Der barycentrische Calcul

Möbius, August Ferdinand

Leipzig, 1827

Viertes Capitel. Von Ausdrücken gerader Linien und Ebenen.

Durch die drei ursprünglichen F.linien BC,.. und die drei neuen $B,C,$,.. wird die Ebene in sechszehn Theile zerlegt, von denen vier Theile endlich und zwölf unendlich sind. In Verbindung der oben gegebenen Kennzeichen rücksichtlich der erstern F.linien mit den jetzt aufgestellten rücksichtlich der letztern lassen sich nun leicht die Kennzeichen für jedes dieser sechszehn Felder einzeln finden. Allein die weitere Ausführung hiervon, so wie auch den Beweis für die eben gegebenen Regeln, muss ich, um nicht zu weitläufig zu werden, den Lesern selbst überlassen.

Viertes Capitel.

Von Ausdrücken gerader Linien und Ebenen.

§. 37. Bezeichnen E und E' zwei Punkte, so ist $E+wE'$ der Ausdruck eines Punktes in der durch E und E' bestimmten geraden Linie, und zwar jedes beliebigen Punktes dieser Linie, wenn es frei steht, dem Verhältnisse $1:w$ jeden beliebigen Werth beizulegen (§. 29.). Man kann daher den Ausdruck $E+wE'$, sobald darin w als eine veränderliche Grösse genommen wird, den Ausdruck der geraden Linie EE' selbst nennen, indem die Construction desselben alle in dieser Linie begriffenen Punkte giebt.

I. Ausdrücke gerader Linien in einer Ebene.

§. 38. Seyen nun E und E' zwei Punkte einer Ebene; die F.punkte derselben heissen A, B, C, und auf diese bezogen sey:

$$eE=aA+bB+cC,\quad e'E'=a'A+b'B+c'C\,;$$

so wird, wenn man statt w die Veränderliche v einführt, so dass $w=\frac{ve'}{e}$:

$$E + vE' \equiv \varrho E + v\varrho' E' \equiv$$
$$(a + a'v) A + (b + b'v) B + (c + c'v) C.$$

Dieser letztere Ausdruck mit der Veränderlichen v ist also der Ausdruck einer Geraden, welche durch die zwei Punkte $aA + bB + cC$ und $a'A + b'B + c'C$ der Ebene geht, und folglich der allgemeine Ausdruck für eine gerade Linie in einer Ebene, weil die Ausdrücke der beiden Punkte von ganz allgemeiner Form sind.

§. 39. Zusätze. a. Eine gerade Linie in einer Ebene wird im Allgemeinen jede der drei F.linien BC, CA, AB der Ebene schneiden. Es geschehe dies resp. in den Punkten A', B', C'. Für diese Punkte der Linie sollen nun die speciellen Werthe der Veränderlichen v in dem Ausdrucke der Linie, und somit die Ausdrücke der Punkte selbst gefunden werden. — Da der Punkt A' zugleich in der F.linie BC liegt, so ist für ihn in dem Ausdrucke der Linie der Coëfficient von A, $a + a'v = 0$ (§. 32.), folglich $v = -\frac{a}{a'}$. Substituirt man diesen Werth in den Coëfficienten von B und C, so kommt: $A' \equiv (ab' - a'b) B - (ca' - c'a) C$. Setzt man noch der Kürze willen:

$$bc' - b'c = \alpha,\quad ca' - c'a = \beta,\quad ab' - a'b = \gamma, \qquad (1)$$

so wird . . . . $(\gamma - \beta) A' = \gamma B - \beta C,$
und eben so findet sich $(\alpha - \gamma) B' = \alpha C - \gamma A,$
$(\beta - \alpha) C' = \beta A - \alpha B.$ (2)

b. Da die drei Punkte A', B', C' in einer Geraden liegen, so muss auch zwischen ihnen allein eine Gleichung statt finden. In der That dividirt man die drei Gleichungen (2) resp. mit $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, und addirt sie hierauf, so kommt:

$$\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right) A' + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\alpha}\right) B' + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) C' = 0,$$

c. Wenn man in dem Ausdrucke einer geraden Linie in einer Ebene, der Veränderlichen ν einen solchen Werth giebt, dass die Summe der drei Coëfficienten null wird, so erhält man den Ausdruck für einen unendlich entfernten Punkt der Linie (§. 32). Nun ist jene Summe $= a + b + c + (a' + b' + c')\nu$; folglich, wenn man sie $= 0$ setzt: $\nu = -\dfrac{a+b+c}{a'+b'+c'}$. Diesen Werth von ν in dem Ausdrucke substituirt, ergiebt sich der Coëfficient von A, $= \dfrac{a(a'+b'+c') - a'(a+b+c)}{a'+b'+c'} = \dfrac{\gamma-\beta}{a'+b'+c'}$ und eben so die Coëfficienten von B und C, $= \dfrac{\alpha-\gamma}{a'+b'+c'}$ und $\dfrac{\beta-\alpha}{a'+b'+c'}$. Hiernach wird, nachdem man zuvor jeden Coëfficienten mit $-(a'+b'+c')$ multiplicirt hat, der Ausdruck für den unendlich entfernten Punkt der Linie:

$$(\beta-\gamma)A + (\gamma-\alpha)B + (\alpha-\beta)C.$$

Man begreift leicht, dass dieses Verfahren auf die Entwickelung von $\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c} - \dfrac{a'A+b'B+c'C}{a'+b'+c'} = E - E'$ hinausläuft. $E - E'$ ist aber der Ausdruck des in der Geraden EE' unendlich entfernten Punktes.

Weil A', B', C' ebenfalls Punkte der geraden Linie sind, so werden auch $B' - C'$, $C' - A'$, $A' - B'$ Ausdrücke des unendlich entfernten Punktes seyn und, nach A, B, C entwickelt, zu demselben Ausdrucke hinführen müssen. So ist z. B.

$$B' - C' = \frac{\gamma A - \alpha C}{\gamma - \alpha} - \frac{\alpha B - \beta A}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha(\gamma-\beta)A - \alpha(\gamma-\alpha)B - \alpha(\alpha-\beta)C}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}$$

$$= (\beta-\gamma)A + (\gamma-\alpha)B + (\alpha-\beta)C$$

wie vorhin.

Am einfachsten aber gelangt man zu diesem Ausdrucke durch Addition der Gleichungen (2). Diese giebt:

$$(\gamma-\beta)A'+(\alpha-\gamma)B'+(\beta-\alpha)C'=(\beta-\gamma)A+(\gamma-\alpha)B+(\alpha-\beta)C.$$

Da nun hierin zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Summe der Coëfficienten $=0$ ist, so sind auch die Ausdrücke auf der einen und andern Seite entweder $=0$, oder zeigen einen unendlich entfernten Punkt an. Ersteres kann aber nicht seyn, weil die drei Punkte A, B, C rechter Hand nicht in einer Geraden liegen, auch die Coëfficienten derselben nicht einzeln $=0$ sind (§. 27.). Mithin wird durch beide Ausdrücke ein unendlich entfernter Punkt dargestellt, und zwar der in der Geraden $A'B'C'$ enthaltene.

§. 40. Der allgemeine Ausdruck einer geraden Linie in einer Ebene lässt sich, seiner Allgemeinheit unbeschadet, auf eine weit einfachere Form zurückbringen. Er wurde erhalten, indem man die Ausdrücke irgend zweier Punkte der Linie nahm, und den einen derselben, mit einer Veränderlichen multiplicirt, dem andern hinzufügte. Da nun die Wahl dieser zwei Punkte durch nichts bedingt ist, so nehme man hierzu zwei von den Durchschnitten mit den F.linien selbst, indem die Ausdrücke der Durchschnitte nur aus zwei F.punkten zusammengesetzt sind. So geben z. B. die zwei Durchschnitte A' und B' mit einander verbunden, den Ausdruck der Linie:

$$\gamma A-\alpha C+x(\gamma B-\beta C)\equiv A+xB-\frac{\alpha+\beta x}{\gamma}C.$$

Zu demselben vereinfachten Ausdrucke kann man aber auch mittelst blos analytischer Operationen, durch

Einführung einer andern Veränderlichen, gelangen. In dieser Absicht setze man in dem allgemeinen Ausdrucke:

$$(a + a'v)\,A + (b + b'v)\,B + (c + c'v)\,C$$

zuerst $a + a'v = t$, so dass t die neue Veränderliche ist. Hierdurch wird $v = \frac{t - a}{a'}$, und

$$b + b'v = \frac{a'b - ab' + b't}{a'} = \frac{-\gamma + b't}{a'}$$

$$c + c'v = \frac{a'c - ac' + c't}{a'} = \frac{\beta + c't}{a'},$$

wenn wir zur Abkürzung wiederum die Buchstaben α, β, γ, in der bisherigen Bedeutung genommen, anwenden; und der Ausdruck erhält die Form:

$$tA - \frac{\gamma - b't}{a'}\,B + \frac{\beta + c't}{a'}\,C.$$

Man dividire ihn durch t und setze $\frac{1}{t} = u$; so wird er:

$$A + \frac{b' - \gamma u}{a'}\,B + \frac{c' + \beta u}{a'}\,C.$$

Man nehme nun $\frac{b' - \gamma u}{a'}$ zur Veränderlichen $= x$, so wird $u = \frac{b' - a'x}{\gamma}$ und

$$\frac{c' + \beta u}{a'} = \frac{c'\gamma + b'\beta}{a'\gamma} - \frac{\beta x}{\gamma} = -\frac{\alpha + \beta x}{\gamma},$$

weil immer $a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$. Hierdurch verwandelt sich der Ausdruck in:

$$A + xB - \frac{\alpha + \beta x}{\gamma}\,C,$$

wie vorhin. — Noch etwas einfacher wird er, wenn man $-\frac{\alpha}{\gamma} = f$ und $-\frac{\beta}{\gamma} = g$ setzt:

$$A + xB + (f + gx)\,C;$$

wo nur noch zwei Constanten vorkommen.

§. 41. Aufgabe. Die Ausdrücke zweier gerader Linien in einer Ebene sind gegeben:

$$\text{I. } A + xB + (a + bx)\, C,$$
$$\text{II. } A + yB + (a' + b'y)\, C.$$

Den Ausdruck für den Schneidungspunkt der Linien und die Bedingungsgleichung für ihren Parallelismus zu finden.

Auflösung. Da durch I. jeder Punkt der einen, und durch II. jeder Punkt der andern Linie ausgedrückt wird, so verlangt die Aufgabe nichts anders, als, für x und y solche Werthe zu finden, für welche der durch I. ausgedrückte Punkt mit dem durch II. ausgedrückten identisch wird. Für diese Werthe von x und y müssen sich aber nach §. 24. a. verhalten:

$$1 : x : a + bx = 1 : y : a' + b'y.$$

Hieraus folgt $x = y$, $a + bx = a' + b'y$ und $x = y = -\frac{a - a'}{b - b'}$. Diesen Werth für x oder y in I. oder II. substituirt, erhält man den gesuchten Ausdruck für den Schneidungspunkt:

$$(b - b')\, A - (a - a')\, B + (a'b - ab')\, C.$$

Ist die Summe der Coëfficienten dieses Ausdrucks $= 0$, so liegt der den Linien gemeinschaftliche Punkt unendlich entfernt, d. h. die Linien sind sich parallel. Die Bedingungsgleichung für den Parallelismus der Linien I. und II. ist daher:

$$b - b' - a + a' + a'b - ab' = 0.$$

Dieselbe Relation lässt sich auch noch folgenderweise erhalten. Für den unendlich entfernten Punkt der Linie I. ist: $1 + x + a + bx = 0$, also $x = -\frac{1 + a}{1 + b}$. Hierdurch wird der unendlich entfernte Punkt selbst:

$$(1)\quad (1 + b)\, A - (1 + a)\, B + (a - b)\, C.$$

Eben so findet sich der unendlich entfernte Punkt der Linie II.:

$$(2)\quad (1+b')A-(1+a')B+(a'-b')\,C.$$

Da nun zwei Parallellinien als solche angesehen werden können, die in einem unendlich entfernten Punkte sich schneiden, so wird bei stattfindendem Parallelismus der Punkt (1) mit dem Punkte (2) zusammenfallen und mithin sich verhalten müssen:

$$1+b:1+a:a-b=1+b':1+a':a'-b'.$$

Dies giebt die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{1+a}{1+b}=\frac{1+a'}{1+b'} \quad \text{und} \quad \frac{1+a}{a-b}=\frac{1+a'}{a'-b'},$$

die unter sich und mit der vorhin gefundenen identisch sind.

§. 42. Aufgabe. Es sind die Ausdrücke dreier gerader Linien in einer Ebene gegeben:

$$A+xB+(a+bx)\,C,$$
$$A+yB+(a'+b'y)\,C,$$
$$A+zB+(a''+b''z)\,C.$$

Die Bedingungsgleichung zu finden, bei welcher sich die Linien in einem Punkte schneiden.

Auflösung. Hierzu ist nöthig, dass die gegebenen Ausdrücke für gewisse Werthe der Veränderlichen x, y, z einen und denselben Punkt darstellen können. Für diese Werthe muss also nach §. 24. *a.* seyn:

$$x=y=z$$
$$\text{und } a+bx=a'+b'y=a''+b''z.$$

Eliminirt man daraus x, y, z, so kommt:

$$a'b''-a''b'+a''b-ab''+ab'-a'b=0,$$

als die gesuchte Bedingungsgleichung.

§. 43. Aufgabe. Die Bedingungsgleichung zu finden, bei welcher drei durch ihre Ausdrücke gegebene Punkte einer Ebene

$$P \equiv aA + bB + C$$
$$P' \equiv a'A + b'B + C$$
$$P'' \equiv a''A + b''B + C$$

in einer Geraden liegen.

Auflösung. Sollen P, P', P'' in einer Geraden enthalten seyn, so muss es (§. 22. *c.*) drei solche Verhältnisszahlen k, k', k'' geben, dass

$$k(a+b+1)P + k'(a'+b'+1)P' + k''(a''+b''+1)P'' = 0$$

ist. Setzt man hierein P, P', P'' durch A, B, C ausgedrückt, und ordnet gehörig, so kommt:

$$(ak + a'k' + a''k'')A + (bk + b'k' + b''k'')B + (k + k' + k'')C = 0.$$

Da nun A, B, C nicht in gerader Linie liegen, so muss nach §. 27.

$$ak + a'k' + a''k'' = 0, \quad bk + b'k' + b''k'' = 0, \quad k + k' + k'' = 0$$

seyn. Aus den zwei ersten dieser Gleichungen folgt:

$$k : k' : k'' = a'b'' - a''b' : a''b - ab'' : ab' - a'b,$$

und hieraus in Verbindung mit der dritten:

$$a'b'' - a''b' + a''b - ab'' + ab' - a'b = 0,$$

als die gesuchte Bedingungsgleichung.

§. 44. Ich füge noch die Ausdrücke für einige specielle Lagen einer geraden Linie gegen das F.dreieck hinzu.

Geht die Linie durch zwei F.punkte selbst, z. B. durch A und B, so ist ihr Ausdruck: $A + vB$, der möglich einfachste.

Geht die Linie nur durch einen F.punkt z. B. A, so sey irgend ein anderer in ihr liegender Punkt $\equiv aA + bB + cC$. Der Ausdruck der Linie wird alsdann seyn:

$vA+aA+bB+cC=(v+a)A+bB+cC$, oder, wenn man die Veränderliche $v+a=x$ setzt:

$$xA+bB+cC.$$

Ist also die Veränderliche nur in einem der drei Coëfficienten enthalten, so gehört der Ausdruck einer durch diesen Punkt gehenden Geraden an. — Der Punkt, in welchem diese Gerade die F.linie BC schneidet, ist $=bB+cC$. Für ihn selbst ist $x=0$, und für den Punkt A, $x=\infty$.

Läuft die Linie mit einer der F.linien z. B. mit BC parallel, so kann man sie als eine solche betrachten, welche BC in dem Punkte $B-C$ schneidet. Der allgemeine Ausdruck einer solchen ist daher: $aA+bB+cC+x(B-C)$, d. i.

$$aA+(b+x)B+(c-x)C.$$

Eine Parallele mit BC, welche zugleich durch A geht, hat den Ausdruck: $xA+B-C$. Eben so ist der Ausdruck einer Parallele mit AC durch B: $A+yB-C$. Für $x=1$ geht der erstere, und für $y=1$ der letztere, Ausdruck in $A+B-C$ über, welches mithin der Durchschnitt beider Parallelen, d. h. derjenige Punkt ist, welcher mit A, C, B die Spitzen eines Parallelogramms bildet. Vergl. §. 36.

II. Ausdrücke gerader Linien im Raume überhaupt.

§. 45. Seyen wiederum E und E' irgend zwei Punkte der Linie, und als Punkte des Raumes gedacht und auf die vier F.punkte A, B, C, D bezogen:

$$eE=aA+bB+cC+dD,$$
$$e'E'=a'A+b'B+c'C+d'D\,;$$

so wird der Ausdruck der Linie: $eE+\nu e'E'=$

$$(a+a'\nu)A+(b+b'\nu)B+(c+c'\nu)C+(d+d'\nu)D,$$

welches daher der allgemeine Ausdruck einer geraden Linie im Raume ist.

§. 46. Zusätze. *a.* Im Allgemeinen schneidet die Linie jede der vier F.ebenen; heissen diese Durchschnitte mit BCD, CDA, DAB, ABC resp. A', B', C', D'. Die Ausdrücke derselben ergeben sich aus dem der Linie auf ähnliche Art, wie §. 39. *a.* So muss z. B. für A', als einen Punkt in der Ebene BCD, der Coëfficient von A, d. i. $a+a'\nu=0$, folglich $\nu=-\dfrac{a}{a'}$ seyn. Diesen Werth von ν in den übrigen Coëfficienten substituirt, und zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} ab'-a'b=\alpha,\ ac'-a'c=\beta,\ ad'-a'd=\gamma \\ bc'-b'c=\delta,\ bd'-b'd=\varepsilon,\ cd'-c'd=\zeta \end{array}\right\} \quad (1)$$

gesetzt, erhält man:

$$\text{und eben so}\quad \left.\begin{array}{l} (\alpha+\beta+\gamma)A'=\alpha B+\beta C+\gamma D \\ (\delta+\varepsilon-\alpha)B'=\delta C+\varepsilon D-\alpha A \\ (\beta+\delta-\zeta)C'=\beta A+\delta B-\zeta D \\ (\gamma+\varepsilon+\zeta)D'=\gamma A+\varepsilon B+\zeta C \end{array}\right\} \quad (2)$$

b. Weil die vier Punkte A', B', C', D' in einer Geraden liegen, so muss zwischen je dreien derselben besonders eine Gleichung Statt haben. Um diejenige zu finden, welche zwischen B', C', D' obwaltet, multiplicire man die drei letzten der Gleichungen (2) resp. mit $-\zeta$, $-\varepsilon$, δ, addire sie hierauf, und es kommt:

$$\delta(\gamma+\varepsilon+\zeta)D'-\zeta(\delta+\varepsilon-\alpha)B'-\varepsilon(\beta+\delta-\zeta)C'$$
$$=(\alpha\zeta-\beta\varepsilon+\gamma\delta)A.$$

Da aber B', C', D' Punkte der geraden Linie sind, und der F.punkt A im Allgemeinen ausserhalb derselben liegt, so muss nach §. 27. der Coëfficient von A

$\alpha\zeta - \beta\varepsilon + \gamma\delta = \delta(\gamma + \varepsilon + \zeta) - \zeta(\delta + \varepsilon - \alpha) - \varepsilon(\beta + \delta - \zeta)$ $= 0$ seyn. Diese durch geometrische Betrachtung erhaltene Relation zwischen $\alpha, \beta \ldots \zeta$ bestätigt sich auch durch Rechnung. Denn multiplicirt man von den zwei aus (1) sehr leicht fliessenden Gleichungen $a\delta - b\beta + c\alpha = 0$, $a'\delta - b'\beta + c'\alpha = 0$, die erste mit d', die zweite mit d, und zieht hierauf die eine von der andern ab, so kommt, mit wiederholter Anwendung von (1), dasselbe Resultat.

Es ist demnach:

$$\zeta(\delta+\varepsilon-\alpha)B' + \varepsilon(\beta+\delta-\zeta)C' = \delta(\gamma+\varepsilon+\zeta)D'$$

u. eben so

$$\zeta(\alpha+\beta+\gamma)A' + \gamma(\beta+\delta-\zeta)C' = \beta(\gamma+\varepsilon+\zeta)D'$$

$$\gamma(\delta+\varepsilon-\alpha)B' + \alpha(\gamma+\varepsilon+\zeta)D' = \varepsilon(\alpha+\beta+\gamma)A'$$

$$\beta(\delta+\varepsilon-\alpha)B' + \alpha(\beta+\delta-\zeta)C' = \delta(\alpha+\beta+\gamma)A'$$

c. Um den Ausdruck des unendlich entfernten Punktes der Linie zu erhalten, hat man, wie §. 39. *c.*, im Ausdrucke der Linie die Summe der Coëfficienten $= 0$ zu setzen. Dies giebt $\nu = -\frac{a+b+c+d}{a'+b'+c'+d'}$, und hiermit nach gehöriger Reduction den Ausdruck des Punktes selbst:

$$(\alpha+\beta+\gamma)A + (\delta+\varepsilon-\alpha)B - (\beta+\delta-\zeta)C - (\gamma+\varepsilon+\zeta)D.$$

Denselben Ausdruck bekommt man auch durch Entwickelung von $A' - B'$, oder $A' - C'$, u. s. w., wenn man dabei die identische Gleichung $\alpha\zeta + \gamma\delta = \beta\varepsilon$ mit zu Hülfe nimmt. — Am kürzesten endlich gelangt man zu dem Ausdrucke, wenn man die Gleichungen (2) mit den Zeichen $+$, $+$, $-$, $-$ addirt, und hierauf eine ganz ähnliche Schlussart, wie in §. 39. *c.*, anwendet.

§. 47. Der allgemeine Ausdruck einer geraden Linie im Raume (§. 45.) lässt sich, ähnlicherweise wie in §. 40., dadurch vereinfachen, dass man statt den zwei willkührlich in der Linie genommenen Punkten E und E'

zwei von den Durchschnitten derselben mit den vier F.ebenen zu Grunde legt. So kann z. B. D', als ein Punkt der F.ebene ABC, $\equiv fA+gB+C$, und C', als ein Punkt der F.ebene ABD, $\equiv f'A+g'B+D$ gesetzt werden. Hiernach zieht sich der Ausdruck der Linie zusammen in:

$$(fx+f')\,A+(gx+g')\,B+xC+D.$$

Eben so, wie bei der geraden Linie in einer Ebene gezeigt wurde, kann dieser vereinfachte Ausdruck aus dem zusammengesetzteren auch durch analytische Umformungen hergeleitet werden. Da aber der hier zu nehmende Gang dem dortigen ganz ähnlich ist, so wollen wir uns dabei nicht aufhalten.

§. 48. **Aufgabe.** Die Ausdrücke zweier geraden Linien im Raume sind gegeben:

$$(ax+a')\,A+(bx+b')\,B+xC+D$$
$$(\alpha y+\alpha')\,A+(\beta y+\beta')\,B+yC+D.$$

Die Bedingungsgleichungen zu finden, wenn die Linien in einer Ebene liegen, und darin einander parallel sind.

Auflösung. Angenommen, dass die zwei Linien sich in einem Punkte begegnen, so müssen, eben für diesen Punkt, die Veränderliche x im ersten, und die Veränderliche y im zweiten Ausdrucke solche Werthe erhalten können, dass dadurch die zwei Ausdrücke identisch werden. Unter dieser Voraussetzung hat man nach §. 26. a. die Gleichungen:

1) $ax+a'=\alpha y+\alpha'$, 2) $bx+b'=\beta y+\beta$, 3) $x=y$.

Eliminirt man daraus x und y, so kommt:

$$(A)\quad \frac{a-\alpha}{a'-\alpha'}=\frac{b-\beta}{b'-\beta'},$$

als die Bedingungsgleichung, wenn die Linien einen Punkt gemein haben, mag dieser unendlich entfernt seyn, oder nicht; also überhaupt, wenn sich die Linien in einer Ebene befinden.

Soll nun überdies der den zwei Linien gemeinsame Punkt unendlich entfernt liegen, d. h. sollen die Linien einander parallel seyn, so müssen für die bestimmten Werthe, welche x und y für den gemeinsamen Punkt haben, die Summen der Coëfficienten in den Ausdrücken der Linien $=0$, also

4) $(a+b+1)x+a'+b'+1=0$, 5) $(\alpha+\beta+1)y+\alpha'+\beta'+1=0$

seyn. Man hat somit fünf Gleichungen 1)...5), welche für den Parallelismus zugleich bestehen müssen, von denen aber jede eine Folge der vier andern ist, so dass nach Elimination von x und y aus denselben nur zwei von einander unabhängige Gleichungen übrig bleiben. Die eine dieser Gleichungen stellt (A) vor. Um eine zweite zu erhalten, eliminire man x und y aus 3), 4), 5), und es kommt:

$$(B) \quad \frac{a+b+1}{a'+b'+1}=\frac{\alpha+\beta+1}{\alpha'+\beta'+1}.$$

(A) und (B) sind folglich die zum Parallelismus der beiden Linien erforderlichen Bedingungsgleichungen.

III. Ausdrücke für Ebenen.

§. 49. Die Lage einer Ebene wird durch irgend drei Punkte derselben bestimmt, die nicht in gerader Linie liegen. Seyen diese Punkte, auf die F.punkte des Raums A, B, C, D bezogen:

$$eE=aA+bB+cC+dD$$
$$e'E'=a'A+b'B+c'C+d'D$$
$$e''E''=a''A+b''B+c''C+d''D.$$

Jeder Punkt aber, der mit E, E', E'' in einer Ebene liegt, hat nach §. 24. *b.* einen Ausdruck von der Form $eE + e'vE + e''wE''$, wo v und w alle beliebigen Werthe haben können. Substituirt man darin die F.punkte, so kommt:

$$\text{I. } (a + a'v + a''w)\,A + (b + b'v + b''w)\,B + (c + c'v + c''w)\,C + (d + d'v + d''w)\,D.$$

Dies ist also, v und w als Veränderliche genommen, der auf die F.punkte bezogene Ausdruck jedes Punktes der Ebene, oder kürzer, der allgemeine Ausdruck der Ebene selbst.

§. 50. Zusätze. *a.* Im Allgemeinen wird von der Ebene jede der sechs F.linien geschnitten. Man begreift sogleich, dass, um den Ausdruck eines solchen Durchschnitts zu erhalten, man in dem Ausdrucke der Ebene v und w so zu bestimmen hat, dass die Coëfficienten der beiden F.punkte, durch welche die geschnittene F.linie nicht geht, gleich Null werden.

Um dieses auf die kürzeste Weise zu bewerkstelligen, setze man die Coëfficienten der vier F.punkte

$$1)\begin{cases} a + a'v + a''w = p, \\ b + b'v + b''w = q, \\ c + c'v + c''w = r, \\ d + d'v + d''w = s, \end{cases}$$

und somit den Ausdruck der Ebene selbst:

$$\text{II. } pA + qB + rC + sD.$$

Man multiplicire nun die vier Gleichungen 1) resp. mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, addire sie hierauf und setze:

$$2)\begin{cases} \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0, \\ \alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \delta d' = 0, \\ \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \delta d'' = 0, \end{cases}$$

so ist auch 3) $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0,$

eine Gleichung zwischen den Coëfficienten des Ausdrucks, in welcher α, β, γ, δ Zahlen vorstellen, deren gegenseitiges Verhältniss mittelst der Gleichungen 2) aus den Constanten des Ausdrucks gefunden werden kann. *) Diese Gleichung besteht für alle beliebigen Werthe der Veränderlichen v und w, und vertritt daher in Verbindung mit dem Ausdrucke II. die Stelle des Ausdrucks I.

Nach dem Obigen sind nun für den Durchschnitt der Ebene mit AB die Coëfficienten von C und D, also r und s, $=0$ zu setzen. Hierdurch wird $\alpha p + \beta q = 0$, mithin $p : q = \beta : -\alpha$, und der Ausdruck des Durchschnittspunktes $\equiv pA + qB \equiv \beta A - \alpha B$. Eben so leicht finden sich die Ausdrücke auch für die übrigen Durchschnitte, und man bekommt, wenn man den Durchschnitt mit AB durch (AB), den mit AC durch (AC), u. s. w. bezeichnet, nachstehende sechs Gleichungen:

*) Dies geschieht am einfachsten folgendergestalt. — Man addire die Gleichungen 2), nachdem man sie zuvor resp. mit k, k', k'' multiplicirt hat, und setze zur Bestimmung dieser neu eingeführten Hülfsgrössen:

$$ck + c'k' + c''k'' = 0,$$
$$dk + d'k' + d''k'' = 0,$$

so wird:

$$\alpha(ak + a'k' + a''k'') + \beta(bk + b'k' + b''k'') = 0.$$

Hieraus folgt weiter:

$$k : k' : k'' = c'd'' - c''d' : c''d - cd'' : cd' - c'd,$$
$$\alpha : \beta = (bk + b'k' + b''k'') : -(ak + a'k' + a''k'').$$

Substituirt man nun in letzterer Proportion die Verhältnisswerthe von k, k', k'' aus der erstern und setzt zur Abkürzung

$$bc'd'' - bc''d' + b'c''d - b'cd'' + b''cd' - b''c'd = (bcd),$$

die eben so aus c, d, a, c', d', ... zusammengesetzte Function $=(cda)$, u. s. w., so verhält sich

$$\alpha : \beta = (bcd) : -(cda),$$

und überhaupt:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = (bcd) : -(cda) : (dab) : -(abc).$$

$$(\alpha-\beta)\,(AB)=\alpha B-\beta A,\qquad (\beta-\gamma)\,(BC)=\beta C-\gamma B,$$
$$(\alpha-\gamma)\,(AC)=\alpha C-\gamma A,\qquad (\beta-\delta)\,(BD)=\beta D-\delta B,$$
$$(\alpha-\delta)\,(AD)=\alpha D-\delta A,\qquad (\gamma-\delta)\,(CD)=\gamma D-\delta C.$$

b. Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende, zwischen den Durchschnitten selbst statt findende, Relationen. Zuerst zwischen je dreien, die in einer und derselben F.ebene und mithin in gerader Linie liegen:

$$\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)(CD)+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\beta}\right)(BD)+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)(BC)=0,$$
$$\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}\right)(AD)+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\gamma}\right)(AC)+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)(CD)=0,$$
$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)(AB)+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\delta}\right)(BD)+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}\right)(AD)=0,$$
$$\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)(BC)+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right)(AC)+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)(AB)=0,$$

Da ferner alle sechs Durchschnitte in einer Ebene enthalten sind, so muss auch zwischen je vieren, welche nicht in einer Geraden liegen, eine Gleichung bestehen. Diese Gleichungen sind:

$$\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)(AB)+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)(BC)+\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}\right)(CD)+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\alpha}\right)(AD)=0,$$

und eben so noch zwei andere,

die eine zwischen (AB), (BD), (CD), (AC),
die andere zwischen (AC), (BC), (BD), (AD).

c. Im Allgemeinen schneidet die Ebene jede der vier F.ebenen. Der Ausdruck einer solchen Durchschnittslinie, z. B. der in BCD liegenden, wird gefunden, wenn man in dem Ausdrucke der Ebene den Coëfficienten von A, $a+a'v+a''w=0$ setzt, und mittelst der dadurch zwischen v und w hervorgehenden Relation die eine dieser Veränderlichen aus den Coëfficienten der drei übrigen F.punkte eliminirt. — Noch leichter gelangt man zum Zweck mit Hülfe des Ausdrucks II. und der zugehörigen Gleichung 3), die sich, für $p = o$, auf

$$\text{II*. } qB + rC + sD \quad \text{und } 3^*)\ \beta q + \gamma r + \delta s = o$$

reduciren, und in dieser verkürzten Form dem Ausdrucke einer Geraden, der Durchschnittslinie mit BCD nämlich, gleich zu achten sind. Denn eliminirt man s mittelst 3*) aus II*., und nimmt hierauf $\frac{r}{q} = x$ zur Veränderlichen, so kommt:

$$\delta B + \delta x C - (\beta + \gamma x)\, D,$$

derselbe Ausdruck, den man auch durch Verbindung der in die F.ebene BCD fallenden Durchschnittspunkte (BD) und (CD) erhält.

d. Der unendlich entfernte Punkt dieser Linie ist:

$(\gamma - \delta)\, B + (\delta - \beta)\, C + (\beta - \gamma)\, D$. Eben so sind: $(\delta - \alpha)\, C + (\alpha - \gamma)\, D + (\gamma - \delta)\, A$

$$(\alpha - \beta)\, D + (\beta - \delta) A + (\delta - \alpha) B$$
$$(\beta - \gamma)\, A + (\gamma - \alpha)\, B + (\alpha - \beta)\, C$$

die unendlich entfernten Punkte der Durchschnittslinien der Ebene mit den F.ebenen CDA, DAB, ABC.

§. 51. Auf ähnliche Art, wie in §. 40. und §. 47. bei der geraden Linie geschah, lässt sich auch der allgemeine Ausdruck der Ebene einfacher darstellen, indem man zu den drei sie bestimmenden Punkten drei von den sechs Durchschnitten mit den F.linien wählt. Seyen diese (AD), (BD), (CD), so kommt, wenn man dafür ihre Werthe aus §. 50. *a.* nimmt, sie mit den Veränderlichen x und y verbindet und gehörig ordnet:

$$\delta A + \delta x B + \delta y C - (\alpha + \beta x + \gamma y)\, C,$$

oder noch einfacher, wenn man $-\frac{\alpha}{\delta}=f$, $-\frac{\beta}{\delta}=g$, $-\frac{\gamma}{\delta}=h$ setzt:

$$A+xB+yC+(f+gx+hy)\ D.$$

Dasselbe Resultat kann man auch auf analytischem Wege mittelst des Ausdrucks II. und der zugehörigen Gleichung 3) erhalten, wenn man aus ersterem mittelst der letztern, s eliminirt, und hierauf $q:p$ und $r:p$ zu den Veränderlichen x und y nimmt.

§. 52. Wenn in dem Ausdrucke einer Ebene die zwei Veränderlichen solche Werthe erhalten, dass die Summe der Coëfficienten null wird, so gilt der Ausdruck für einen unendlich entfernten Punkt der Ebene. Setzt man daher die Summe der Coëfficienten $=0$, und eliminirt mittelst dieser Gleichung die eine der beiden Veränderlichen, so bekommt man einen Ausdruck, welcher alle unendlich entfernten Punkte der Ebene in sich begreift. In diesem Ausdrucke wird, unabhängig von der darin noch vorkommenden Veränderlichen, die Summe der Coëfficienten immer null seyn, so dass sowohl der von der Veränderlichen freie Theil dieser Summe, als der in sie multiplicirte, jeder für sich null ist. Ein solcher Ausdruck wird daher seiner Form nach einer geraden Linie angehören, welche durch zwei unendlich entfernte Punkte der Ebene gelegt ist, oder, wenn man will, er wird der Ausdruck einer unendlich entfernten Geraden seyn, von der sich aber eben so wenig bestimmen lässt, nach welcher Gegend der Ebene hin sie liegt, als man bei dem unendlich entfernten Punkte in einer Geraden die Seite der Geraden, nach welcher er liegt, angeben kann.

Zur Erläuterung diene der im vorigen §. gefundene vereinfachte Ausdruck. Die Summe seiner Coëfficienten $=0$ gesetzt, giebt $y=\frac{\delta-\alpha+(\delta-\beta)x}{\gamma-\delta}$. Eliminirt man hiermit y in dem Ausdrucke, so kommt nach einer leichten Reduction:

$$(\gamma-\delta)A+(\gamma-\delta)xB+[\delta-\alpha+(\delta-\beta)x]\,C+[\alpha-\gamma+(\beta-\gamma)x]\,D$$

der Ausdruck der unendlich entfernten Linie der Ebene. Die in ihm durch die Veränderliche x verbundenen Punkte sind nach §. 50. *d.* die unendlich entfernten in den Durchschnitten der Ebene mit BCD und CDA. Auf erstern Punkt reducirt sich der Ausdruck für $x=\infty$, auf letztern für $x=0$. Setzt man ferner $x=-\frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}$ und $=-\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$, so ergeben sich die Ausdrücke der unendlich entfernten Punkte in den Durchschnitten mit DAB und ABC.

§. 53. **Aufgabe.** Die Ausdrücke zweier Ebenen sind gegeben:

I. $A+vB+wC+(a+bv+cw)\,D$,

II. $A+xB+yC+(a'+b'x+c'y)\,D$.

Den Ausdruck ihrer Durchschnittslinie und die Bedingungsgleichungen zu finden, wenn sie sich parallel sind.

Auflösung. Für einen gemeinschaftlichen Punkt der beiden Ebenen ist:

1) $v=x$, 2) $w=y$, 3) $a+bv+cw=a'+b'x+c'y$;

mithin, wenn man x und y aus diesen drei Gleichungen eliminirt:

$$a-a'+(b-b')v+(c-c')w=0.$$

Dies ist demnach die Relation, welche zwischen den Veränderlichen der Ebene I. für jeden Punkt, den sie mit II. gemein hat, statt findet. Eliminirt man also mittelst dieser Relation aus I. die eine der beiden Veränderlichen, z. B. w, so erhält man den Ausdruck der Durchschnittslinie:

$$(c-c')A+(c-c')vB-[a-a'+(b-b')v]\,C$$
$$-[ac'-a'c+(bc'-b'c)v]\,D.$$

Findet sich in diesem Ausdrucke die Summe der Coëfficienten, unabhängig von v, $=0$, so ist die den beiden Ebenen gemeinschaftliche Linie unendlich entfernt, d. h. die Ebenen sind sich parallel. Die Bedingungsgleichungen für den Parallelismus sind daher:

$$c-c'-a+a'-ac'+a'c=0$$
$$c-c'-b+b'-bc'+b'c=0.$$

Ohne vorher den Ausdruck für die Durchschnittslinie entwickelt zu haben, lassen sich diese Gleichungen auch folgendergestalt leicht finden. Für einen unendlich entfernten Punkt

der Ebene I. ist: 4) $1+a+(1+b)v+(1+c)w=0$,

— — II. — 5) $1+a'+(1+b')x+(1+c')y=0$.

Sollen sich nun die Ebenen parallel seyn, so müssen alle gemeinschaftlichen Punkte derselben unendlich entfernt liegen, oder analytisch ausgedrückt: alle Werthe der Veränderlichen v, w, x, y, welche den Gleichungen 1), 2), 3) Genüge leisten, müssen auch die Gleichungen 4), 5) erfüllen. Da aber jede dieser fünf Gleichungen eine Folge der vier übrigen ist, und mithin eine derselben, z. B. 3), immer unberücksichtigt bleiben kann, so muss, wenn man aus 1), 2) und 5), x und y eliminirt, nächst 4) zugleich

6) $1+a'+(1+b')v+(1+c')w=0$

seyn, ohne dass dadurch v und w bestimmte Werthe erhalten. Es müssen folglich die Gleichungen 4) und 6) nicht zwei verschiedene, sondern eine und dieselbe Relation zwischen v und w darstellen, und mithin die Coëfficienten der einen in denselben Verhältnissen zu einander stehen, wie die der andern. Dies giebt:

$$\frac{1+a}{1+a'} = \frac{1+b}{1+b'} = \frac{1+c}{1+c'},$$

welches demnach die Bedingungsgleichungen für den Parallelismus sind, die von den vorhin gefundenen sich nur der Form nach unterscheiden.

§. 54. Aufgabe. Die Ausdrücke einer geraden Linie und einer Ebene sind gegeben:

$$(\alpha u+\alpha')A+(\beta u+\beta')B+uC+D,$$
$$A+vB+wC+(a+bv+cw)D.$$

Den Ausdruck für ihren Schneidungspunkt, so wie die Bedingungsgleichungen ihrer Coincidenz und ihres Parallelismus zu finden.

Auflösung. Für diejenigen Werthe der Veränderlichen, bei welchen diese Ausdrücke einen und denselben Punkt darstellen, muss sich verhalten:

$$\alpha u+\alpha' : \beta u+\beta' : u : 1 = 1 : v : w : a+bv+cw.$$

Dies giebt: $(\alpha u+\alpha')v=\beta u+\beta'$, $(\alpha u+\alpha')w=u$,

$$(\alpha u+\alpha')(a+bv+cw)=1;$$

und wenn man aus diesen drei Gleichungen v und w eliminirt:

1) $a(\alpha u+\alpha')+b(\beta u+\beta')+cu=1$, oder $nu=m$, wenn man $a\alpha+b\beta+c=n$, $1-a\alpha'-b\beta'=m$ setzt.

Den hieraus entspringenden Werth von u in dem Ausdrucke der Geraden substituirt, erhält man den, der

Geraden und der Ebene gemeinschaftlichen, Punkt, also im Allgemeinen den Durchschnittspunkt:

$$(\alpha m+\alpha' n)A+(\beta m+\beta' n)B+mC+nD.$$

Soll die Gerade mit der Ebene zusammenfallen, soll also jeder Punkt der erstern zugleich ein Punkt der letztern seyn, so muss für jeden Werth von u in dem Ausdrucke der Geraden die Gleichung 1) bestehen. Es muss daher seyn:

$$a\alpha+b\beta+c=0,\quad 1-a\alpha'-b\beta'=0,$$

die Bedingungsgleichungen für die Coincidenz, wodurch, was man noch bemerke, in dem Ausdrucke des Durchschnittspunktes die Coëfficienten sämmtlicher vier F.punkte null werden.

Ist die Gerade der Ebene parallel, so liegt der ihnen gemeinschaftliche Punkt unendlich entfernt. Es muss daher für diesen Fall der sich aus 1) ergebende Werth von u zugleich der Gleichung

$$2)\quad \alpha u+\alpha'+\beta u+\beta'+u+1=0$$

Genüge leisten. Die Bedingungsgleichung des Parallelismus ist folglich das Resultat der Elimination von u aus den Gleichungen 1) und 2):

$$\frac{a\alpha'+b\beta'-1}{a\alpha+b\beta+c}=\frac{\alpha'+\beta'+1}{\alpha+\beta+1}.$$

§. 55. **Aufgabe.** Die Ausdrücke dreier Ebenen sind gegeben:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & A+tB+uC+(a+bt+cu)\,D \\ \text{II.} & A+vB+wC+(a'+b'v+c'w)\,D \\ \text{III.} & A+xB+yC+(a''+b''x+c''y)\,D. \end{array}$$

Den Ausdruck ihres Durchschnittspunktes, so wie die Bedingungsgleichungen für die dabei möglichen speciellen Fälle zu finden.

Auflösung. Für den Punkt, welchen diese drei Ausdrücke gemeinschaftlich darstellen, muss seyn:

$$t = v = x, \quad u = w = y,$$
$$a + bt + cu = a' + b'v + c'w = a'' + b''x + c''y.$$

Man setze daher

$$1) \begin{cases} a + bt + cu = s, & \text{so ist auch} \\ a' + b't + c'u = s \\ a'' + b''t + c''u = s. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen resp. mit $c' - c''$, $c'' - c$, $c - c'$ multiplicirt und hierauf addirt, ergiebt sich, wenn man noch

$$b'c'' - b''c' + b''c - bc'' + bc' - b'c \text{ mit } (bc),$$

und die eben so aus $c, a, c', \ldots$ und $a, b, a', \ldots$ gebildeten Functionen mit (ca) und (ab) bezeichnet:

$$(bc)\ t = (ca)$$

und auf gleiche Art $(bc)\ u = (ab)$.

Die hieraus fliessenden Werthe für t und u in I. substituirt, kommt der Ausdruck des Durchschnittspunktes:

$$(bc)A + (ca)B + (ab)\ C + [a(bc) + b\,(ca) + c\,(ab)]\ D.$$

Man bemerke dabei, dass, wenn man die Function

$$2) \begin{cases} a\,(bc) + b\,(ca) + c\,(ab) = (abc) & \text{setzt, auch} \\ a'(bc) + b'(ca) + c'(ab) = (abc) & \text{und} \\ a''(bc) + b''(ca) + c''(ab) = (abc) & \text{ist.} \end{cases}$$

Dies folgt unmittelbar aus den Gleichungen 1), wenn man darin für t und u die gefundenen Werthe substituirt. — Uebrigens ist die Function (abc) mit der in §. 50. *a.* Anmerk. eben so bezeichneten dieselbe.

Ist nun in dem Ausdrucke des Durchschnittspunktes die Summe der Coëfficienten

$$3)\quad (1+a)(bc)+(1+b)(ca)+(1+c)(ab)=0,$$

so liegt dieser Punkt unendlich entfernt. Im Allgemeinen sind alsdann die drei Durchschnittslinien der Ebenen mit einander parallel, so dass die drei Ebenen ein unendlich langes dreiseitiges Prisma einschliessen.

Es kann aber auch seyn, dass die drei Ebenen sich in einer und derselben Geraden schneiden, oder mit andern Worten, dass die Durchschnittslinie zweier Ebenen in die dritte Ebene fällt. Sucht man demnach den Ausdruck der Durchschnittslinie von zweien der Ebenen, und hierauf den Ausdruck des Punktes, in welchem diese Linie die dritte Ebene schneidet, so muss für gegenwärtigen Fall in dem letztern Ausdrucke, d. h. in dem für den Durchschnittspunkt aller drei Ebenen, jeder der vier Coëfficienten $=0$ seyn (§. 54.). Die Bedingungsgleichungen, unter welchen sich die drei Ebenen in einer und derselben Geraden schneiden, sind demnach:

$$(bc)=0,\quad (ca)=0,\quad (ab)=0,$$

von denen im Allgemeinen jede eine Folge der beiden andern ist, wie sich leicht aus den Gleichungen 2) ergiebt.

Anmerkung. Setzt man $a+1=a_{,}$, $b+1=b_{,}$, $c+1=c_{,}$, $a'+1=a'_{,}$, u. s. w. und bezeichnet die eben so aus $b_{,}$, $c_{,}$, $b'_{,}$, ... zusammengesetzte Function, als es (bc) aus $b, c, b', \ldots$ ist, mit $(b_{,}c_{,})$, u. s. w.: so sieht man bald, dass $(b_{,}c_{,}) = (bc)$, $(c_{,}a_{,})=(ca)$, $(a_{,}b_{,})=(ab)$. Hierdurch wird die Bedingungsgleichung dafür, dass sich die drei Ebenen in Parallellinien schneiden: $a_{,}(b_{,}c_{,})+b_{,}(c_{,}a_{,})+c_{,}(a_{,}b_{,})=0$, also vermöge der ersten Gleichung in 2):

$$(a_{,}b_{,}c_{,})=0,$$

wenn man die aus (abc) gleicherweise hervorgehende Function durch $(a_{,}b_{,}c_{,})$ ausdrückt. Man würde dies Resultat unmittelbar gefunden haben, hätte man, ohne vorher den Durchschnittspunkt zu suchen, die Summen der Coëfficienten in den Ausdrücken der Ebenen einzeln $=0$ gesetzt.

§. 56. Den Beschluss dieses Capitels soll eine Zusammenstellung von Ausdrücken machen, welche geraden Linien und Ebenen in einigen besondern Lagen gegen die F.pyramide zukommen. Von der Richtigkeit dieser Ausdrücke wird man sich leicht überzeugen, wenn man jeden derselben in den, von der oder den Veränderlichen freien, Theil und den oder die damit behafteten Theile zerlegt, und hierauf diese, bei Geraden zwei, bei Ebenen drei, Theile einzeln betrachtet. Vergl. §. 44.

I. Ausdruck einer Geraden, welche

1) die gegenüberstеh. F.linien AB und CD schneidet:

$$axA + xB + cC + D;$$

2) die F.linie AB schneidet und mit CD parallel läuft:

$$axA + xB - C + D;$$

3) durch A geht und mit BCD parallel ist:

$$xA + bB - (1 + b)\,C + D;$$

4) AB schneidet und mit BCD parallel ist:

$$axA + (b + x)\,B - (1 + b)\,C + D.$$

II. Ausdruck einer Ebene, welche

1) durch BC gelegt ist und mit AD parallel läuft:

$$A + xB + yC - D;$$

2) durch A geht und mit BCD parallel ist:

$$A + xB + yC - (x + y)\,D;$$

3) mit AB und CD parallel ist:

$$(a + x)\,A - xB + yC + (1 - y)\,D.$$

Die Durchschnitte dieser Ebene mit den übrigen F.linien sind:

$aA + C$, für $x = 0$, $y = 1$; $aB + C$, für $x = -a$, $y = 1$,
$aA + D$, für $x = 0$, $y = 0$; $aB + D$, für $x = -a$, $y = 0$.

Hiernach ist der Ausdruck einer Geraden, welche in einer, mit AB und CD parallelen, Ebene liegt und zugleich AC und BD schneidet:

$$axA + aB + xC + D.$$

Fünftes Capitel.
Von Ausdrücken krummer Linien in Ebenen.

§. 57. Wenn in dem Ausdrucke eines Punktes in einer Ebene, $pA + qB + rC$, die Coëfficienten p, q, r, beliebig gegebene Functionen einer veränderlichen Grösse v sind, und man für v nach und nach alle Werthe substituirt, bei welchen die Exponenten der Verhältnisse $p:q:r$ reell bleiben, so werden die Punkte aller der somit erhaltenen Ausdrücke, construirt, eine Linie in der Ebene bilden, die im Allgemeinen krumm, und nur dann gerade seyn wird, wenn, wie im vorigen Capitel, die Functionen von lineärer Form sind, oder doch durch Umformung darauf gebracht werden können. Heisse daher der Ausdruck $pA + qB + rC$ mit der Veränderlichen v, der Ausdruck der Linie selbst.

§. 58. Wir wollen uns gegenwärtig auf die Curven beschränken, in deren Ausdrücken die Coëfficienten rationale Functionen der Veränderlichen sind. Da es nun bei einem Ausdrucke nicht auf die absoluten Werthe seiner Coëfficienten, sondern bloss auf die gegenseitigen Verhältnisse derselben ankommt, so können wir, sollten der eine, oder zwei, oder alle drei Coëfficienten gebrochene Functionen seyn, dieselben durch Multipli-