquationibus, generalis æquationis assumptæ coëfficientes determinabuntur. Hujus methodi exemplum sit solutio Lemmatis 5' lib. 3. principiorum, quod ita propositum est: invenire curvam generis parabolici quæ per data quotcumque puncta transibit; cujus Lemmatis solutionem dedit ibidem Newtonus, sed sine demonstratione quæ tamen ex ejusdem auctoris differentiali methodo colligi potest.

76. I. Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam HN demittantur perpendicula quotcumque AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c.; positisque abscissis variabili $HS = x$, & ordinatâ $RS = y$, assumatur generalis ad parabolam ABDEF æquatio $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$, sintque A, B, C, D, E, &c. cum suis signis indeterminatæ. Dicantur $AH = a$, $BI = f$, $CK = g$, $DL = h$, $ME = -k$, & $HI = l$, $HK = m$, $HL = n$, $HM = t$, &c. Ponantur 1°. $y = a$ & $x = o$; 2°. $y = f$, & $x = l$; 3°. $y = g$ & $x = m$; 4°. $y = h$, & $x = n$; 5°. $y = -k$, & $x = t$ atque ita deinceps; & loco y & x seorsim substituantur hi valores in æquatione generali assumpta, quæ in has mutabitur: 76.

II. $a = A$

$$f = A + Bl + Cl^2 + Dl^3 + El^4 + \&c.$$
$$g = A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Em^4 + \&c.$$
$$h = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + \&c.$$
$$-k = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + \&c.$$

Subducantur æquationes inferiores ex superioribus, nimirum secunda ex primâ, tertia ex secunda, & ita deinceps. Differentia primæ ac secundæ ordinatæ per primum intervallum HI divisa dicatur b, id est, $b = \frac{a-f}{l}$; secundæ ac tertiæ differentia per secundum intervallum IK divisa dicatur 2 b, id est, $2b = \frac{f-g}{m-l}$, & ita de cæteris. Prodibunt æquationes sequentes.

III. $b = \frac{a-f}{l} = -B - Cl - Dl^2 - El^3$

$2b = \frac{f-g}{m-l} = -B - Cl - Cm - Dl^2 - Dlm - Dm^2 - El^3 - El^2m - Elm^2 - Em^3$

$3b = \frac{g-h}{n-m} = -B - Cm - Cn - Dm^2 - Dmn - Dn^2 - Em^3 - Em^2n - Emn^2 - En^3$

$4b = \frac{h+k}{t-n} = -B - Cn - Ct - Dn^2 - Dnt - Dt^2 - En^3 - En^2t - Ent^2 - Et^3$

Simili modo capiantur adhuc æquationum istarum differentiæ, & dividantur per intervallum inter duas ordinatas interceptum HK, IL, KM, & differentiæ sic divisæ dicantur c, 2c, 3c, ut hic factum videtur.

IV. $c = \frac{b-2b}{m} = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2.$

$2c = \frac{2b-3b}{n-l} = C + Dl + Dm + Dn + El^2 + Elm + Em^2 + Eln + Emn + En^2.$

$3c = \frac{3b-4b}{t-m} = C + Dm + Dn + Dt + Em^2 + Emn + En^2 + Emt + Ent + Et^2.$

Harum æquationum differentiæ per intervalla trium ordinatarum HL, IM, divisæ dicantur d, 2d, & erunt æquationes

V. $d = \frac{c-2c}{n} = -D - El - Em - En$

$2d = \frac{2c-3c}{t-l} = -D - El - Em - En - Et$

Harum tandem æquationum differentia per intervallum quatuor ordinatarum HM divisa dicatur e, & erit

VI. $e = \frac{d-2d}{t} = E.$

Si plura fuissent puncta data, pluresque ideo fuissent æquationes, eodem modo pergendum esset usque ad differentiam ultimam: quæ hic est differentia quarta, & sic tandem pervenitur ad valorem coëfficientis ultimi termini æquationis generalis assumptæ, & deinde retrogrediendo inveniuntur valores aliarum coëfficientium D, C, B, & A hoc modo.

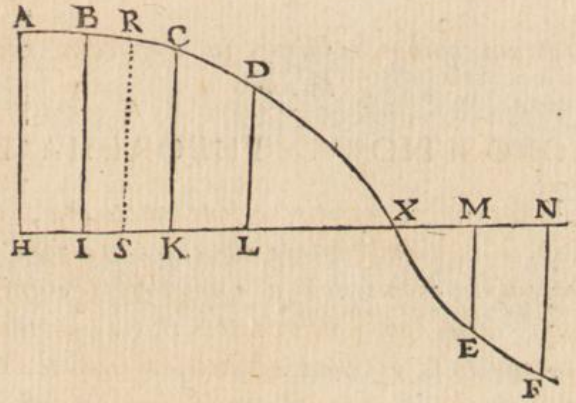
VII. Quoniam $e = E$, & (V) $d = -D - El - Em - En$, erit $D = -d - el - em - en$; & quia (IV) est $c = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$ ideoque $C = c - Dl - Dm - El^2 - Elm - Em^2$ si loco E & D substituantur eorum valores modo inventi, habebitur $C = c + dl + dm + elm + eln + emn$. Et simili modo si in æquatione (III) $b = -B - Cl - Dl^2 - El^3$, substituantur coëfficientium E, D, C valores, invenietur $B = -b - cl - dlm - elmn$.

VIII. Cum igitur sit (II.) $A = a$, æquatio assumpta $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, in hanc abit $y = a - x.(b - cl + dlm + elmn) + x^2.(c + dl + dm + elm + eln + emn) - x^3.(d + el + em + en) + ex^4 = a - bx - clx + cx^2 - dlmx + dlx^2 + dmx^2 - dx^3 - elmnx + elmx^2 + elnx^2 + emnx^2 - elx^2 - emx^3 - enx^3 + ex^4$, seu $y = a + b.(-x) + c.(-x \times \overline{l-x}) + d.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x}) + e.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x}) +$ &c. In quâ æquatione patet terminorum progressus, & quomodo datâ abscissâ HS seu x inveniri compendiose possit correspondens ordinata SR seu y. Nam si dicantur $-x$ seu $-HS = p$; $-IS \times p$, seu $-x \times \overline{l-x} = q$; $+SK \times q$, seu $-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} = r$; $+SL \times r$, seu $-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x} = s$, ita scilicet pergendo ad usque perpendiculum penultimum, quod hic est DL; erit RS seu $y = a + bp + cq + dr + es +$ &c.

IX. Atque hæc ipsa est regula quam Newtonus casu secundo Lemmatis V. lib. III. sic tradit: collige perpendiculorum AH, BI, CK &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, 2b, 3b, 4b &c; secundas per intervalla bina divisas c, 2c, 3c, 4c &c; tertias per intervalla terna divisas d, 2d, 3d, &c.; quartas per intervalla quaterna divisas e, 2e, &c. Et sic deinceps. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum. Et erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es +$ &c. ubi observandum est, præponenda esse signa negativa terminis HS, IS &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, & signa affirmativa terminis SK, SL &c. qui jacent ad alteras partes puncti S.

X. Per hanc igitur regulam, assumptâ quâlibet abscissâ HS, invenietur valor ordinatæ correspondentis SR, singulaque pa-

rabo-



rabolæ puncta determinabuntur. Si vero in æquatione ponatur $y=0$, & deinde quæratur valor abscissæ x, cognoscetur punctum X quo parabola rectam HN intersecat.

77. XI. Si perpendiculorum HA, IB, KC, LD &c. æqualia sunt intervalla HI, IK, KL &c.; cæteris ut supra (I) nominibus servatis, positoque intervallo $HI=l=1$, erunt $HK=m=2$, $HL=n=3$, $HM=t=4$, &c. & perpendiculorum differentiæ per intervalla, per intervalla bina, terna quaterna & divisæ erunt (III, IV, V, VI) quæ sequuntur.

Differentiæ primæ per intervalla divisæ, $b=a-f$, $2b=f-g$, $3b=g-h$, $4b=h+k$.

Differentiæ secundæ per intervalla bina divisæ, $c=\frac{a-2f+g}{2}$, $2c=\frac{f-2g+h}{2}$, $3c=\frac{g-2h-k}{2}$.

Differentiæ tertiæ per intervalla terna divisæ, $d=\frac{a-3f+3g-h}{6}$, $2d=\frac{f-3g+3h+k}{6}$.

Differentiæ quartæ per intervalla quaterna divisæ, $e=\frac{a-4f+6g-4h-k}{24}$.

XII. Ponantur $a-f=\beta$, $a-2f+g=\varkappa$, $a-3f+3g-h=\delta$, $a-4f+6g-4h-k=\varepsilon$; & erit $b=\beta$, $c=\frac{\varkappa}{2}$, $d=\frac{\delta}{6}$, $e=\frac{\varepsilon}{24}$. Quare si hi valores substituantur in æquatione supra (VIII.) inventa, $y=a+b.(-x)+c.(-x\times l-x)+d.(-x\times l-x\times m-x)+e.(-x\times l-x\times m-x\times n-x)+$ &c., illa in hanc mutabitur $y=a+\beta(-x)+\frac{\varkappa(-x\times 1-x)}{2}+\frac{\delta.(-x\times 1-x\times 2-x)}{2\times 3}+\frac{\varepsilon.(-x\times 1-x\times 2-x\times 3-x)}{2\times 3\times 4}+$ &c. 77.

Quapropter si in hâc ultimâ æquatione dicantur $-HS$, seu $-x=p$; $\frac{1}{2}p$ in $-IS$, seu $\frac{-x\times 1-x}{2}=q$; $\frac{1}{3}q$ in $+SK$, seu $\frac{-x\times 1-x\times 2-x}{2\times 3}=r$; $\frac{1}{4}r$ in $+SL$, seu $\frac{-x\times 1-x\times 2-x\times 3-x}{2\times 3\times 4}=s$; & ita pergatur ad usque perpendiculum penultimum, erit $y=a+\beta p+\varkappa q+\delta r+\varepsilon s+$ &c. ut Newtonus in casu primo Lemmatis V. lib. III. determinavit. De hoc problemate Lector consulat clarissimos auctores Hermannum in appendice ad phoronomiam, Craigium in tractatu de calculo fluentium, maximè vero Stirling in libro de interpolatione serierum, in quo totam hanc materiam copiosè & sagaciter explicat.