Der siebende Theil. Die Optik und Perspectiv.

Der XIII. Abschnitt. Allgemeine Theorie der orthographischen Projectionen auf der vortical stehenden Tafel.

Abmessungen zurück führen. M. s. Hn. Lamberts Freye Perspectiv im 8ten Abschnitt, woselbst von diesen umgekehrten Aufgaben der Perspectiv ebenfalls gehandelt wird.

Der XIII. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Orthographischen Projectionen auf der vortical stehenden Tafel.

197 §.

Unter denjenigen Stücken, welche als gegeben angenommen werden müssen, bevor man den Anfang machen kann, eine perspectivische Zeichnung zu entwerfen, war die Entfernung des Auges von der Tafel eines der vornehmsten; und von dieser hängt zugleich die Entfernung des Auges von jedem Punct des abzubildenden Gegenstandes ab, sobald die Lage des letztern gegen die Tafel, den Horizont und die Verticalfläche des Auges gleichfalls bestimmt ist. Es sey M der abzubildende Punct, $MN = \delta$, $TN = \Delta$, $GM = a$, seine Entfernungen von der Tafel, 38 F. der Verticalfläche und dem Horizont des Auges, $OR = D$, der Abstand des Auges von der Tafel, $OM = E$ desselben Abstand von dem abzubildenden Punct: so erhellet leicht aus Betrachtung der Figur, daß $SM=\sqrt{(\Delta^2+(D+\delta)^2)}$ sey, und $E=OM=\sqrt{(a^2+SM^2)}$, mithin $E=\sqrt{(a^2+\Delta^2+(D+\delta)^2)}$. Demnach hängen D und E so von einander ab, daß beyde zugleich wachsen und abnehmen vorausgesetzt, daß a, Δ, δ, einerley bleiben: wenn D ohne Aufhören wächst, so wächst auch E ohne Aufhören, und beyde Entfernungen werden zugleich unendlich groß. Dieselbe Gleichung giebt $(D+\delta)^2=E^2-a^2-\Delta^2$, also $D=\sqrt{(E^2-a^2-\Delta^2)}-\delta$, und D muß mit E wachsen, wenn man wiederum voraussetzt, daß a, Δ, δ einerley bleiben. Zugleich nähert sich das Verhältniß $E:D$ der Gleichheit, und beyde Entfernungen werden zuletzt gleich groß.

198. §.

Diese Betrachtung könnte auf die Folge leiten, daß es einerley sey, ob man in den oben bewiesenen Grundformuln der Perspectiv D oder E brauchen wolle, und daß man in allen Formuln, die D enthalten, nur $\sqrt{(E^2-a^2-\Delta)}-\delta$ statt D setzen dürfe, wenn man nicht D sondern E als gegeben annehmen will. Ob nun dieses gleich an sich seine Richtigkeit hat, so ist doch bey dieser Verwechselung Behutsamkeit nöthig, wenn man hiernächst untersuchen will, was für Aenderungen mit dem Bilde auf der perspectivischen Tafel vorgehen, wenn D oder E wächst oder abnimmt. Die Voraussetzung, daß D wachse, kann so angenommen werden, daß die übrigen data, nemlich a, Δ, δ insgesammt einerley bleiben. Wenn nemlich O in der senkrechten Linie OR weiter von der Tafel wegrückt, so wächst D, und a sowohl als Δ bleiben nebst δ ungeändert: indessen ändern sich doch die Winkel $GOM=OMS$ und $TSM=SMN$.

Diese

Diese Winkel nehmen ab, wenn RO = D wächst, und verschwinden, wenn D unendlich groß wird.

Man nehme dagegen an, daß O in der Linie MO weiter von M wegrücke; so wächst nicht allein MO = E, sondern zugleich OS = a, und VR = NT = Δ, wenn gleich NM = δ einerley bleibt: bey dem allen aber bleiben nun die Winkel GOM = OMS und TSM = SMN unverändert, die im vorigen Fall mit D zugleich Aenderungen litten. Hieraus ist also zu ersehen, daß zwar D nicht allein wachsen könne, ohne daß zugleich E wachse, und umgekehrt; daß es aber bey dem allen doch nicht schlechthin einerley Folgen habe, wenn man das eine, oder das andre annimmt.

199. §.

Setzt man voraus, das Auge sey von dem abzubildenden Gegenstande unendlich weit entfernt; so heist das Bild desselben auf der perspectivischen Tafel eine **orthographische Projection.** (2 §.) Gewöhnlich sagt man unbestimmt: wenn das Auge unendlich weit entfernt ist, so sey die Projection orthographisch; man setzt auch wohl, um die Formuln für die orthographische Projection zu finden, D = ∞. Allein die im vorigen §. angeführten Gründe werden es rechtfertigen, wenn ich bestimmter sage, bey der Voraussetzung E = ∞ sey die Projection orthographisch, wiewohl auch die Voraussetzung D = ∞ zuweilen mit der andern E = ∞ auf einerley Folgen führen kann, nachdem man die Rechnung so oder anders einleitet. An sich ist es nicht schlechthin einerley, ob man in der 38 Fig. annimmt, es sollte RO = D = ∞ werden, oder ob man MO = E = ∞

annimmt. In jenem Fall werden MO, MS, OR, OG, ST, SM, MN insgesammt parallel, MO und MS fallen mit MN zusammen, das Bild I fällt in N, und es ist nun eben so viel, als wenn das Auge zugleich im Horizont AB stünde. Eben dasselbe ergeben die Formuln des 10 §, $D = \infty$ gesetzt, und man findet $NI = \frac{\delta}{D + \delta} \cdot NR = 0$, mithin fällt I in N; auch wird $TW = \frac{D}{D + \delta} \cdot \Delta = \Delta = TN$, und $WI = \frac{\delta}{D + \delta} \cdot a = 0$, welches ebenfalls anzeigt, daß I in N falle. Zu bemerken ist hiebey noch, daß diese Folgen eigentlich deswegen ihre Richtigkeit haben, weil Δ und a sich nicht ändern, mithin die Puncte R und T auf der Tafel, so wie auch NR unverändert bleiben.

Will man $\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)} - \delta$ statt D setzen, so hat man $NI = \frac{\delta}{\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}} \cdot NR$,

$TW = \frac{\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)} - \delta}{\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}} \cdot \Delta$, und

$WI = \frac{\delta}{\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}} \cdot a$. Weil aber nunmehro a und Δ, so wie $NR = \sqrt{(a^2 + \Delta^2)}$ mit E zugleich wachsen, so leitet die Voraussetzung $E = \infty$ nicht auf dieselben Folgen, wie die vorige $D = \infty$. Dem Ausdrucke $\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}$ siehet man es nicht sogleich an, was derselbe in der Voraussetzung $E = \infty$ für einen Werth annimmt, weil a und Δ zugleich

gleich mit E ohne Aufhören wachsen. Indessen bleibt $\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}$ allemahl $= D + \delta$, auch bleibt δ unverändert, also wird dieser Ausdruck wenigstens in allen solchen Fällen unendlich groß, wenn es auch D wird. Alsdenn bleiben NI und WI unbestimmt, weil Zähler und Nenner unendlich groß werden, und TW wird unendlich groß, wie auch der Sache gemäß ist: aber $NW = \frac{\delta}{D + \delta} \cdot \Delta$

$$= \frac{\delta}{\sqrt{(E^2 - a^2 - \Delta^2)}} \cdot \Delta$$ bleibt unbestimmt.

200. §.

Um nun die Werthe von NW, WI, NI für den Fall $E = \infty$ zu finden, ist es am besten, wenn man D durch E und die Winkel NMS, SMO ausdrückt, die sich nicht ändern, wenn gleich O in der Linie MO weiter wegrückt, wie schon im 198 §. bemerkt ist. Wenn die Lage des abzubildenden Puncts M, mithin auch die durch den Punct M auf die Tafel senkrecht gesetzte Verticalfläche LMNV als bekannt angenommen wird, so dienen die beyden Winkel NMS, SMO, mit der Entfernung SO zusammen die Lage des Auges zu bestimmen. Alsdenn ist der Winkel SMO die optische Höhe des Auges über dem Horizont AB aus dem Punct M gesehen, (82 §. Opt. 163 §. Persp.) und NMS = TSM der Abweichungs-Winkel der Ebene OSM von der Verticalfläche LMNV. Gesetzt nun, daß auch das Auge in MO unendlich weit wegrücke, so bleibt doch in allen Fällen, die Lage desselben durch die Winkel NMS und SMO bestimmt. Künftig werde ich allemahl $NMS = \alpha$, $SMO = \beta$, $MO = E$ setzen, und $WNI = \zeta$: wenn man nun durch S mit TC eine Parallele zieht, und MN bis an diese Parallele in n verlängert; so hat man $OS = a = E \sin\beta$, $SM = E \cos\beta$, $Sn = TN = \Delta = SM \sin\alpha = E \cos\beta \sin\alpha$, $Mn = D + \delta = SM \cos\alpha = E \cos\beta \cos\alpha$; $\tang\zeta = \frac{a}{\Delta} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta \sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha \tang\beta$. Man hat demnach statt D, a, und Δ folgende Werthe

$$D = E \cos\alpha \cos\beta - \delta$$
$$a = E \sin\beta$$
$$\Delta = E \sin\alpha \cos\beta$$

insgesammt durch E und beständige Grössen, die von E nicht abhängen, so wie auch $\tang\zeta = \operatorname{cosec}\alpha \tang\beta$ nur von den beständigen Winkeln α und β abhängt.

Will man nun die Lage des Bildes I auf der Tafel durch NW und WI bestimmen, so hat man $NW = \frac{\delta}{D + \delta} \cdot \Delta = \frac{\delta}{\cos\alpha \cos\beta} \sin\alpha \cos\beta = \delta \tang\alpha$, und $WI = \frac{\delta}{D + \delta} \cdot a = \frac{\delta}{\cos\alpha \cos\beta} \cdot \sin\beta = \delta \sec\alpha \tang\beta$. Die Richtigkeit beyder Formuln ersiehet man auch sogleich aus Betrachtung der Zeichnung.

Weil der Punct N als bekannt angenommen wird, so wird die Lage des Bildes auch durch den Winkel ζ, dessen Tangente $= \operatorname{cosec}\alpha \tang\beta$, und $NI = NW \sec\zeta = WI \operatorname{cosec}\zeta = \delta \tang\alpha \sec\zeta = \delta \sec\alpha \tang\beta \operatorname{cosec}\zeta$ bestimmt, oder $NI = \delta \tang\alpha \sqrt{(1 + \operatorname{cosec}\alpha^2 \tang\beta^2)} = \delta \sqrt{(\tang\alpha^2 + \sec\alpha^2 \tang\beta^2)}$.

201. §.

Bey der orthographischen Projection giebt es keinen Augenpunct und keine Gränzlinie auf der Tafel: die Gränzlinie nebst dem Augenpunct liegen unendlich hoch über der Grundlinie. Demnach werden hier die Bilder aller auf der Grundlinie CE senkrechten Linien, wie NM im Horizont AB ist, geometrisch parallel. 90 F.

So wie dieses schon aus Betrachtung der Sache selbst fließt, wenn man den 8 §. vergleicht, so erhellet es auch daraus, weil tang ζ = tang β cosec α von α und β allein abhängt, N mag in CE liegen, wo man will. Stellt man sich in der 90 Fig. einen von M verschiedenen Punct *m* im Horizont AB, und eine von NM verschiedene senkrechte Vertiefung *nm* vor, so ist die Linie, welche von diesem Punct *m* in das unendlich entfernte Auge läuft, mit MO parallel, mithin behalten α und β einerley Grösse, und *ni* mit NI gegen die Grundlinie einerley Lage.

202. §.

Wofern die Ebene MOS, (die Verticalfläche durchs Auge und den abzubildenden Punct) nicht selbst auf der Tafel senkrecht ist; so wird sie alle auf der Tafel senkrechte Verticalflächen, eben so wie die Verticalfläche LMNV durch den abzubildenden Punct und zwar unter einerley Winkel schneiden; so wie auch MO durch alle diese Verticalflächen laufen wird. Um nun die Lage eines jeden Puncts, wie M im Horizont AB, oder auch eines jeden andern Puncts L bestimmt anzugeben, muß man unter allen auf der Tafel senkrechten Verticalflächen eine, wie z. E. 90 F.

ORST als die erste betrachten; hiebey muß man sich MO über O hinaus ins unendliche verlängert vorstellen, O aber sey nun nicht mehr das Auge, sondern der Punct, worin MO die für die erste angenommene Verticalfläche trift. Ueberdem muß der Punct T, worin die erste Verticalfläche die Grundlinie der Tafel schneidet, mithin auch auf der Tafel die Verticallinie TR, worin die Tafel selbst von der ersten Verticalfläche geschnitten wird, und die ich die erste Verticallinie nennen werde, als bekannt angenommen werden. Alsdenn sind $TN=\Delta$, $NM=\delta$ der Abstand des Puncts M von der ersten Verticalfläche, und von der Tafel: und wenn LM auf AB senkrecht ist, so wird die Lage des Puncts L durch Δ, δ, und $ML=\alpha$ bestimmt.

203. §.

90 F. Man ziehe OR auf die Tafel senkrecht, und RH in der Tafel horizontal, so ist die Ebene ORH horizontal, und wenn OS auf AB senkrecht gesetzt, OG aber mit SM parallel gezogen wird, so liegt OG im Horizont ORH, und der Punct g, worin OG die Tafel trift, in der Horizontallinie RH. Nach dieser Vorbereitung wird der Winkel $ROg=TSW=WMN=\alpha$, und $gOI=OMS=\beta$. Ich werde künftig ORH den Haupt-Horizont nennen, RH die erste oder die Haupt-Horizontallinie der Tafel, O die auf den Haupt-Horizont reducirte Stelle des Auges, R den reducirten Augenpunct, OR den reducirten Abstand des Auges, und $OS=RT$ die reducirte Höhe des Auges.

Wird

Wird nun bey dieser Untersuchung $OR = D$ gesetzt, so hat man $\frac{\Delta}{D+\delta} = \tang\alpha$, (200 §.) folglich $D = \Delta\cot\alpha - \delta$: und wenn man ferner $OS = RT = a$ setzt; so hat man $\frac{a}{D+\delta} = \frac{a}{\Delta\cot\alpha} = \sec\alpha\tang\beta$, (200 §.) mithin $a = \Delta\cot\alpha\sec\alpha\tang\beta = \Delta\cosec\alpha\tang\beta = \Delta\tang\zeta$. (200 §.)

Uebrigens hat man noch $Rg = D\tang\alpha$ und $gI = D\sec\alpha\tang\beta$, also auch $Rg = \Delta - \delta\tang\alpha$, und $gI = (\Delta\cosec\alpha - \delta\sec\alpha)\tang\beta$. Beyde Gleichungen bestimmen die Lage des Bildes I, eben so wie $NW = \delta\tang\alpha$, und $WI = \delta\sec\alpha\tang\beta$. (200 §.) Auch wird I gefunden, wenn man $TN = \Delta$ nimmt, den Winkel $TNI = \zeta$ so groß macht, daß seine Tangente $= \cosec\alpha\tang\beta$ ist, hiernächst aber $NI = \delta\sqrt{(\tang\alpha^2 + \sec\alpha^2\tang\beta^2)}$, oder $NI = \delta\tang\alpha\sec\zeta$.

204. §.

Wenn man annimmt, daß die Lage des Puncts M durch Δ und δ bestimmt sey, so ist es einerley, ob die Lage des Auges durch die Winkel α und β bestimmt wird, oder durch die Entfernungen D und ω. Denn aus der Gleichung $D = \Delta\cot\alpha - \delta$, oder $\cot\alpha = \frac{D+\delta}{\Delta}$ mit der zweyten $a = \Delta\cosec\alpha\tang\beta$ oder $\cosec\alpha = \frac{a}{\Delta\tang\beta}$ verbunden kann man α

und

und β finden, wenn D und a bestimmt sind. Die erste giebt $1 + \cot\alpha^2 = \operatorname{cosec}\alpha^2 = \frac{\Delta^2 + (D+\delta)^2}{\Delta^2}$, und dies dem Werth $\operatorname{cosec}\alpha^2$ in der zweyten gleich gesetzt giebt $\operatorname{tang}\beta = \frac{a}{\sqrt{(\Delta^2 + (D+\delta)^2)}}$; dieser Werth wiederum in der zweyten Gleichung gebraucht giebt $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{(\Delta^2 + (D+\delta)^2}}{\Delta}$, oder $\sin\alpha$ $= \frac{\Delta}{\sqrt{(\Delta^2 + (D+\delta)^2)}}$. Beyde Werthe lassen sich auch ganz leicht aus Betrachtung der Figur herleiten.

205. §.

Diese Schlüsse vorausgesetzt liesse sich aus der gegebenen Lage des Puncts M im Horizont AB das Bild I desselben auf der Tafel völlig so, wie im 10 §. finden, wenn auf der Tafel die erste Verticallinie, in derselben der Fußpunct T des Auges gegeben wäre, und überdem die reducirte Entfernung D und reducirte Höhe des Auges a, oder auch statt dieser beyden Linien die Winkel α und β: es wäre nemlich $TN = \Delta$, $\operatorname{tang}\zeta = \frac{a}{\Delta}$, und $NI = \delta \operatorname{tang}\alpha \sec\zeta$ $= \delta \cdot \frac{\Delta}{D+\delta} \cdot \frac{NR}{\Delta} = \frac{\delta}{D+\delta} \cdot NR$, woraus eben die Verzeichnung, wie im 10 §. folgt. Was aber die fernern Anwendungen betrift, die von der Aufgabe des 10 §. oben sind gemacht worden, so er-

erfordert die Natur der orthographischen Projection einige Hauptveränderungen derselben, welche nunmehro genauer erwogen werden müssen.

206. §.

Wenn die Entfernung des Auges von dem abzubildenden Gegenstande endlich ist, so laufen alle Gesichts-Strahlen, welche von jedem Punct dieses Gegenstandes, den das Auge wahrnehmen kann, ins Auge kommen, in demselben als einen Punct zusammen, und sind insgesammt in dem Raum der oben im 1 §. so genannten Strahlen-Pyramide enthalten. Aus dieser Pyramide wird ein prismatischer oder cylindrischer Körper, wenn das Auge unendlich weit hinaus rückt, und alle Gesichtsstrahlen werden parallel. (2 §.) Eben dieser letztere Umstand ist das Haupt-Merkmahl der orthographischen Projection, wodurch sie sich von der scenographischen, d. i. derjenigen unterscheidet, wobey die Entfernung des Auges von der abzubildenden Sache von endlicher Grösse angenommen wird. Bey letzterer sind die Grössen a und D von Δ und δ ganz unabhängig, aber die Winkel α und β hängen von Δ und δ ab. Dagegen hängen a und D (in der §. 203 festgesetzten Bedeutung gebraucht) bey der orthographischen Projection von Δ und δ ab, und die Winkel α und β ändern sich nicht mit Δ und δ. Wenn es also gleich vermöge des 204 §. einerley ist, ob D und a oder α und β gegeben sind, wenn man nur die orthographische Projection eines einzigen Puncts M sucht: so muß man doch eigentlich α und β als data ansehen, sobald von mehrern Puncten, die in einerley Horizont AB liegen, die orthographischen Pro-

Projectionen gesucht werden sollen. Hieraus würde folgende Regel fliessen, wenn man das einem jeden Punct M im Horizont AB zugehörige Bild I auf eben die Art, wie im 10 §. suchen wollte.

Für jeden Punct M, dessen Lage durch ein andres Δ und δ gegeben wäre, müste man D und a aus α und β nach dem 203 §. besonders suchen: hiernächst könnte man allererst das zugehörige Bild nach dem 10 §. durch Zeichnung finden.

Auf solche Art würde man für jeden Punct M, dessen Lage durch ein andres Δ und δ gegeben wäre, eine eigene Horizontallinie, und einen eigenen reducirten Augenpunct haben. Allein diese Umständlichkeit läst sich vermeiden: man kann die Kunst orthographisch-perspectivische Bilder zu zeichnen, so weit die Natur der orthographischen Projection es verstattet, mit der Kunst scenographisch-perspectivische Bilder zu zeichnen, auf ganz ähnliche Regeln zurück führen, und bey Auflösung der eben erwehnten Aufgabe durch Zeichnung die Aehnlichkeit mit der im 10 §. gegebenen Auflösung beybehalten, ohne daß man mehr als einen reducirten Augenpunct nöthig hätte.

207 §.

Die Lage des Auges gegen den Horizont eines abzubildenden Puncts ist durch die Winkel α und β bestimmt; auch sind die Entfernungen Δ und δ dieses Puncts von der ersten Verticalfläche und der Tafel gegeben: man soll die orthographische Projection desselben durch Zeichnung auf der Tafel finden. Aufl.

Aufl. Man nehme die Horizontallinie RH, in derselben den reducirten Augenpunct R, nebst der Höhe RT des Haupthorizonts über dem Horizont des abzubildenden Puncts willkührlich an, und ziehe durch T die Grundlinie mit RH parallel. Ferner nehme man den reducirten Abstand des Auges $D =$ RO willkührlich an, mache $ROg = \alpha$, trage gO in $g\omega$, mache $g\omega G = \beta$ und ziehe gG durch gH senkrecht, so hat man den Durchschnittspunct G. Nach dieser Vorbereitung nehme man $RF = RO = D$, und ziehe RG und FG, man nehme ferner $TN = \Delta$, $NM = \delta$, und ziehe durch N und M mit GR und GF parallele Linien; so wird ihr Durchschnittspunct I das gesuchte Bild seyn. 91 F.

Beweis. Wenn man sich vorstellt, daß die Zeichnung eben so, wie in der 39 Fig. dem 10 §. gemäß gemacht werden sollte; so sind N und M eben die Puncte, welche in der 39 Fig. N und G waren; dagegen giebt es hier keinen eigentlichen Augenpunct, weil derselbe in der Linie GR unendlich weit hinaus liegt, auch würde die Distanzlinie RF (39 Fig.) hier unendlich groß seyn, und der Distanzpunct F ebenfalls in GF unendlich weit hinaus liegen. Deswegen muß man die Lage beyder Linien, die von N und M aus in unendlich entfernte Puncte laufen, auf andre Art suchen; da dann die Sache darauf ankommt, daß $TN = \Delta$, $TNI = \zeta$, und $NI = \delta \tan\alpha \sec\zeta$ seyn muß.

Es ist aber vermöge der Zeichnung $Rg = D \tan\alpha$, und $gG = D \sec\alpha \tan\beta$, mithin wird

$$\tan gRG = \frac{gG}{RG} = \frac{\sec\alpha \tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$\cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot \tang\beta = \cosec\alpha \tang\beta = \tang\zeta$. (200 §.) Weiter ist $TN = \Delta$ gemacht, und NI mit GR parallel gezogen, mithin ist $TNI = \zeta$ und das gesuchte Bild liegt in NI. (200 §.) Ueberdem ist $RG = Rg \sec\zeta = D \tang\alpha \sec\zeta$, und $RF = D$ vermöge der Zeichnung: also $RG = RF \tang\alpha \sec\zeta$. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke RGE und IMN aber hat man $RF : RG = NM : NI$, und es ist $NM = \delta$ gemacht: folglich erhält man $NI = \delta \tang\alpha \sec\zeta = \delta \sqrt{(\tang\alpha^2 + \sec\alpha^2 \tang\beta^2)}$, und der Punct I ist das gesuchte Bild. (200 §.)

208 §.

So wie demnach auf der perspectivischen Tafel, wenn die Projection orthographisch ist, alle Gesichtslinien in einem unendlich entfernten Augenpunct zusammen laufen: so laufen auch alle Durchschnittslinien (11 §.) in einem unendlich entfernten Distanzpunct des Auges zusammen. Uebrigens schreibt man auch hier der Perspectivischen Vertiefung NI (91 Fig.) eben so viele vertiefte Fusse zu, als der dazu gehörigen geometrischen Vertiefung NM geometrische Fusse zugeschrieben werden: hier sind aber alle vertiefte perspectivische Fusse gleich lang, wie die geometrischen Fusse, weil sich NI wie NM oder δ verhält; auch können, nachdem die Lage des Auges angenommen wird, die perspectivischen Fusse grösser, als die geometrischen seyn, weil das Verhältniß des geometrischen Fusses zum perspectivischen $= 1 : \tang\alpha \sec\zeta$, oder $= 1 : \sqrt{(\tang\alpha^2 + \sec\alpha^2 \tang\beta^2)}$ ist. Die Eintheilung der perspectivischen Vertiefung NI auf der Tafel ist demnach leicht bewerkstelliget, wenn man

man MN nach dem geometrischen Maaß eintheilet, und durch die Theilungspuncte mit MI oder GF Parallelen ziehet.

209 §.

Das Bild Ip oder IK jeder mit der Tafel parallelen Linie MP oder ML ist der abgebildeten Linie selbst gleich, wenn die Projection orthographisch ist, weil IMPp, IMLK Parallelogrammen werden. Auch geben dies die Formuln des 12. und 13. §, wenn man $D = \infty$ setzt. Demnach ist die perspectivische Höhe IK der geometrischen Höhe ML gleich, wenn die Projection orthographisch ist, und man kann alle perspectivische Höhen, so wie auch alle mit der Grundlinie parallel laufende Linien, nach dem geometrischen Maaße messen und eintheilen, weil dabey alle Verkürzung wegfällt. 91 F. 38

210 §.

Die Lage der schrägen Vertiefung AF ist gegeben: man soll die Lage des Bildes Af auf der Tafel finden. 42 F.

Aufl. Man stelle sich FO ins unendliche verlängert vor, nehme aber, wie im 202 §. ORTS für die erste Verticalfläche an, welche die Gesichtslinie in O schneidet, und ORH sey wie im 203. der Haupt-Horizont, R der reducirte Augenpunct, $OR = D$, $RT = a$ in der Bedeutung des 203. §. Ferner sey OP mit Af parallel, so liegt OP im Haupthorizont, und P in der Horizontallinie RH; und weil die Tafel von der Ebene der Parallelen AF, OP in AP geschnitten wird, so ist AP ins unendliche verlängert das Bild von AF gleichfalls ins unendliche verlängert. Man setze $TA = f$, und $TAF = \eta$, so hat man $ROP = 90° - \eta$, und $RP = D \cot \eta$. Man nehme AF von willkührlicher Länge, setze FN auf TA senkrecht, so ist NR ins unendliche verlängert das Bild von NF ins unendliche verlängert, und f, beyder Linien AP und MR Durchschnittspunct ist das Bild von F.

Nun sey $TA = f$, $TN = \Delta$, $FN = \delta$ so ist $f = \Delta + \delta \cot \eta$. Ueberdem ist $D = \Delta \cot \alpha - \delta$ und $a = \Delta \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{tang} \beta$, und wenn $TAf = \zeta$ gesetzt wird, so hat man $\operatorname{tang} \zeta = \frac{a}{f + D \cot \eta}$. Es wird aber $f + D \cot \eta = \Delta + \Delta \cot \alpha \cot \eta$, folglich erhält man $\operatorname{tang} \zeta = \frac{\operatorname{cosec} \alpha \operatorname{tang} \beta}{1 + \cot \alpha \cot \eta}$.

Wenn $\eta = 90°$ ist, so wird $\operatorname{tang} \zeta = \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{tang} \beta$, wie im 200 §, welches auch der angenommenen Voraussetzung gemäß ist. Uebrigens hängt $\operatorname{tang} \zeta$ allein von α, β, und η, gar nicht von f oder Δ ab, mithin schneiden die Bilder aller schrägen und einander parallelen Vertiefungen die Grundlinie unter einerley Winkel und sind ebenfalls parallel. Man stelle sich in der 41 Fig. vor, daß das Auge O in FO unendlich weit hinaus rücke, so rücken R und P ebenfalls von der jetzigen Stelle fort, P entfernt sich von B und A immer weiter, und kann zuletzt als ein unendlich weit entfernter Vereinigungspunct der Bilder der Parallelen FG und CD betrachtet werden: das heist, die Bilder selbst werden parallel.

Um nun die Lage des Bildes durch Zeichnung
91 F. zu finden, verfahre man, wie im 207 §. Die Winkel

kel α und β sind gegeben, $RO = D$ und $RT = a$, werden willkührlich angenommen. Hierauf macht man $ROg = \alpha$, $g\omega = gO$, $g\omega G = \beta$ zieht durch g eine Linie auf RH senkrecht, so hat man den Durchschnittspunct G. Diese Vorbereitung bleibt einerley, man mag das Bild einer senkrechten, oder schrägen Vertiefung suchen. Ist die letztere nun unter dem Winkel η gegen die Tafel geneigt; so nimmt man $RP = D\cot\eta$ und zieht GP. Ferner nimmt man $TA = f$, und zieht Af mit GP parallel, so ist Af ins unendliche verlängert das gesuchte Bild.

Man hat nemlich $gP = Rg + RP = D(\tan\alpha + \cot\eta)$, $gG = D\sec\alpha\tan\beta$, und das giebt

$$\tan gPG = \frac{gG}{gP} = \frac{\sec\alpha\tan\beta}{\tan\alpha + \cot\eta} =$$

$$\frac{\sec\alpha.\cot\alpha.\tan\beta}{1 + \cot\alpha\cot\eta} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha\tan\beta}{1 + \cot\alpha\cot\eta} = \tan\zeta:$$

und weil Af mit GP parallel gezogen worden, so ist auch $TAf = \zeta$.

211 §.

Man kann P als den reducirten Vereinigungspunct, der Bilder aller horizontalen Parallel-Linien betrachten, welche gegen die Tafel unter dem Winkel η, und gegen die erste Verticalfläche unter dem Winkel $90° - \eta$ geneigt sind. Eigentlich liegt dieser Vereinigungspunct in GP unendlich weit über P hinaus, indessen hat hier der Punct P einen ähnlichen Nutzen, wie der würkliche Vereinigungspunct bey dem scenographischen Projectionen hatte, und wenn man auf der Tafel mit Vortheil orthographische Bilder zeichnen will, so dient überhaupt folgende Vorbereitung. Man zieht die Horizontallinie und Grundlinie in willkührlicher Entfernung mit einander parallel, nimmt in jener den reducirten Augenpunct R willkührlich an, so wie auch den Punct O in RT. Hierauf sucht man G nach der im 206. und 210 §. ertheilten Vorschrift, und theilt hiernächst die Horizontallinie zu beyden Seiten von R eben so wie im 20 §. im Verhältniß der Tangenten für den Halbmesser OR=D ein.

Um nun das Bild einer Linie zu haben die durch A geht, und von der Tafel um 50° abweicht, zieht man GP in den 40sten Grad der Horizontallinie, und durch A mit GP eine Parallele.

Uebrigens kann man OP als den **reducirten Abstand des Auges vom Vereinigungspunct** P der Bilder aller derjenigen Parallelen betrachten, die von der Tafel um den Winkel η abweichen: und weil der Punct G auf der Tafel gefunden seyn muß, bevor man mit der Zeichnung anfangen kann, so werde ich ihn kurz den **Hülfspunct** nennen.

212 §.

Die schräge geometrische Vertiefung AF
42 F. ist gegeben, man soll die zugehörige perspectivische **Vertiefung** Af finden.

Aufl. Man erhält wie im 24. §. $Af = \frac{AF}{D\operatorname{cosec}\eta + AF} \cdot AP$, oder auch $Af = \frac{AF\sin\eta}{D + AF\sin\eta} \cdot AP$. Ist nun FN=$\delta$, auf XY

senk-

senkrecht, so hat man $\delta = \text{AF} \sin\eta$, und $\text{A}f = \frac{\delta}{\text{D}+\delta} \cdot \text{AP} = \frac{\delta}{\text{D}+\delta} \cdot a \operatorname{cosec}\zeta$. Es ist aber $\frac{a}{\text{D}+\delta} = \sec\alpha \operatorname{tang}\beta$ (203 §.) und $\operatorname{tang}\zeta = \frac{\operatorname{cosec}\alpha \operatorname{tang}\beta}{1+\cot\alpha\cot\eta}$, also $\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\zeta(1+\cot\alpha\cot\eta)$ $\sin\alpha$, und $\frac{a}{\text{D}+\delta} = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\zeta(1+\cot\alpha\cot\eta)$. Folglich wird $\text{A}f = \delta \operatorname{tang}\alpha(1+\cot\alpha\cot\eta)\sec\zeta$, oder $\text{A}f = \text{AF}\sin\eta \operatorname{tang}\alpha(1+\cot\alpha\cot\eta)\sec\zeta$.

Will man $\sec\zeta$ durch α und β ausdrucken, so hat man $\sec\zeta = \frac{\sqrt{((1+\cot\alpha\cot\eta)^2 + \operatorname{cosec}\alpha^2 \operatorname{tang}\beta^2)}}{1+\cot\alpha\cot\eta}$, und man findet $\text{A}f = \text{AF}\sin\eta\sqrt{((\operatorname{tang}\alpha+\cot\eta)^2 + \sec\alpha^2 \operatorname{tang}\beta^2)}$.

Aus dieser Formul ergiebt sich wiederum, daß die perspectivische Vertiefung Af der Geometrischen AF proportional sey, so lange η einerley ist, und das leitet auf eine ähnliche Art, das gesuchte durch Zeichnung zu finden, wie im 207 §. die senkrechte Vertiefung gefunden ward. Nachdem nemlich die Lage Af der gesuchten Vertiefung gefunden ist, (210 §.) nimmt man $\text{P}\Omega = \text{PO} = \text{D}\operatorname{cosec}\eta$, ziehet ΩG, nimmt AF so lang, als die gegebene geometrische Vertiefung, ziehet durch F mit GΩ eine Parallele, welche Af in f schneidet, so ist Af die perspectivische Vertiefung. 91 F.

Es ist nemlich $PG = Pg \sec \zeta$, und $Pg = RP + Rg = D(\cot\eta + \tang\alpha)$. Ferner ist $P\Omega = PO = D \cosec \eta$, also $D = P\Omega \sin \eta$. Das giebt $PG = P\Omega . \sin\eta(\cot\eta + \tang\alpha)\sec\zeta = P\Omega \sin\eta \tang\alpha (1 + \cot\alpha \cot\eta)\sec\zeta$. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke $P\Omega G$ und AFf hat man ferner $P\Omega : PG = AF : Af$, folglich wird $Af = AF \sin\eta \tang\alpha (1 + \cot\alpha \cot\eta)\sec\zeta$.

Wenn Af bis e verlängert ist, und man nimmt an, daß L und l die Länge der durch Ae und Af abgebildeten Linien bezeichnen, λ aber die durch fe abgebildete Linie; so ist $\lambda = L - l$, und man findet $fe = Ae - Af = \lambda \sin\eta \tang\alpha (1 + \cot\alpha \cot\eta)\sec\zeta$. Weil diese Länge des Bildes von der Vertiefung der Endpuncte der abgebildeten Linie hinter der Tafel nicht abhängt, auch nicht von ihrer Entfernung von der ersten Verticalfläche; sondern ausser α und β allein von η; so folgt, daß die Bilder gleich grosser und gegen die Tafel unter einerley Winkel geneigter Linien einerley Länge haben.

213 §.

92 F. Man ziehe durch G ein Paar grade Linien, welche die Horizontallinie in P und p schneiden, und mit den Seitenlinien Af, Bf des Dreyecks ABf, dessen Grundlinie AB in der Grundlinie der Tafel liegt, parallel sind; der durch BAf abgebildete Winkel sey $= \eta$, der durch AfB abgebildete $= \varphi$, so ist der durch TBf abgebildete $= \eta + \varphi$. Nun müssen auf der Horizontallinie von P aus gegen die Linke zu ins unendliche fort so viele Grade liegen, als der Winkel η fasset; von p aber gegen die Linke fort so viele, als $\eta + \varphi$ fasset; mithin liegen zwischen P und

p so viele Grade, als die Grösse des Winkels φ ausmachen, den $AfB = PGp$ abbildet. Demnach kann hier die eingetheilte Horizontallinie auf ähnliche als ein Winkelmesser dienen, wie sie bey den scenographischen Projectionen diente.

Soll zum Ex. an ef bey f ein Winkel von 40° gezeichnet werden, so zieht man GP mit fe parallel, zählt von P nach p 40 Grade, zieht Gp, und darauf $fh \# Gp$, so ist efh das Bild eines Winkels von 40 Graden.

Soll man efh messen, so zieht man durch G mit den Schenkeln fe, fh parallele Linien bis an die Horizontallinie in P und p, so viele Grade nun zwischen P und p liegen, so viele fasset der durch efh abgebildete Winkel.

214. §.

Jede grade Linie auf der Tafel, wie BI oder $\alpha\beta$ zu messen, oder auf ihr ein Stück von gegebener Länge abzuschneiden. 91 F.

Aufl. Man ziehe mit ihr durch den Hülfspunct G eine Parallele bis an die Horizontallinie. Wenn nun diese

1.) Den Augenpunct R trift, wie hier die mit BI parallel gezogene Linie GR, so trage man OR aus R nach F und ziehe FG. Ferner ziehe man durch B mit der Horizontallinie, durch I aber mit FG eine Parallele, und wenn beyde einander in C schneiden, so ist BI im perspectivischen Maaß so lang als BC im geometrischen.

Soll man auf BI ein Stück von gegebener Länge auftragen, so nimmt man auf BC so viele

Fusse, als diese Länge ausmachen soll, und ziehet CI mit GF parallel, so hat BI die verlangte Länge.

2.) Wenn die durch G mit der gegebenen Linie $\alpha\beta$ parallel gezogene nicht in den Augenpunct läuft, wie GP, so trägt man PO aus P in Ω, und ziehe ΩG. Weiter ziehe man durch α mit der Horizontallinie, durch β mit ΩG eine Parallele; wenn sich diese nun in γ schneiden, so messe man $\alpha\gamma$ im Geometrischen Maaß, so weis man zugleich, wie lang $\alpha\beta$ im perspectivischen Maaß sey.

Soll man auf $\alpha\beta$ ein Stück von verlangter Länge auftragen, so nimmt man auf $\alpha\gamma$ so viele geometrische Fusse, als die gegebene Länge fassen soll, und zieht $\gamma\beta$ mit GΩ parallel, so erhält $\alpha\beta$ die verlangte Länge.

Beweis. Wenn λ die Länge der durch $\alpha\beta$ abgebildeten Linie bezeichnet; und Kürze halber $\sin\eta \tang\alpha (1 + \cot\alpha \cot\eta) \sec\zeta = \mu$ gesetzt wird, so muß $\alpha\beta = \mu\lambda$ seyn. (212 §.) Ueberdem ist $P\phi = \mu . P\Omega$. (212 §.) Weil nun der Vorschrift gemäß, um $\alpha\beta$ zu messen das Dreyeck $\alpha\beta\gamma \sim GP\Omega$ gemacht wird, so hat man $PG : P\Omega = \alpha\beta : \alpha\gamma$, d. i. $\mu : 1 = \mu\lambda : \alpha\gamma$, mithin wird $\alpha\gamma = \lambda$. Und in dem umgekehrten Fall hat man $P\Omega : PG = \alpha\gamma : \alpha\beta$, d. i. $1 : \mu = \lambda : \alpha\beta$, weil der Vorschrift gemäß $\alpha\gamma = \lambda$ gemacht wird, mithin wird $\alpha\beta = \mu\lambda$.

Wofern die gegebene Linie, wie BI mit GR parallel ist, so ist $\eta = 90°$, und das ist von der allgemeinen Regel nur ein besondrer Fall.

215 §.

Die Aufgabe des vor. §. vermittelst des Proportional-Cirkels aufzulösen.

Aufl.

Aufl. Die Proportion $P\Omega : PG = \alpha\gamma : \alpha\beta$ oder $OP : GP = \alpha\gamma : \alpha\beta$ giebt $\alpha\beta = \frac{GP}{OP} \cdot \alpha\gamma$. Wenn also $\alpha\beta$ in perspectivische Fusse getheilt wäre, und $\alpha\gamma$ in geometrische; so wäre jeder perspectivische Fuß $= \frac{GP}{OP} \cdot$ eines geometrischen Fusses. Diesemnach messe man OP im geometrischen Maaß: so viele geometrische Füsse nun OP lang ist, in eben so viele gleiche Theile muß man GP eintheilen, so wird $\alpha\gamma$ nach dem letztern Maaßstab gemessen so lang seyn, als $\alpha\beta$ im geometrischen Maaß ist. Hiernächst kann auch jedes andre Stück der Linien $\alpha\beta$ nicht allein, sondern auch jeder andern, die mit ihr parallel läuft, nach eben diesem Maaß gemessen werden. Nun wird die Vergleichung mit dem 40. §. leicht ergeben, wie der Proportionalcirkel bey diesem Geschäfte gebraucht werden könne. Alles, was auf $\alpha\beta$ und jeder damit parallelen Linie zu messen vorkommt, muß nach einem Maaßstab gemessen werden, nach welchem GP so lang ist, als OP im geometrischen Maaß. Diesemnach trägt man GP auf dem geöfneten Proportional-Cirkel auf die Zahl von Schuhen, die OP fasset, und siehet noch zwischen welche zwo gleiche Zahlen nun $\alpha\beta$ fällt, so weis man wie lang $\alpha\beta$ sey. Soll man aber $\alpha\beta$ von gegebener Länge machen, so kann man auch diese gegebene Länge von dem Proportional-Cirkel mittelst des Hand-Cirkels auf $\alpha\beta$ auftragen.

216. §.

Es giebt viele Fälle, wo man sich mit Vortheil der bisher vorgetragenen Regeln für die orthographische Projection bedient, um eine Sache perspectivisch zu entwerfen. Am gewöhnlichsten geschicht es, wenn der ganze Umfang der abzubildenden Sache in Vergleichung mit dem Abstand des Auges sehr klein ist, alsdenn sind die Strahlen, welche die Sache ins Auge schickt, beynahe parallel, und weil es auf die geringe Abweichung nicht ankommt, so nimmt man an, daß sie vollkommen parallel seyn. Weil übrigens bey der orthographischen Projection alle scheinbare Verkürzung und Schmählerung wegfällt; so wählt man sie bey Zeichnung einzelner Gegenstände vornemlich um deswillen häufig, weil man dabey gewöhnlich die Deutlichkeit des Bildes, wobey alle Theile so viel möglich auseinander gesetzt erscheinen, mehr als das völlig natürliche der Erscheinung des Bildes zur Absicht hat. Daher werden fast alle Aufrisse von Maschinen, auch wohl Gebäude nach ihrem äusserlichen Ansehen, orthographisch-perspectivisch gezeichnet. Auch braucht man diese Projections-Art wohl bey Festungen und Städten, wenn alles ohne scheinbare Schmählerung ins Auge fallen soll.

217. §.

Hiebey kommt es nun allerdings auch auf eine geschickte Wahl der Lage des Auges an, und man kann dasjenige, was davon im IX. Abschnitt gesagt ist, leicht auf diese besondre Art der Projection anwenden. Die Bestimmung der Entfernung des Auges von der Tafel oder der abzubildenden Sache, nebst allen Regeln, die sich darauf beziehen, fallen hier weg, weil die Entfernung schon bestimmt, und hier unendlich groß ist: es kommt nur auf die Wahl

der

der Winkel α und β an. Bey ebenen horizontal liegenden Figuren, können α und β so angenommen werden, daß alles wie ein geometrischer Grundriß erscheint, und überhaupt wird eine ebene Figur eben nicht leicht orthographisch perspectivisch gezeichnet. Gewöhnlich ist es ein Körper dessen Bild gezeichnet werden soll, und alsdenn frägt sich nur von welcher Seite betrachtet, ihn das Bild darstellen soll, und wie weit er zugleich von oben betrachtet aus einander gesetzt erscheinen soll. Jene Betrachtung bestimmt den Winkel α, diese den Winkel β.

218. §.

Was den ersten Umstand betrift, so muß der Winkel α so angenommen werden, daß die Stücke, welche vornemlich ins Auge fallen sollen, von andern nicht bedeckt werden, auch desto mehr auseinander gesetzt erscheinen, je mehr es darauf ankommt, daß sie in dem Bilde vorzüglich mehr deutlich als die übrigen erscheinen.

Weil die verschiedene Entfernung der Theile hinter der Tafel keine scheinbare Schmählerung verursacht, so kommt auf diesen Umstand hier nichts an, mehr aber auf die optische Höhe des Auges über demjenigen Horizont, worauf der abzubildende Körper stehet. Stünde das Auge in diesem Horizont, so würde es den Körper nur von einer Seite, von oben gar nicht, sehen können: stünde es aber völlig grade über diesem Horizont 90° hoch, so würde es die lothrechten Seitenflächen und Seitenlinien des Körpers nicht sehen. Deswegen müssen diese beyden Lagen des Auges vermieden werden, es muß

we-

weder $\beta = 0$, noch auch $\beta = 90^\circ$ seyn. Diesemnach muß das Auge so hoch über dem Horizont erhaben werden, daß es den Körper von oben so gut als von der Seite wahrnehmen kann: oder wenn der Körper auf die eine Art mehr als auf die andre auseinander gesetzt erscheinen soll, so wird ebenfalls die Grösse des Winkels β sich darnach richten müssen.

219. §.

Wenn das Auge von der ersten Verticalfläche gar nicht abweicht, oder der Winkel $\alpha = 0$ ist; so wird $\text{tang}\,\zeta = \frac{\text{cosec}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}{1 + \cot\alpha\cot\eta}$ (210 §.)

$$= \frac{\text{tang}\,\beta}{\sin\alpha + \cos\alpha\cot\eta} = \frac{\text{tang}\,\beta}{\cot\eta} = \text{tang}\,\beta\,\text{tang}\,\eta,$$

und Af (212 §.) $= AF\sin\eta\sqrt{(\cot\eta^2 + \text{tang}\,\beta^2)}$ $= AF\sqrt{(\cos\eta^2 + \sin\eta^2\,\text{tang}\,\beta^2)}$. Wird überdem die Höhe des Auges $\beta = 45^\circ$ angenommen, so ist $\text{tang}\,\beta = 1$, mithin $\text{tang}\,\zeta = \text{tang}\,\eta$, oder $\zeta = \eta$, und $Af = AF$. Bey dieser Voraussetzung also verwandelt sich die orthographische Projection einer jeden horizontalliegenden ebenen Figur in einen Geometrischen Grundriß, weil die Bilder aller Linien, mit den Linien selbst einerley Lage und Grösse behalten. Weil nun die verticalen Höhen ebenfalls allemahl ihre natürliche Grösse behalten, so ist dies unter allen perspectivischen Zeichnungsarten die leichteste. Man bedient sich derselben wohl, um auf dem Grundrisse einer Stadt oder Festung auch die Häuser und Festungswerke aufzustellen, welches sehr leicht durch verticale Parallellinien geschicht, die

aus

aus jedem merkwürdigen Punct der Grundfläche aufgerichtet, und nach dem natürlichen Maaßstabe so groß gemacht werden, als die Höhen der Gegenstände über diese Puncte der Grundfläche sind. Practische Zeichner nennen diese Projections-Art die Vogel-Perspectiv: auch wird sie die Cavalier-Perspectiv genannt.

220. §.

Bestehet der abzubildende Körper aus Rechtecken, die ihn als Seitenflächen einschliessen, so entwirft man das Bild desselben gemeiniglich so, daß eine Seitenlinie desselben, wie z. E. AD mit der Grundlinie parallel liegt, damit dieselbe, und alle mit ihr parallel laufende Linien ohne weitere Umstände nach dem natürlichen Maaßstabe können ausgemessen werden. Um die Lage des Auges zu bestimmen giebt man sich eben nicht viele Mühe, weil es nur darum zu thun ist, daß alle Theile des Bildes recht deutlich aus einander gesetzt erscheinen sollen. Dieserwegen ist bey der Zeichnung selbst beynahe alles willkührlich, wie man aus dem folgenden Beyspiel eines viereckten Gefässes wird abnehmen können. 93 F.

Man zieht AD, welches die Seitenlinie ist, die ganz ins Auge fallen soll, mit der Horizontallinie parallel, giebt ihr die gehörige Länge nach dem angenommenen natürlichen Maaßstabe, und nach eben demselben zeichnet man auch die Höhe A*a*. Der anliegenden Seitenlinie AB giebt man eine solche Lage, daß sie nicht allein hinlänglich ins Auge falle, sondern auch die obere Oefnung des Gefässes aus einander gesetzt erscheine, und kein zu sehr verzogenes

Vier-

Viereck vorstelle. Man kann in solcher Absicht den Winkel BAL zwischen 40 und 50 Grade groß machen. Eben dieser Seitenlinie AB giebt man nun die gehörige Länge ebenfalls nach einem willkührlich gewählten Maasstabe, dessen Abtheilungen eben so groß, grösser oder kleiner seyn können, als die Abtheilungen des erstern, welchen man für AD brauchte, nachdem man will, daß sie länger oder kürzer, und mit derselben die obere Oefnung des Gefässes weiter oder enger erscheinen soll. Nun wird das Parallelogramm ABCD als die Grundfläche gezeichnet, und über jedem Winkelpunct die perspectivische Höhe aufgerichtet, und zwar so, daß alle nach einerley Maaßstab gleich groß gemacht werden; so giebt sich die obere Oefnung von selbst.

221. §.

93 F. Soll keine Seitenlinie des abzubildenden Gefässes mit der Grundlinie parallel laufen; so muß man zuförderst auf der Tafel eine Horizontallinie, nebst der ersten Verticallinie RT ziehen, und jene für einen willkührlich angenommenen Halbmesser RO=D im Verhältniß der Tangenten eintheilen. Hiernächst nimmt man die Winkel α und β den Umständen gemäß an, falls sie nicht gegeben sind, und sucht den Hülfspunct G. Nun muß die Lage einer Seitenlinie, wie AB gegen die Tafel und erste Verticalfläche gegeben seyn. Sie schneide die Tafel unter einem Winkel von 70° mithin die erste Verticalfläche unter einem Winkel von 20°; so muß man GP in den 20sten Grad der Horizontallinie ziehen. Weil ferner BAD ein rechter Winkel seyn soll, so zieht man GΠ in den 70sten Grad: und nun muß

AB

AB mit GP, AD mit GΠ parallel gezogen werden. Soll man das Gefäß allein zeichnen, so ist es gleichviel, wo man den Punct A auf der Tafel annimmt, und man kann ihn, um die wenigsten Umstände zu haben, auf G annehmen. Sollen aber Bilder von mehrern Gegenständen in bestimmter Lage und Entfernung gegen einander gezeichnet werden, so muß man die Entfernung des Puncts A von der Tafel und der ersten Verticalfläche wissen: oder wenn BA in K an die Tafel stößt, so muß TK $= f$, und die schräge Vertiefung KA bekannt seyn. Damit man nun den Linien KA, AB, AD, die gehörige Länge geben könne, suche man nach dem 215 §. für die mit GP und GΠ parallele Linien den Maaßstab. Es wird nemlich in diesem Exempel, wo RO $= 10$ Fuß angenommen ist, OP $= 10\frac{1}{2}$ Fuß, und OΠ $= 28$ Fuß. Demnach theile man GP in 21 gleiche Theile, so werden dies halbe Füsse für die mit GP parallele Linien seyn; eben so theilt man GΠ in 28 gleiche Theile, so hat man den Fußmaaßstab für die Linien, die mit GΠ parallel laufen. Nun sey TK $= f = 19$ Fuß, KA $= 3$ Fuß, AB $= 4$ Fuß, AD $= 8$ Fuß; so trägt man von T nach K 19 geomerische Fusse, zieht KB mit GP parallel, nimmt KA $= 3$ Fuß, AB $= 4$ Fuß nach dem Maaßstab GP. Weiter zieht man AD mit GΠ parallel, und macht AD $=$ 8 Fuß nach dem Maaßstab GΠ. Endlich verzeichnet man das Parallelogramm ABCD, und richtet aus den Winkelpuncten gleiche Höhen A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, nach dem geometrischen Maaße auf; so giebt sich das übrige des Bildes von selbst.

222. §.

Es ist auf der Tafel das Bild AB einer
93 F. n. 2. horizontal liegenden graden Linie von bekannter Länge und Lage gegeben: auch ist auf der Tafel die Lage der Horizontallinie, oder statt dessen die Lage des Bildes einer verticalen Linie, wie tr bekannt: man soll die Abweichung des Auges von der Verticalfläche nebst der Höhe desselben über dem Horizont der durchs AB abgebildeten Linie finden.

Aufl. Es sey die Länge des Bildes AB $=\lambda$, die Länge der abgebildeten Linie $=$ L, ihre Neigung gegen die Tafel $=\eta$, die Neigung des Bildes gegen die Grundlinie oder Horizontallinie der Tafel $=\zeta$, die Abweichung des Auges $=\alpha$, die Höhe $=\beta$; so hat man

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{\sec\alpha \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha + \cot\eta} \quad (210\ \S.)$$

und

$$\lambda = L . \sin\eta (\operatorname{tang}\alpha + \cot\eta) \sec\zeta . \quad (212.\ 214.\ \S.)$$

Die letzte Gleichung giebt

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\lambda . \cos\zeta}{L \sin\eta} - \cot\eta = \frac{\lambda . \cos\zeta - L \cos\eta}{L \sin\eta};$$

also

$$\sec\alpha = \frac{\surd(L^2 \sin\eta^2 + (\lambda \cos\zeta - L \cos\eta)^2)}{L \sin\eta},$$

und

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \cot\eta}{\sec\alpha} = \frac{\lambda \cos\zeta}{\surd(L^2 \sin\eta^2 + (\lambda \cos\zeta - L \cos\eta)^2)}.$$

Demnach erhält man aus der ersten Gleichung

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{(\operatorname{tang}\alpha + \cot\eta) \operatorname{tang}\zeta}{\sec\alpha}$$

=

$$= \frac{\lambda \sin \zeta}{\sqrt{(L^2 \sin \eta^2 + (\lambda \cos \zeta - L \cos \eta)^2)}}.$$

Will man das gesuchte durch Zeichnung finden, so kann man sich so verhalten. Man ziehe eine Horizontallinie $P\Pi$ deren Lage als bekannt angenommen wird, nehme den Hülfspunct G nach Gefallen an, und ziehe GP bis an die Horizontallinie mit AB parallel. Weiter ziehe man AL mit der Horizontallinie parallel, mache $AL = L$, ziehe BL, und $G\Omega$ mit BL parallel, so ist $P\Omega$ der reducirte Abstand des Auges vom Vereinigungspunct P, und $P\Omega = D \operatorname{cosec} \eta$. Nun mache man den Winkel $\Omega PO = \eta$, nehme $PO = P\Omega$, und ziehe OR auf die Horizontallinie senkrecht, so ist R der reducirte Augenpunct. Noch ziehe man Gg auf die Horizontallinie senkrecht, hiernächst aber Og, so ist $ROg = \alpha$: wenn man alsdenn $g\omega = gO$ nimmt, und ωG ziehet, so wird $\Omega\omega G = \beta$.

Wenn man nemlich $RO = D$ setzt, so ist $RP = D \cot \eta$ und $Rg = D \tang ROg$, mithin $gP = Rg + RP = D(\tang ROg + \cot \eta)$. Weil ferner das Dreyeck $GP\Omega \backsim ABL$, so hat man $\frac{AB}{AL} = \frac{GP}{\Omega P} =$ 93 F. n. 2.
$\frac{GP}{OP}$, weil $OP = \Omega P$ gemacht ist, mithin $\frac{\lambda}{L} = \frac{gP \cdot \sec \zeta}{D \operatorname{cosec} \eta}$, oder $\frac{\lambda \cos \zeta}{L \sin \eta} = \frac{gP}{D}$ $= \tang ROg + \cot \eta$, d. i. $\tang ROg = \frac{\lambda \cos \zeta}{L \sin \eta}$ $- \cot \eta$, mithin $ROg = \alpha$. Ueberdem ist

 gP =

$gP = gG . \cot\zeta$ und $g\omega = gG . \cot . g\omega G$, folglich $gP : g\omega = \cot\zeta : \cot g\omega G = tg . g\omega G : tg . \zeta$. folglich $tg . g\omega G = \frac{gP . \tang\zeta}{g\omega}$. Aber $g\omega = gO = D\sec\alpha$,

also wird $\tang . g\omega G = \frac{(\tang\alpha + \cot\eta) \tang\zeta}{\sec\alpha}$,

und $g\omega G = \beta$.

223 §.

93 F. n. 1. Weil es ganz gleichgültig ist, wo man den Hülfspunct G annehmen will; so hätte man auch G auf A annehmen können. In der 93 Figur. num 1., wo der durch BAL abgebildete Winkel $\eta = 90°$ angenommen ist, könnte A selbst als der Hülfspunct betrachtet werden. Wenn alsdenn AB verlängert die Horizontallinie in R trift: so wird R der reducirte Augenpunct. Man verlängere DA bis L und mache AL so viele geometrische Fusse lang, als die durch AB abgebildete Linie fasset, ziehe BL, und hiernächst AF mit BL parallel, so ist RF der reducirte Abstand des Auges. Demnach mache man RO = RF, ziehe Ag auf RF senkrecht, und darnächst Og, so ist $ROg = \alpha$. Weiter nehme man $g\omega = gO$, und ziehe ωA, so ist $g\omega A = \beta$.

Es ist bey diesen umgekehrten Verfahren, wenn man aus dem gegebenen Bilde auf der Tafel die Abweichung des Auges von der Verticalfläche, und seine Höhe über dem Horizont sucht, an sich gleichgültig, ob man dieselbe Horizontallinie, und denselben reducirten Augenpunct findet, welche der Zeichner gebraucht hat, oder nicht. In der Lage und Erscheinung der Bilder gegen einander hängt davon

nichts

nichts ab, was für eine Horizontallinie, und was für ein reducirter Augenpunct dabey ist angenommen worden. Auch hängt nichts davon ab, wie weit die Gegenstände hinter der Tafel angenommen sind: also kommt auch nichts darauf an, die Grundlinie wieder zu suchen, die der Zeichner gebraucht hat. Weis man indessen, wie weit ein Punct, wie A, von der Tafel, und der ersten Verticalfläche entfernt ist, so kann man auch leicht, die von dem Zeichner gebrauchte Grundlinie, und erste Verticallinie wieder finden. Hat man nemlich Δ und δ, so zieht man AN mit GR parallel, und macht AN nach dem Maaßstab GR, (der nach dem 215 §. eingetheilt wird) so viele Fusse lang, als δ fassen soll, so liegt N in der Grundlinie. Ferner wird $NT = \Delta$ genommen, so ist T der Fußpunct des Auges, durch welchen die erste Verticallinie gehet.

224 §.

Wenn man die verschiedenen Fälle durchgehen will, wie nach Anleitung der Regeln des XII. Abschnitts aus der bekannten Grösse einiger Linien und Winkel des Bildes die bey der Verzeichnung angenommene Lage des Auges wieder gefunden werden kann; so ergiebt sich leicht, welche von den dort umständlich erörterten Hülfsmitteln, und mit welcher Veränderung, sie hier ihre Anwendung finden. Die Lage der Horizontallinie ist das erste, was man auch hier zuförderst kennen muß, ehe und bevor man die Winkel α und β, welche die Lage des Auges bestimmen, suchen kann. Die im 177 §. angezeigten Hülfsmittel werden auch hier gewöhnlich dienen, die Lage der Horizontallinie zu finden, weil nicht leicht eine Zeichnung dieser Art vorkommen wird, worinn nicht verticale Linien vorkommen sollten. Das Hülfsmittel des 178 §. aber fällt hier weg, weil die Bilder paralleler Linien hier keinen Vereinigungspunct haben.

Wird nun vorausgesetzt, daß die Lage der Horizontallinie schon bekannt sey, so lassen sich die Aufgaben des 180. 182. 184. §. auch für die orthographische Projection leicht mit einiger Aenderung anwenden. Das gesuchte sind hier allemahl die Winkel α und β, statt dessen daß es dort die Linien RP oder LR und RO waren.

225. §.

94 F. **Die Lage eines Schenkels nebst der Grösse eines durch *abc* auf der Tafel abgebildeten Winkels ist gegeben: man sucht die Lage des Auges, die Lage der Horizontallinie als bekannt angenommen.**

Aufl. Man ziehe eine Horizontallinie $P\Pi$, und nehme einen Hülfspunct G beliebig an. Aus demselben ziehe man GP, Gp, bis an die Horizontallinie mit ba, bc parallel und Gg auf die Horizontallinie senkrecht. Der durch abc abgebildete Winkel sey $=\varphi$, und der durch ba abgebildete Schenkel sey gegen die Grundlinie unter dem Winkel $=\eta$ geneigt. Auf der Sehne Pp setze man einen Kreisbogen, dessen Halbmesser $=\frac{1}{2}c.\text{cosec}\varphi$, $Pp=c$ gesetzt. Weiter mache man den Winkel $pPO=\eta$, so giebt sich der Durchschnittspunct O mit dem Kreise, als die reducirte Stelle des Auges. Wird alsdenn OR auf $P\Pi$ senkrecht gesetzt, und Og gezogen, so hat man

man $ROg=\alpha$; und wenn ferner $g\omega=gO$ genommen, und ωG gezogen wird, so erhält man $R\surd G=\beta$.

Durch Rechnung liessen sich die Winkel α und β so finden. Man setze $Pg=g$, $gG=h$, so sind diese Linien auf der Tafel gegeben. Weiter ist $Rg=gP-PR$, $PR=c.(\cot\phi\sin\eta+\cos\eta)\cos\eta$, und $RO=c(\cot\phi\sin\eta+\cos\eta)\sin\eta$ (180 §.) also wird

$$\tan g\alpha=\frac{Rg}{RO}=\frac{g-c.(\cot\phi\sin\eta+\cos\eta)\cos\eta}{c.(\cot\phi\sin\eta+\cos\eta)\sin\eta}$$

$$=\frac{g-c.\sin(\eta+\phi)\cos\eta}{c.\sin(\eta+\phi)\sin\eta},\quad \text{und}\quad \sec\alpha$$

$$=\frac{\surd(c^2\sin(\eta+\phi)^2\sin\eta^2+(g-c.\sin(\eta+\phi)\cos\eta)^2)}{c.\sin(\eta+\phi)\sin\eta}.$$

Das giebt ferner $g\omega=gO=RO\sec\alpha=\surd(c^2\sin(\eta+\phi)^2\sin\eta^2+(g-c.\sin(\eta+\phi)\cos\eta)^2)$, und

$$\tan g\beta=\frac{gG}{g\omega}=\frac{h}{c(\cot\phi\sin\eta+\cos\eta)\sin\eta\sec\alpha}.$$

Man wird leicht wahrnehmen, wie die Auflösung der Aufgabe des 182 §. sich anwenden lasse, wenn die Projection orthographisch ist. Es sey der durch *abc* abgebildete Winkel $=\phi$, der durch ABC abgebildete $=\psi$, und $P\Pi$ horizontal. Wenn GP, Gp, mit *ba*, *bc*, so wie $G\pi$, $G\Pi$, mit BA, BC parallel gezogen sind, und man auf Pp, $\Pi\pi$, Kreisbogen setzt, deren Halbmesser $\frac{1}{2}Pp.\text{cosec}\phi$, und $\frac{1}{2}\Pi\pi.\text{cosec}\psi$ sind; so schneiden beyde einander, und einer von beyden Durchschnittspuncten, wie O, ist die reducirte Stelle des Auges. Weiter werden nun auch α und β, wie vorhin leicht durch Zeichnung gefunden, um sie durch Rechnung zu finden, sucht man, wie im 182 §. $LR = t$, und $RO = D$; so hat man $Rg = g - \frac{1}{2}c - t$, $\tan g\alpha = \frac{Rg}{D}$, und $\tan g\beta = \frac{h}{\sqrt{(D^2 + Rg^2)}} = \frac{h}{D \sec\alpha}$. Weil endlich die Aufgabe des 184 §. nur ein besondrer Fall von der Aufgabe des 182 §. ist; so wendet man ihre Auflösung ebenfalls leicht an, wenn die Projection orthographisch ist.

226. §.

Den orthographischen Abbildungen wird gewöhnlich der geometrische Maaßstab beygefüget, und wenn auch dies nicht wäre, so könnte man ihm leicht herstellen, wenn nur die Länge einer einzigen verticalen, oder mit der Horizontallinie parallelen Linie auf der Tafel bekannt wäre: denn alle solche Linien werden nach dem geometrischen Maaßstab gemessen. (209 §.) Wäre die Länge einer durch AB (93 F.) abgebildeten Linie bekannt, die nicht mit der Tafel parallel läuft, so läst sich der geometrische Maaßstab ebenfalls herstellen, wenn die Lage des Auges vermittelst eines von den im vor. §. angezeigten Mitteln gefunden ist, oder doch sonst als bekannt angenommen werden kann.

Man nehme den Hülfspunct G nach Gefallen an, ziehe GP mit AB parallel, und Gg auf die Horizontallinie senkrecht. Ferner mache man den Winkel $GgO = \alpha$, $gG\omega = 90° - \beta$, und trage $g\omega$ auf gO, ziehe hiernächst PO. Nun theile man AB in so viele gleiche Theile, als Fusse die Länge AB aus-

ausmachen, und sehe zu, wie viele solcher Theile PG fasset. In eben so viele gleiche Theile muß man OP eintheilen, so hat man den gesuchten Maaßstab.

Man kann auch PO in PΩ tragen, hiernächst ΩG, und darauf BL mit ΩG, so wie AL mit der Horizontallinie parallel ziehen: alsdenn ist AL im Geometrischen Maaß so lang als AB im perspectivischen, und der gesuchte Maaßstab ist ebenfalls gefunden.

Der XIV. Abschnitt.

Theorie der orthographischen Projectionen auf der schiefliegenden Tafel.

227. §.

Man wird sich noch aus dem VII. Abschnitt erinnern, daß die Regeln der perspectivischen Zeichenkunst nicht bloß auf die vertical stehende Tafel eingeschränkt sind, sondern vielmehr mit einer geringen Veränderung noch ihre Anwendung finden, wenn gleich die Tafel gegen den Horizont der abzubildenden Figur eine schiefe Lage hat. Es ist der Mühe werth, zu untersuchen, nach welchen Regeln sich auch orthographisch-perspectivische Bilder auf der schiefliegenden Tafel zeichnen lassen. Zu dem Ende gehe man auf die 64 Figur und dasjenige zu-