

www.e-rara.ch

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik

Cantor, Moritz

Leipzig, 1880-1908

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 10312

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-17756>

91. Kapitel. Leibniz 1687-1699. Jakob und Johann Bernoulli bis zu ihrem Streite.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

gleicher Grösse treibt den Punkt nach beiden Seiten, d. h. nicht stärker nach der einen als nach der ihr entgegengesetzten Seite, und er verbleibt in Ruhe.

Von mancherlei geometrisch fesselnden Sätzen erwähnen wir den 1. Satz des 5. Abschnittes des ersten Buches dass, wenn von irgend einem Punkte eines Kegelschnittes nach den vier Seiten eines Sehnenvierecks Gerade unter gegebenen Winkeln gezogen werden, die Producte der nach je zwei Gegenseiten gezogenen Strecken in constantem Verhältniss stehen. Ueberhaupt beschäftigt sich der ganze 5. Abschnitt mit merkwürdigen Eigenschaften der Kegelschnitte, mit deren Bestimmtheit durch fünf Punkte, während durch vier Punkte mehr als nur ein Kegelschnitt gelegt werden kann u. s. w., Fragen, mit welchen sich einst auch Pascal beschäftigt hatte (Bd. II, S. 623), wenn auch ohne dass wir wissen, wie weit er gelangte. Eine Erinnerung an Desargues (Bd. II, S. 619) darf wohl in dem 22. Lemma des ersten Buches vermuthet werden, wo es heisst: Parallellinien seien solche, welche nach einem unendlich entfernten Punkte gerichtet sind¹⁾.

91. Kapitel.

Leibniz 1687—1699. Jakob und Johann Bernoulli bis zu ihrem Streite.

Mit den Principien war Newtons schriftstellerische Thätigkeit, wenigstens soweit sie an die Oeffentlichkeit trat, für einige Zeit beendigt. Der Mathematiker hat von seinen Leistungen, so weit sie uns bisher gegenüber traten, hauptsächlich diejenigen zu schätzen, welche in der Analysis per aequationes niedergelegt waren, von denen aber brieflich auch Leibniz Kenntniss hatte. Das war vor allen Dingen die Binomialreihe, das war die Anwendung von sowohl numerischen als nach steigenden oder fallenden Potenzen einer allgemeinen, kleiner oder grösser als die Einheit angenommenen Grösse verlaufenden Reihen zur Auflösung von Gleichungen. In den Principien war es die Mechanik der Kräfte, welche im umgekehrten Quadrate der Entfernungen ihre Wirksamkeit ausüben. Anderes hatte Newton da und dort versprochen, hatte er als in seinem Besitze zu

¹⁾ *Lineae parallelae sunt, quae ad punctum infinite distans tendunt.* Weniger deutlich ist das Gleiche auch schon in dem an das 18. Lemma sich anschliessenden Scholium ausgesprochen: *E punctis quatuor A, B, C, D possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figurae, quae ad puncta illa convergunt, evadere parallela.*

verstehen gegeben und die Glaubwürdigkeit seiner Aussage durch Beispiele unantastbar gemacht, aber bekannt gemacht hatte er es nicht, weder im grossen noch im kleinen Kreise, und dass er nun gar über einen Algorithmus der Infinitesimalrechnung verfüge, konnte kein Mensch ahnen. Erst 1693 änderte sich dieses, wie wir im 92. Kapitel sehen werden.

Leibnizens Veröffentlichungen dagegen nahmen einen nur immerfort beschleunigten Gang an, und es ist noch Eines, was zu betonen ist. Leibniz hat eine Schule hervorgebracht. In England können wir ihr Craig (S. 188) beirechnen. In Deutschland und in Frankreich jubelte man den neuen Entdeckungen zu, drängte man sich heran, das neue Arbeitsmittel der Differential- und Integralrechnung gebrauchen zu lernen, gab man demselben durch diesen vielseitigen Gebrauch immer grössere Vollkommenheit.

Machen wir uns mit den Leibnizischen Veröffentlichungen bekannt. Sie liessen zunächst etwas auf sich warten. Wir wissen (S. 28), dass Leibniz im October 1687 jene grosse Studienreise nach Italien antrat, welche ihn bis 1690 von Hannover fernhielt, und welche jeder Arbeit auf einem anderen Gebiete als dasjenige war, dem zu Liebe er seine Reise von Bibliothek zu Bibliothek, von Archiv zu Archiv machte, sich mindestens nicht förderlich erweisen konnte. Ob Leibniz auf dieser Reise das Exemplar der Principien erhielt, welches Newton ihm sofort nach dem Erscheinen zuschicken liess¹⁾, wissen wir ebensowenig als wir den Grund kennen, warum Newton fortgesetzt Vermittler für solche Sendungen in Anspruch nahm. Möglicherweise war es das vom Verfasser ihm geschenkte Exemplar, welches Leibniz in Rom erhielt, wo er 1688 sich aufhielt²⁾. Vorher kannte er nur eine Besprechung der Principien in den A. E. vom Juni 1688. Die kurzgefasste Sprache dieses Berichtes³⁾, welcher, ohne ein lobendes oder tadelndes Urtheil beizufügen, die Hauptpunkte deutlich hervorhebt, hat zur Vermuthung geführt, es sei hier eine Selbstanzeige aus Newtons Feder zum Abdrucke gebracht. Eine Randnote des Heidelberger Exemplars der A. E. nennt freilich Christoph Pfautz als den Berichterstatter, aber eine Vereinigung beider Ansichten ist nicht unmöglich. Pfautz gehörte zu dem engsten Redaktionskreise der A. E. Er war 1680 mit Mencke

¹⁾ Edleston, *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes* pag. 309: *Quam primum Liber Newtoni lucem vidit, exemplar ejus D. Nicolao Fatio datum est, ut ad Leibnitium mitteretur* (aus einem von Newton herührenden Aufsätze). ²⁾ Leibniz VI, 189: *Après avoir bien considéré le livre de M. Newton, que j'ai vu à Rome pour la première fois, j'ai admiré comme de raison quantité de belles choses qu'il y donne.* ³⁾ A. E. 1688 pag. 303.

in England und Holland gewesen, um Mitarbeiter für die Zeitschrift zu werben, zu deren Herausgabe damals die ersten Vorbereitungen getroffen wurden. Vielleicht waren damals unmittelbare oder mittelbare Beziehungen zu Newton angeknüpft worden, vielleicht fügte dieser deshalb dem Buche, welches er zur Besprechung einsandte, schriftliche Bemerkungen bei, was er für neu und wichtig halte, und Pfantz dachte dem Verfasser des Werkes wie den Lesern der Zeitschrift sich gleichmässig gefällig zu erweisen, indem er von jenen Bemerkungen umfassenden Gebrauch machte.

Aber gleichviel! Jedenfalls las Leibniz auf der Reise jenen Bericht, den er also früher als das Werk selbst erhalten haben muss. Das geht aus einem Aufsätze *De lineis opticis et alia*¹⁾ hervor, den Leibniz im Januarhefte 1689 der A. E. veröffentlichte, und der mit der Erklärung anfängt, er sei schon lange auf der Reise und mit Durchstöbern von Archiven beschäftigt, da habe ihm ein Freund einige Monatshefte der A. E. geschickt. Im Juniheft 1688 sei ihm der Bericht über die Principien Newtons aufgefallen, den er heissungrig verschlungen habe. Eine weitere Bestätigung ist in dem Aufsätze *Tentamen de motuum coelestium causis*²⁾, der im Februarhefte 1689 der A. E. Abdruck fand, zu finden. In ihm gelangte Leibnitz zur Behauptung, die Planeten würden von der Sonne in verschiedenem Maasse, aber jedesmal im quadratischen Verhältnisse ihrer Sonnennähe angezogen³⁾, eine Wahrheit, welche, wie er aus dem Berichte in der Zeitschrift ersehe, auch von Newton erkannt worden sei, wenn der Bericht auch darauf die Auskunft schuldig bleibe, wie Newton zu jenem Satze gelangte⁴⁾.

Leibniz bediente sich zur Ableitung seiner Sätze hier der Differentialrechnung und benutzte die Gelegenheit, sich über deren Grundgedanken zu äussern⁵⁾: „Ich nahm beim Beweise unvergleichbar kleine Grössen an, z. B. den Unterschied zweier nahezu übereinstimmender Grössen⁶⁾, der mit den Grössen selbst unvergleichbar ist. So kann nämlich solches, wenn ich nicht irre, am deutlichsten auseinandergesetzt werden. Will also Jemand Unendlichkleines nicht anwenden, so kann er so Kleines annehmen, als ihm genügend scheint, damit es unvergleichbar werde, und einen Fehler hervorbringe, der nicht ins Gewicht falle, oder kleiner sei als ein gegebener.

¹⁾ Leibniz VII, 329—331. ²⁾ Ebenda VI, 144—161. ³⁾ *Planeta idem attrahitur a Sole diversimode, et quidem in duplicata ratione viciniorum.* ⁴⁾ Ebenda VI, 157: *Vides hanc propositionem jam tum innotuisse viro celeberrimo Isaaco Newtono, ut ex relatione Actorum apparet, licet inde non possum judicare quomodo ad eam pervenerit.* ⁵⁾ Ebenda VI, 151. ⁶⁾ *duarum quantitatum communium.*

Wie die Erde für einen Punkt, der Erddurchmesser für eine unendlich kleine Linie gehalten wird, sofern man den ganzen Himmel betrachtet, so kann bewiesen werden, dass ein Winkel, dessen Schenkel eine Basis zwischen sich haben, die gegen sie selbst unvergleichbar klein ist, ein unvergleichbar kleiner sein muss, und dass der Unterschied der beiden Schenkel mit den Schenkeln, die den Unterschied aufweisen, nicht vergleichbar ist.“ Etwas später nennt er einander entsprechende Sehnen, Bogen, Tangenten als Grössen mit ihnen selbst nicht vergleichbaren Unterschieden. „Sind sie selbst unendlich klein, so sind ihre Unterschiede unendlich mal unendlich klein¹⁾ . . . Es gibt unendlich viele Grade sowohl des Unendlichen als des Unendlichkleinen.“

Das Aprilheft 1689 der A. E. brachte abermals einen Aufsatz des nun, nachdem er wieder angefangen hatte mathematisch zu arbeiten, unermüdeten Reisenden. Es war der vierte seit vier Monaten, denn im Januarhefte hatte sich an den schon erwähnten über optische Linien ein solcher über das widerstehende Mittel angeschlossen. Der Aufsatz im Aprilhefte beschäftigte sich mit der Isochrone. Wir wissen (S. 134), dass dieser Name durch Pardies der Cycloide beigelegt worden war, weil ein Körper, von welchem Punkte der nach unten gewölbt gezeichneten Cycloide aus er längs derselben in fallende Bewegung geräth, genau in der gleichen Zeitdauer den Weg bis zum Tiefpunkte durchmisst. Das ist nicht die Bedeutung, in welcher Leibniz sich des gleichen Wortes bediente. Er wollte unter Isochrone diejenige Curve verstanden wissen²⁾, in welcher ein schwerer Körper in dem Sinne gleichförmig fällt, dass er in gleichen Zeiträumen dem Erdboden um einen gleichen senkrechten Abstand sich nähert. Er hatte die Aufgabe, die Curve zu finden, welche die genannte Eigenschaft besitze, im Septemberhefte 1687 einer anderen Zeitschrift, der *Nouvelles de la Republique des Lettres*, gestellt, und Huygens hatte sofort im Octoberhefte die Auflösung nachfolgen lassen, die gesuchte Curve sei die semicubische Parabel³⁾. Auch Leibniz gab nun in den A. E. die damit übereinstimmende eigene Auflösung sammt deren Beweis⁴⁾, was Huygens unterlassen hatte. Infinitesimalbetrachtungen kommen hier nicht vor. Schon im Januar 1688 hatte übrigens Leibniz die Nummer mit der von Huygens eingerückten Auflösung erhalten und sofort von Pilsen aus, wo er sich grade befand, einen Beweis an die *Nouvelles de la Republique des Lettres* abgehen lassen, der nicht aufgenommen wurde, vielleicht nicht angekommen ist⁵⁾.

¹⁾ *in finitibus infinite parvae.* ²⁾ Leibniz V, 234. ³⁾ Ebenda V, 237.

⁴⁾ Ebenda V, 234—237. ⁵⁾ Ebenda V, 238—240.

Wir überspringen die in den Jahrgängen 1690 und 1691 der A. E. enthaltenen Aufsätze Leibnizens, um unter den acht Veröffentlichungen von 1692 bei nur dreien zu verweilen.

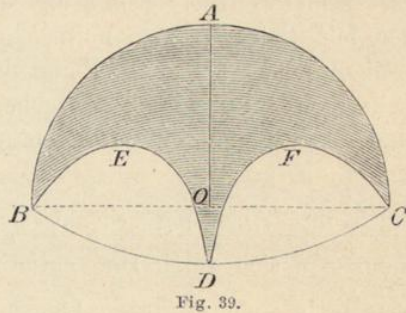
Der Aufsatz von der Curve, welche aus den Durchschnittspunkten unendlich vieler, nach einem bestimmten Gesetze gezogener Curven entsteht und sie alle berührt, *De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente*¹⁾ führte zwei neue folgewichtige Begriffe in die Geometrie ein, den der krummlinigen Coordinaten und den der Einhüllenden. Die ersteren sind allerdings nur beiläufig erwähnt, aber deshalb nicht mit geringerer Deutlichkeit. „Unter Coordinaten“²⁾, sagt Leibniz, „verstehe ich nicht nur Gerade, sondern beliebige Curven, wenn nur ein Gesetz vorhanden ist, nach welchem, sofern ein bestimmter Punkt einer als Coordinate gegebenen Linie gleichfalls gegeben ist, diesem Punkte entsprechend eine Linie gezogen werden kann, welche dem anderen Systeme der als Coordinaten gewählten angehört.“ Hauptgegenstand ist aber die Einhüllende³⁾, als Ort der Durchschnittspunkte für je zwei nächste Linien⁴⁾. Sei die Gleichung einer Curve gegeben, welche nicht bloß x und y als Ordinate und Abscisse, die man gemeinschaftlich Coordinaten nennen könne, sondern auch Parameter a , b enthalte, so müsse man, um zur Berührungslinie zu gelangen, diese Gleichung differentiiren⁵⁾ und die Parameter dabei als constant⁶⁾ betrachten. Beim Uebergang von einer Curve zu einer anderen müsse man aber einen Parameter, a oder b , als differentiirbar⁷⁾ betrachten, und zwar immer nur je einen, wenn auch in der Curvengleichung mehrere Parameter vorkommen. So finde sich die Linie, welche alle Curven, jede in dem ihr entsprechenden Punkte berühre⁸⁾. Deutlicher, sollten wir meinen, spreche kein modernes Lehrbuch der Differentialrechnung sich aus.

Aus einem zweiten Aufsatze, der über Krümmungsverhältnisse, Osculation und dergleichen handelt, erwähnen wir nur einen Satz, nämlich den⁹⁾, dass von einer Evoluten andere und andere Curven sich abwickeln, je nachdem der Faden, dessen Endpunkt die Curve beschreibt, von verschiedener Länge ist. Alle diese Curven seien

¹⁾ Leibniz V, 266—269. ²⁾ *Ego sub ordinatim ductis non tantum rectas, sed et curvas lineas qualescunque accipio, modo lex habeatur, secundum quam dato lineae cuiusdam datae (tanquam ordinatricis) puncto, respondens ei puncto linea duci possit, quae una erit ex ordinatim ducendis seu ordinatim positione datis.* ³⁾ *linea concursum.* ⁴⁾ *lineae proximae.* ⁵⁾ *opus est aequationem ejus curvae differentiari.* ⁶⁾ *magnitudine constantes.* ⁷⁾ *differentiabilis.* ⁸⁾ *tangens unica infinitarum curvarum ordinatim ductarum unicuique in suo puncto respondentis occurrens.* ⁹⁾ Leibniz V, 280.

parallel, d. h. der Abstand je zweier sei überall derselbe, und die Gerade, welche zu der einen Curve senkrecht stehe, verhalte sich ebenso zu den anderen, was als allgemeinste Definition des Parallelismus zu gelten habe¹⁾.

Drittens gehört dem Jahre 1692 die Auflösung einer Aufgabe an, welche viel von sich reden machte. Vincenzo Viviani (Bd. II, S. 607) hatte unter angenommenem Namen von Florenz aus diese Aufgabe in die Welt geschickt, welche nach dem Orte ihrer Herkunft als Florentiner Aufgabe bezeichnet zu werden pflegt. Der Name, unter welchem ihr Urheber sich verbarg, lautete *autore D. Pio Lisci Pusillo geometra*, ein Anagramm von *autore postremo Galilei discipulo*, und als letzten Schüler Galilei's liebte Viviani sich zu bezeichnen. Die Aufgabe selbst bestand darin, aus einer Halbkugel (Figur 39) rings an der Grundfläche herum vier gleiche Oeffnungen herauszuberechnen, so dass die noch übrige krumme Oberfläche genau quadrirbar sei²⁾. Das Flugblatt, welches die gedruckte Aufgabe in alle Länder hinausstrug, war vom 4. April 1692 datirt, Leibnizens gleichfalls gedrucktes Antwortschreiben trägt das Datum des 28. Mai 1692. Rascher kann man die Erledigung sich kaum denken,



und wirklich war Leibnizens Auflösung die erste, welche zur Veröffentlichung kam, und dass er so schnell damit fertig wurde, verdankte er seiner Infinitesimalrechnung, die hier erstmalig zur Flächenbestimmung einer gekrümmten Oberfläche verwerthet wurde. Viviani's eigene Auflösung, welche aber die Allgemeinheit der Leibnizischen Untersuchung³⁾ nicht erreicht, ist folgende.

Durch den Kugelmittelpunkt O ist der Durchmesser BC gezogen, ebenso der Halbmesser OA senkrecht zur Grundebene $BDCO$. In der Ebene $BACO$ wird über BO und CO als Durchmesser je ein Halbkreis beschrieben, und durch jeden derselben ein grader Halbcylinder bestimmt. Diese Halbcylinder schneiden auf der vorderen Ansicht der Halbkugel die Oeffnungen BDE , CDF heraus, und ganz ähnliche Oeffnungen entstehen selbstverständlich auf der Rückseite. Der übrig bleibende Theil der Halbkugeloberfläche ist quadrirbar.

¹⁾ *quae dudum mihi fuit definitio parallelismi in genere sumti.* ²⁾ *ut his detructis superstes curva superficies tetragonismi vere geometrici sit capax.*
³⁾ Leibniz V, 270—278.

War diese Aufgabe als geistreiche geometrische Spielerei zu betrachten, so brachte Leibniz im nächstfolgenden Jahre, 1693, die Wissenschaft wieder um einen gewaltigen Schritt vorwärts, indem er das wirklich ausführte, was bisher sowohl durch ihn selbst als durch Newton brieflich nur als ausführbar bezeichnet zu werden pflegte: die Integration von Differentialgleichungen in Reihenform¹⁾. Leibniz bedient sich dazu der Methode der unbestimmten Coefficienten. Ein Beispiel bietet die Entwicklung der Sinusreihe. Sei y ein Kreisbogen vom Halbmesser a und x dessen Sinus, so nimmt Leibniz an, die Reihenentwicklung heisse $x = by + cy^3 + ey^5 + \dots$. Warum in der Reihe nur Potenzen von y mit ungraden Exponenten angenommen werden sollen, begründet Leibniz nicht weiter. Vermuthlich stand er dabei unter dem Einflusse der Thatsache, dass er die Reihe schon kannte, zu welcher er gelangen wollte, denn dass er gewusst hätte, es sei $\sin(-y) = -\sin y$ und daraus geschlossen hätte, nur Glieder mit Potenzen von ungradem Exponenten dürften vorkommen, weil nur dann die ganze Reihe das entgegengesetzte Vorzeichen annehme, wenn y in $-y$ übergehe, daran ist nicht zu denken. Nun finde, sagt Leibniz, die Differentialgleichung statt:

$$a^2 dy^2 = a^2 dx^2 + x^2 dy^2.$$

Auch ihre Ableitung schenkt sich Leibniz. Von ihrer Richtigkeit kann man sich durch Differentiation der Gleichung $\frac{x}{a} = \sin \frac{y}{a}$ überzeugen, in welcher x, y, a Längen bedeuten, als deren Einheit a gewählt wird. Die gleichviel woher bekannte Differentialgleichung differentiiert Leibniz abermals, indem er bei dieser neuen Differentiation dy als constant annimmt. So erhält er $0 = 2a^2 dx dx + 2x dx dy^2$ und $a^2 ddx + x dy^2 = 0$, beziehungsweise $x + a^2 \frac{ddx}{dy^2} = 0$. Aber die Differentiation der für x angenommenen Reihe liefert

$$\frac{dx}{dy} = b + 3cy^2 + 5ey^4 + \dots \quad \text{und} \quad \frac{ddx}{dy^2} = 2 \cdot 3cy + 4 \cdot 5ey^3 + \dots$$

Folglich muss stattfinden

$$[by + cy^3 + \dots] + a^2 [2 \cdot 3cy + 4 \cdot 5ey^3 + \dots] = 0.$$

Für b fehlt es an Mittel zur Bestimmung, und Leibniz hilft sich mit einem: man nehme an²⁾ $b = 1$. Dann ist aber

$$c = \frac{-b}{2 \cdot 3 \cdot a^2} = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot a^2}, \quad e = \frac{-c}{4 \cdot 5 \cdot a^2} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} \text{ u. s. w.,}$$

also

$$x = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^2} + \frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} - \dots$$

¹⁾ Leibniz V, 285–288. ²⁾ *assumatur*.

Das Wichtigste an diesem Aufsätze ist neben der schon hervorgehobenen thatsächlichen Ausführung des vorher nur theoretisch für ausführbar gehaltenen die hier vorgenommene abermalige Differentiation einer gegebenen Differentialgleichung. Daneben machen wir aufmerksam darauf, dass Leibniz trigonometrische Functionen differentiiren konnte, und in der Bezeichnung, in welcher Leibniz stets Meister war, auf das Ueberspringen der Coefficienten von c nach e , offenbar weil d ausschliesslich als Differentiationszeichen in Anwendung kommen sollte. In einer geometrisch ausgesprochenen Aufgabe, deren Differentialgleichung $a \frac{dz}{dy} + z - y = 0$ heisst, welche alsdann wieder integrirt wird, indem die Annahme $z = by + cy^2 + ey^3 + fy^4 + \dots$ als Ausgangspunkt dient, kommt das Wort Subtangente¹⁾ vor, welches als Huygens eigenthümlich bezeichnet wird und in der That vor Kurzem von diesem eingeführt worden war (S. 142).

Ein anderer Aufsatz von 1693 brachte wieder eine neue geometrische Aufgabe auf die wissenschaftliche Tagesordnung²⁾. Claude Perrault (1613—1688), ein vielseitig gebildeter Pariser Arzt, der als Musiker, als Mechaniker, als Architekt, als Herausgeber des Vitruvius (S. 9) bekannt ist, stellte vielen Mathematikern, zuletzt auch Leibniz, die von ihm selbst, wie er eingestand, nicht bewältigte Aufgabe, die Curve zu finden, welche ein an dem Ende B eines Fadens AB befestigtes Gewicht beschreibt, während das andere Fadenende A längs einer geraden Linie hingeführt wird. Als Beispiel benutzte Perrault dabei seine silberne an einer Kette befestigte Taschenuhr, welche er in der vorgeschriebenen Art über den Tisch zog. Leibniz erkannte im Septemberhefte 1693 der A. E. die geometrische Definition der Curve in der Eigenschaft, dass die Berührungslinie, von der Curve bis zum Durchschnitte mit einer gegebenen Geraden gemessen, einen unveränderlichen Werth habe, und er sah darin eine inverse Tangentenaufgabe. Er erkannte auch die logarithmische Natur der Curve, versagte sich aber ein weiteres Eingehen auf die Aufgabe, weil Huygens, wie aus einem Briefe desselben hervorgehe, mit Aehnlichem sich beschäftige. Es war auch an dem. Huygens fasste die Aufgabe allgemeiner und gab der erzeugten Curve den Namen *Tractoria*, weil sie als Weg eines gezogenen Punktes auftritt, während der Endpunkt des den Zug vermittelnden Fadens einen selbst vorgeschriebenen Weg durchläuft. Wir werden noch Gelegenheit haben, von den Tractorien zu reden.

¹⁾ *subtangentialis*. ²⁾ Leibniz V, 294—301. Vergl. Klügel, Mathematisches Wörterbuch V, 90—91.

Wir kommen zu einem Aufsätze von 1694: *Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione*¹⁾. Er ist die Fortsetzung jenes Aufsatzes von 1692, in welchem (S. 204) die Einhüllenden erklärt waren. Leibniz ging jetzt über die damals allein gegebene theoretische Erklärung hinaus, indem er das erste wirkliche Beispiel berechnete. Die Kreisgleichung $(x - b)^2 + y^2 = ab$ enthält den als veränderlich angesehenen Parameter b . Differentiirt man sie nach b , so wird $2b = 2x + a$ und setzt man $b = x + \frac{a}{2}$ in die Kreisgleichung ein, so verwandelt sie sich in $y^2 = a\left(x + \frac{a}{4}\right)$ d. h. in eine Parabelgleichung. Die Parabel ist also die Einhüllende jener Schaar von Kreisen.

Die hier genannten Aufsätze sind bei weitem nicht alle, welche Leibniz in der Zeit bis zum Jahre 1700 dem Drucke übergab. Es sind vielmehr nur diejenigen ausgewählt, in welchen er den Anstoss zu Betrachtungen gab, die sich als folgewichtig erwiesen.

Wir haben (S. 201) auf den Schule machenden Einfluss der Leibnizischen Arbeiten zum Voraus hingewiesen. Wir müssen diesem Einflusse nachgehen. Da bietet zuerst und von selbst die Frage sich dar: wie stellte sich Huygens zu der neuen Lehre? Er war in Paris Leibnizens Ermunterer, sein erster Berather in mathematischen Dingen gewesen. Als die Ereignisse sie körperlich trennten, blieben beide grossen Männer geistig zusammen. Nicht weniger als 61 zwischen ihnen gewechselte Briefe sind bekannt²⁾, und sie reichen bis zu Huygens Tode. Nur eine grosse Lücke von dem Jahre 1680 bis zu 1688 ist ohne solchen veröffentlichten Brief. Gerade in die Mitte dieser Zeit fällt Leibnizens Aufsatz von 1684. Zwar hatte Leibniz schon in dem letzten Briefe vom Januar 1680 dem Freunde an einem Beispiele den Nutzen seiner Methode der Tangenten oder der grössten und kleinsten Werthe zu beweisen gesucht³⁾, aber eine Antwort ist nicht erfolgt, uns wenigstens nicht bekannt.

Hat Huygens nicht antworten mögen, und hat Leibniz dieses Schweigen übel genommen, oder ist irgend Anderes Schuld an dem zeitweisen Abbruche des Briefwechsels, jedenfalls fand er statt, und erst nach acht Jahren, im Januar 1688, schrieb Leibniz neuerdings, um seinen Dank auszusprechen, dass Huygens es der Mühe werth gefunden hatte, sich mit der Aufgabe der Isochronen (S. 203) zu beschäftigen. Huygens unterliess — er sagt selbst, er wisse nicht weshalb — auch dieses Mal zu antworten, bis zum 8. Februar 1690. Dann dauerte es etwa ein halbes Jahr, bis Leibniz wieder schrieb,

¹⁾ Leibniz V, 301—306. ²⁾ Ebenda II, 11—208. ³⁾ Ebenda II, 38.

und in diesem Briefe stellte er gradezu die Anfrage, was Huygens von seiner Differential- und Integralrechnung denke?

Binnen Monatsfrist erfolgte diesmal die Antwort. Huygens gesteht zu¹⁾, er habe bisher die Aufsätze in der Leipziger Zeitschrift nicht so genau studirt, dass er in ihr Verständniss eingedrungen sei; er habe immer geglaubt, mit seinen eigenen Methoden ebensoweit zu kommen. Jetzt habe aber Leibniz durch seine Schilderung dessen, was er zu leisten im Stande sei, ihm Lust gemacht, sich mehr dem neuen Calcul zuzuwenden.

Im October hat er es gethan²⁾. Er gibt zu, die Differentialrechnung sei gut und nützlich, aber er beharrt dabei, sie sei nicht unentbehrlich. Habe er doch ohne dieselbe vielfach die gleichen Ergebnisse erzielt wie Leibniz. Gewiss, antwortet nun Leibniz im October 1690, die Zeichen dx oder dy seien nicht unentbehrlich. Huygens sei voll berechtigt, sie durch irgend welche Buchstaben zu ersetzen. Aber auf Eines wolle er doch aufmerksam machen³⁾. Würde man wohl, wenn man statt x^2 und x^3 etwa m und n schriebe, ebenso durchsichtig mit diesen letzteren Buchstaben als mit dem, wofür sie gesetzt sind, rechnen? Genau in derselben Weise verhalte es sich mit dx , mit ddx .

Diese feine Bemerkung blieb wirkungslos. Im Mai 1691 verwarthet sich Huygens⁴⁾ gegen den Calculus differentialis und wünscht, Leibniz solle ihm nicht wie an einen darin Eingeweihten schreiben. Am 1. September 1691 bezeugt er Neigung, ihn nun wirklich kennen zu lernen⁵⁾. Am 17. September 1693 nennt er sich mässig eingeweiht⁶⁾, mit Ausnahme der ddx , die er noch nicht verstehe. Ja, am 27. December 1694, in dem letzten Briefe, den Huygens überhaupt an Leibniz richtete, erklärt er noch einmal⁷⁾, die ganze Methode bleibe ihm nie gegenwärtig, wenn er eine Zeit lang aufgehört habe sich mit ihr zu beschäftigen. Wir werden den fremden Einfluss noch kennen lernen, unter welchem sich Huygens im Ganzen so abweisend verhielt. Jedenfalls hat er an der Fortbildung der Leibnizischen Lehre nicht theilgenommen.

Ganz anders stellten sich dazu die Brüder Jakob und Johann Bernoulli (S. 85). Der Leibnizische Aufsatz von 1684 hatte deren Wissbegier geradezu auf die Folter gespannt. Es ist nicht an dem, was Johann in einem nachgelassenen Abrisse des eigenen Lebens erzählt hat⁸⁾, dass beide Brüder erst 1687 durch einen Zufall mit

¹⁾ Leibniz II, 45. ²⁾ Ebenda II, 47. ³⁾ Ebenda II, 49. ⁴⁾ Ebenda II, 93. ⁵⁾ Ebenda II, 100. ⁶⁾ Ebenda II, 162. ⁷⁾ Ebenda II, 203—204. ⁸⁾ Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz II, 71—94. Die hier beigezogene Stelle S. 72.

Nun verhält sich

$$DG^2 : IG^2 = MG^2 : CG^2, \quad LH^2 : FH^2 = CG^2 : GP^2,$$

$$DG^2 \times LH^2 : IG^2 \times FH^2 = MG^2 : GP^2,$$

also

$$CG : EH = MG^2 : GP^2.$$

Bei

$$CG = a, \quad MG = b, \quad EH = y, \quad AE = x$$

ist

$$a : y = b^2 : GP^2,$$

mithin

$$GP^2 = \frac{b^2 y}{a}.$$

Daneben ist

$$LH : FH = CG : GP,$$

also

$$GP = \frac{CG \times FH}{LH} = \frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} \quad \text{und} \quad GP^2 = a^2 \frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}.$$

Die beiden Werthe von GP^2 liefern einander gleichgesetzt eben jene Differentialgleichung

$$dy\sqrt{b^2 y - a^3} = dx\sqrt{a^3}.$$

Mithin, schloss Bernoulli dann weiter, sind auch die Integrale jener Ausdrücke einander gleich¹⁾:

$$\frac{2b^2 y - 2a^3}{3b^2} \sqrt{b^2 y - a^3} = x\sqrt{a^3}.$$

Das ist das erste Vorkommen des Wortes Integral. Johann hat zwar in der erwähnten Selbstbiographie den Anspruch auf die Erfindung des Wortes erhoben, aber es fällt schwer ihm zu glauben. Jakob hat in Veröffentlichungen von 1689, von 1691, von 1692 den jüngeren Bruder bei jeder thunlichen Gelegenheit genannt, er hätte es auch 1690 gethan, wenn der damals neue Name Integral, in welchem man schliesslich keine Erfindung von irgend welcher Tragweite erkennen kann, von Jenem hergerührt hätte.

Jakobs Aufsatz schloss mit einer Gegenaufgabe: die Gestalt eines biegsamen an zwei Punkten frei aufgehängten Seiles zu finden. Die neue, oder auch nicht neue Aufgabe, denn Galilei hatte sich ihr schon wenn auch ohne Erfolg zugewandt (Bd. II, S. 639), fand verschiedene Bearbeiter. Leibniz, Huygens, Johann Bernoulli lösten sie. Johann Bernoulli, der inzwischen Basel verlassen hatte, machte mit dieser Auflösung²⁾ im Junihefte 1691 der *A. E.* den ersten ganz selbständigen Schritt in die Oeffentlichkeit, welche von nun an von beiden Brüdern durch mit bewundernswerther Schnelligkeit auf einander folgenden Untersuchungen von grösster

¹⁾ *Ergo et horum Integralia aequantur.* ²⁾ Joh. Bernoulli *Opera* I, 48.

Tragweite überrascht wurde. Der Name *catenaria*, französisch *chainette*, für die von Jakob Bernoulli verlangte Curve scheint von Leibniz herzurühren.

Unter denen, welche die Curve ermittelten, haben wir Huygens zu nennen gehabt, ein Beweis, dass hier auch mit anderen Hilfsmitteln als denen der Differentialrechnung auszukommen war. Das war bei den Segelcurven nicht mehr der Fall, mit welchen sich Jakob und Johann Bernoulli befassten, und über welche fast ein Streit zwischen beiden Brüdern hätte entstehen können. Jakob hatte, das wissen wir durch Johann, mit letzterem Briefe über die Segelcurve gewechselt. Im April 1692 veröffentlichte Johann im Journal des Sçavans von Paris (wo er sich gerade aufhielt) eine Notiz¹⁾ über die Identität der Segelcurve mit der Kettenlinie. Johann machte dabei nicht gerade einen Ausfall gegen Jakob, aber er gab doch zu verstehen, dass dieser daran verzweifelte, mit der Differentialgleichung der Segelcurve $a \cdot ds \cdot ddx = dy^3$, wo s wie später immer die Bogenlänge bedeutete, etwas anfangen zu können, während aus seiner Arbeit über die Kettenlinie jene Gleichung unschwer herauszulesen gewesen sei. Jakob gab auf diese Aeusserung fürs erste keine Antwort, und als Johann Ende 1692 nach Basel zurückkehrte, fand er bei dem Bruder das liebevollste Entgegenkommen. Wir erwähnen die Sache nur, um die wachsende Selbstschätzung Johans dem älteren Bruder und früheren Lehrer gegenüber schon jetzt zu kennzeichnen, eine Selbstschätzung, welche fast als Ueberhebung zu bezeichnen wäre, da Jakobs grosse wissenschaftliche Verdienste Johann nicht unbekannt sein konnten.

Sie waren von mannigfaltiger Natur. Ein Aufsatz im Junihefte 1691 der A. E. beschäftigte sich mit der logarithmischen Spirale²⁾, und im Maihefte 1692 kam Jakob auf eben diese Curve zurück³⁾, welche er die wunderbare Spirale, *spira mirabilis*, nannte. Er erkannte ihre Eigenschaft, durch verschiedene optische und geometrische Entstehungsarten Curven derselben Gattung hervorzubringen, und er wünschte deshalb, man solle sie dereinst auf seinem Grabsteine anbringen und ihr die Umschrift geben *Eadem mutata resurgo*, als dieselbe stehe ich verwandelt wieder auf. Dieser letztere Wunsch wurde buchstäblich erfüllt⁴⁾. Eine andere Untersuchung, mit welcher Jakob Bernoulli sich beschäftigte, war die der elastischen Curve⁵⁾. Kurz darauf erfand er die Lemniscate⁶⁾. Eine andere Arbeit galt

1) Joh. Bernoulli *Opera* I, 59. 2) Jac. Bernoulli *Opera* I, 442 sqq.
 3) Ebenda I, 491. 4) A. E. 1706, pag. 43. 5) Jac. Bernoulli *Opera* I, 576 sqq. und 639 sqq. 6) Ebenda I, 609.

der Complation conoidischer und sphäroidischer Oberflächen¹⁾, und in ihr scheint der Kunstausdruck Complation zum ersten Male gebraucht worden zu sein.

Ueber die Reihenlehre hat, wie wir uns erinnern (S. 87—92), Jakob Bernoulli sich mehrfach verbreitet. Die wichtigeren Ergebnisse, zu welchen er gelangte, sind diejenigen, zu welchen er keiner Differentialrechnung bedurfte, aber er hat auch von dieser letzteren Gebrauch gemacht und in den Endabschnitten jener Untersuchungen Quadraturen und Rectificationen mittels Reihen vollzogen.

Zu Leibniz trat Jakob Bernoulli zweimal in einen Gegensatz. Im Januarhefte 1691 der A. E. sprach er die Meinung aus²⁾, Leibniz dürfte wohl seine grundlegenden Gedanken aus Barrow haben, aber schon im Junihefte des gleichen Jahrganges³⁾ nahm er den Ausspruch wieder so weit zurück, dass er neben der Aehnlichkeit beider Auffassungen auch deren Verschiedenheit hervortreten liess und Leibniz dabei hoch über Barrow stellte.

Der zweite Gegensatz war sachlicher Natur. Leibniz hatte (S. 189) 1686 die irrige Meinung ausgesprochen, Osculation bestehe aus zwei Berührungen. Dagegen wandte sich Jakob Bernoulli im Märzheft 1692 der A. E. und widerlegte Leibniz⁴⁾. Zu dessen Ehre dürfen wir weiter berichten, dass er im Septemberhefte seinen Irrthum unumwunden eingestand und seine Dankbarkeit für die Belehrung aussprach⁵⁾. Im Juni 1694 gab dann Jakob Bernoulli⁶⁾ wieder in den A. E. die Formel für den Krümmungshalbmesser $z = ds^3 : dy \cdot ddx$, wo also im Anschlusse an Leibniz y die Abscisse und x die Ordinate bezeichnet.

Aber noch bleiben zwei grosse Arbeitsgebiete zu erwähnen, auf welchen Jakob Bernoulli seine bestverdienten Lorbeeren sich erwarb. Wir haben (S. 87) das eine beiläufig genannt, das der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Jakob Bernoulli hat ein Lehrbuch derselben, *Ars conjectandi*, in nahezu druckfertigem Zustande hinterlassen, dessen Herausgabe sein Neffe Nicolaus I Bernoulli 1713 besorgte. Aber gerade deshalb dürfen wir noch nicht darüber reden. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat am Anfange des achtzehnten Jahrhunderts, bevor die *Ars conjectandi* bekannt wurde, Bearbeiter gefunden, deren Leistungen nicht im richtigen Lichte erscheinen würden, wenn wir den Bericht über das mustergiltige Werk von Jakob Bernoulli vorausschickten. Dieser muss daher für den 17. Abschnitt aufgespart bleiben.

¹⁾ Jac. Bernoulli *Opera* II, 739 sqq. ²⁾ Ebenda I, 431. ³⁾ Ebenda I, 453. ⁴⁾ Ebenda I, 473 sqq. ⁵⁾ Leibniz V, 279—285. ⁶⁾ Jac. Bernoulli *Opera* I, 578.

Das zweite Arbeitsgebiet, welches wir meinen, ist das der Lehre von den grössten und kleinsten Werthen in einem erweiterteren Sinne, als sie bisher behandelt worden war. Hier ist aber zugleich den einschlagenden Arbeiten von Johann Bernoulli Rechnung zu tragen, und deshalb wenden wir uns diesem, dem jüngeren, vielleicht nicht eben so gründlichen, aber rascher fassenden, mit ungläublicher Leichtigkeit schaffenden Bruder zu.

Allerdings sind in den Jahren, mit welchen wir uns grade hier beschäftigen, die Veröffentlichungen Johanns nicht sehr zahlreich gewesen. Rufen wir uns ins Gedächtniss zurück, dass Johann Bernoulli im Juli 1667 geboren am Ende des Jahrhunderts erst 32 $\frac{1}{2}$ Jahre alt war, dass er die ersten 23 Jahre bis zum September 1690 in unmittelbarer Nähe und geistiger Abhängigkeit von Jakob Bernoulli zubrachte, und dass, wenn dieser auch nie versäumte, wo es anging, des jüngeren Bruders lobend zu gedenken, doch erst nach 1691 in Paris ein Feld freier, uneingeschränkter Arbeit für den jungen Gelehrten sich öffnete. Dort aber war er durch mannigfaltige Thätigkeit in Anspruch genommen. Förderte der Verkehr mit Pierre Varignon (1654—1722), der an der Redaction des Journal des Sçavans theilhaftig war, die Anfertigung wissenschaftlicher Aufzeichnungen für den Druck, so war ein anderer Verkehr von entgegengesetzter Wirkung, der mit dem Marquis de l'Hospital (S. 105). Wir wissen, dass dieser seit 1692 in Briefwechsel mit Leibniz stand. In einem Schreiben vom letzten November 1694 hat er ihm seinen mathematischen Bildungsgang auseinandergesetzt¹⁾.

Vor etwa 6 Jahren, das wäre also 1688 gewesen, sei ihm die Abhandlung von 1684 in die Hände gekommen und habe ihm so ungemein gefallen, dass er sofort sich daran machte Einiges niederzuschreiben, um jene Lehren ausführlicher darzustellen und zu beweisen. Freunde, unter Anderen Pater Malebranche, hätten die Entwürfe gesehen und zur Veröffentlichung gedrängt. Eben diese Freunde hätten dem Abbé Catelan davon erzählt, der nun, um zuvorzukommen, in aller Eile ein Büchelchen verfasste: *Science generale des lignes courbes*, in welchem Leibniz gar nicht genannt war, die ganze Methode vielmehr als eine Fortsetzung Descartes'scher Gedanken sich darstellte. Aber Catelan hatte die ganze Sache gar nicht verstanden und Schnitzer begangen, welche nun de l'Hospital in einem Briefe im Journal des Sçavans ihm vorwarf. Darüber entspann sich ein öffentlicher Streit in jener Zeitschrift, den de l'Hospital unter dem von ihm angenommenen Buchstaben G. führte, seinen wahren

¹⁾ Leibniz II, 250—252.

Namen zurückhaltend. Malebranche, fährt der Erzähler fort, habe seit lange ein kurzes von ihm verfasstes Lehrbuch der Kegelschnitte in Händen, welches er jetzt herauszugeben wünsche. Malebranche habe dazu seine, de l'Hospital's, Erlaubniss erbeten, wie nicht minder auch dazu, am Schlusse beifügen zu dürfen, was er über Differentialrechnung niedergeschrieben habe. Ist dieser Bericht vollständig wahrheitsgetreu, so war demnach de l'Hospital im Herbst 1691, als er mit Johann Bernoulli bekannt wurde, bereits im Besitze der Differentialrechnung, und sein Lehrbuch, von welchem weiter unten die Rede sein wird, war das Ergebniss eigenen Nachdenkens, wenn auch eigenen Nachdenkens über fremde Erfindungen.

Ganz anders erzählt Johann Bernoulli den Lehrgang de l'Hospital's in dem schon einmal von uns erwähnten Abrisse seines Lebens¹⁾. Johann Bernoulli will 1691 durch Pater Malebranche in Beziehung zu de l'Hospital gekommen sein. Er will ihm den Zugang zu den neuen Methoden geöffnet haben, will ihm schriftliche Aufzeichnungen darüber gegeben haben, ohne vorauszusehen, dass jener beabsichtigen könne sie eines Tages herauszugeben²⁾.

Nun ist unzweifelhaft wahr, dass in der Basler Bibliothek eine Handschrift einer Integralrechnung von Johann Bernoulli aufbewahrt wird, welche die Bemerkung trägt³⁾, sie sei in Paris zum Gebrauche durch den Marquis de l'Hospital zusammengestellt worden; es ist ferner wahr, dass de l'Hospital ein Lehrbuch der Analysis der unendlich kleinen Grössen, wie der Titel lautete, verfasste; es steht fest, dass Johann Bernoulli sich im Februar 1698 über das Erscheinen dieses Buches als eines an ihm begangenen Plagiat's brieflich gegen Leibniz beschwerte⁴⁾; dass er 1704 die Auswerthung von Quotienten, deren Divisor und Dividend zugleich verschwinden, und welche in de l'Hospital's Lehrbuche vorgetragen ist, für sich in Anspruch nahm⁵⁾, dass er endlich 1742, als er die erwähnten Vorlesungen über Integralrechnung im Drucke herausgab, in einer Fussnote⁶⁾ erklärte, die vorausgehenden Vorlesungen über Differentialrechnung unterdrückt zu haben, weil de l'Hospital sie in seine in allen Händen befindliche *Analyse des infiniments petits* aufgenommen habe.

Wenn diese lauten Beschuldigungen geeignet sind de l'Hospital in üblen Ruf zu bringen, so fehlt es doch auch nicht an Vertheidigungsgründen für denselben. Leibniz, der sonst gewohnt war, die

¹⁾ Rud. Wolf, Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz II, 74—76.

²⁾ *ne prévoyant pas le dessein qu'il aurait de les publier un jour.* ³⁾ Rud.

Wolf l. c. II, 76 Fussnote 8. ⁴⁾ Leibniz III, 480. ⁵⁾ A. E. August 1704

und Joh. Bernoulli *Opera* I, 401. ⁶⁾ Joh. Bernoulli *Opera* III, 387.

Briefe, welche er erhielt, Punkt für Punkt zu beantworten, ging über die Anklage von 1698 stillschweigend hinweg. Er wollte, kann man sagen, in einen Streit zwischen zwei wissenschaftlichen Freunden nicht hineingezogen werden. Das ist ja möglich, aber jedenfalls nahm er nicht Partei für Johann Bernoulli. Als der Artikel in den A. E. von 1704 erschien, war de l'Hospital soeben gestorben, überdies handelte es sich dabei um eine Einzelheit, welche Johann Bernoulli ganz gut de l'Hospital und anderen Franzosen um 1694, wie er es behauptet, mitgetheilt haben kann. Als die schärfste Form öffentlicher Beschuldigung liegt die Fussnote von 1742 vor. Aber damals war de l'Hospital bereits 38 Jahre, Malebranche, der ihm am ersten hätte vertheidigen können, 27 Jahre todt und begraben, wer konnte die Widerlegung übernehmen?

War es ausserdem unmöglich, dass die Analyse des *infiniments petits* auf die Abhandlung von 1684 als erste Grundlage sich stützte? Auch Jakob Bernoulli war es gelungen, ihr ohne weitere Anleitung so viel von der Differentialrechnung zu entnehmen, dass er selbstständig weiter gelangen konnte, und de l'Hospital hatte zu seiner Belehrung doch auch die Arbeiten, welche nach 1684 in den A. E. erschienen waren.

Wir bemerken weiter, dass de l'Hospital ausschliesslich eine Differentialrechnung schrieb. Auf eine Integralrechnung verzichtete er, weil, wie er in seiner Vorrede sagte, er Leibniz nicht vorgreifen wolle, der brieflicher Mittheilung zufolge eine Integralrechnung vorbereite. Wir stellen nicht in Abrede, dass Johanns Lehren bei dem Verzicht auf eine Integralrechnung auch von Einfluss gewesen sein können, dass sie der Differentialrechnung ebenfalls zu gut kamen, aber de l'Hospital äussert sich in dem gleichen Sinne. Wieder in seiner Vorrede sagte er ausdrücklich, dass er Vieles den Brüdern Bernoulli zumal dem jüngeren verdanke; er habe ihre Entdeckungen ebenso wie die Leibnizens ohne Umstände benutzt¹⁾. Wir müssten uns sehr täuschen, wenn das die Sprache eines Räubers geistigen Eigenthums wäre.

Ist die Frage, ob de l'Hospital unredlich oder nicht gehandelt habe, nicht mit voller Gewissheit zu behandeln, so haben wir persönlich doch den Eindruck, als gehe Bernoullis Anklage zu weit, als habe ihre Schroffheit nur zugenommen mit der Sicherheit, nicht widerlegt werden zu können. Man kann leider Johann Bernoulli so viele Unwahrheiten nachweisen, dass seiner Ruhmredigkeit auch eine mehr zuzutrauen ist.

¹⁾ *Je me suis servi sans façon de leurs découvertes et de celles de Mr. Leibnis (sic!).*

Wir betonen einen letzten Umstand. Wo ist die Handschrift von Bernoullis unterdrückten Vorlesungen¹⁾ über Differentialrechnung? Hat er Sorge dafür getragen, dass die Handschrift der Integralrechnung erhalten blieb, trotzdem sie unter seinem Namen gedruckt ist, so hätte er doppelt für die Erhaltung der ihm entwendeten Differentialrechnung sorgen müssen, wenn sie wirklich vorhanden war.

Gesichert bleibt für uns als einziges Ergebniss unserer Untersuchung, dass im Verkehre mit de l'Hospital in Paris jene Vorlesungen über Integralrechnung, oder wie man sie nun nennen will, entstanden, welche 1742 noch zu Lebzeiten Johann Bernoullis gedruckt wurden²⁾, und deren Niederschrift einen guten Theil der Zeit des jungen Lehrers in Anspruch genommen haben muss. *Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque*, mathematische Vorlesungen über die Methode der Integrale und Anderes ist die Ueberschrift. Eine Integralrechnung in dem Sinne, welcher heute mit dem Worte verbunden zu werden pflegt, ist es nicht. Von Integrationen selbst sind nur wenige vorhanden, welche ihren Ursprung in der Formel

$$ax^p dx = d\left(\frac{a}{p+1} x^{p+1}\right)$$

besitzen. Ihr entnimmt Johann Bernoulli³⁾ auch das Integral von

$$\frac{dx}{x} \text{ als } \frac{1}{0} x^0 = \infty \cdot 1 = \infty.$$

Das Integral von $\frac{a dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$ kannte er so wenig wie das von $\frac{x dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$, keines von beiden Integralen besitzt man⁴⁾. Das Integral ihrer Summe $\frac{a dx + x dx}{\sqrt{2ax+x^2}}$ kennt man dagegen, es ist $\sqrt{2ax+x^2}$.

Manchmal helfen Substitutionen, zu deren Auffindung ähnliche Methoden führen, wie sie bei der Auflösung von Diophantischen Gleichungen im Gebrauch seien. Will man z. B. das Integral von $\frac{a^3 dx}{x\sqrt{ax-x^2}}$ sich verschaffen⁵⁾, so befreit man sich von der Irrationalität des Ausdruckes durch $ax - x^2 = \frac{a^2 x^2}{m^2}$. Dann ist nämlich

$$x = \frac{am^2}{a^2 + m^2}, \quad \sqrt{ax - x^2} = \frac{ax}{m} = \frac{a^2 m}{a^2 + m^2},$$

$$dx = \frac{2a^3 m dm}{(a^2 + m^2)^2}, \quad \frac{a^3 dx}{x\sqrt{ax - a^2}} = \frac{2a^3 dm}{m^2},$$

¹⁾ *Lectiones in calculum differentialem quae praecesserunt, quasque (autor) supprimendas duxit.* ²⁾ Joh. Bernoulli *Opera* III, 385—558. ³⁾ Ebenda III, 388 lin. 12 v. u. ⁴⁾ Ebenda III, 389: *neutrius habetur integrale.* ⁵⁾ Ebenda III, 393.

und dessen Integral ist $-\frac{2a^3}{m}$ oder $2a^2\sqrt{\frac{a-x}{x}}$. Das Minuszeichen ist bei der Rückeinsetzung der Quadratwurzel verloren gegangen.

Bei der Integration von Differentialgleichungen ist Johann Bernoulli, dadurch, dass er über das Integral von $\frac{dx}{x}$ irriger Meinung war, zu sehr unbequemen Umwegen gezwungen. Er will z. B.

$$axdy - ydx = 0$$

integriren¹⁾. Er multipliziert die Gleichung mit $\frac{y^{a-1}}{x^2}$ und erhält so

$$\frac{ay^{a-1}}{x} dy - \frac{y^a}{x^2} dx = 0,$$

welches das Differential von $\frac{y^a}{x} = b$ ist, wo b irgend eine Constante²⁾ bedeutet. Noch umständlicher wird die Integration³⁾ von

$$dx : dy = \frac{3x^3 - 2axy}{3x^2 - ay} : y$$

oder

$$3x^3dy - 2axydy = 3x^2y dx - ay^2dx.$$

Bernoulli setzt

$$y = mx, \quad dy = m dx + x dm$$

und erhält:

$$3x^2dm - 2amxdm = am^2dx.$$

Er setzt weiter

$$x = mn, \quad dx = m dn + ndm$$

und erhält

$$3n^2dm - 3andm = amdn.$$

Aber noch immer kann er die Trennung der Veränderlichen nicht vollziehen, denn $\frac{3dm}{am} = \frac{dn}{n^2 - an}$ wäre für ihn genau ebenso räthselhaft wie die ursprüngliche Differentialgleichung. Erst muss er oben $n = \frac{a^2}{r}$, $dn = -\frac{a^2 dr}{r^2}$ einsetzen, um $3adm - 3rdm = -mdr$ zu erhalten, dann $r - a = t$ mit $dr = dt$, damit die Gleichung in $3tdm = mdt$ übergehe, und jetzt erst liefert die Multiplikation mit $\frac{m^2}{t^2}$ ihm die Gleichung

$$\frac{3m^2dm}{t} - \frac{m^3dt}{t^2} = 0 \quad \text{oder} \quad d\left(\frac{m^3}{t}\right) = 0,$$

welche er zu $m^3 = bt$ integriren kann. Setzt er rückwärts die Werthe

$$t = r - a, \quad r = \frac{a^2}{n}, \quad n = \frac{x}{m}, \quad m = \frac{y}{x}$$

ein, so kommt endlich $y^3 + bax^3 = a^2byx$ heraus. Er wünscht aber

¹⁾ Joh. Bernoulli *Opera* III, 416. ²⁾ = *quantitati constanti b.* ³⁾ Ebenda III, 422-423.

eine in allen Gliedern gleiche Dimension¹⁾ und wählt deshalb die willkürliche Constante $b = \frac{1}{a}$. Dann ist die Gleichung $y^3 + x^3 = axy$ gefunden. Wir haben den ganzen Gang der Rechnung wiedergegeben, damit der Leser um so bereitwilliger uns die Ausführung anderer Beispiele erlasse, um so mehr solcher, in welchen auch zweite Differentiale vorkommen.

Johann Bernoulli geht dann auf die Lehre vom Krümmungshalbmesser und von den Evoluten ein und zeigt den engen Zusammenhang dieser Lehre mit der von der Rectification²⁾, der daraus hervorgehe, dass $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, welches nichts anderes als ds sei, in der Gleichung für den Krümmungshalbmesser erscheine. Auch alle die halb der Geometrie halb der Physik angehörenden Aufgaben der damaligen Zeit: die Brennlinien, die Segelcurve, die Kettenlinie, letztere auch unter der Annahme, dass die Kette an verschiedenen Stellen verschieden dick sei u. s. w., finden die ausführlichste Behandlung und machen die Zusammenstellung noch heute lesenswerth, wenn wir auch wiederholen dürfen, eine Integralrechnung ist sie nicht.

Am Schlusse des Jahres 1692 kehrte Johann Bernoulli nach Basel zurück, um dort seine medicinischen Studien zu beendigen, aber der Mathematik war er deshalb doch nicht ungetreu. Im Journal des Sçavans wie in den A. E. erschienen kleinere und grössere Aufsätze, die Doctordissertation über die Muskelbewegung³⁾ brachte Anwendungen der Differentialrechnung auf anatomisch-physiologische Fragen, seit December 1693 eröffnete sich ein Briefwechsel mit Leibniz, der voll der bedeutsamsten Mittheilungen beider Gelehrten ist. Johann Bernoulli war noch selbst dafür besorgt, dass dieser Briefwechsel 1745 gedruckt wurde, und nur persönliche Bemerkungen, vertraulich ausgesprochene, unbewiesene, mitunter wohl auch unabweisbare Anklagen gegen Diesen und Jenen blieben weg⁴⁾.

Von den Veröffentlichungen erwähnen wir einen kurzen Aufsatz über die Construction der Differentialgleichungen ersten Grades⁵⁾ — *primi gradus*, gemeint sind aber die Differentialgleichungen erster Ordnung — im Novemberhefte 1694 der A. E. Dort kommt der Ausdruck der Trennung der Veränderlichen⁶⁾ vor, welcher der Wissenschaft verblieben ist, den Johann Bernoulli auch schon am 9. Mai 1694 in einem Briefe an Leibniz gebraucht hatte⁷⁾. In

¹⁾ *ut aequatio ubique aequales dimensiones habeat.* ²⁾ Joh. Bernoulli *Opera* III, 444. ³⁾ Ebenda I, 93—118. ⁴⁾ Der volle Inhalt wurde aus Leibnizens brieflichem Nachlasse durch C. J. Gerhardt 1855 wiederhergestellt. ⁵⁾ Joh. Bernoulli *Opera* I, 123—125. ⁶⁾ *separatio indeterminatarum.* ⁷⁾ Leibniz III, 139.

demselben Jahrgange der A. E. findet sich *Additamentum effectiois quadraturarum et rectificationum per seriem quamdam generalissimam*¹⁾, welche anschliessend an die Leibnizische Integration mittels Reihen von 1693 (S. 206) eine Reihenentwicklung ganz anderer Art und durchaus neuer Entstehungsweise liefert. Sei ndz das Differential einer Fläche, wobei n irgendwie aus Veränderlichen und Constanten zusammengesetzt ist. Die Identität

$$\begin{aligned} ndz = ndz + zdn - zdn - \frac{z^2 d^2 n}{1 \cdot 2 \cdot dz} + \frac{z^2 d^2 n}{1 \cdot 2 \cdot dz} \\ + \frac{z^3 d^3 n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dz^2} - \frac{z^3 d^3 n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dz^2} \end{aligned}$$

liegt auf der Hand und ebenso deren Fortsetzbarkeit durch beliebig viele Paare von gleichlautenden positiven und negativen Gliedern, in welchen bald das positive bald das negative Glied voraussteht. Bernoulli bedient sich allerdings noch nicht der Zahlenzeiger für die höheren Differentialien, sondern des wiederholt geschriebenen Buchstaben d , der bis zu viermaliger Schreibung (in $ddddz$) in dem Aufsatze vorkommt. Sind die Gliederpaare so geordnet, wie wir es erklärten, so finden sich in der den Ausgangspunkt bildenden Identität rechts vom Gleichheitszeichen erst zwei positive, dann zwei negative Glieder, dann wieder zwei positive u. s. w. in gleichmässiger Wiederkehr des Zeichenwechsels. Jedes dieser Gliederpaare, die aber augenscheinlich von dem, was oben Gliederpaar genannt wurde, verschieden sind, bildet ein vollständiges Differential

$$\frac{z^\lambda d^\lambda n}{1 \cdot 2 \dots \lambda dz^{\lambda-1}} + \frac{z^{\lambda+1} d^{\lambda+1} n}{1 \cdot 2 \dots \lambda(\lambda+1) dz^\lambda} = d \left(\frac{z^{\lambda+1} d^\lambda n}{1 \cdot 2 \dots \lambda(\lambda+1) dz^\lambda} \right).$$

Man kann daher die unendlich gedachte Reihe integrieren und erhält:

$$\text{Integr. } ndz = nz - \frac{z^2}{1 \cdot 2} \frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2 n}{dz^2} - \dots$$

Es ist fast überflüssig darauf hinzuweisen, dass Johann Bernoulli hier gleichwie in den früheren Aufsätzen ein eigentliches Integralzeichen noch entbehrt, und, was allerdings von ungleich höherer Wichtigkeit ist, dass er die Reihe ohne jedes Bedenken ins Unendliche fortsetzte. Ob sie gegen einen bestimmten Werth convergire, macht ihm genau so wenig Sorgen als der Umstand, dass wegen der vorerwähnten Verschiedenheit der die Identität fortsetzenden und der bei der Integration zusammengefassten Gliederpaare stets ein unpaares Glied überschiesst, das bei der Integration unberücksichtigt blieb. Etwas hat aber Johann Bernoulli seit seiner Pariser Zeit hinzugelernt, vielleicht durch einen Brief von Leibniz²⁾ vom Juni 1694, das Diffe-

¹⁾ Joh. Bernoulli *Opera* I, 125–128. ²⁾ Leibniz III, 141.

rential eines Logarithmus. Ist, sagt er, um ein Beispiel seiner Methode zu bilden, $y = a \log(a + z) = a \log r$, so ist $dy = \frac{adr}{r}$ oder wegen $dr = dz$ auch $dy = \frac{adz}{a+z}$. Hier ist demnach

$$n = \frac{a}{a+z} \text{ und } a \log(a+z) = \frac{az}{a+z} + \frac{az^2}{2(a+z)^2} + \frac{az^3}{3(a+z)^3} + \dots$$

eine ganz andere Entwicklung als diejenige logarithmische Reihe, welche man bis dahin kannte.

Die Mängel in der Bezeichnung, welche wir erwähnten, verschwanden 1695 und 1696. Im letzteren Jahre einigten sich Leibniz und Johann Bernoulli brieflich¹⁾ über die Benutzung des Zeichens \int . Der Brief Leibnizens vom October 1695 aber, in welchem die Zahlenzeiger höherer Differentiation vorkommen²⁾, ist allzuwichtig, als dass wir nicht einen Augenblick bei ihm verweilen.

Die Differenzen, sagt dort Leibniz, sind den Potenzen vergleichbar³⁾. Wie

$$(x+y)^m = x^m y^0 + \frac{m}{1} x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} y^2 + \dots,$$

so, kann man schliessen, wird auch

$$d^m(xy) = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x \cdot d^1 y + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-2} x \cdot d^2 y + \dots$$

sein. Man kann auch das Differentiationszeichen in das der Integration verwandeln und die Gleichung $d^m = \int^n$ aufstellen, wenn $n = -m$ ist. So entsteht

$$\int^n d(z y) = \int^{n-1} z d^0 y - \frac{n}{1} \int^n z d^1 y + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \int^{n+1} z d^2 y - \dots$$

Die Uebereinstimmung zwischen der Potenzirung einer Summe und der Differenzirung eines Productes hat Leibniz erst mehrere Jahre später in den Veröffentlichungen der Berliner Akademie⁴⁾ dem Drucke übergeben, den Vergleich der Integration mit einer negativ indicirten Differentiation liess er aber weg. In dem Briefwechsel allein blieben auch Gedanken über Differentiation mit gebrochenem Index erhalten, welche Leibniz hegte⁵⁾.

Und wieder in dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli wurde von ersterem der Keim eines Verfahrens niedergelegt, welches eines der bedeutsamsten der ganzen Analysis geworden ist. Leibniz hatte 1692 die Möglichkeit eingesehen, eine Curvengleichung nach einem in ihr auftretenden Parameter zu differenziren (S. 204).

¹⁾ Leibniz III, 262 und 272. ²⁾ Ebenda III, 221. ³⁾ *Potentiis analogae sunt differentiae.* ⁴⁾ Leibniz V, 377—382. ⁵⁾ Ebenda III, 228.

Er hatte 1694 an einem bestimmten Beispiele die Ausführung des Verfahrens gezeigt (S. 208). Im August 1697 ging er den grossen Schritt weiter, auch dann nach einem Parameter zu differenziren¹⁾, wenn derselbe innerhalb eines Integrals vorkommt. *Differentiare de curva in curvam*, Differentialübergang von einer Curve zur anderen nannten das die beiden Freunde, und Johann Bernoulli weiss seiner Bewunderung keinen besseren Ausdruck zu geben, als indem er sich entrüstet, dass der Geist Leibnizens ihn höher geführt habe, als er vorzudringen im Stande gewesen sei.

Was die Darstellung einzelner Integrale betrifft, so war Leibniz seit December 1696 im Besitze der Formel²⁾

$$\frac{1+x}{x} (\log(1+x))^2 = 2 \int \frac{\log(1+x)}{x} dx - \int \frac{(\log(1+x))^2}{x^2} dx,$$

welche zwar schon aus der Regel für die Differentiation eines Produktes hervorgeht, aber immerhin hergeleitet werden musste.

Man glaube indessen ja nicht, in dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli sei ersterer immer der Geber gewesen. Im Juni 1695 erwähnt Johann Bernoulli³⁾ einen Gegenstand, über den er jüngst⁴⁾ mit de l'Hospital Briefe gewechselt habe. Curven mit Rückkehrpunkten⁵⁾ seien vorhanden, wie die semicubische Parabel, wo ein grösster oder kleinster Werth eintrete, während das Differential unendlich gross werde. In jenem Briefwechsel seien sie auch zur Ueberzeugung gekommen, dass es Wendepunkte von Curven gebe, in welchen der Krümmungshalbmesser nicht ∞ sondern 0 sei; einen dritten endlichen Werth für den Krümmungshalbmesser in einem Wendepunkte gebe es allerdings nicht. Wir kommen hierauf im nächsten Kapitel zurück.

Im August 1697 spricht Johann Bernoulli von der Aufgabe⁶⁾, eine Curve zu finden, welche gegebene Curven unter gegebenem, unveränderlichem oder nach einem bestimmten Gesetze veränderlichem Winkel schneide. Ein Jahr später⁷⁾ gibt er der gesuchten Curve den Namen der Trajectorie, und damit ist der Infinitesimalgeometrie ein neues schwieriges Kapitel eingefügt, an dessen Bearbeitung zahlreiche Kräfte ersten Ranges sich versuchten.

Noch bedeutsamer ist ein Gegenstand, den Johann Bernoulli bereits 1694 in den Briefwechsel warf⁸⁾. Er meinte, man könne von percurrenten Curven sprechen. Der Gipfel der Geometrie, sagt er, wäre es, wenn die transcendenten Curven auf percurrente zurück-

¹⁾ Leibniz III, 453 und 462. ²⁾ Ebenda III, 351. ³⁾ Ebenda III, 185.

⁴⁾ *non ita pridem*. ⁵⁾ *points de rebroussement*. ⁶⁾ Leibniz III, 464. ⁷⁾ Ebenda III, 539 und Joh. Bernoulli *Opera* I, 266. ⁸⁾ Leibniz III, 139, 201, 323 und öfter.

geführt werden könnten, d. h. auf solche, deren Gleichungen Glieder in sich schliessen, welche zu unbestimmten Abmessungen aufsteigen¹⁾. Der Name der percurrenten Grössen ist freilich aus der Mathematik verschwunden; Johann Bernoulli selbst hat ihn gegen den von Leibniz vorgeschlagenen Namen der Exponentialgrössen vertauscht, aber er hat im Märzheft 1697 der A. E. die Grundzüge der Rechnung mit den Exponentialgrössen für alle Zeiten festgestellt²⁾. In der dort mitgetheilten Formel

$$d(m^n) = m^n \log m \, dn + nm^{n-1} dm$$

besass Bernoulli allerdings einen Vorgänger in Leibniz, der dieselbe schon im Jahrgange 1695 der A. E. abgeleitet hatte³⁾. Ein wesentliches Versinnlichungsmittel bildet bei allen diesen Untersuchungen die logarithmische Curve von der Gleichung $y = \log x$. Wer diese zuerst betrachtete, wissen wir nicht zu sagen. Huygens gab ihr in seiner Abhandlung *De la cause de la pésanteur* den Namen, fügte aber hinzu, die Curve sei schon von Anderen beachtet worden.

Wir würden nicht einen Theil eines Kapitels, wir würden mehrere Kapitel verwenden müssen, wollten wir Alles angeben, was in Johann Bernoullis frühen Aufsätzen oder in seinem Briefwechsel mit Leibniz an Wissenswürdigem enthalten ist. Wir erwähnen aus der Fülle hier nur noch einen einzigen im Märzhefte 1697 der A. E. mitenthaltenen Aufsatz⁴⁾, in welchem unter anderem eine Differentialgleichung integrirt ist, welche nicht selten die Bernoullische Differentialgleichung genannt wird. Jakob Bernoulli hatte sie im Decemberhefte 1695 der A. E. in der Gestalt

$$ady = ypdx + by^n qdx$$

zur Bearbeitung vorgelegt und dabei bestimmt, a und b sollten Constante bedeuten, p und q irgendwie von x abhängen ohne y zu enthalten. Johann Bernoulli trat an die Aufgabe so heran, dass er y als Produkt zweier Variablen auffasste, d. h.

$$y = mz, \quad dy = m \, dz + z \, dm$$

setzte. So erhielt er

$$amdz + azdm = mzpdx + bm^n z^n qdx.$$

Nun waren aber m und z beide unbekannt, und es schien gestattet zur Bestimmung einer dieser Grössen eine Bedingungsgleichung einzuführen. Johann Bernoulli wählte dazu $amdz = mzpdx$, welche auch $\frac{adz}{z} = pdx$ geschrieben werden konnte, und aus ihr ergibt sich

¹⁾ *terminis ad dimensiones indeterminatas ascendentes.* ²⁾ Joh. Bernoulli *Opera* I, 179—187. ³⁾ Leibniz V, 325. ⁴⁾ Joh. Bernoulli *Opera* I, 175—176.

z in seiner Abhängigkeit von x , etwa $z = \xi$. Nun blieb von der früher viergliedrigen Differentialgleichung nur noch

$$azdm = bm^n z^n q dx \text{ oder } \frac{adm}{m^n} = bz^{n-1} q dx,$$

und hieraus ergibt sich m in seiner Abhängigkeit von x , etwa $m = X$, worauf $y = \xi X$ sich anschliesst. Es ist sehr gleichgiltig, ob Johann Bernoulli diese Integration wirklich, wie er behauptet, in einer halben Viertelstunde gefunden hat oder nicht. Jedenfalls hat er die Methode dabei erfunden, eine Variable durch das Produkt zweier Variablen zu ersetzen, welche bei der Behandlung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung beibehalten worden ist.

Wir verlassen hiermit die Arbeiten, durch welche noch im XVII. Jahrh. die beiden Brüder Bernoulli sich auszeichneten ohne in Zwiespalt mit einander zu gerathen. Die Geschichte ihres grossen Streites fordert ein besonderes Verweilen.

92. Kapitel.

Streit der Brüder Bernoulli. De l'Hospital. Newtons Briefe von 1693. Leibnizens Gegner.

Wir erinnern uns (S. 85), dass Johann Bernoulli 1695 einem Rufe nach Groeningen Folge leistete. Es war, als wenn diese Berufung eine Feindschaft entfesselt hätte, deren wahre Gründe kaum zu ermitteln sein dürften, deren Folge aber eine Reihe von öffentlich ausgetragenen Streitigkeiten bildete, deren Erzählung man am liebsten auswicke, wenn nicht neben der hässlichen Form ein hochbedeutender Inhalt ausführlichen Bericht forderte¹⁾.

Die Eröffnung der Feindseligkeiten verschuldete Jakob Bernoulli durch einen Aufsatz im Decemberhefte 1695 der A. E., in welchem sich Johann an mehreren Stellen zum mindesten gereizt fühlen konnte²⁾, denselben Aufsatz, in welchem am Schlusse die Bernoullische Differentialgleichung aufgegeben war, von deren Integration wir gesprochen haben. Zunächst ist die Rede vom Krümmungshalbmesser, von welchem ausser Jakob Bernoulli fast ausschliesslich solche Leute etwas wüssten, denen der Bruder dieses mitgetheilt habe³⁾. Nach diesem ersten Stiche kommt ein zweiter empfindlicherer, es war die Antwort auf Johanns 1692 an den Tag gelegte Ueberhebung (S. 212).

¹⁾ Giesel, Geschichte der Variationsrechnung I. Theil (Torgauer Gymnasialprogramm für 1857). ²⁾ Jac. Bernoulli *Opera* I, 639—663. ³⁾ *quibuscum frater nostra communicaverat.*