Mechanica sive, de motu, tractatus geometricus

Wallis, John

Londini, 1670-1671

Cap. II. De gravium descensu, & motuum declivitate.

CAP II.
De Gravium Descensu, & Motuum Declivitate.

PROP. I.

Gravia, cæteris paribus, gravitant in ratione Ponderum. Et, universaliter, Vires Motrices quælibet, agunt pro Virium ratione.

$$P . G :: 2P . 2G :: 3P . 3G :: rP . rG .$$

PUta; Si Pondus ut P, Gravitat ut G: Etiam alterum P, ut alterum G gravitabit: tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque 2 P, ut 2 G; 3 P, ut 3 G; & quotlibet P, ut totidem G, *&c.*

Est enim Gravitas, Vis Motrix; ejusque mensura, Pondus: (per 12, 13. Def. Cap. 1.) Movet igitur Gravitas, pro Ponderum ratione; per 18. Cap. 1. Et similiter in Motibus aliis ostendetur.

PROP. II.

Grave, quatenus non impeditur, Descendit; seu propius ad Terræ Centrum appropinquat.
Et, universaliter, Vis quævis Motrix, secundum Directionem suam, quatenus non impeditur, procedit.

NAm (per Def. Gravitatis) Gravitas est Vis deorsum movens, seu versus Terræ Centrum. Hac igitur, quatenus non impeditur, feretur Grave, gravitate suâ. per 11 cap. 1.
Et similiter in aliis motibus ostendetur.

PROP. III.

Grave tantundem Descendit, quantò fit Terræ Centro propius: Tantum Ascendit, quantò remotius.
Et, universaliter, Cujusvis Vis Motricis Progressus tantus est, quantum secundum Directionem suam movetur; Regressus, contrà.

Fig. 30. CD=CB. CA−CD=CA−CB. CD−CE=CB−CE.

SIt C, Terræ Centrum: unde ducantur æquales rectæ C B, C D. Continuetur C B ad A; & jungatur A D. Item, sumpto ubivis in C B, puncto E; jungatur E D. Dico; Grave ab A, puncto altiore, ad B vel D motum; tantundem Descendisse, quantò B vel D, minus quàm A, distat à Centro C: Motum verò ab E, puncto quovis humiliore, ad B vel D; tantum Ascendisse, quantò B vel D, magis quàm E, à Centro distat.

Est enim (per Def. Gravitatis) Descensus gravium, (seu Motus secundum Directionem suam,) Motus versus Centrum Terræ.: Tantò igitur Descendisse dicetur Grave, quantò ad Terræ Centrum propius accesserit. Putà, quantò Brevior est C B vel C D, quàm C A. Adeoque tantò Ascendisse, quantò fuerit contrario motu latum; hoc est, quantò à Terræ centro remotiùs abscesserit; putà, quantò Longior est C B, vel C D, quàm C E. Quod erat propositum.

Adeoque: Quamquam A D vel E D recta, Longior sit quàm A B vel E B; non tamen Altior seu major Descensus est vel Ascensus, Gravis per illam, quàm per hanc lati.

Quodque de Gravitate ostensum est, similiter de aliâ Vi Motrice intelligendum erit. Quod enim est, respectu Gravitatis, Descensio: idem est, respectu cujusvis Vis Motricis, Latio secundum Directionem suam: Et contrà. per Def. 21. Cap. 1.

SCHOLIUM

SCHOLIUM.

NOtandum interim; pro Peripheriâ BD, indifferenter ut plurimùm sumi Rectam Horizontalem BH; quæ, propter immensam Centri distantiam, & planorum quibus maximè versamur parvitatem, cum illâ quasi coincidens haberi solet. Si quando tamen vel immensa plana tractanda veniant, vel accuratiùs philosophandum sit; secernenda erunt.

Necui interim mirum videatur; quòd de Gravi, tanquam in uno Puncto, verba faciamus; cùm interim Grave non sit nisi Corpus solidum: Monendum erit, considerare nos hîc loci, *Grave* ut abstractum à *Magno*, (abstractione, ut loquuntur, Mathematicâ.) Consideramus utique, non quàm Grande Corpus, nedum quâ Figurâ sit, sed quanta Ponderis Vis hoc in puncto applicatur: Perinde habentes, mole magnâ sit, an parvâ, aut etiam nullâ sed Punctulo vis illa insit; Item, planum sit, an rotundum; plenum, an excavatum; quod ita ponderat. Quamquam enim, in *Hydrostaticis*, aut aliàs etiam ubi de Medii resistentiâ agatur, aut alibi aliis de causis; magni intersit, quâ mole quáve figurâ, sit Grave ponderans: ea tamen omnia hic secludimus, (eâdem libertate quâ, post *Archimedem*, alii, de Planorum, Linearum, aut etiam Puncti gravitate philosophantur; quod & nos inferiùs facturi sumus.) Atque hoc ipsum ne à veritate Physicâ nimis abhorrere videatur; ostendetur, in sequentibus, (ubi de Centro Gravitatis agetur,) Gravis quantumvis magni vim totam ita distribui ut perinde omnino ponderando valeat atque si in unico illius puncto esset. Verùm eâ consideratione posthabitâ, quæ hujus loci non est; (quippe quum nondum definivimus Centrum gravitatis, nedum esse demonstravimus, aut quanta vis huic insit; (adeoque, utut in Scholio, ubi laxiùs agimus, illius mentionem faciamus; in Demonstrationibus tamen non eâ libertate utimur;) sufficit hîc loci monuisse, nos id saltem hìc inquirere, quid futurum sit, si hoc aut illo puncto tanta vis Ponderis (aut etiam quæ ponderis instar erit,) adhibeatur, undecunque demum fuerit. Quod & subinde sæpiùs, in sequentibus, intelligendum erit.

PROP. IV.

Eà, cæteris paribus, propendet Grave, vel ex pluribus
Fig. 31. gravibus Aggregatum; (Hoc est, eà potiùs fertur:) quà plus Descenditur: idque in eâdem ratione quâ plus Descenditur. Eáque magis repugnat, & in eadem ratione, quà plus Ascenditur. Et contrà.

Quà verò æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur; æqualiter vel Propendet vel Repugnat. Et contrà.

Cæterisque motibus idem similiter accommodabitur. Eà potiùs feretur Mobile, (& in eâ ratione potius,) quà magis secundum virium Directionem proceditur.

Cum enim tendat Grave (per def. Gravitatis) simpliciter *Deorsum*; adeoque, quàm potest maximè; (Naturaliter siquidem agentia, non agunt ex delectu, sed cæco impetu pro summâ virium:) Eà potiùs feretur, cæteris paribus, quà magis erit Deorsum, seu minùs Sursum; (adeoque contrario motui magis repugnat:) Hoc est, quà plus Descenditur, quáque Ascenditur minùs, (& contrà; Quà minùs Descenditur, quáque Ascenditur magis, ægriùs feretur.) Et quidem (per 7 cap. 1.) in eadem ratione. Quod erat propositum.

Quà verò æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur: Æqualiter vel Propendet vel Repugnat. A Gravitate siquidem (per def. Gravitatis) non nisi Descensûs ergô, vel omnino fertur, vel hac magis quàm illac fertur.

Contrà verò; Quà, cæteris paribus, æqualiter vel Propendet vel Repugnat; æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur. (Nam siquâ vel magis Descenderet, vel minùs Ascenderet; eà magis propenderet, minúsve repugnaret; per jam Demonstrata.) Quod itidem erat propositum.

Et eâdem ratione ostendetur conversa primæ partis; Nempè, quà plus propendet Grave, eâ magis Descenditur; & quà plus repugnat, eà magis Ascenditur, &c. Cæteris paribus.

Et similiter in aliis motibus ostendetur.

PROP.

PROP. V.

Gravium Descensus, invicem comparati, in eâ ratione pollent, quæ ex Ponderum ratione & ratione Altitudinum Descensuum componitur. Atque Ascensus similiter. Adeoque; Si Pondera sint æqualia; in ratione Altitudinum: Si Altitudines sint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera & Altitudines, vel utraque sint æqualia, vel sint Reciprocè proportionalia; Æquipollent. Et, universaliter, Virium Motricium quarumcunque Progressus Regressusve, pollent in ratione, quæ, ex ratione Virium, & Progressuum Regressuúmve secundum lineam Directionis Virium æstimatorum, componitur.

$$\frac{\begin{matrix}P.\\ D.\end{matrix}}{PD.}\,G :: \frac{\begin{matrix}nP.\\ D.\end{matrix}}{nPD.}\,nG. \qquad \frac{\begin{matrix}P.\\ D.\end{matrix}}{PD.}\,G :: \frac{\begin{matrix}P.\\ mD.\end{matrix}}{mPD.}\,mG.$$

Fig. 32, 33.

$$\frac{\begin{matrix}P.\\ D.\end{matrix}}{PD.}\,G :: \frac{\begin{matrix}nP.\\ mD.\end{matrix}}{mnPD.}\,mnG. \qquad \frac{\begin{matrix}P.\\ nD.\end{matrix}}{nPD.}\,G :: \frac{\begin{matrix}nP.\\ D.\end{matrix}}{nPD.}\,G.$$

Fig. 34, 35.

$$\frac{\begin{matrix}P.\\ D.\end{matrix}}{PD.}\,G :: \frac{\begin{matrix}nP.\\ D.\end{matrix}}{nPD.}\,nG :: \frac{\begin{matrix}P.\\ mD.\end{matrix}}{mPD.}\,mG :: \frac{\begin{matrix}nP.\\ mD.\end{matrix}}{mnPD.}\,mnG :: \frac{\begin{matrix}nP.\\ \frac{1}{n}D.\end{matrix}}{PD.}\,G.$$

Plura; Si Grave ut P, per D descendens, valet ut G; etiam alterum P (cæteris paribus) tantundem descendens, valebit ut G alterum; tertium, ut tertium, *&c.* Adeóque nP, ut nG; in ratione Ponderum. per 7 cap. 1.

Item; Si Ponderis ut P, descensus per D, valet ut G: ejusdem Ponderis (cæteris paribus) per D alterum descensus, tantundem valebit; adeoque ut alterum G: per tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque per mD, ut mG; in ratione Altitudinum. per 7 cap. 1.

Si itaque Pondus P, per D descendens, valet ut G: etiam *n* P, per D descendens, valebit ut *n* G; Adeoque, per *m* D descendens, ut *m n* G; (ut ostensum est:) Hoc est; in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus compositâ, (per 2 cap. 1.) Quod erat probandum.

Quæ quidem rationes si sint Reciprocæ; quæ ex his componitur, Æqualitas est, *&c.* per 4, 6, cap. 1.

Similiter de Ascensu judicandum.

Et, in aliâ quâuis Vi Motrice, similiter ostendetur.

SCHOLIUM.

POsset quidem hæc, & subsequentium Propositionum aliquot, in plures distrahi, & similiter demonstrari, atque in capite præcedente factum est, in Prop. 13, 14, 15, 16. item, 17, 18, 19, 20. item 22, 23, 24, 25. Quum autem illud semel iterúmque, perspicuitatis gratiâ, factum fuerit; malebam tum hic tum in sequentibus succinctiùs agere, ne videam vel nauseam creare, vel propositionum numerum præter necessitatem in immensum augere velle. Ob quam rationem etiam Corollaria Propositioni principali toties subnectere visum est.

Ex hac autem Propositione (quæ Descensuum Ascensuúmque *Magnitudinem*, ex Gravium Pondere simul & Motuum Altitudine, æstimat,) potissimum dependet, de Machinarum quarumvis Potentiâ, judidium.

PROP. VI.

Conjunctis invicem Descensu & Ascensu; Si præpollet Descensus, pro Descensu simpliciter habendi sunt: Pro Ascensu verò, si Ascensus præpollet: (Et quidem utrobique tanto, quanta est Præpollentia:) Sin æquipollent, pro Neutro.

Si verò vel plures Ascensus conjuncti sint, vel plures Descensus: tantundem simul pollent atque eorundem summa.

Idemque motis ab aliâ Vi Motrice, mutatis mutandis, accommodabitur.

Patet ex Prop. 8. cap. 1.

PROP. VII.

Comparata Gravia, cæteris paribus, eâ ratione Ponderant (Descensum moliendo, aversando Ascensum,) quâ pollent eorum si moveantur Descensus Ascensúsve; sive, quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componitur.

Idémque aliis motibus, mutatis mutandis, accommodabitur.

PUta; Tantundem ponderant Unum Pondo per Duo Spacia, atque Duo Pondo per Unum Spacium, sursum deorsúmve (eodem tempore) ferenda. (Quippe utrobique Duplum Unius Pondo per Unum Spacium.) Adeoque Duo Pondo per Duo spacia, quadruplum ponderabunt, Unius Pondo per Unum Spacium eodem tempore ferendi. Et in reliquis proportionibus similiter.

Cùm enim eâ ratione plus ponderant Gravia, cæteris paribus, quâ sunt majoris Ponderis, (per 1 hujus;) quâque plus Descenditur, (per 4 hujus;) Eâ ratione ponderabunt (utriusque ratione habitâ) quâ pollent eorum (secundum utramque considerationem) Descensus Ascensúsve: Hoc est, (per 5 hujus,) eâ quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componitur. Quod erat demonstrandum.

Exempli-gratiâ: Si duo Gravia (seu Vires Motrices) V, P, sint, vel Pondere æqualia & (pro situ quo ponuntur) æqualiter (dum moventur) aut Descensura aut Ascensura; vel, quod Gravius est, in eâdem ratione (eodem tempore) minus sit Descensurum; Æquiponderabunt: (propter Descensus Ascensúsve æquipollentes, per 5 hujus.) Sin alterius præpolleat, quæ ex Pondere & Altitudine oritur, Descensûs magnitudo: præponderabit illud; atque in eâdem ratione cum illâ præpollentiâ. Puta; Descensus Ponderis 2P per Altitudinem 3D, cum Descensu Ponderis 3 P per Altitudinem 2 D comparatus; Æquipollebit,) propter $2 \times 3 = 3 \times 2$;) adeóque quæ sic movenda sunt, Æquiponderabunt. At, Descensus Ponderis 2 P per Altitudinem 4 D, Descensui Ponderis 3 P per Altitudinem 2 D, præpollebit, (propter $2 \times 4 > 3 \times 2$;) Adeóque, quod sic movendum erit, præponderabit. Et in aliis similiter.

Fig. 37, 38, 39, 40.

PROP. VIII.

Si (cæteris paribus) ad duos (pluresve) motus æqualiter propendeat Grave (vel ex pluribus conjunctis Gravibus
Fig. 36. Aggregatum,) neque ad alium ullum magis propendeat: Nullo feretur.

Sin ad unum aliquem, præ cæteris, maximè propendeat: illo (nisi aliàs impeditum) feretur.

Idem intellige, mutatis mutandis, de quâcunque Vi Motrice.

PUtà: Si ad A, B, æqualiter propendeat Grave G: neutrà feretur. Nam (per 12 Cap. 1.) propensiones contrariæ (siquidem utrinque simul ferri non possit) cùm sint Æquales, se mutuò perimunt. (Et similiter si ad plures adhuc motus æqualiter propenderet.) Sed nec alio feretur motu (siquis sit) cui minus propendeat; putà ad C. Nam (per eandem) huic præpolleret utravis duarum ad A, B, Propensio; & grave præriperet. Adeóque, si ad nullum magis propendeat, nullo feretur. Quód erat primò probandum.

Sin ad unum aliquem motum, puta ad D, quàm ad cæterorum ullum, magis propendeat: singulis hæc præpollebit; Adeóque (nisi aliàs impeditum) hàc feretur Grave: (per eandem 12 Cap. 1.) Quod itidem probandum erat.

SCHOLIUM.

AT interim, nequis metuat, imperfectam esse hanc Demonstrationem, eò quòd, utut conatus seu Propensio ad D uni cuivis ex reliquis præpolleat, non inde tamen sequatur, quod præpolleret itaque & simul omnibus, cùm tamen omnes huic adversentur: Monendum hîc erit; non cum simul omnibus reliquorum comparandum esse conatum hunc ad D, sed cum singulis sigillatim; eò quòd non simul omnibus illis ferri possit, sed nec pluribus simul, sed uno saltem ex omnibus: Adeóque, conatus ad D, si sigillatim singulis præpolleat, omnibus præripiet grave.

Secus

Secus autem omnino est, ubi plures consentientes conatus, uni alicui adversantur. Putà, si plura Minora gravia, uni alicui (singulis quidem, sed non omnibus) Majori, in oppositâ Libræ lance, contra-ponderarent. Quamquam enim Majus illud in unâ lance, reliquorum singulis in alterâ, præpolleat; Minora tamen hæc simul sumpta, Libram in suas partes trahent; Quia, cùm simul omnes illi conatus minores in eundem motum conspirant, pro Conjunctis habendi sunt conatibus, non Disparatis. Contrà quàm hìc obtinet.

Quódque hìc monemus, alibi (siqui similes occurrunt casus) intelligendum erit.

PROP. IX.

Gravis in superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, utcunque moti, nullus est vel Descensus vel Ascensus.

Idem dicendum est, de Plano Horizontali; dummodo, propter Parvitatem plani & immensam à Centro distantiam, quasi cum illâ Sphæricâ superficie coincidens habeatur.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliâ Vi motrice.

$$CB = CD. \qquad CB - CD = 0.$$ Fig. 30.

PUta; Si à B ad D, in superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, moveatur grave: (vel etiam in Horizontali Plano, quousque hoc cum illâ coincidens habeatur;) Nihilo fit vel Propius vel Remotius à Centro Terræ; (propter æquales CB, CD, Sphæræ radios:)

Adeoque (per 3 hujus) non vel Descendit quicquam vel Ascendit sic latum Grave. Quod erat propositum.

Idem in motis ab aliâ Vi Motrice, mutatis mutandis, similiter ostendetur. Nempe, nihil vel profecisse, vel contrà, Vim illam; dummodo secundum Vis Motricis Directionem nihil vel processerit vel recesserit, utcunque aliàs moveatur.

PROP. X.

Gravis per rectam Horizonti perpendicularem Descendentis, Descensus tantus est quanta est ea recta per quam fertur. Et similiter Ascendentis Ascensus.
Adeóque Obliquè vel Descendentis vel Ascendentis; tantus quanta est perpendicularis æquè alta.
Idem intellige, mutatis mutandis, de aliâ Vi motrice.

$$ABC - BC = AB = ABC - DC.$$

Fig. 30. $$DC - EC = BEC - EC = BE.$$

PVtà: Si in ABE rectâ, quæ ad Horizontalem rectam HB perpendicularis sit, (adeoque ad C centrum Terræ rectà tendit, per 19 Elemen. 3.) feratur Mobile, ab A vel E, ad B: Manifestum est, tantò vel propius vel remotius à Centro fieri, quanta est ipsa AB, vel EB, recta quâ fertur, (per 3 Elemen. 1.) Adeóque (per 3 hujus) tantundem vel Descendere vel Ascendere. Quod erat propositum.

Adeóque; Si utcunque Obliquè, ab A vel E, feratur ad D punctum, quod tantundem atque ipsum B à Centro distet: tantundem utrobique vel Descendisse vel Ascendisse censendum erit; per 3 hujus: Hoc est (per modò demonstrata) quanta est AB, vel EB, perpendicularis æquè alta. Quod item probandum erat.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab aliâ Vi, similiter ostendetur.

PROP. XI.

Gravis, per rectam utcunque declivem descendentis, Descensuum Altitudines sunt emensis Longitudinibus proportionales. Atque Ascensuum similiter.
(Intellige; Dummodo planum Horizontale, cum superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, coincidens habeatur. Et similiter in sequentibus aliquot, quæ hinc dependent.)
Idem de aliâ Vi, mutatis mutandis, intelligendum.

FO. FL :: FP. FD.

SIt P O, Horizontalis recta; F P, ad Horizontem perpendicularis; F O, inclinata recta, per quam vel Descendit vel Ascendit Grave; Fig. 41. Et, rectæ P O, parallela D L, (trianguli crura secans proportionaliter, per 2 Elem. 6.) Ergo: ut F O, ad F L, Longitudo ad Longitudinem; sic F P, ad F D: Hoc est, (per 3 & 10 hujus,) Descensus ad Descensum (si Deorsum,) vel (si sursum moveatur) Ascensus ad Ascensum. Quod erat propositum.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab aliâ Vi quâvis, similiter ostendetur.

SCHOLIUM.

SUpponit hæc Demonstratio: Horizontalis rectæ PO, puncta omnia, ut P, O, æquè-alta: adeoque P O rectam, quasi in superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, jacere. Sin ἀκριβῶς loquamur, pro rectis P O, D L, substituendi sunt arcus circulares, Terræ concentrici; (& quidem pro singulis in F O punctis, mutabitur Perpendiculi positio, & inclinatio declivis rectæ:) Sed tantillum à Rectis differunt Arcus illi, ut pro Rectis tutò usurpari soleant, ob causas ad Def. 15. Cap. 1. memoratas.

PROP. XII.

Rectis, sive ad Horizontem perpendicularibus, sive utcunque inclinatis; Si per Æquales Longitudines feratur Grave: Descensuum Ascensuúmve Altitudines, sunt Longitudinibus portionum æquè-altarum reciprocè proportionales.

Si, per Inæquales Longitudines ferantur: Descensuum Ascensuúmve Altitudines, sunt in eâ ratione quæ componitur ex ratione Longitudinum per quas fit motus, & reciprocâ Longitudinum portionum æque-altarum.

Adeóque; Si emensæ Longitudines, sint Longitudinibus æquè-altis proportionales: Descensus Ascensúsve sunt æquales.

Idem intellige, mutatis mutandis, de aliâ Vi motrice.

$$FO.\ FP :: FL = FP.\ FD :: FK.\ FM.$$

Fig. 41. $mL.\ L :: M = D.\ \frac{1}{m}D :: nM.\ \frac{n}{m}D.$

SIt FP, ad Horizontem recta; FO, inclinata: per FP, descendat P Grave: in FO, grave L; per Longitudinem FL, rectæ FP æqualem. Jungatur PO Horizontalis recta, (abscindens portiones FP, FO, æquè-altas:) &, huic parallela, LD. Descensus itaque gravis P, tantus est quanta recta FP; gravis L, quanta est recta FD; (per 10 hujus.) Estque (per 2 Elem. 6.) ut FO (longitudo portionis obliquæ,) ad FL, vel huic æqualem FP, (longitudinem perpendiculi æque-alti:) Sic, vice versâ, FP (altitudo Descensûs, in perpendiculo descendentis, P,) ad FD (altitudinem descensûs, obliquè descendentis L, per longitudinem æqualem.) Idemque de Ascendentium per easdem LF, PF, Ascensibus, similiter ostendetur. Quod erat probandum.

Adeóque; Si per Inæquales Longitudines ferantur; (putà, per FP; & $FK = \frac{1}{2}FP$;) erunt Descensus Ascensúsve, in ratione quæ ex illâ, & longitudinum per quas feruntur, compositâ; (nempe $FM = \frac{1}{2}FD$.) per præced. Quod porro probandum erat.

Ideóque; (per 6 Cap. 1.) Si rationes illæ, (nempe, reciproca portionum æque-altarum, & directa longitudinum emensarum,) sint invicem reciprocæ; Hoc est, si longitudines emensæ, sint longitudinibus æque-altis proportionales; (Putà, FL, FD, longitudines emensæ, ipsis FO, FP, longitudinibus æque-altis, proportionales:) Descensuum Ascensuúmve Altitudines, æquales erunt. Quod erat ultimò probandum.

Idem viribus aliis motricibus facilè accommodabitur.

PROP. XIII.

Gravium, per rectas utcunque ad Horizontem inclinatas, Descensus, in eâ ratione pollent, quæ componitur ex rationibus & ponderum, & Longitudinum emensarum, & Reciprocâ Longitudinum æque-altarum. Atque Ascensus similiter.

Idémque motis ab aliâ Vi motrice facilè accommodabitur.

Valent

VAlent enim (per 5 hujus) in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus compositâ: Hoc est, (per præcedentem,) ex rationibus Ponderum, & Longitudinum emensarum, & Reciproca Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

PROP. XIV.

Rectarum Declivitas Longitudine æqualium, est Altitudinibus proportionalis.

Rectarum Declivitas æque-altarum, est Longitudinibus Reciprocè proportionalis.

Adeóque; Rectarum quarumvis Declivitas, est in ea ratione, quæ ex ratione Altitudinum & Reciprocâ Longitudinum componitur.

Atque; Si Rectarum Longitudines sint Altitudinibus proportionales; earum Declivitas æqualis est.

Quod & aliis perinde ac gravium motibus accommodabitur.

$$\frac{A}{L},\ D.\ \frac{A\ A}{L};\ \frac{2}{1}D.\ \frac{A}{L\ \ L},\ \frac{1}{2}D.\ \frac{A\ A\ A}{L\ L},\ \frac{3}{2}D.\ \frac{A\ A}{L\ L},\ \frac{2}{2}D = D.$$

$$\frac{A}{L}.\ D :: \frac{mA}{L}.\ mD :: \frac{A}{nL}.\ \frac{1}{n}D :: \frac{mA}{nL}.\ \frac{m}{n}D :: \frac{mA}{mL}.\ \frac{m}{m}D = D.$$ Fig. 42.

A Puncto F, ducantur æquales rectæ quotlibet F P, F O, F B, quæ continuatæ occurrant Horizontali Rectæ (vel Plano saltem) in punctis P, S, T.

Rectarum F P, F O, F B, longitudine æqualium, Declivitates, sunt earum Altitudinibus, putà, F P, F Q, F R, proportionales. per Def. 17, 18. Cap. 1.

Rectarum F P, F O S, F B V T, æque-altarum, Declivitates, sunt earum Longitudinibus, hoc est, ipsis F P, F S, F T, Reciprocè proportionales. per easdem Def. 17, 18. Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

(Quas

(Quas quidem rationes easdem esse; adeóque geminam quæ habetur Def. 18. Cap. 1. *Majoris Declivitatis* definitionem tantundem valere, (& *Minoris* similiter;) hinc constat: Quoniam; Sive sumantur rectarum F P, F O S, portiones longitudine æquales F P, F O, quarum Altitudines sint F P, F Q; Sive portiones æque-altæ F P, F S, quarum longitudines reciprocæ sunt F S, F P, hoc est F S, F O; Eadem utrobique provenit Declivitatum ratio: Nam, ut F P, ad F Q; sic est F S ad F O: per 2 Elem. 6. Similiter, in rectis F P, F B T; portionum æqualium F P, F B, altitudines F P, F R; & portionum æque-altarum F P, F T, longitudines reciprocæ F T, F P, hoc est F T, F B; proportionales sunt: per 2 Elem. 6. Item; rectarum F O, F B V, portionum æqualium F O, F B, altitudines F Q, F R; & portionum æque-altarum F O, F V, longitudines reciprocæ F V, F O, hoc est F V, F B; proportionales sunt: per 2 Elem. 6.)

Ideóque; rectarum, putà F P, F V, Declivitates; sunt in ratione F P ad F R; nempe in ratione quæ componitur, ex Altitudinum ratione, putà F P ad F Q; atque F Q ad F R, sive F V ad F B, hoc est F V ad F P, reciprocâ Longitudinum. Quod itidem demonstrandum erat.

Adeóque (per 6. Cap. 1.) Si rationes illæ (directa altitudinum, & reciproca Longitudinum) sint invicem reciprocæ; hoc est, si Altitudines sint Longitudinibus directè proportionales; Declivitates sunt æquales. Quod erat ultimò demonstrandum.

SCHOLIUM.

NOtandum hìc; Dummodo Terræ Centrum intelligatur tamquam infinitè distans; eadem est ubique ejusdem rectæ, putà F B T, Declivitas; propter parallelam Perpendiculorum positionem: Si verò intelligatur ut in certâ distantiâ finitâ; varia est in singulis punctis Declivitas: Quippe cùm Perpendicula omnia in Centro coëant; quamquam eadem sit directio Motûs, Motricis tamen vis directio subinde mutatur: adeóque alia erit illius ad hanc Positio, aliúsque ad perpendiculum Angulus, puta in B quàm in F puncto: Quæque ex præsenti Figurâ & demonstratione colligitur Declivitas, soli F puncto convenit; aliáque pro aliis, ut B, V, T, punctis, similiter colligenda erit; demissis inde ad Terræ Centrum Perpendiculis.

PROP.

PROP. XV.

Lineæ curvæ Declivitas, in singulis respectivè punctis; eadem est atque rectæ ibidem contingentis. Et superficiei curvæ; eadem atque ibidem contingentis Plani.
Quod aliis perinde atque Gravium motibus accommodabitur.

SIt FP, perpendiculum; FC, curva; FT, recta contingens. Cùm eandem curvam in variis sui partibus variè declivem esse constet, (decliviorem alibi, alibi minùs declivem:) Eandem dico, in F puncto, declivitatem FC curvæ, atque contingentis rectæ FT, censendam esse. Cùm enim CFT angulus contactûs (sive Circulorum, per 16 Elem. 3. sive Conicarum sectionum, per 32 Lib. 1. *Apollonii*; sive, quod similiter ostendetur, curvarum quarumvis;) sit vel nullius magnitudinis, (quod nos, peculiari Tractatu, *De Angulo Contactûs*, multis ostendimus;) vel saltem, infinitè exiguæ, (utpote qui sit vel minimo possibili rectilineo minor; quod apud omnes in confesso est:) eadem erit, in puncto F, Directio, sive FC curvæ, sive FT contingentis rectæ; (saltem, differentia quàvis assignabili minor erit:) Adeóque, & eadem utriusque in illo puncto Declivitas. Quod erat propositum. Fig. 43.

Idémque de superficiei curvæ punctis singulis, similiter ostendetur.

PROP. XVI.

Si ad duos motus ita sit comparatum Grave, cæteris paribus; ut, altero si feratur, Descensurum sit; Ascensurum, si altero: Eà præponderat, quà Descensurum est.
Si, altero latum, plus Descendet; altero, minùs: Eà præponderat, quà plus descendet.
Si, altero, plus Ascendet; altero, minùs: eà minùs Repugnat, quà minùs Ascendet.

Sin

Sin æqualiter, utrovis feratur, vel Descendet, vel Ascendet: Æquiponderat utrinque.

Contrà verò: Quà, cæteris paribus, præponderat, vel minùs Repugnat; Eà vel plùs Descensurum est, vel Ascensurum minùs: Sin neutrà; Æqualis utrinque futurus est vel Descensus vel Ascensus.

Fig. 31. Utà; Si in puncto G sit constitutum Grave; vel per G A, vel per G B ferendum: sitque G A, cæteris paribus, vel magis deorsum, vel minùs sursum, quàm G B: Per illam potiùs quàm per hanc feretur. Sin æqualiter; neutrà propendet magis. Et contrà.

Sequitur ex 4 hujus.

PROP. XVII.

Eà præponderat Grave, cæteris paribus, & in eâ ratione, quâ motus est Declivior: Quâque est Acclivior, magis repugnat.

Adeóque, omnium maximè in perpendiculo.

(Quâre & Ponderis simpliciter tanta Vis censeri solet, quantam in Perpendiculo habet.)

Quáque æqualiter vel Declivis est vel Acclivis, æqualiter vel propendet vel Repugnat.

Súntque hæc perinde vel Gravium motibus, vel aliis, accommodanda.

Fig. 42. Uta; In rectis FP, FOS, FBT; eâ ratione ponderat Grave, quâ sunt Declives illæ rectæ. Est enim Declivitas in Reciprocâ ratione Longitudinum æque-altarum; sive, quod eodem recidit, in Directâ Altitudinum æque-longarum; (per 14 hujus.) Hoc est, in ratione Descensuum (Ascensuúmve) cæteris paribus; (per 10, 12, hujus:) Adeóque, in ea ratione ponderant; per 4 hujus. Quod erat propositum.

Quare &, in perpendiculo, omnium maximè: ut quæ ex æque-altis Brevissima est; & ex æque-longis Altissima.

Et

Et propterea (quod Definitionis instar esto) tantam Ponderis cujusvis Vim censemus, quantam in Perpendiculo habet.

Quodque de F T rectâ ostensum est; idem de curvæ F C puncto F, intelligendum est. Utpote cujus Declivitas, adeóque Tendentia deorsum, eadem est atque Contingentis rectæ F T: (per 15 hujus:) Adeóque & gravitatio; per 4 hujus. Fig. 43.

SCHOLIUM.

MOnendum tamen est: In rectarum, ut F T, punctis singulis, eandem intelligendam esse gravis Ponderationem, dummodo intelligatur Centrum Terræ tamquam infinitè distans; adeóque, propter Perpendiculorum quasi parallelismum, eandem ubique Declivitatem. Si tamen (quod ad Prop. 14 monuimus) Centrum intelligatur in certâ distantiâ finitâ; mutabitur, in singulis punctis, rectæ Declivitas; adeóque & Gravis, in eo puncto, ponderatio. Quo casu; quod de Curvâ modò dictum est, idem de rectâ pariter dicendum; Nempe eam esse Gravis, *in recta* F T *puncto* F, Ponderationem, quæ ex rectarum F T, F P, reciprocâ ratione colligitur: Atque in aliis punctis similiter judicandum. Quippe, ut in curvis, sic Rectis, pro mutata in singulis punctis Declivitate, mutabitur & Ponderatio.

Verùm cùm Centrum soleat, tanquam infinitè distans, reputari; & Perpendicula parallela: tutò solent (quoad sensum) & Rectæ in singulis sui punctis pariter Declives æstimari. Quamquam (quod & subinde antea monuimus,) si tantæ longitudinis Rectæ, Planáve tantæ amplitudinis, consideranda veniant; ut notabile hinc discrimen emergat; etiam hujus mutatæ Declivitatis, adeóque & Ponderationis, habenda erit ratio.

PROP. XVIII.

Si Grave, ubivis in eodem Perpendiculo, vel Incumbat, vel Dependeat, vel in ipso sustentationis puncto intelligatur, (vel cum ipso ita utcunque connexum, ut vel simul quiescant, vel simul æqualiter moveantur contrariæ vires; altera secundum, altera contra directionem suam:) Quò sustineatur, requiritur, æqualis Ponderi, vis Impediens; atque hæc sufficit.

Idémque intellige, mutatis mutandis; de quacunque Vi motrice.

Fig. 44. INtelligatur Pondus (seu Vis quælibet Motrix) in P; atque ibidem vis Impeditiva motûs V. Si Vis Ponderis (seu Motiva) Major sit; præpollebit: adeóque descendet (sive secundum Directionem suam feretur,) non sustinebitur. Si Æqualis, æquipollebit: adeóque sustinebitur Pondus. (per 11. Cap. 1.) Unde constat propositum. (Si Vis Impediens sit major; eò fortiùs impediet: Non requiritur tamen; quia æqualis sufficit.)

Idem ostendetur; Si ubivis in eodem perpendiculo (sive Directionis Lineâ) constituatur P; dummodo quantum Descendit (sive secundum directionem suam movetur) P, tantum deprimatur (seu contra directionem suam revellatur) contraria Vis V. Nam (per 5 hujus) æqualium virium æquales progressus æquipollent: Adeóque, cùm sint contrariæ, (putà, secundum directionem suam altera, altera contra suam,) propter Impedimentum Momento æquipollens, non fit motus; (nedum si Impedimentum majus sit:) Fit autem; si minùs valet impedimentum, per 11 Cap. 1.

Fig. 45. Idem ostendetur; Si utcunque cum Pondere, seu Vi Motrice, ita connectatur Vis Impediens, ut contrarii motus (alter secundum, alter contra Virium Directionem,) sint æquales. Putà; Si intelligatur P Pondus, ex funiculo P F (brevi an longo perindè est) liberè dependens, qui orbiculo circumpositus ex adversa parte pertingat ad V; ibíque æquale Pondus seu Vis æqualis applicetur; ita quidem ut, descendente P pondere, tantundem ascenderet, vel contra directionem suam revelleretur, pondus seu Vis V; (sive contrà; ascendente P, tantundem descenderet V, *&c.*) Nam (per 5 hujus) æqualium Virium, æquales progressus, æquipollent: Adeóque, contrariæ cùm sint, non fiet motus; fiet autem, si Vis Impediens minor sit. Per 11 Cap. 1.

SCHOLIUM.

HInc sequitur; Gravia ex filo longiori an breviori dependentia, tantundem ponderare: Item, propius an remotius distent quæ incumbunt pondera, aut dependent; dummodo in eodem perpendiculo.

Hinc etiam sequitur; In construendis Machinis; Vectes, Juga, Fulcra, Funes, cæteráque Machinarum armamenta, tantæ firmitudinis intelligenda esse singula, ut oneri quod respectivè sustinent sint ferendo paria. Alioqui citiùs rumpetur Machina, vel incurvabitur, quàm perficietur expectatus motus.

PROP.

PROP. XIX.

Gravia, cæteris paribus, in ea ratione gravitant, quæ componitur ex rationibus Ponderum & Declivitatum; (sive Ponderum & Altitudinum rectarum longitudine æqualium; vel Ponderum & reciprocâ Longitudinum rectarum æque-altarum.)

Adeóque; Si Pondera sint Æqualia; in ratione Declivitatum: Si Declivitates sint Æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint Declivitatibus reciprocè proportionalia, (sive proportionalia Longitudinibus æque-altis;) æqualiter gravitant.

Idémque aliis Viribus Motricibus accommodabitur.

P. G ::	nP. nG ::	P. mG ::	nP. mnG ::	nP. G.
D.	D.	mD.	mD.	$\frac{1}{n}$D.
PD.	nPD.	mPD.	mnPD.	PD.

PUta: Si Pondus P, in Declivitate D, gravitet ut G: Pondus nP, in eadem declivitate, gravitabit ut nG, (per 1 hujus:) Adeóque in Declivitate mD, gravitabit ut mnG, (per 17 hujus:) Hoc est, in ratione ex Ponderum & Declivitatum rationibus compositâ, (per 2 Cap. 1.) Hoc est, (per 14 hujus,) ex Ponderum & Altitudinum rectarum Longitudine æqualium, vel ex Ponderum & reciprocâ Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

Corollaria constant, ex 4 & 6 Cap. 1.

Alia Demonstratio.

Idem sic aliàs demonstrabitur. In F P ad Horizontem rectâ; sit Pondus D; & huic æquale L, in inclinatâ F O æque-altâ. Et connecti intelligantur Pondera D, L, filo flexili D F L, punctum F immobile ambiente: ut moto D, versus P, tantundem moveatur L versus F, & contrà. Erit, ut F P ad F O; puta ut m ad 1; sic vice versâ, Descensus Ascensúsve ponderis L in hac, ad Descensum Ascensúmve ponderis æqualis D in illa; (per 12 hujus:) adeóque & (quæ huic proportionalis est, per 5 & 17 hujus,) Gravitatio Ponderis in L, ad æqualis ponderis D gravitationem. Hoc est, si D gravitat ut G; æquale pondus L, gravitabit ut mG; hoc est, in reciproca Longitudinum æque-altarum; sive in Declivitatum ratione. Fig. 41.

Adeóque; Si Inæqualia sint L, D, pondera; Puta L = *n*D: gravitabit illud L, ut *mn*G: (per 1 hujus:) Hoc est, in ratione quæ ex Ponderum & Declivitatum rationibus componitur; sive ex ratione Ponderum & reciprocâ Longitudinum æque-altarum.

Quapropter; Si Pondera sint Declivitatibus reciprocè proportionalia, sive Proportionalia Longitudinibus æque-altis; æquè gravitant. per 6 Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

PROP. XX.

Si, circa Punctum quodvis (extra Terræ Centrum) in Horizontali rectâ, ut Centrum, Recta linea, manente uno extremo, altero describat Circuli peripheriam, in plano ad Horizontem sive recto, sive utcunque inclinato: Altissimum peripheriæ punctum, illud est, quod supra Horizontalem rectam est in rectâ ad illam perpendiculari; Humillimum, illud quod est in eâdem perpendiculari infra Horizontalem rectam: Punctorum verò in peripheriâ intermediorum; illud Altius est, quod est supremo propius; Inferius, illud quod est propius infimo, seu à supremo remotius: Quæ autem æqualiter utrinque vel à summo vel ab imo distant; sunt æque-alta. Idem, mutatis mutandis, aliis motibus accommodabitur.

Fig. 46. Circa Punctum F (quod Terræ Centrum non sit) in Horizontali rectâ AB, (cui ad rectos angulos insistit SFP recta,) conversa recta FA intelligatur peripheriam ASBP describere, in plano ad Horizontem vel recto vel utcunque inclinato. Erit, inquam, peripheriæ punctum Altissimum, S; Infimum, P: Intermediorum verò, ut G, H; quod propius ab S distat, ut G, Superius; quod propius à P, ut H, inferius; Quæque æqualiter vel ab S, vel à P distant; puta G, G; vel H, H; æque-alta.

Sit primum ASBP peripheria, in plano ad Horizontem recto: Adeóque Centrum Terræ in eodem plano, (per 19 Elem. 3.) putà, in C, extra Circulum. Ductis, ab assignatis punctis, lineis rectis, in C Terræ Centro coëuntibus: constabit propositum; per 8. Elem. 3.

Sin

Sin tantæ magnitudinis intelligatur Circulus A S B P, ut ad ipſum Terræ Centrum, vel ultra, pertingat; ſitque C, verbi gratiâ, vel intra Circulum, vel in ipſa peripheria. Conſtabit propoſitum, per 7 Elem. 3.

Sit deinde, Circuli planum A S B C non ad Horizontem rectum, ſed utcunque inclinatum: Adeóque nec Centrum Terræ in eodem Circuli plano, putà in C; ſed extra planum, ut in K: Unde, ad obliquum Circuli planum, duci intelligatur K C perpendicularis, (punctum C, omnium in obliquo Circuli plano punctorum, proximum ad Terræ Centrum, adeóque omnium infimum deſignans.) Et jungantur tum S C, G C, H C, P C; tum S K, G K, H K, P K. Oſtendetur, ut prius, (ſive contingat C intra vel extra Circulum,) omnium ad C ductarum, longiſſimam eſſe S C; breviſſimam, P C; item G C, longiorem quàm H C; æquales autem tum G C, G C; tum H C, H C. Adeóque, ſumptis quadratis; Quadratum S C, maximum; P C, minimum; G C, majus quàm H C; Quadrata G C, G C, item H C, H C, invicem æqualia. Ideóque, addito communi augmento, quadrato C K; erunt quadratorum S C, C K, aggregatum, hoc eſt (per 47 Elem. 1.) quadratum S K, omnium maximum; quadratorum P C, C K, hoc eſt quadratum P K, minimum; quadratorum G C, C K, hoc eſt quadratum G K, majus quàm quadratorum H C, C K, hoc eſt quadratum H K; quadratorum G C, C K, & G C, C K, hoc eſt quadrata G K, G K, invicem æqualia; & ſimiliter, quadratorum H C, C K, & H C, C K, hoc eſt quadrata H K, H K, invicem æqualia. Ergo &, ſumptis lateribus; Recta S K, omnium ad K ductarum, maxima; P K, minima; G K, longior quàm H K; & G K, G K, item H K, H K, invicem æquales. Adeóque, punctum S, omnium à Terræ Centro Altiſſimum; P, Infimum; G, altius quàm H; & G, G, vel H, H, æquè-alta. Quod erat propoſitum.

Alia Demonſtratio.

Idem oſtendetur, Si intelligatur Centrum Terræ tanquam infinitè diſtans. Nam, ductis à punctis S, P, G, H, ad ſubjectam rectam Horizontalem quamvis perpendicularibus: Si planum Circuli ſit, ad Horizontem Rectum; conſtabit propoſitum, ex Prop. 15. Elem. 3. Fig. 47.

Si verò planum Circuli ad Horizontem ſit Obliquum. Intelligantur ab aſſignatis punctis S, P, G, H, demitti ad planum Horizontale quodvis ſubjectum perpendiculares S σ, P π, G γ, H η; & ab iiſdem punctis, ad communem planorum Horizontalis & Inclinati Sectionem, totidem ad angulos rectos, S s, P p, G g, H h: (& compleantur Triangula.)

Oſtendetur

Ostendetur, (ex 10 Elem. 11.) has illis (propter similia triangula $S\sigma s$, $P\pi p$, $G\gamma g$, $H\eta h$.) proportionales esse. Adeóque; quæ à communi Sectione *g s p h* longius distant puncta in obliquo plano posita, eadem ab illo Horizontali plano longius distabunt, erúntque (secundum perpendiculum) altiora. Ostenso igitur ut priùs (ex 15 Elem. 3.) à communi sectione *g s p h* (quæ ipsa est Horizontalis recta;) ostendetur etiam, ab ipso subjecto plano Horizontali $g\, s\, h\, \gamma\, \sigma$; punctum S, maximè; P, minimè; G, G, & H, H, æqualiter; & G, magis quàm H, distare. Unde constat propositum.

SCHOLIUM.

QUoniam (ut suprà monitum est aliquoties) consideratur Terræ Centrum nunc quasi infinitè distans, nunc autem tanquam in distantia finita; adeóque perpendicula, nunc ut parallela, nunc ut in puncto concurrentia. Visum est propositionem hanc secundum utramque suppositionem demonstrare.

Notandum interim in propositione disertè dici, *In plano ad Horizontem vel Recto, vel utcunque Inclinato*: Quoniam in Horizontali plano, hoc est, in plano Horizonti parallelo, nullum erit peripheriæ vel Altius vel Humilius punctum, sed æque-alta omnia.

PROP. XXI.

Descendens Grave, cæteris paribus, rectâ ad Horizontem Perpendiculari feretur: Ex obliquis verò, eâ potiùs quæ minùs est obliqua.

Ascendens; contrà.

Ponderat autem (pro variâ Ascensuum Descensuúmve obliquitate) in ratione Rectorum Sinuum, Inclinationis ad Horizontem, sive Complementi Obliquitatis.

Idémque aliis motibus accommodabitur.

OStendetur enim (ex præcedente) rectarum longitudine æqualium, perpendicularem (ut FP) esse omnium altissimam; adeóque, & maximè declivem (per 14 hujus.) Hac igitur, præ cæteris feretur Descendens grave; contrà verò, Ascendens. per 17 hujus.

Ex

Ex obliquis verò, ut F O, F B; similiter ostendetur (ex præced.) illam quæ minùs est obliqua, Puta F O, altiorem esse; adeóque (per 14 hujus) & magis declivem. Ideoque (per 17 hujus) per hanc potiùs latum iri Descendens Grave; Ascendens, contrà. Fig. 42.

Utrobique verò ponderat Grave (Descensum promovendo, adeóque Ascensum impediendo) in ratione F P, F Q, F R, altitudinum rectarum Longitudine æqualium F P, F O, F B, (per 14 & 17 hujus;) Hoc est (quod ex Trigonometricis constat) in ratione Sinuum rectorum, angulorum Inclinationis F P S, F O Q, F B R; qui sunt angulorum Obliquitatis P F P, P F O, P F B, complementa. Quod erat propositum.

PROP. XXII.

Grave, quatenus non impeditur; per rectam Horizonti perpendicularem descendet.
Idem intellige, mutatis mutandis, in aliis motibus.

DEscendet enim, quatenus non impeditur; per 2 hujus. Et, hac præ cæteris; per præcedentem.

PROP. XXIII.

Super impenetrabili Plano Horizontali constitutum Grave, vel superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ; Gravitate suâ non movebitur.
Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque sit Vis motrix. Nempe quum planum est Directioni virium ad angulos rectos.

SIt, in B, Grave; impenetrabili Plano Horizontali H B O incumbens; vel superficiei Sphæricæ, quæ sit Terræ concentrica, D D B. Manifestum est (propter æquales Sphæræ radios) nullum in ipsâ DDB Sphæricâ superficie punctum, (nedum quod supra ipsam est, aut etiam supra planum Horizontale,) propiùs à Terræ Centro distare, quàm ipsum B punctum. Adeóque; si nec superficiem illam (sive Sphæricam, Fig. 30.

cam, sive Horizontalem,) penetrare possit, (quod supponitur;) in nullas movendo partes, descendet, (per 3 hujus) Cùm itaque (per Def. Gravitatis) non nisi Descensûs ergò, gravitate suâ moveatur grave, nec possit (per jam demonstrata) descendere: Non movebitur, gravitate suâ, sic constitutum Grave. Quod erat Demonstrandum.

SCHOLIUM.

IDem ostenderetur de Gravi, in B, superficiei concavæ incumbenti quæ in B tangat Horizontale planum; seu cujus punctum infimum sit ipsum B. Item, de convexâ Sphæricâ cujus Centrum sit ultra Centrum Terræ, quam tamen in B continget planum Horizontale; utpote cujus punctum infimum sit ipsum B. Idem verum est de superficie minoris Sphæræ quam sic contingat B: non autem ob hanc causam, quia punctum illud non sit reliquis altius, (est enim;) sed propter Prop. 8 hujus: quippe non est una aliqua declivitas, reliquis omnibus major.

Per *Impenetrabile planum*, &c. illud intelligimus, quod, eâ saltem quæ adhibetur Vi, non penetrabitur; utut Vi majore penetrari possit.

Notandum est hic porro, Dummodo, ob immensam Centri Terræ distantiam, & expositi plani parvitatem, intelligatur Horizontale planum, cum superficie Sphæricâ, terræ concentricâ, coincidere; adeóque ipsius puncta singula, quasi-æqualiter à Terræ Centro distare: perinde est, sive in B, sive in H, alióve Horizontalis plani HBO puncto, intelligatur Grave constitutum. Sin ἀκριβῶς consideretur; non erit illud, nisi unius B puncti respectu, planum Horizontale. Quare & in H constitutum grave, poterit ad B moveri gravitate suâ; utpote punctum inferius.

PROP. XXIV.

Super impenetrabili plano ad Horizontem sive recto, sive utcunque inclinato, constitutum Grave; nec aliàs impeditum; per illam Plani rectam descendet quæ est rectæ Horizontali ad angulos rectos, deorsum. Quæ quidem recta, in erecto plano, est ipsum *Perpendiculum*; in obliquo plano, *Perpendiculi succedaneum*, appello.

(Adeoque

(Adeoque; eadem eſt, Deſcensûs Gravis in Declivi plano, ipſiúſque Declivis plani, tum Declivitas, tum Obliquitas, & Inclinatio.)

Et, univerſaliter; in quâcunque ſuperficie Declivi, illo præ cæteris ductu feretur (ſiquis ſit) qui eſt reliquis omnibus Declivior.

Idem intellige, mutatis mutandis, de motis ab aliâ quâvis Vi motrice; Nempe ſecundum illam plani rectam feretur Mobile, (niſi aliàs impeditum,) quæ eſt ad angulos rectos illi rectæ quæ Lineam Directionis Virium ad angulos rectos ſecat.

Sit, in Declivis Plani puncto F, conſtitutum Grave; rectæque Horizontali AFB ad angulos rectos FP recta, in eodem Plano, deorſum. Oſtendetur (ex 20 & 14 hujus) omnium quæ in illo plano ſunt (nedum quæ ſupra planum) longitudine æqualium, ad F ductarum, Unicam FP rectam, maxime declivem eſſe. Adeóque (cùm, propter impenetrabile planum, ad illas infra Planum ne tranſeat, impediri intelligatur) per ipſam FP (per 17 & 5 hujus,) niſi aliàs impediatur, deſcendet Grave. Quod erat demonſtrandum. Fig. 46, 47.

Idem aliis ſuperficiebus accommodandum erit, pro re natâ; Nempe, cæteris paribus, illo ſemper ductu (ſiquis ſit) latum iri Grave, qui eſt cæteris omnibus declivior: per 17 & 5 hujus. Sin talis nullus ſit (reliquis omnibus declivior) ductus; non movebitur. per 8 hujus.

Alia Demonſtratio.

Poteſt hoc idem demonſtrari, ex Prop. 21. propter Obliquiorem alibi Deſcenſum: hoc modo. Fig. 48.

In Declivis Plani PGOH puncto G, conſtitutum intelligatur Grave: Atque, in eodem plano, tum Horizontalis recta PG (nempe ea recta ſecundum quam Horizontale planum, per G tranſiens ſecat Declive planum,) tum huic ad angulos rectos GO: Indéque ad ſubjectum Planum Horizontale HOR, demiſſa perpendicularis GR: (Per quam itaque, niſi impedietur, deſcendet Grave; per 22 hujus.) Intelligatur autem, ob duritiem Declivi Plano ſubjectam, impediri nè penetret. Dico per GO deſcenſurum Grave.

Cùm enim duo Plana Horizontalia, adeóque Parallela, alterum in HO, alterum in PG, ſecet idem declive planum PGOH (per conſtructionem:) erunt HO, PG, parallelæ rectæ. per 16 Elem. 11.

Item, propter PG rectam, rectis GO, GR, ad angulos rectos, (per constructionem,) erit ad planum O G R recta, (per 4 Elem. 11.) Adeóque & (huic parallela) H O, eidem O G R plano recta erit, (per 8 Elem. 11.) rectísque O G, O R, ad angulos rectos; per 3 Def. Elem. 11.

Et, si Centro R S. in plano H O R, ducatur per O, peripheria O S; eam contingens H O, extra peripheriam jacebit; per 16 Elem. 3.

Si itaque ad rectæ H O, aliud quàm O, punctum quodvis T, ducatur G T recta, & R T jungatur; secabit hæc peripheriam; Putà in S. Et, junctâ G S, erit (propter G R ad planum Horizontale rectam; adeóque angulos G R O, G R S, æquales rectos; & R O, R S, æquales radios; rectámque G R communem) S G recta, æqualis rectæ O G; & angulus S G R æqualis angulo O G R; per 4 Elem. 1.

Est autem angulus T G R, major angulo S G R (parte sui,) ergo & (huic æquali) angulo O G R major est. Adeóque Descensus obliquior est per G T, quàm per G O.

Cùm igitur Grave, quàm potest rectà ad Centrum descendat, (per 21 hujus;) per G O potiùs quam G T feretur.

Atque similiter de aliis ejusdem Plani rectis ostendetur. Adeóque à fortiori, de rectis ultra planum, aut etiam curvis.

Ideóque (cùm nec Planum penetrare possit) per rectam G O (nisi aliàs impeditum) descendet Grave in G, (ut qui reliquis rectior est Descensus:) Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

HAnc Demonstrationem præcedenti subjungere visum est, propter ea quæ apud Mechanicorum Scriptores de Obliquitate Descensuum occurrunt, Angulíque Obliquitatis magnitudine. At priorem ego prætulerim, quæ ex Declivitate, hoc est, ex Altitudine rectarum longitudine æqualium, vel Longitudine æque altarum, dependet: tum ut simpliciorem; tum, præcipuè, quoniam quod ex Obliquitate hac oritur Gravitationis impedimentum, Augmento longitudinis Descensuum æque-altorum proportionale est; & non Obliquitatis Angulo; (quod ex jam dictis & post dicendis manifestum erit:) Adeóque illi potiùs, quàm huic, ut veræ causæ referendum.

Hinc autem sequitur; Eandem esse Descensûs Gravis in Declivi Plano, ipsiúsque Declivis Plani, ad Horizontem Inclinationem; (Nam, per Def. 5 & 6, Elem. 11. Angulus G O R est Inclinationis Mensura, tum rectæ G O, tum plani P G O, ad Horizontem H O R:) Adeóque eandem utriusque tam Obliquitatem, tam Declivitatem. Nempe idem Obliquitatis Angulus O G R; eadémque Declivitas sive rectæ G O ad G R, ratio.

PROP.

PROP. XXV.

Obliquitas motûs, eâ ratione minuit Gravitationem, (adeóque Descensum impedit, adjuvat Ascensum;) quâ Longior est obliqua recta, illam determinans, quàm perpendicularis æque-alta; sive Secans Anguli Obliquitatis, quàm Radius.
Idémque aliis motibus accommodabitur.

NAm (per 17 hujus) Grave, pro variâ Declivitate, gravitat in ipsâ Declivitatis ratione; hoc est (per 14 hujus) in reciprocâ ratione rectarum æquè-altarum. Puta, quâ ratione longior est F S vel F T obliqua, quàm perpendicularis æque-alta; sive (quod in Trigonometricis dicitur) F S vel F T Secans Anguli Obliquitatis P F S vel P F T, quam Radius; Eâ minùs gravitat in F S vel F T ferendum grave, quàm in F P. Quod erat probandum. Fig. 42.

Adeóque (per 17 Cap. 1.) in eâdem ratione minùs Descensum promovet, vel Ascensui repugnat; sive (quod eodem recidit) in eâ ratione Descensus Obliquitate impeditur, & facilitatur Ascensus. Quod itidem probandum erat.

PROP. XXVI.

Obliquatio Plani in quo fit Motus; in eâdem ratione minuit omnium in illo ferendorum Gravitationem: eâ nempe quam ipsa Plani Obliquitas postulat.
Et in aliis motibus similitèr.

SIt in Obliquo Plano G O T, recta quævis G T. Atque à puncto G, demittatur, ad Horizontale Planum T O R, perpendicularis G R. Atque, ad communem Planorum intersectionem T O normalis G O; (ut sit G O R Inclinatio Plani, per Def. 6. El. 11. & O G R Obliquitas.) Si igitur intelligatur G O T planum, super Horizontalem rectam O T erectum esse; erit utriusque rectæ G O, G T, communis Fig. 48.

Altitudo G O: In eodem verò Plano Obliquato, Communis Altitudo est G R. Ideóque; quâ ratione G R brevior est quàm G O, (hoc est, Radius quàm Secans Anguli Obliquitatis,) Eâdem ob Plani Obliquationem minuitur Altitudo (adeóque Declivitas, & Gravitatio, per 14 & 17 hujus.) sive per. G O, sive per G T, ferendi Gravis. Quod erat probandum.

PROP. XXVII.

Grave, situ Declivi ferendum; sponte suâ movebitur: Situ Horizontali (sive secundum Superficiem Sphæricam Terræ concentricam;) Vi quantumvis exiguâ: Situ Acclivi; eâ Vi movebitur quæ Impedimento ex Acclivitate (cum Pondere comparatâ) orto præpollet. Idem aliis motibus accommodabitur.

Fig. 49. PEr Declivem ductum, ut F P, F S, (adeóque Descendentem, per Def. 16. Cap. 1.) sponte suâ (nisi aliàs impeditum,) feretur grave; per 2 hujus. Per Horizontale Planum, vel superficiem Sphæricam, Terræ concentricam, ut P H, (cùm nullus sit vel Descensus vel Ascensus; per 9 hujus;) nec sponte suâ movebitur, (per 23 hujus;) nec tamen motui adversatur, (per 4 hujus;) adeóque Vi quantumvis exiguâ movebitur, per 11 Cap. 1. Per Acclivem ductum, ut P F, P O, (adeóque Ascendentem, per Def. 16. Cap. 1.) motui adversatur Gravitas, (per 4 hujus,) impeditque, (per 8 vel 10 Cap. 1.) Huic tamen Impedimento Vis præpollens, movebit; per 11 Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

SCHOLIUM.

NOtandum verò, tum hic, tum toto hoc Capite, (aut etiam alibi,) ubi variam planorum motuúmve, sive Declivitatem, sive Acclivitatem; quódque hinc oritur motûs vel Adjumentum vel Impedimentum; consideramus: Nullam omnino habitam esse rationem vel Resistentiæ medii, vel Asperitatis aut scabritiei planorum aut superficierum super quibus movetur, & siqua sunt ejusmodi Impedimenta alia: Sed solius, quod ex Obliquitate Descensuum Ascensuúmve oritur, Impedimenti vel

Adjumenti: tanquam si in medio vacuo peragendus esse motus, nulláque aliunde remora adveniret. Quippe illa omnia sunt huic considerationi planè extrinseca; & seorsum, si opus est, perpendenda, Quamquam igitur, verbi gratiâ, super Horizontali Plano, aut etiam aliquantum Declivi, nonnisi magnâ Boum aut Equorum Vi trahatur Plaustrum: Non tamen illud ex plani Positione oriri censendum est; sed ex aliis insuper superandis motûs impedimentis, quorum hîc rationem non habemus.

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, datâ Vi, movere; pro variâ motuum Acclivitate.

Idem intellige, de quâvis aliâ Vi Impediente, per aliam quam Directionis suæ lineam revellendâ.

$V.\ G :: nV.\ nG.$

Sint PH, FG, rectæ Horizontales; FP, GH, perpendiculares. Atque intelligatur elevandum Pondus, in P: & huic affixum Filum flexile, seu Funiculus, PFGV; puncta fixà F, G, ambiens: & in V, Vis Motrix applicata. Adeò ut, quantum trahatur funiculi extremum, secundum Vis applicatæ directionem GV; tantundem elevetur, contra directionem suam, pondus P, in PF perpendiculari. Atque intelligatur Vis V, Vi ponderis P æqualis. Æquipollebit igitur, (per 7 hujus;) Adeóque sustinebit; &, si vel augeatur, vel Ponderis Vis minuatur (rectâ PF vel tantillum reclinatâ, putà in situm PO, per 25 hujus;) movebit. per 9, 11. Cap. 1. Fig 50.

Requiratur autem, ut idem vel Æquale Pondus, Vi minore moveatur, (Nam de Æquali, vel Majore, jam constat:) Puta Vi nV; quæ nempe sit ad V, in ratione datâ n ad 1.

Dico; Si aptetur angulo PFG, recta PO, quæ sit ad PF, ut 1 ad n, (nempe, in reciprocâ ratione virium,) & movendum Pondus, super Acclive Planum, in PO rectâ, per POGV Filum flexile trahatur: Vis data nV, ponderi P, in hoc situ Æquipollebit; &, si tantillum adhuc augeatur Obliquitas, movebit.

Nam, propter PO ad PF, in ratione 1 ad n: Si P in PF Gravitet ut G, idem in PO gravitabit ut nG, (per 14 & 17 hujus:) Ideóque, cùm illi æquipolleat Vis V, huic æquipollebit Vis nV, (per 17 Cap. 1.) Adeóque (per 25 hujus) si fiat PO adhuc vel tantillum longior, Vis præpollebit, adeóque movebit; per 9, 11, Cap 1.

PROP.

PROP. XXIX.

Datum Pondus, per Datam Acclivitatem movere.
Idem intellige, de quâvis aliâ Vi impediente.

V. G :: mV. mG.

Fig. 50. Reliquis, ut priùs, constructis : Intelligatur Vis V, æquipollens Ponderi P, per Acclivitatem P O movendo. Et requiratur, ut per Acclivitatem Majorem (nam de Minore satis constat) puta P F, moveatur.

Dico; Si, quâ ratione Brevior est P F quàm æqui-alta P O, eâdem augeatur Vis V; æquipollebit; Adeóque, si ulterius augeatur; movebit.

Nam, ut P O ad P F; puta ut m ad 1; Sic, vice versâ, Gravitatio ponderis P in P F, ad ejusdem gravitationem in P O: (per 14 & 17 huius.) Adeóque, cùm Vis ut V, æquipolleat huic; Vis ut mV, æquipollebit illi; (per 17 Cap. 1.) &, aucta, movebit. per 9, 11. Cap. 1.

PROP. XXX.

Datâ Vi, in Acclivitate datâ, motum efficere.
Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque sit Vis impediens.

V. P :: nV. nP.

Fig. 50. Cæteris, ut priùs, constructis: Intelligatur Vis V, Ponderi P, per Acclivitatem datam P O movendo, æquipollens. Et requiratur, ut datâ Vi, nV, (puta quæ sit ad V, ut n ad 1,) fiat motus.

Dico; Si pro P pondere, substituatur nP, (quæ nempe sit ad P pondus, in eâdem ratione quâ data Vis nV ad V;) huic æquipollebit data Vis (per 17 Cap. 1.) Adeóque, Si tantillum adhuc minuatur Pondus; Vis præpollebit, adeóque movebit. per 9, 11. Cap. 1.

SCHOLIUM

SCHOLIUM.

SI porro in tribus proximè præcedentibus Problematis, Celeritatis ratio habenda erit; ut non tantum motus utcunque fiat, sed & datâ celeritate fiat. Huic satisfactum erit ex Prop. 29, 30. Cap. 1. Nempe invento (per tres Propositiones præcedentes, respectivè,) quo pacto motus fieri possit aliquâ saltem celeritate: Quâ ratione augenda erit celeritas; eâdem augenda erit, in Prop. 28 hujus, inventa longitudo rectæ PO; &, in Prop. 29, inventa Vis; &, in Prop. 30, eâdem minuendum erit inventum Pondus.

PROP. XXXI.

Grave, ex puncto fixo liberè dependens; Si in Perpendiculo constituatur; manebit: Si extra Perpendiculum, ad Perpendiculum feretur. (Et quidem per arcum circuli in plano ad Horizontem recto.)

In plano autem ad Horizontem obliquo; ad eam rectam feretur quæ est Horizontali rectæ ad angulos rectos; (quam *Perpendiculi Succedaneum* appello:) & in eâ si ponatur, consistet.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliâ Vi Motrice.

SIt FG, Horizontalis recta; FP, perpendicularis. Atque ex F puncto fixo, dependeat, per FP filum, pondus P. Adeóque; Si Fig. 49. extra perpendiculum quocunque moveatur, putà ad S; describet (propter eandem fili longitudinem) arcum circuli PS, (saltem aliquod in superficie Sphæricâ, centro F descriptâ, punctum S designabit, quod PS circuli arcum terminabit:) Est autem (per 20 hujus.) Punctum P (utpote omnium in illa peripheriâ, aut etiam Sphærâ, infimum) ipso S humilius. Non igitur ad S feretur; per 2 hujus. Quod demonstrandum erat.

Si verò extra P constituatur: Propter punctum P omnium infimum, ductúmque SP continuè descendentem, (per 20 hujus;) omniúmque maximè (utpote per circuli peripheriam in Sphæra maximi, in perpendiculari

culari plano positi,) per 24, 25, 26. hujus; eò feretur; per 4 & 8 hujus. Quod itidem erat demonstrandum.

Idem similiter ostendetur: Si in F P G plano ad Horizontem obliquo ferendum intelligatur Grave; propter punctum P omnium in illo plano infimum, per 20 hujus: ductúmque circuli, maximè Declivem, per 24, 25, 26. hujus. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

SUpponit hæc Propositio, Filum *non-Extensile*, sed non & *Inflexile*; adeóque disertè procedit de Gravi Pendulo; quod itaque humilius intelligitur, saltem non altius, quàm F punctum fixum. Verum quidem est; si esset in eâdem P G peripheriâ, supra Horizontalem rectam F G continuatâ; descenderet hoc ad Perpendiculum; at non statim hac de causâ, neque statim secundum peripheriam; sed secundum Perpendiculum, ut Grave adhuc absolutè liberum, (non tantùm liberè Pendulum,) per 21 hujus: donec, extenso ad suam longitudinem filo coërceretur ne diutius rectà descenderet, sed secundum Peripheriam, Vi Propositionis hujus.

Sin Filum illud etiam Inflexile intelligatur; ubicunque in eâ peripheriâ (extra perpendiculum) ponatur; (sive supra sive infra Horizontalem lineam;) secundum peripheriam descendet, circa Centrum motûs rotando. Verùm illud hujus loci non est; sed ad Libram spectat, & infra demonstrabitur.

PROP. XXXII.

Grave pendulum, in Perpendiculo constitutum, Vis quantumvis exigua, à Perpendiculo dimovebit.

Idem de Perpendiculi Succedaneo, in Obliquo plano, intelligendum. Déque aliis motibus, mutatis mutandis.

Fig. 49. EX puncto F, in Perpendiculo F P, dependeat ex Filo Pondus P: Quod, ex perpendiculo motum, describat P S G Circuli quadrantem; Cui circumscribatur F H quadratum. Et exponatur, secundum directionis lineam P H Horizontalem, Vis quantumvis exigua: puta, quæ sit ad Vim Ponderis P, ut *n* ad 1 (hoc est, si intelligatur Vis V, Ponderi P in perpendiculo æquipollens, sit exposita Vis *n* V.) Et

ponatur

ponatur (ex præscripto Prop. 28 hujus.) P O recta, ita declivis, ut Ponderi P in P O movendo æquipolleat Vis *n* V. Nempe, sumatur, in H G rectâ, recta H O quæ sit ad P H in ratione virium expositâ *n* ad 1; & jungatur P O. Cùm enim sit, ut Vis ad Pondus, sic Altitudo H O in perpendiculo (quæ est Directio Ponderis) ad H P lineam directionis Vis Moventis: Exposito Ponderi per P O movendo, æquipollebit Vis exposita; adeóque auctâ vel tantillum Obliquitate, Movebit. per 28 hujus. Est autem (propter S P H angulum contactûs, minorem angulo rectilineo O P H, per 16 Elem. 3.). Obliquior Ascensus per P S quàm per P O. Movebit igitur datum Pondus, Vis Exposita, in P S peripheriâ. Quod erat probandum.

Alia Demonstratio.

Idem demonstrabitur ex 15 hujus: Propter eandem P S peripheriæ in puncto P declivitatem, atque Contingentis rectæ P H; quæ cum Horizontalis sit, constabit propositum, per 27 hujus.

PROP. XXXIII.

Grave Pendulum datum, quousque extra perpendiculum, datâ Vi, movebitur; determinare.

Constructis ut prius: Dico; Per arcûs P A (quem abscindit P O recta) Semissem P S, nec ultrà, Expositâ Vi motum iri Pondus P. Fig. 49.

Nam, quæ P A arcum (adeóque & subtensam, per 30 Elem. 3.) bisecat è Centro recta F S, secat subtensam P A ad angulos rectos; per 3 Elem. 3. Huic igitur subtensæ, hoc est P O rectæ, parallela est quæ Circulum in S tangit S T recta, (per 16 Elem. 3.) Adeóque & pariter Obliqua, (per 29 Elem. 1.) Cùm itaque magis adhuc sit ad Horizontem Obliqua, arcûs P S pars quælibet (ipso S puncto excepto:) minùs autem, pars quælibet arcûs S A; (quod ex 15 hujus demonstrabitur:) ad S, nec ultrà, movebitur Pondus P, ab eâ Vi quæ illi, per Acclivitatem P O movendo, æquipollet; per 28 hujus. Quod erat determinandum.

PROP. XXXIV.

Grave Pendulum datum, ad datam altitudinem movere, quanta Vis requiritur, determinare.

Fig. 49. IN eadem Figura: si velim ad S punctum usque moveri grave Pendulum P; sumatur arcus P A, duplus expositi A S; junctaque P A continuetur donec occurrat, in O, perpendiculari rectæ G H. Cùmque arcûs P S particulæ minus acclives sint quàm T S vel P A, accliviores autem particulæ omnes ultra S; Si sumatur (per 29 hujus) Vis ea quæ sufficiat movendo Ponderi P dato in acclivitate P A, seu P O, sufficiet eidem movendo per arcum P S. per demonstrata ad Prop. præced.

CAP. III.