

www.e-rara.ch

**Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate
gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti**

Euler, Leonhard

Lausannae & Genevae, 1744

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 4999

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-1490>

Caput IV. De usu methodi hactenus traditae in resolutione varii generis quaestionum.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelnformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

functione ipsarum x, y, p, q, r , &c. sive determinata sive indeterminata. Functio autem determinata nobis est, quæ, si alicubi dentur valores litterarum x, y, p, q, r &c. ipsa assignari potest, sive algebraice sive transcendenter. Functio autem indeterminata est, quæ per datos istarum litterarum valores, quos uno in loco obtinent, assignari nequit, sed omnes valores præcedentes simul involvit, quemadmodum hoc evenit, si signa integralia occurrant. In Capite igitur secundo Methodum tradidimus omnia Problemata resolvendi, in quibus Z est functio determinata; in tertio vero hoc Capite persecuti sumus eas formulas, in quibus Z , vel ipsa est functio indefinita, vel talium unam pluresve involvit; simulque Methodum exhibuimus pro iis casibus, quibus functio illa indefinita nequidem per formulas integrales representari potest, verum resolutionem æquationis differentialis requirit. Nunc igitur eos casus evolvamus, in quibus expressio, quæ maximum minimumve esse debet, non simplex est formula integralis, uti hætenus posuimus, sed ex pluribus ejusmodi formulis utcumque composita: atque simul Methodum aperiemus plura alia Problemata, quæ non ad coordinatas orthogonales spectant, expedite resolvendi.

CAPUT IV.

*De Usu Methodi hætenus traditæ in resolutione
varii generis questionum.*

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

I. *Invenire æquationem inter binas variables x & y , ita ut, pro dato ipsius x valore, puta posito $x = a$, formula $\int Z dx$ obtineat maximum minimumve valorem, existente Z functione ipsarum x, y, p, q, r , &c. sive determinata sive indeterminata.*

S O L U T I O.

Ex quacunque consideratione variables x & y sint natæ, eæ
Euleri *De Max. & Min.* R semper

femper tanquam coordinatæ orthogonales cujuscumque curvæ considerari possunt: atque hanc ob rem quæstio proposita huc revocatur, ut determinetur curva abscissam habens $= x$ & applicatam $= y$, in qua valor $\int Z dx$, si ad abscissam datæ magnitudinis, puta $x = a$, applicetur, fiat omnium maximus vel minimus. Quod si autem Problema hoc modo proponatur, tum ejus solutio in præcedentibus Capitibus satis superque est tradita. Quamobrem formulæ propositæ $\int Z dx$, secundum Methodos ante expositas, capi oportet valorem differentialem, qui datæ abscissæ $x = a$ conveniat, isque nihilo æqualis positus dabit æquationem inter x & y desideratam, quæ pro data abscissâ $x = a$, producet formulæ $\int Z dx$ maximum minimumve valorem. Q. E. I.

COROLL. I.

2. Methodus ergo ante tradita multo latius patet; quam ad æquationes inter coordinatas curvarum inveniendas, ut quæpiam expressio $\int Z dx$ fiat maximum minimumve. Extenditur scilicet ad binas quascunque variables, siue eæ ad curvam aliquam pertineant quomodocunque, siue in sola analytica abstractione versentur.

COROLL. II.

3. Inter binas autem variables propositas discrimen ingens intercedit, eo quod proposita formula $\int Z dx$ pro determinato quodam alterius variabilis valore maximum minimumve obtinere debeat. Istam ergo variabilem constantem littera x , alteram vero littera y denotari convenit.

COROLL. III.

4. Litteris igitur x & y debito modo binis quantitatibus variabilibus impositis, erit $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$,
 $s =$

$s = \frac{dr}{dx}$ &c. His scilicet litteris differentialia cujuscunque gradus, quæ forte in maximi minimive formula insint, tolli poterunt, ita ut Z futura sit functio litterarum $x, y, p, q, r,$ &c.

C O R O L L. IV.

5. Cum ergo maximi minimive formula ad talem formam $\int Z dx$ fuerit reducta, in qua Z sit functio ipsarum $x, y, p, q, r,$ &c. sive definita sive indefinita, tum ex superioribus præceptis formulæ $\int Z dx$ valor differentialis, respondens toti abscissæ propositæ $x = a$, debet investigari, qui nihilo æqualis positus præbebit æquationem inter x & y quæsitam.

C O R O L L. V.

6. Si Z est functio definita ipsarum $x, y, p, q, r,$ &c. tum valor differentialis formulæ $\int Z dx$ non pendet a præscripto abscissæ valore $x = a$; & hanc ob rem æquatio inter x & y inventa pro qualibet abscissâ præbebit maximum vel minimum formulæ $\int Z dx$.

S C H O L I O N I.

7. Quia in hoc negotio valores differentiales, quos ante pro omni genere formularum sparsim eruimus, in promptu esse oportet, eos hic conjunctim in conspectum producemus, ut sit unde, quovis casu oblato, valores differentiales, quibus opus fuerit, conquiri ac depromi queant. Exhibebimus igitur formulæ $\int Z dx$ pro varia functionis Z indole valorem differentialem, qui perpetuo determinatæ variabilis x quantitati, puta $x = a$, respondeat.

I.

Maximi minimive formula

$$dZ = M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \&c.$$

Valor differentialis erit

$$n. dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx^2} - \frac{d^2R}{dx^3} + \frac{d^3S}{dx^4} - \&c. \right)$$

qui valor differentialis pro omni variabilis x magnitudine æque valet.

II.

Maximi minimive formula

$$dZ = L d\pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + \&c.$$

$$\&\pi = \int [Z] dx$$

existente

$$d[Z] = [M] dx + [N] dy + [P] dp + [Q] dq + [R] dr + \&c.$$

Jam posito post integrationem $x = a$, sit $\int L dx = H$, ponaturque $H - \int L dx = V$,

Valor differentialis erit

$$n. dx \left(N + [N]V - \frac{d.(P + [P]V)}{dx} + \frac{d.(Q + [Q]V)}{dx^2} - \frac{d^2.(R + [R]V)}{dx^3} + \frac{d^3.(S + [S]V)}{dx^4} - \&c. \right)$$

III.

Maximi minimive formula

$$dZ = L d\pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + \&c.$$

$$\&\pi = \int [Z] dx$$

$$d[Z] = [L] d\pi + [M] dx + [N] dy + [P] dp + [Q] dq + \&c.$$

$$\&\pi = \int [z] dx$$

$$d[z] = [m] dx + [n] dy + [p] dp + [q] dq + [r] dr + \&c.$$

Sit iterum, posito post integrationem $x = a$ ut ante, $\int L dx = H$

$= H$, ac ponatur $H - \int L dx = V$. Jam integretur $\int [L] V dx$,
 fitque integrale, eo casu quo $x = a$ ponitur, $= G$, ac po-
 natur $G - \int [L] V dx = [V] = G - \int [L] dx (H - \int L dx)$;
 His positis, Valor differentialis erit

$$ny. dx (N + [N]V + [n][V] - \frac{d.(P + [P]V + [p][V])}{dx} \\
 + \frac{dd.(Q + [Q]V + [q][V])}{dx^2} - \frac{d^3.(R + [R]V + [r][V])}{dx^3} \\
 + \frac{d^4.(S + [S]V + [s][V])}{dx^4} - \&c.)$$

unde simul lex progressionis patet, si adhuc plura integralia
 involvantur.

I V.

Maximi minimive formula

$$dZ = L d\pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + \&c. \\
 \& \pi = \int Z dx.$$

Abcat, posito $x = a$, hæc expressio $e^{\int L dx}$ in H , denotante
 e numerum cujus logarithmus est $= 1$, fitque $H e^{-\int L dx} = V$:

Valor differentialis erit

$$ny. dx (NV - \frac{d.PV}{dx} + \frac{dd.QV}{dx^2} - \frac{d^3.RV}{dx^3} + \frac{d^4.SV}{dx^4} - \&c.)$$

V.

Maximi minimive formula

$$dZ = L d\pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + R dr + \&c. \\
 \& \pi = \int [Z] dx.$$

$$d[Z] = [L]d\pi + [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \&c.$$

Sit, si ponatur $x = a$, post integrationem

$$\int e^{\int [L] dx} L dx = H$$

atque ponatur

$$e^{-\int [L] dx} (H - \int e^{\int [L] dx} L dx) = V$$

Valor differentialis erit

$$m. dx (N + [N] V) - \frac{d. (P + [P] V)}{dx} + \frac{d d. (Q + [Q] V)}{dx^2} \\ - \frac{d^3. (R + [R] V)}{dx^3} + \frac{d^4. (S + [S] V)}{dx^4} - \&c.)$$

In his igitur quinque casibus continentur omnes regulæ, quas in Capitibus præcedentibus invenimus. Iique tam late patent, ut omnes casus qui quidem occurrere queant, in iis vel actu contineantur, vel saltem per eos non difficulter resolvi possint. Iis igitur hîc in compendium redactis, eorum usum monstrabimus, in resolvendis quæstionibus, in quibus x & y non denotant coordinatas orthogonales.

E X E M P L U M I.

Fig. 7. 8. Ex dato centro C ductis radiis CA , CM , invenire lineam AM , que inter omnes alias lineas intra angulum ACM contentas sit brevissima.

Patet quidem hanc lineam quæsitam esse rectam: interim tamen hanc quæstionem secundum præcepta data resolvi conveniet, ut consensus Methodi cum veritate luculentius perspiciatur. Cum igitur longitudo lineæ AM pro dato angulo ACM debeat esse minima; ponamus angulum hunc ACM esse $= x$; seu centro C , radio $CB = 1$, describamus circulum, sitque arcus $BS = x$. Tum fit radius CM altera variabilis $= y$, æquatione enim inter has variables x & y inventa, innotescet natura lineæ quæsitæ AM . Jam autem ducto radio proximo Cm erit $Ss = dx$, & $mn = dy$, sumto $Cn = CM$: ob triangula vero similia CSs & CMn erit $1: dx = CM[y]: Mn[y dx]$. Ex his itaque erit $Mm = \sqrt{(dy^2 + y^2 dx^2)}$; & quia perpetuo ponimus $dy = p dx$, erit $Mm = dx \sqrt{(yy + pp)}$; unde lineæ AM longitudo erit $= \int dx \sqrt{(yy + pp)}$, quæ debet esse minima pro dato ipsius x valore, puta $x = a$. At quia hæc formula

mula ad casum primum pertinet, linea satisfaciens erit pro quovis valore ipsius x minima. Cum igitur sit $Z = \sqrt{yy + pp}$, erit $dZ = \frac{y dy}{\sqrt{yy + pp}} + \frac{p dp}{\sqrt{yy + pp}}$, & in casu primo fiet $M = 0$, $N = \frac{y}{\sqrt{yy + pp}}$, $P = \frac{p}{\sqrt{yy + pp}}$, $Q = 0$, $R = 0$, &c. ideoque $dZ = Ndy + Pdp$. Habebitur ergo iste valor differentialis $n.v. dx(N - \frac{dP}{dx})$, indeque pro solutione ista æquatio, $0 = N - \frac{dP}{dx}$: quæ, multiplicata per $pdx = dy$, dat $Ndy = p dP$; quo in æquatione $dZ = Ndy + Pdp$ substituto, prodibit $dZ = Pdp + p dP$, & integrando $Z + C = Pp$, seu $C + \sqrt{yy + pp} = \frac{pp}{\sqrt{yy + pp}}$. Quocirca erit $\frac{yy}{\sqrt{yy + pp}} = Const. = b$. At est $Mm [dx \sqrt{yy + pp}]$: $Mn [y dx] = MC [y] : \frac{yy}{\sqrt{yy + pp}}$; quæ quarta proportionalis præbet perpendiculum CP , quod ex C in tangentem lineæ quæsitæ MP demittitur. Cum igitur hoc perpendiculum CP sit constans, intelligitur lineam quæsitam esse rectam: & quia, in æquatione inventa prima $Ndx = dP$, duæ insunt potentia constans arbitrarie, conditio hæc quæstioni est addenda, ut linea quæsita per data duo puncta transeat; tum igitur linea recta per illa duo puncta ducta quæsito satisfaciet.

EXEMPLUM II.

9. Super axe AP construere lineam BM , ita comparatam, ut, Fig. 8.
 abscissa area $ABMP$ data magnitudinis, arcus curvæ BM illi area respondens sit omnium minimus.

Quia pro data area $ABMP$ minima longitudo arcus BM requiritur, area $ABMP$ nobis designanda erit variabili x : altera variabili y autem indicemus applicatam curvæ PM . Jam sit abscissa $AP = t$, erit $x = \int y dt$, ideoque $dt = \frac{dx}{y}$: atque
arcus

arcus BM longitudo erit $= \int \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{yy}}$. Posito ergo
 $dy = p dx$, minimum esse debet hæc formula $\int dx \sqrt{(\frac{1}{yy} + pp)}$
 $= \int \frac{dx \sqrt{(1 + yyp p)}}{y}$. Erit itaque $Z = \frac{\sqrt{(1 + yyp p)}}{y}$, &
 $dZ = -\frac{dy}{yy \sqrt{(1 + y^2 p^2)}} + \frac{yyp dp}{y \sqrt{(1 + y^2 p^2)}}$: unde $M = 0$
 $N = \frac{-1}{yy \sqrt{(1 + y^2 p^2)}}$; $P = \frac{yp}{\sqrt{(1 + y^2 p^2)}}$, $Q = 0$ &c. Per-
 tinet ergo hæc quæstio ad casum primum, ac solutio præbebit
 lineam curvam, quæ pro area quacunque APMB abscissæ erit
 brevissima. Pervenietur autem, uti in præcedente Exemplo,
 ad æquationem hanc $Z = C + Pp$, atque curva quæsita per
 data duo puncta describi poterit. Erit itaque $\frac{\sqrt{(1 + yyp p)}}{y}$
 $= C + \frac{ypp}{\sqrt{(1 + yyp p)}}$, seu $1 = Cy \sqrt{(1 + yyp p)}$: vel $b =$
 $y \sqrt{(1 + yyp p)}$; hinc fit $bb = yy + y^2 pp$, & $p =$
 $\frac{\sqrt{(bb - yy)}}{yy} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{y dt}$, ob $dx = y dt$. Erit igitur dt
 $= \frac{y dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$, & $t = c \pm \sqrt{(bb - yy)}$. Quare linea
 quæsita erit Circulus, centro alicubi in axe AP, puta in C;
 assumto: isque inter omnes alias curvas per eadem duo quæcun-
 que puncta ductas, pro data resecta area ABMP, habebit ar-
 cum BM brevissimum.

EXEMPLUM III.

Fig. 9. 10. *Eductis ex puncto fixo C radiis CA, CM; intra eos describere curvam AM, que pro dato spatio ACM habeat arcum AM brevissimum.*

Quia arcus AM minimus esse debet, si spatium ACM datæ magnitudinis abscindatur; ponatur area hæc $ACM = x$, atque radius CM designetur altera variabili y . Jam ponatur
 arcus

arcus BS, radio CB = r descriptus, = t; erit, ut ante vidi-
 mus, Mn = y dt, & area MCm = $\frac{1}{2}yy dt = dx$, unde fit
 $dt = \frac{2dx}{yy}$. Quia porro est Mm = $\sqrt{(dy^2 + y^2 dt^2)} =$

$\sqrt{(dy^2 + \frac{4dx^2}{yy})}$; fit dy = p dx, minimumque esse debet
 $\int \frac{dx}{y} \sqrt{(4 + ppyy)}$. Cum igitur fit $Z = \frac{\sqrt{(4 + y^2 p^2)}}{y}$, erit

$M = 0$, $N = -\frac{4}{yy \sqrt{(4 + y^2 p^2)}}$, & $P = \frac{yp}{\sqrt{(4 + y^2 p^2)}}$,
 $Q = 0$, &c. Hinc resultat ista æquatio $Z = C + Pp$; propterea

quod fit $M = 0$: ideoque $\frac{\sqrt{(4 + y^2 p^2)}}{y} = C + \frac{yp}{\sqrt{(4 + y^2 p^2)}}$,
 seu $4 = Cy \sqrt{(4 + ppyy)}$ vel $2b = y \sqrt{(4 + ppyy)}$; hincque

$p = \frac{2\sqrt{(bb - yy)}}{yy} = \frac{dy}{dx} = \frac{2dy}{yy dt}$; ac $dt = \frac{dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$:

itemque integrando $t = A \sin. \frac{y}{b} + A \sin. \frac{c}{b} = A \sin.$
 $\frac{y\sqrt{(bb - cc)} + c\sqrt{(bb - yy)}}{bb}$. In AC ex S demittatur perpendicu-

lum QS = sin. At, erit $QS = \frac{y\sqrt{(bb - cc)} + c\sqrt{(bb - yy)}}{bb}$. At

ex æquatione $t + Const. = A \sin. \frac{y}{b}$ colligitur curva quæsitæ

esse Circulus AME per punctum fixum C transiens. Describa-
 tur enim super diametro quacunq; CE in C terminata Circu-
 lus CAME, arcus AM interceptus inter radios ACM pro
 data area ACM erit minimus. Scilicet si alia quæcunq; curva
 per duo quæcunq; puncta in hoc Circulo sita describatur, bi-
 nisq; radiis ex C ductis area æqualis area ACM abscindatur,
 arcus illius curvæ respondens perpetuo major erit quam arcus
 AM. Quod ut appareat, ducatur ex C ad CE normalis CD,
 in eamque ex S perpendiculum SQ demittatur: erit triangu-
 lum SCQ simile triangulo CEM, hincque CE : CM [y]
 = CS [r]: SQ seu $SQ = \frac{y}{CE} = \sin. A. DBS$, vel DBS

Euleri de Max. & Min.

S =

Fig. 9.



$= A \sin. \frac{y}{CE}$. Posita ergo diametro $CE = b$, & quia est
 $DBS = BS + BD = t + Const.$ erit $t + Const. = A \sin. \frac{y}{b}$:
 quæ est ipsa illa proprietas, qua curvam quæsitam prædicam esse
 oportere invenimus.

EXEMPLUM IV.

Fig. 10. 11. *In superficie quacunque, sive convexa sive concava, ducere
 lineam, qua sit intra suos terminos omnium brevissima.*

Sumatur planum quodcunque ad quod superficies referatur;
 APQ , in eoque capiatur recta AP pro axe. Jam ex lineæ
 quæsitæ singulis punctis concipiantur perpendiculara in hoc planum
 demitti, quibus describatur lineæ AQ , quæ erit projectio lineæ
 brevissimæ in hoc planum; qua cognita, simul ipsa lineæ brevif-
 sima in superficie proposita innotescet. Vocetur $AP = x$;
 $PQ = y$; atque cum natura superficiæ detur, ex datis $AP = x$
 & $PM = y$ definiri poterit longitudo perpendicularis QM in
 planum APQ , donec superficiem in M secet. Quod si ergo
 ponatur $QM = z$, longitudo hujus lineæ z dabitur per x &
 y , ita ut z sit functio definita ipsarum x & y . Cum igitur sit
 z functio ipsarum x & y , quæ ex æquatione locali ad superfi-
 ciem datur, ponamus esse $dz = Tdx + Vdy$; eruntque T &
 V ejusmodi functiones ipsarum x & y , ut $Tdx + Vdy$ sit for-
 mula differentialis definita: posito nempe $dT = Edx + Fdy$,
 erit $dV = Fdx + Gdy$, existente littera F utrique differenti-
 ali communi. Nunc elementum lineæ in superficie ductæ est
 $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + (Tdx + Vdy)^2}$.
 Posito ergo $dy = p dx$, minimum esse debet hæc formula
 $\int dx \sqrt{1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2}$; ita ut sit $Z =$
 $\sqrt{1 + p^2 + T^2 + 2TVp + V^2p^2}$, unde fit

$$dZ = \frac{\begin{cases} + TEdx + TFdy + pdp \\ + VEpdx + VFpdy + TVdp \\ + TFpdx + TGpdy + V^2pdp \\ + VFp^2dx + VGppdy \end{cases}}{\sqrt{(1+pp + T^2 + 2TVp + V^2p^2)}}$$

Quæ formula cum ad casum primum pertineat, proveniet ista æquatio inter x & y ;

$$\frac{TFdx + VFpdx + TGpdx + VGppdx}{\sqrt{(1+pp + T^2 + 2TVp + V^2p^2)}} =$$

$$d \cdot \frac{p + TV + V^2p}{\sqrt{(1+pp + T^2 + 2TVp + V^2p^2)}}. \text{ Est vero } Fdx + Gpdx$$

$$= Fdx + Gdy = dV, \text{ unde erit } \frac{TdV + VpdV}{\sqrt{(1+pp + (T+Vp)^2)}} =$$

$$d \cdot \frac{p + TV + V^2p}{\sqrt{(1+pp + (T+Vp)^2)}}$$

$$= \frac{\begin{cases} + dp(1 + T^2 + V^2) \\ + dT(V - Tp) \\ + dV(T + T^2 + 3T^2Vp + 3TV^2p^2 + V^3p^3 + 2Vp + Vp^3) \end{cases}}{(1+pp + (T+Vp)^2)^{3/2}}$$

Æquatione autem ordinata, resultabit hæc $dp(1 + T^2 + V^2) + dT(V - Tp) + dV(Vp - Tpp) = 0$, seu $dp = \frac{(Tp - V)(dT + pdV)}{1 + T^2 + V^2}$. Cum vero sit $p = \frac{dy}{dx}$, erit $dp = \frac{ddy}{dx}$; hincque fiet $dx ddy = \frac{(Tdy - Vdx)(dxdT + dydV)}{1 + T^2 + V^2}$

quæ est æquatio differentio-differentialis pro projectione A Q lineæ brevissimæ in superficie quæsita; ideoque indicat, eam per duo quæque puncta duci posse. Æquatio hæc inventa in varias formas transmutari potest, quæ sæpius majore commodo usurpari poterunt. Ac primo quidem expediet eliminari differentia- lia dT & dV : cum enim sit $dz = Tdx + Vdy$, erit $ddz = dxdT + dydV + Vddy$; ideoque $dxdT + dydV =$

$ddz - Vddy$, quo valore substituto prodibit ista æquatio
 $dxddy + T^2 dxddy + V^2 dxddy = Tdyddz - Vdxddz$
 $- TVdyddy + V^2 dxddy$, seu $dxddy + Tdzddy =$
 $Tdyddz - Vdxddz$; hincque $ddy:ddz = Tdy - Vdx:$
 $dx + Tdz$. Multiplicetur æquatio inventa per dz , ac in pri-
 mo termino scribatur $Tdx + Vdy$ loco dz , erit $Tdx^2 ddy$
 $+ Vdx dy ddy + Tdz^2 ddy = Tdy dz ddz - Vdx dz ddz$.
 Addatur utrimque $Tdy^2 ddy - Vdx dy ddy$, erit $Tddy$
 $(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (dz ddz + dy ddy)(Tdy - Vdx)$
 seu $\frac{dy ddy + dz ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{Tddy}{Tdy - Vdx} = \frac{Tddz}{dx + Tdz}$. Vel mul-
 tiplicetur æquatio per dx , ac loco Tdx scribatur $dz - Vdy$,
 obtinebitur $dx^2 ddy + dz^2 ddy - Vdy dz ddy = dy dz ddz$
 $- Vdy^2 ddz - Vdx^2 ddz$. Addatur utrimque $dy^2 ddy$
 $- Vdz^2 ddz$, erit $ddy(dx^2 + dy^2 + dz^2) - Vdz$
 $(dyddy + dz ddz) = dy(dyddy + dz ddz) -$
 $Vddz(dx^2 + dy^2 + dz^2)$; ideoque $\frac{dyddy + dz ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} =$
 $\frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz}$; quæ æquationes omnes in sequenti expressione
 continentur $\frac{dyddy + dz ddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{Tddy}{Tdy - Vdx} = \frac{Tddz}{dx + Tdz} =$
 $\frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz}$. Hic notandum est, quia quantitatum T & V diffe-
 rentialia nusquam occurrunt, perinde esse, sive in T & V contineatur
 z , sive minus. Quovis igitur casu oblato, conveniet eam æquatio-
 nem assumere, quæ facillime integrationem admittat. Velu-
 ti si superficies proposita sit solidi rotundi conversione cujuscun-
 que figuræ circa axem AP nati, erit $yy + zz =$ quadrato func-
 tionis ipsius x , quæ sit $= X$, estque applicata illius curvæ
 genitricis abscissæ x respondens. Erit itaque $zdz = XdX -$
 $y dy$, & $dz = \frac{XdX}{z} - \frac{y dy}{z}$ unde fiet $T = \frac{XdX}{z dx}$, & $V =$
 $\frac{-y}{z}$. Sumatur jam z , commodi ergo, æquatio in qua T non
 occur-

occurrit, hæc $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{ddy + Vddz}{dy + Vdz}$, quæ, ob
 $V = \frac{-y}{z}$, transfit in hanc $\frac{dyddy + dzddz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{zddy - yddz}{zdy - ydz}$,
 cujus integrale est $l\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = l\frac{zdy - ydz}{b}$, seu
 $zdy - ydz = b\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Quoniam nunc est
 $z = \sqrt{(X^2 - y^2)}$, ponatur $dX = vdx$, erit $dz = \frac{Xvdx - ydy}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}$,

$$\& zdy - ydz = \frac{X^2dy - Xyvdx}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}, \& \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} \\ = \frac{\sqrt{(X^2dx^2 - y^2dx^2 + X^2dy^2 + X^2v^2dx^2 - 2Xyvdx dy)}}{\sqrt{(X^2 - y^2)}}.$$

$$\text{Ergo } X^4dy^2 - 2X^3yvdx dy + X^2y^2v^2dx^2 = bbX^2dx^2 - \\ bb^2y^2dx^2 + bbX^2dy^2 + b^2X^2v^2dx^2 - 2b^2Xyvdx dy, \text{ seu } dy^2 \\ = \frac{2(b^2 - X^2)Xyvdx dy + X^2y^2v^2dx^2 - b^2X^2dx^2 + b^2y^2dx^2 - b^2X^2v^2dx^2}{X^2(bb - XX)},$$

quæ, extracta radice, præbet $dy = \frac{yvdx}{X} \pm \frac{bdx\sqrt{(1+vv)}(yy - XX)}{X\sqrt{(bb - XX)}}$.

Quod si ponatur $y = Xt$, ut fit $dy = Xdt + tvdx$, fiet
 $\frac{dt}{\sqrt{(tt - 1)}} = \frac{bdx\sqrt{(1+vv)}}{X\sqrt{(bb - XX)}}$; in qua æquatione, quia X
 & v sunt functiones ipsius x , variables t & x a se invicem sunt
 separata.

E X E M P L U M V.

12. Super axe APN construere curvam AM ejusmodi, ut, abs- Fig. 11.
 cissa per normalem MN area ANM data magnitudinis, arcus
 AM sit minimus.

Quia, pro definita area AMN magnitudine, arcus AM
 minimus esse debet, ponatur area AMN = ax , positoque
 $x = a$, quo casu area AMN fit = aa , fiat arcus AM mi-
 nimus. Ponatur porro applicata orthogonalis MP = y , abscis-
 sa AP = t , & subnormalis PN = u ; erit $ax = \int y dt +$
 $\frac{1}{2}uy$, & $u = \frac{ydy}{dt}$; elementum vero arcus AM erit =

$\frac{dy\sqrt{yy+uu}}{u}$. Porro cum fit $adx = ydt + \frac{1}{2}(udy + ydu)$
 & $dt = \frac{ydy}{u}$, erit $audx = yydy + \frac{1}{2}uudy + \frac{1}{2}yudu$, & du
 $= \frac{2adx}{y} - \frac{2ydy}{u} - \frac{udy}{y}$. Jam ponatur $dy = pdx$, mini-
 mum esse debet $\int \frac{dx\sqrt{yy+uu}}{u}$, atque u est quantitas cu-
 jus valor ex hac æquatione $du = dx(\frac{2a}{y} - \frac{2yp}{u} - \frac{up}{y})$ de-
 finiri debet. Pertinet itaque hæc quæstio ad Casum quintum; cum
 quo si comparatio instituat, fit $u = \pi$ & $Z = \frac{p\sqrt{yy+\pi^2}}{\pi}$,
 unde $L = \frac{-pyy}{\pi^2\sqrt{yy+\pi^2}}$; $M = 0$, $N = \frac{yp}{\pi\sqrt{yy+\pi^2}}$, &
 $P = \frac{\sqrt{yy+\pi\pi}}{\pi}$. Deinde cum fit $\pi = \int dx(\frac{2a}{y} - \frac{2yp}{\pi}$
 $- \frac{\pi p}{y})$, fit $[Z] = \frac{2a}{y} - \frac{2yp}{\pi} - \frac{\pi p}{y}$, & differentiando erit
 $[L] = \frac{2yp}{\pi^2} - \frac{p}{y}$; $[M] = 0$, $[N] = -\frac{2a}{yy} - \frac{2p}{\pi} + \frac{\pi p}{yy}$
 & $[P] = -\frac{2y}{\pi} - \frac{\pi}{y}$. Jam erit $\int [L]dx = \int \frac{2ydy}{\pi^2} -$
 ly , & $e^{\int [L]dx} = \frac{e^{\int 2ydy: \pi\pi}}{y}$; at est $Ldx = \frac{-yydy}{\pi^2\sqrt{yy+\pi\pi}}$;
 unde fiet $\int e^{\int [L]dx} Ldx = -\int \frac{e^{\int 2ydy: \pi\pi} ydy}{\pi^2\sqrt{yy+\pi^2}}$, cujus valor
 posito $x = a$, fiat $= H$, sitque $V = e^{-\int 2ydy: \pi\pi} y (H$
 $+ \int \frac{e^{\int 2ydy: \pi\pi} ydy}{\pi^2\sqrt{yy+\pi^2}})$. His præparatis, erit æquatio satisfa-
 ciens $(N + [N]V)dx = d.(P + [P]V)$, siue substitutioni-
 bus factis, $\frac{ydy}{\pi\sqrt{yy+\pi\pi}} - \frac{2aVdx}{yy} - \frac{2Vdy}{\pi} - \frac{\pi Vdy}{yy} =$
 $d.(\frac{\sqrt{yy+\pi\pi}}{\pi} - \frac{2Vy}{\pi} - \frac{\pi V}{y})$. At est $2adx = yd\pi$
 +

$+ \frac{2yydy}{\pi} + \pi dy$; unde erit $\frac{ydy}{\pi\sqrt{yy+\pi^2}} - \frac{Vd\pi}{y} - \frac{4Vdy}{\pi}$
 $= d. \left(\frac{\sqrt{yy+\pi^2}}{\pi} - \frac{2Vy}{\pi} - \frac{\pi V}{y} \right) = \frac{ydy}{\pi\sqrt{yy+\pi^2}} -$
 $\frac{yyd\pi}{\pi^2\sqrt{yy+\pi^2}} - \frac{2Vdy}{\pi} - \frac{2ydV}{\pi} + \frac{2Vy d\pi}{\pi^2} - \frac{\pi dV}{y} - \frac{Vd\pi}{y}$
 $+ \frac{\pi V dy}{yy}$); hincque $\frac{yyd\pi}{\pi^2\sqrt{yy+\pi^2}} - \frac{2Vdy}{\pi} + \frac{2ydV}{\pi} - \frac{2Vy d\pi}{\pi^2}$
 $+ \frac{\pi dV}{y} - \frac{\pi V dy}{yy} = 0$. Verum, est generaliter $dV = -Ldx$
 $-V[L]dx$; unde erit $dV = \frac{yydy}{\pi^2\sqrt{yy+\pi\pi}} - \frac{2Vydy}{\pi^2}$
 $+ \frac{Vdy}{y}$; hincque $\frac{yyd\pi}{\pi^2\sqrt{yy+\pi\pi}} = \frac{dVd\pi}{dy} + \frac{2Vy d\pi}{\pi^2} -$
 $\frac{Vd\pi}{y}$; quo substituto oritur $\frac{dVd\pi}{dy} - \frac{2Vdy}{\pi} + \frac{2ydV}{\pi} + \frac{\pi dV}{y}$
 $- \frac{Vd\pi}{y} - \frac{\pi V dy}{yy} = 0$; hoc est $dV \left(\frac{d\pi}{dy} + \frac{2y}{\pi} + \frac{\pi}{y} \right)$
 $= V \left(\frac{d\pi}{y} + \frac{2dy}{\pi} + \frac{\pi dy}{yy} \right) = \frac{y dV}{dy} \left(\frac{d\pi}{y} + \frac{2dy}{\pi} + \frac{\pi dy}{yy} \right)$;
 quæ æquatio, cum sit divisibilis per $\frac{d\pi}{y} + \frac{2dy}{\pi} + \frac{\pi dy}{yy}$, dupli-
 cem dat solutionem. Quarum prima erit $\frac{dV}{V} = \frac{dy}{y}$, quæ præ-
 bet $V = cy$: quoniam vero V evanescere debet in casu mi-
 nimi, eodem casu erit $y = 0$; scilicet posito $x = a$ fiet
 $y = 0$. Cum nunc sit $V = cy$, facta substitutione in æquatione
 $dV = \frac{yydy}{\pi^2\sqrt{yy+\pi^2}} - \frac{2Vydy}{\pi^2} + \frac{Vdy}{y}$, erit $\frac{yydy}{\pi^2\sqrt{yy+\pi^2}}$
 $= \frac{2cy\gamma dy}{\pi^2}$; hincque vel $y = 0$, vel $dy = 0$, quo casu pro-
 dit linea recta axi parallela; vel $\pi = \infty$, quo casu prodit linea
 recta ad axem normalis: vel etiam $\sqrt{yy+\pi\pi} = MN =$
Const. quæ æquatio dat Circulum; atque integer semicirculus, ob
 $y = 0$ in casu minimi, quæsito satisfaciet. Secunda solutio pro-
 dit ex divisore $\frac{d\pi}{y} + \frac{2dy}{\pi} + \frac{\pi dy}{yy} = 0$, seu $\pi d\pi + \frac{\pi\pi dy}{y} +$

$+ 2y dy = 0$, quæ multiplicata per yy , fit $yy\pi d\pi + \pi\pi y dy$
 $+ 2y^3 dy = 0$, cujus integrale est $\pi^2 y^2 + y^4 = C$, hincque

$\pi = \frac{\sqrt{(b^4 - y^4)}}{y}$; quæ æquatio, quia non pendet ab V , pro
 quocunque valore ipsius x satisfaciet. Erit autem introducta abs-
 cissa $AP = t$, ob $u = \pi = \frac{y dy}{dt}$, ista æquatio $\frac{y dy}{dt} =$
 $\frac{\sqrt{(b^4 - y^4)}}{y}$, unde $dt = \frac{yy dy}{\sqrt{(b^4 - y^4)}}$, ex qua æquatione intel-

ligitur Elasticam rectangulam quæsito satisfacere; ita ut pro area
 ANM inter normales AN & MN arcus curvæ AM fit bre-
 vissimus. Hæc autem curva per data duo puncta, siquidem
 axis AP sit positione datus, describi potest.

S C H O L I O N II.

13. Ex his Exemplis eximius usus, quem habet nostra Me-
 thodus in Problematis etiam diversi generis resolvendis, abun-
 de patet; imprimis autem ultimum Exemplum nonnullas nota-
 tu maxime dignas suppeditat circumstantias, ex quibus natura
 solutionis illustrari poterit. Quoniam enim duplex æquatio ob
 factores duos nata est, duplex quoque solutio prodiit; quarum prior
 lineam satisfacientem absolute determinat, ita ut ea per data duo
 puncta duci nequeat: dat enim vel lineam rectam, vel semicir-
 culum. Linea recta duplici modo quæstionem solvit, dum est vel
 normalis ad axem AP, vel eidem parallela; & quemadmodum
 utraque satisfaciat manifestum est: nam in ea, quæ est normalis
 ad axem, portio quæ cum axe & normali datum spatium com-
 prehendit perpetuo est infinite parva, ideoque revera minima:
 altera recta axi parallela aliquanto latius patet, cum ea per da-
 tum punctum duci possit; & quia ipsæ applicatæ ad eam sunt
 normales, ac spatium abscissum sit ut ipsa abscissa, ejus respec-
 tu linea illa recta utique erit brevissima. Semicirculus deinde,
 qui ex prima solutione prodiit, ita absolute satisfacit, ut, pro-
 posita spatii abscindendi quantitate, ipse semicirculus determi-
 netur,

ætur, ejus enim area esse debet $= aa$. Secunda autem solutio, quæ curvam Elasticam rectangulam præbuit, latius patet: nam per data duo quæcunque puncta ejusmodi curva traduci potest, eaque, inter omnes alias curvas per eadem puncta transeuntes, hæc gaudebit prærogativa, ut si, in omnibus curvis, per normales, areæ æquales abscindantur, arcus Elasticæ futurus sit omnium minimus. His igitur expositis pergamus ad usum Methodi traditæ ostendendum, in iis maximi minimive investigationibus, in quibus maximi minimive formula non est talis expressio integralis simplex $\int Z dx$, qualem formam hactenus perpetuo tractavimus; verum est composita ex duabus pluribusve hujusmodi formulis quomodocunque. Ac primo quidem, si maximum minimumve esse debeat aggregatum duarum pluriumve formularum integralium, puta $\int Z dx + \int Y dx - \int X dx$, operatio nulla difficultate laborat: quia enim formula maximi minimive est $\int dx (Z + Y - X)$, hæc tanquam simplex formula integralis tractari, ejusque valor differentialis assignari poterit. Operatio autem eo redibit, ut pro singulis formulis $\int Z dx$, $\int Y dx$ & $\int X dx$, earum valores differentiales quærantur; earumque loco in formula $\int Z dx + \int Y dx - \int X dx$ substituantur; & quod oritur nihilo æquale ponatur: sicque habebitur æquatio quæsito satisfaciens.

PROPOSITIO II. PROBLEMA.

14. Invenire æquationem inter x & y , ut, posito $x = a$, fiat hæc expressio $\int Z dx \times \int Y dx$, quæ est productum ex duabus formulis integralibus $\int Z dx$ & $\int Y dx$, maximum vel minimum.

S O L U T I O.

Ponamus istam æquationem inter x & y jam esse inventam, foreque ex ea, posito $x = a$, valorem Formulæ $\int Z dx = A$, & $\int Y dx = B$; erunt hæc quantitates A & B constantes; atque earum productum AB maximum vel minimum. Jam ponatur apud valorem indefinitum x variabilem y augeri particula

Euleri *De Max. & Min.* T 22 v 2

n^r , ex ea utraque quantitas A & B incrementum accipiet, unaquæque scilicet augebitur valore differentiali ex præcedentibus definiendo. Sit igitur dA valor differentialis ipsius A , qui respondet formulæ integrali $\int Z dx$, posito $x = a$, similique modo sit dB valor differentialis ipsius B oriundus ex formula $\int Y dx$, posito $x = a$. Cum ergo, ex adjecta particula n^r variabili y , abeat A in $A + dA$, & B in $B + dB$, productum AB transmutabitur in $AB + AdB + BdA + dAdB$; quare cum AB esse debeat maximum vel minimum, oportebit esse $AB = AB + AdB + BdA + dAdB$. Ideoque $0 = AdB + BdA$, ob evanescentem terminum $dAdB$ præ reliquis. Ex his itaque oritur sequens Problematis solutio; Quærat^{ur} formulæ $\int Z dx$ valor differentialis qui sit dA , sitque A valor formulæ $\int Z dx$, quem obtinet posito $x = a$. Deinde quærat^{ur} formulæ $\int Y dx$ valor differentialis, qui sit dB , ac B denotet valorem formulæ $\int Y dx$, quem recipit posito $x = a$; quibus factis habebitur ista æquatio $0 = AdB + BdA$, in qua relatio satisfaciens inter x & y continebitur. Q. E. I.

COROLL. I.

15. Quanquam in æquatione $0 = AdB + BdA$ insunt quantitates constantes A & B , tamen ea non sunt arbitrariæ, sed utraque per ipsam hanc æquationem definietur. Scilicet si ex hac æquatione eliciantur valores $\int Z dx$ & $\int Y dx$, ponatur que $x = a$, prodire debent illæ quantitates A & B ; unde hæc determinabuntur per a , & per reliquas constantes arbitrarias quæ per integrationem ingredientur.

COROLL. II.

16. Si Z & Y fuerint functiones determinatæ quantitatum x, y, p, q, r , &c. tum valores differentiales dA & dB non pendebunt ab a ; interim tamen quantitas a ingreditur in æquationem $0 = AdB + BdA$: ex quo curva inventa, tantum pro definito abscissæ x valore $x = a$, quæsito satisfaciet.

Co-

COROLL. III.

17. Ex æquatione autem $0 = AdB + BdA$ particula n omnino egredietur: nam quia uterque valor differentialis dA & dB per n multiplicatus prodiit, iterum n per divisionem exterminabitur: hocque modo æquatio inter x & y atque constantes nascetur, qua Problemati satisfiet.

SCHOLIION I.

18. Neminem hic forma æquationis $0 = AdB + BdA$ inventæ offendat, eo quod speciem formulæ differentialis definitæ præ se ferat, neque hinc etiam quisquam concludat æquationis $0 = AdB + BdA$ integram sumi posse hanc, *Const.* $= AB$. Jam enim significationes explicavimus, quas tribuimus cum litteris A & B , tum etiam formis differentialibus dA & dB : ex quo intelligere licet, vulgarem notandi modum hic non locum habere. Ideo autem hunc notandi modum, etfi a consueto dissentientem, hic adhibere visum est, ut nexus æquationis $0 = AdB + BdA$ cum formula maximi minimive $\int Z dx$. $\int Y dx$ melius perspiciatur. Cum enim maximum minimumve respondere debeat valori $x = a$; ponamus hoc casu abire $\int Z dx$ in A & $\int Y dx$ in B ; quo facto, maximum minimumve erit AB . Hinc autem sponte nascitur æquatio inventa $0 = AdB + BdA$, siquidem AB , litteris A & B tanquam variabilibus spectatis, differentietur. Quod cum fuerit factum, in memoriam revocari oportet, pro differentialibus dA & dB accipiendos esse valores differentiales eos, qui conveniunt formulis integralibus $\int Z dx$ & $\int Y dx$, ex quibus ipsæ quantitates A & B constantes prodiere. Hunc nexum ideo annotasse juvabit, quod infra eundem ad quemcunque compositionis modum, quo formula maximi minimive ex formulis integralibus composita fuerit, æque patere; similique modo ex ipsa maximi minimive expressione per differentiationem æquationem quæsitam obtineri ostendemus.

EXEMPLUM I.

19. Invenire æquationem inter x & y , ut, posito $x = a$, fiat ista expressio $\int y dx \times \int x dy$ maximum.

Fiat $\int y dx = A$, & $\int x dy = B$, posito $x = a$, & quarantur formularum $\int y dx$ & $\int x dy$, seu $\int x p dx$, valores differentiales: ac formulæ $\int y dx$ valor differentialis est $nv. dx. 1$, formulæ autem $\int x dy$, seu $\int x p dx$, est $nv. dx \left(-\frac{1}{dx} d. x \right) = -nv. dx$. Erit ergo $dA = nv. dx$, & $dB = -nv. dx$: unde æquatio $0 = AdB + BdA$ abibit in hanc $0 = -A. nv. dx + B. nv. dx$, seu $A = B$. Quæsitio ergo omnes æquationes inter x & y æque satisfaciunt, dummodo, casu $x = a$, fuerit $\int y dx = \int x dy$; hoc est area curvæ $= \frac{1}{2} xy$.

EXEMPLUM II.

20. Invenire æquationem inter x & y , ut, casu $x = a$, fiat minimum hac expressio $\int y dx \times \int dx \sqrt{1 + pp}$.

Casu $x = a$, fiat $\int y dx = A$, & $\int dx \sqrt{1 + pp} = B$. Porro sumendis valoribus differentialibus erit $dA = nv. dx. 1$, & $dB = nv. dx \left(-\frac{1}{dx} d. \frac{p}{\sqrt{1 + pp}} \right) = -nv. d. \frac{p}{\sqrt{1 + pp}}$. Hinc prodit sequens æquatio $0 = -A. nv. d. \frac{p}{\sqrt{1 + pp}} + B. nv. dx$, seu $B dx = A d. \frac{p}{\sqrt{1 + pp}}$. Quæ integrata dat $x + b = \frac{Ap}{B \sqrt{1 + pp}}$, ubi $\frac{A}{B}$ denotat rationem, quam tenet $\int y dx$ ad $\int dx \sqrt{1 + pp}$ tum cum fit $x = a$. Sit brevilitatis gratia $\frac{A}{B} = c$, erit $(x + b) \sqrt{1 + pp} = cp$, & $p = \frac{x + b}{\sqrt{cc - (x + b)^2}} = \frac{dy}{dx}$. Integrata ergo hac æquatione,

tione, resultabit $y = f \pm \sqrt{cc - (x+b)^2}$, ita ut sit $(y-f)^2 + (x+b)^2 = c^2$, unde patet curvam satisfaci-
tem esse Circulum, radio c descriptum, axe ubicunque accep-
to. Hujusmodi vero Circuli non quivis arcus satisfaciet, ve-
rum is tantum qui per c radium Circuli multiplicatus producit
aream; est enim $A = Bc$. Ergo vel radius Circuli c pro lubi-
tu accipi potest, ex eoque definietur illa abscissæ x magnitudo
determinata a ; vel si a detur, ut ponimus, inde vicissim radius
 c determinabitur. Perspicuum autem est arcum Circuli, qui sa-
tisfacit, convexitate sua axem respicere debere; hoc enim ca-
su area fit minor, ideoque productum ex area in arcum mini-
mum.

EXEMPLUM III.

21. *Invenire curvam, in qua, pro data abscissa $x = a$, minimum
fiat hac expressio $\int y x dx \times \int x dx \sqrt{1 + pp}$.*

Posito $x = a$, fiat $\int y x dx = A$, & $\int x dx \sqrt{1 + pp}$
 $= B$. Erit autem $dA = n y . dx . x$ & $dB = -m . dx . \frac{x}{d x}$

$d . \frac{x p}{\sqrt{1 + pp}}$; unde obtinebitur ista æquatio $B x dx =$

$A d . \frac{p x}{\sqrt{1 + pp}}$, quæ integrata dat $x x \pm b b = \frac{2 A p x}{B \sqrt{1 + pp}} =$

$\frac{2 c p x}{\sqrt{1 + pp}}$, posito $\frac{A}{B} = c$. Hinc $p = \frac{c x}{\sqrt{4 c c x x - (x x \pm b b)^2}}$

$= \frac{d y}{d x}$, ideoque pro curva habebitur hæc æquatio, $y =$

$\int \frac{(x x \pm b b) dx}{\sqrt{4 c c x x - (x x \pm b b)^2}}$. De qua notandum est, si fiat

$b = 0$, tum prodire æquationem pro Circulo $y = \int \frac{x dx}{\sqrt{4 c c - x x}}$
cujus radius fit $2 c$.

S C H O L I O N I I.

22. Eadem hæc Exempla omnia quoque resolvi possunt per Methodum supra jam traditam; quare cum utraque via eadem solutio obtineatur, juvabit solutionem per alteram viam uno Exemplo exhiberi. Sumamus igitur tertium Exemplum, in quo maximi minimive formula $f y x d x \times f x d x \sqrt{(1 + p p)}$, differentiando iterumque integrando per partes, reducitur ad hanc formam $f y x d x f x d x \sqrt{(1 + p p)} + f x d x \sqrt{(1 + p p)} f y x d x$; cujus utrumque membrum in Casu secundo supra §. 7. exposito continetur. Quærat utraque utriusque valor differentialis, eorum enim summa, posita $= 0$, dabit æquationem pro curva quæsitâ. Formula autem $f y x d x f x d x \sqrt{(1 + p p)}$ cum Casu secundo collata, dabit $\pi = f x d x \sqrt{(1 + p p)}$ & $Z = y x \pi$; unde fit $L = y x$; $M = y \pi$, $N = x \pi$, $P = 0$, &c. Deinde erit $[Z] = x \sqrt{(1 + p p)}$; indeque $[M] = \sqrt{(1 + p p)}$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{x p}{\sqrt{(1 + p p)}}$. Porro est $\int L d x = \int y x d x$, cujus valor, posito $x = a$, quem generaliter posuimus H , hic in solutione Exempli est A ; ita ut fit $V = A - \int y x d x$. Quare hujus formulæ valor differentialis erit $= n v. d x (x \pi - \frac{1}{d x} d. \frac{x p (A - \int y x d x)}{\sqrt{(1 + p p)}} = n v. d x (x f x d x \sqrt{(1 + p p)} - \frac{A}{d x} d. \frac{x p}{\sqrt{(1 + p p)}} + \frac{1}{d x} d. \frac{x p f y x d x}{\sqrt{(1 + p p)}})$. Altera formula $f x d x \sqrt{(1 + p p)} f y x d x$, cum Casu secundo §. 7. collata, dat $\pi = f y x d x$ & $Z = x \pi \sqrt{(1 + p p)}$, unde erit $L = x \sqrt{(1 + p p)}$, $M = \pi \sqrt{(1 + p p)}$, $N = 0$, & $P = \frac{x \pi p}{\sqrt{(1 + p p)}}$; hincque $\int L d x = \int x d x \sqrt{(1 + p p)}$: quare cum H sit valor ipsius $\int L d x$, posito $x = a$, erit $H = B$, & $V = B - \int x d x \sqrt{(1 + p p)}$. Porro est $[Z] = y x$, hincque $[M] = y$, $[N] = x$, & $[P] = 0$. Ex his prodit valor differentialis $= n v. d x (B x - x f x d x \sqrt{(1 + p p)} - \frac{1}{d x} \times$

$\times d. \frac{x^p f y x dx}{\sqrt{(1+pp)}}$). His igitur valoribus differentialibus ambobus additis, emerget hujus expressionis compositæ $f y x dx f x dx \sqrt{(1+pp)} + f x dx \sqrt{(1+pp)} f y x dx$, seu hujus $f y x dx \times f x dx \sqrt{(1+pp)}$, quæ in Exemplo erat proposita, valor differentialis = *nv.* $dx (Bx - \frac{A}{dx} d. \frac{x^p}{\sqrt{(1+pp)}})$, ex qua pro curva æquatio erit hæc $Bx dx = Ad. \frac{x^p}{\sqrt{(1+pp)}}$, quam eandem in solutione Exempli invenimus. Similis autem consensus in genere deprehendetur, si quis expressionem $\int Z dx \times \int Y dx$ eodem modo tractare voluerit.

PROPOSITIO III. PROBLEMA.

23. *Invenire æquationem inter x & y ejus conditionis, ut, posito $x = a$, ista fractio $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$ obtineat maximum minimumve valorem: existentibus Z & Y functionibus quibuscunque ipsarum x, y, p, q, r, &c. sive determinatis, sive indeterminatis.*

S O L U T I O.

Casu quo fit $x = a$, sit $\int Z dx = A$, atque $\int Y dx = B$: eritque $\frac{A}{B}$ maximum vel minimum, siquidem relatio inter x & y recte fuerit assignata. Erit igitur fractio $\frac{A}{B}$ æqualis eadem huic fractioni $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$, casu quo $x = a$, si alicubi una applicata y augeatur particula *nv.* Tum vero fiet $\int Z dx$ æqualis ipsi A , una cum valore differentiali formulæ $\int Z dx$, qui sit $= dA$; similique modo $\int Y dx$ abibit in B auctum valore differentiali formulæ $\int Y dx$, qui sit $= dB$; sicque ex adjecta particula *nv.* ad applicatam y , casu quo $x = a$, transibit fractio $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$ in hanc $\frac{A+dA}{B+dB}$; quæ æqualis esse debet fractioni

A

$\frac{A}{B}$; unde nascitur ista æquatio $BdA = AdB$; quæ præbebit æquationem inter x & y quæsitam. Q. E. I.

COROLL. I.

24. Ad hanc igitur æquationem inter x & y inveniendam, effici debet ut valores differentiales ipsarum $\int Zdx$ & $\int Ydx$ proportionales fiant ipsis harum formularum valoribus, quos obtinent posito $x = a$.

COROLL. II.

25. Quanquam, in hac æquatione inventa $BdA = AdB$, duæ inesse videantur constantes incognitæ A & B , tamen ambas in unam compingere licet. Posito enim $\frac{A}{B} = C$, erit $dA = CdB$; inventaque æquatione, ex valore a loco x substituto determinabitur valor ipsius C .

SCHOLIION.

26. Si hujus & præcedentis Problematis solutiones inter se conferantur, ingens in iis deprehendetur consensus. Nam si maximum minimumve esse debeat factum $\int Zdx \times \int Ydx$, orta est ista æquatio $0 = AdB + BdA$; sin autem quotus $\frac{\int Zdx}{\int Ydx}$ debeat esse vel maximus vel minimus, inventa est ista æquatio $0 = AdB - BdA$; utroque autem casu litteræ A , B & dA , dB eisdem retinent valores. Quare cum A & B sint quantitates constantes, ambæ æquationes tantum ratione signi constantis differunt; posito enim $\frac{A}{B} = C$, priore casu habetur $dA = -CdB$, posteriore vero $dA = +CdB$. Ex quo pro utroque casu etiam eadem fere prodibit solutio; quia totum discrimen tantum in signo quantitatis constantis C situm erit. Quod si ergo æquatio inter x & y fuerit inventa, quæ conti-

contineat, pro $x = a$, factum $\int Z dx \times \int Y dx$ maximum vel minimum; eadem æquatio, levi adhibita mutatione, simul continebit quotum $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$ maximum vel minimum. Perspicuum autem est, five $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$ debeat esse maximum vel minimum, five $\frac{\int Y dx}{\int Z dx}$, utroque casu eandem plane esse prodituram æquationem. Hanc vero convenientiam ipsa rei natura postulat: nam si $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$ est maximum, tum eo ipso erit $\frac{\int Y dx}{\int Z dx}$ minimum & vicissim; unde utrique quæstioni eandem solutionem satisfacere necesse est. Cæterum hunc quoque nexum observasse juvabit inter maximi minimive formulam $\frac{\int Z dx}{\int Y dx}$, quæ, posito $x = a$, abit in $\frac{A}{B}$, & inter æquationem inventam $BdA - AdB = 0$: hæc enim æquatio oritur ex differentiatione formulæ $\frac{A}{B}$, ponendo ejus differentiale $= 0$; istiusmodi autem nexum perpetuo locum habere in sequente Propositione demonstrabimus.

E X E M P L U M I.

27. *Invenire curvam, cujus area coordinatis orthogonalibus abscissa ad arcum curvæ maximam teneat rationem, si abscissa datus valor a tribuatur.*

Posita curvæ quæsitæ abscissa $= x$, applicata $= y$; erit area $= \int y dx$, & arcus $= \int dx \sqrt{(1 + pp)}$; posito $dy = p dx$: maximum ergo esse debet $\frac{\int y dx}{\int dx \sqrt{(1 + pp)}}$, casu quo ponitur $x = a$. Sit igitur, casu $x = a$, valor formulæ $\int y dx$, seu area $= A$, & $\int dx \sqrt{(1 + pp)}$ seu arcus abscissæ a respondens $= B$. Deinde formulæ $\int y dx$ valor differentialis dA erit $= ny \cdot dx$.

Euleri de Max. & Min. V 1,

1, & formulæ $\int dx \sqrt{1+pp}$ seu $dB = nv. dx \left(- \frac{1}{dx} \right.$
 $\left. d. \frac{p}{\sqrt{1+pp}} \right) = - nv. d. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$. Quibus valori-
 bus in æquatione $BdA = AdB$ substitutis, prodibit pro cur-
 va quæsita sequens æquatio: $Bdx = - Ad. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$.
 Ponatur $\frac{A}{B} = c$, ita ut, pro abscissa $x = a$, area curvæ fiat
 æqualis producto ex arcu in hanc constantem c . Erit ergo
 $dx = - cd. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$, & integrando $x = b -$
 $\frac{cp}{\sqrt{1+pp}}$, seu $cp = (b-x) \sqrt{1+pp}$, hincque
 $p = \frac{b-x}{\sqrt{c^2 - (b-x)^2}} = \frac{dy}{dx}$. Erit ergo $y = \dots$
 $\int \frac{(b-x) dx}{\sqrt{c^2 - (b-x)^2}} = f \pm \sqrt{c^2 - (b-x)^2}$ seu
 $(y-f)^2 + (b-x)^2 = cc$; unde constat curvam quæsita-
 tam esse Circulum radio c descriptum, ad rectam quamcun-
 que tanquam axem relatum. Hujus autem Circuli ea tantum
 portio quæsita satisfacit, quæ respondet abscissæ $= a$, a quo
 valore pendet c , ita ut sumpta abscissa $= a$, area æqualis fiat
 producto ex arcu in radium Circuli multiplicato. Quod si ergo
 vicissim radius c detur, tanta in axe abscissa abscindi debet, ut
 arcus per radium multiplicatus præbeat aream. Infinitis igitur
 modis quæsito satisfieri potest; quæstio autem erit determinata,
 si duo præscribantur puncta, per quæ curva quæsita sit tran-
 seunda. Sumamus igitur radium c tanquam cognitum, eo-
 que describamus Circulum BMD centro C. Porro sumatur
 linea quæcunque APD pro axe, in eaque A pro origine abs-
 cissarum. Hoc jam facto, quæstioni satisfiet si applicata PM
 tantum spatium ABMP abscindatur, ut id sit æquale produc-
 to ex arcu BM in radium Circuli BC. Quia autem sector
 BCM est $= \frac{1}{2} BM. BC$, oportet aream ABMP esse du-
 plo majorem sectore BCM. Apparet autem, sumto pro lu-
 bitu,

Fig. 12.

bitu, cum axe, tum ejus initio, sæpe-numero conditionem præscriptam nequidem impleri posse. Nam si axis AD per centrum transeat, tum area ABMP perpetuo minor erit quam duplum sectoris BCM; nisi, arcu BM infinite parvo, prima applicata BA simul per centrum transeat: sin autem axis AD supra centrum transiret, tum nullo modo conditioni inventæ satisfieri potest. Quare necesse est, ut axis AD infra centrum C ducatur, qua de re multæ egregiæ observationes geometricæ fieri possent, si ratio instituti id permetteret. Cæterum si hæc Solutio cum Exemplo secundo præced. Prop. §. 20 comparatur; apparebit eandem prorsus æquationem esse inventam, sive $\int y dx \times \sqrt{1+pp}$ debeat esse minimum, sive $\frac{\int y dx}{\int dx \sqrt{1+pp}}$ maximum. Discrimen tamen in hoc consistit; quod radius Circuli $c = \frac{A}{B}$ altero casu affirmative, altero negative debeat accipi. Scilicet si $\int y dx \times \sqrt{1+pp}$ debeat esse minimum, arcus BM convexitate sua spatium ABMP; altero autem casu, concavitate claudere debet.

EXEMPLUM II.

28. Intra datum angulum ACM, curvam AM construere Fig. 7. ita comparatam, ut area ACM per arcum AM divisa sit omnium maxima.

Ponatur angulus ACM, seu arcus circuli BS radio CB = 1 descriptus = x, qui in casu proposito fiat = a, quo $\frac{ACM}{AM}$ fieri debet maximum. Ponatur porro CM = y, sitque $dy = p dx$, erit Mn = y dx, & area ACM = $\frac{1}{2} \int y y dx$: arcus autem AM reperitur = $\int dx \sqrt{yy+pp}$: unde hæc fractio $\frac{\int y y dx}{2 \int dx \sqrt{yy+pp}}$, seu ejus duplum $\frac{\int y y dx}{\int dx \sqrt{yy+pp}}$ debebit esse maximum. Sit, casu quo x = a

est, $\int yy dx = A$, & $\int dx \sqrt{yy + pp} = B$; erit, si $x = e$,
 area $ACM = \frac{1}{2} A$, & arcus $AM = B$. Jam formulæ
 $\int yy dx = A$ valor differentialis dA est $= uv. dx. 2y$, &
 formulæ $\int dx \sqrt{yy + pp}$ valor differentialis dB est $= uv.$
 $dx \left(\frac{y}{\sqrt{yy + pp}} - \frac{1}{dx} d. \frac{p}{\sqrt{yy + pp}} \right)$. Quare cum
 generaliter invenerimus pro curva hanc æquationem $BdA =$
 $A dB$, erit divisione per ny instituta, $2By dx = \frac{Ay dy}{\sqrt{yy + pp}}$
 $- Ad. \frac{p}{\sqrt{yy + pp}}$. Multiplicetur ea per p , ob $p dx = dy$,
 erit $2By dy = A \left(\frac{y dy}{\sqrt{yy + pp}} - p d. \frac{p}{\sqrt{yy + pp}} \right)$. At
 est $d. \sqrt{yy + pp} = \frac{y dy}{\sqrt{yy + pp}} + \frac{p dp}{\sqrt{yy + pp}}$ &
 $\frac{y dy}{\sqrt{yy + pp}} = d. \sqrt{yy + pp} - \frac{p}{\sqrt{yy + pp}} dp$; un-
 de fiet $2By dy = A \left(d. \sqrt{yy + pp} - d. \frac{pp}{\sqrt{yy + pp}} \right)$,
 ob $p d. \frac{p}{\sqrt{yy + pp}} + dp \frac{p}{\sqrt{yy + pp}} = d. p. \frac{p}{\sqrt{yy + pp}}$
 $= d. \frac{pp}{\sqrt{yy + pp}}$. Quare integrando habebitur, si $\frac{A}{B} = c$
 ponatur, ista æquatio $yy \pm bb = c \sqrt{yy + pp} - \frac{c pp}{\sqrt{yy + pp}}$
 $= \frac{cyy}{\sqrt{yy + pp}}$ seu $p = \frac{y \sqrt{(c^2 y^2 - (yy + bb)^2)}}{yy \pm bb} = \frac{dy}{dx}$;
 hincque $dx = \frac{(yy + bb) dy}{y \sqrt{(c^2 y^2 - (yy + bb)^2)}}$: ex qua æquatio-
 ne facile deduci potest, si sit $cc + 4bb$ quantitas positiva;
 constructionem per quadraturam Circuli absolvi posse. At idem
 facilius patebit, si loco dx , vel p , introducamus perpendicu-
 lum CP , ex C in tangentem MP demissum. Quod si au-
 tem hoc perpendiculum CP ponatur $= u$, erit $y : u =$
 $dx \sqrt{yy + pp} : y dx$, hincque $\frac{yy}{\sqrt{yy + pp}} = u$; quamo-
 brem

brem cum esset $yy \pm bb = \frac{cyy}{\sqrt{(yy+pp)}}$ erit $yy \pm bb = cu$, quam constat esse aequationem ad ipsum Circulum. Hoc ut ostendamus, sumatur Circulus quicumque, centro O, radio OM = g descriptus, punctumque C sumtum sit in C, ita ut sit OC = b. Jam ducta recta CM = y, & CP = u, perpendiculari in tangentem MP, erit CP parallela radio OM. Ex M ducatur diametro EF parallela MR, erit MR = CO = b; CR = OM = g, & PR = u - g: quia igitur est MR² = MP² + PR² = CM² - CP² + PR², erit b² = y² - u² + (u - g)² = y² - 2gu + gg: hincque yy + gg - bb = 2gu; quæ comparata cum inventa $yy \pm bb = cu$, fiet $g = \frac{1}{2}c$, & $\pm bb = \frac{1}{2}cc - bb$, seu $bb = \frac{1}{4}cc \mp bb$. Erit itaque curva quæsita Circulus, radio = $\frac{1}{2}c$ descriptus, puncto C ubi libuerit accepto. In tali Circulo quæsito satisfaciet arcus AM, si fuerit $\frac{\Delta CM}{AM} = \frac{A}{2b} = \frac{1}{2}c =$ radio OM; hoc est si fuerit area ACM = arc. AM. AO = duplici sectori AOM. Hoc autem fieri nequit, nisi punctum C extra Circulum accipiatur; quo casu hæc conditio infinitis modis adimpleri potest; atque adeo effici ut curva satisfaciens per data duo puncta transeat.

Fig. 13.

EXEMPLUM III.

29. Invenire curvam DAD ad axem AC relatum, in qua pro data abscissa AC = a, sit $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ minimum. Fig. 14.

Si ponatur abscissa indefinita AP = x, applicata PM = y, & dy = p dx; exprimit $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ distantiam centri gravitatis curvæ MAM, tanquam uniformiter gravis spectatæ a puncto infimo A; quæ ergo distantia, translato P in C, debet esse minima. Ad hoc inveniendum, posito x = a, sit $\int x dx \sqrt{(1+pp)} = A$, & $\int dx \sqrt{(1+pp)} = B$: formulæ autem $\int x dx \sqrt{(1+pp)}$

reperitur valor differentialis $dA = -nv.d. \frac{x^p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & formula $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis $dB = -nv.d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; quibus in aequatione $BdA = AdB$ substitutis, prodibit $Bd. \frac{x^p}{\sqrt{(1+pp)}} = Ad. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & posito $\frac{A}{B} = c$, erit $d. \frac{x^p}{\sqrt{(1+pp)}} = c d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; unde integrando oritur $\frac{x^p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{cp}{\sqrt{(1+pp)}} - b$, seu $b\sqrt{(1+pp)} = (c-x)p$; hincque elicitur $p = \frac{b}{\sqrt{(c-x)^2 - bb}} = \frac{dy}{dx}$. Erit ergo $y = \int \frac{bdx}{\sqrt{(c-x)^2 - b^2}}$; quæ aequatio indicat curvam quaesitam esse Catenariam, initio abscissarum pro x in loco axis AC quocunque accepto: quin etiam pro axe sumi potest recta quaecunque diametro Catenariae AC parallela, in eaque punctum quodcunque pro axis initio. Quomocunque autem axis, ejusque initium constituatur, quaestioni satisfiet ea tantum curvæ portio, ubi fit $\int x dx \sqrt{(1+pp)} = c \int dx \sqrt{(1+pp)}$. Ponamus pro axe ipsam diametrum AC, & verticem A pro initio abscissarum accipi. Quia in A, ubi est $x = 0$, fit $\frac{dy}{dx} = p = \infty$, necesse est ut fit $cc - bb = 0$, ideoque $b = c$. Verum hoc casu fit $y = \int \frac{cdx}{\sqrt{(xx - 2cx)}}$, quæ curva fursum directæ fit imaginaria, donec fiat $x > 2c$. Sit ergo $x = 2c + t$, erit $t =$ abscissæ AP, & $y = PM = \int \frac{cdt}{\sqrt{(2ct + tt)}}$; curvaque DAD erit catenaria ordinaria. Quo autem appareat quanta ejus portio quaestioni satisfaciat, notandum est, ob $dx = dt$, esse $p = \frac{c}{\sqrt{(2ct + tt)}}$, & $\sqrt{(1+pp)} = \frac{c+t}{\sqrt{(2ct + tt)}}$; hincque $\int dx \sqrt{(1+pp)} = \int \frac{(c+t)dt}{\sqrt{(2ct + tt)}} = \sqrt{(2ct + tt)}$. At ipsa expressio $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ fit

fit $= 2c + \frac{\int t dt \sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(2ct+tt)}}$, quæ ipsi c æqualis fieri nullo modo potest. Ex quo concluditur nullam curvæ hujus portionem quæsito præ reliquis magis satisfacere. Quamobrem initium abscissarum non sumi potest in vertice A . Sumatur ergo in alio quocunque puncto, positaque $AP = t$, fieri debet $2bt + tt = (c-x)^2 - bb$; unde fit, vel $b + t = x - c$, vel $b + t = c - x$. Prior æquatio $x = b + c + t$ locum habere nequit; quia, ob $dx = dt$, fieri non potest $\frac{\int x dt \sqrt{(1+pp)}}{\int dt \sqrt{(1+pp)}}$ seu $(b+c + \frac{\int t dt \sqrt{(1+pp)}}{\int dt \sqrt{(1+pp)}}) = c$. Ergo fiat $x = c - b - t$, quo casu abscissæ ab aliquo puncto axis AC superiori deorsum descendunt: fierique deberet $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ seu $c - b - \frac{\int t dt \sqrt{(1+pp)}}{\int dt \sqrt{(1+pp)}}$ $= c$, quod pariter fieri nequit; ex quo concludendum est, nullam portionem magis quam aliam quamvis satisfacere. Hoc autem inde venire videtur, quod Catenaria duas habet partes conjugatas veluti Hyperbola conica, hincque semper fieri potest $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int dx \sqrt{(1+pp)}} = 0$, qui est valor minimus. Hoc clarius confirmari potest ex valore invento $p = \frac{b}{\sqrt{(c-x)^2 - b^2}}$; unde fit $\sqrt{(1+pp)} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 - b^2}} = (c-x)r$, posito brevitatis gratia $r = \frac{1}{\sqrt{(c-x)^2 - b^2}}$. Oporteret ergo in casu quæsito esse $\frac{\int (c-x) x r dx}{\int (c-x) r dx} = c$ seu $\int (c-x)^2 r dx = 0$, quod cum casu $x = 0$ evanescere debeat, alio insuper casu evanescere deberet. At est $\int (c-x)^2 r dx = \int \frac{(c-x)^2 dx}{\sqrt{(c-x)^2 - b^2}}$ $= -\frac{1}{2}(c-x)\sqrt{(c-x)^2 - b^2} - \frac{bb}{2} \int \frac{c-x + \sqrt{(c-x)^2 - b^2}}{c + \sqrt{(c-x)^2 - b^2}}$ $+ \frac{1}{2}c\sqrt{(c-x)^2 - b^2}$, quæ expressio, cum semel fuit $= 0$, post, ob $(c-x)^2$ perpetuo affirmativum, continuo crescet neque de-

nuo

nuo fieri potest = 0. Quamobrem ambos terminos integrationis formulæ $\int \frac{(c-x)^2 dx}{\sqrt{(c-x)^2 - b^2}}$ inter se congruere oportet; quod evenit si fuerit $x=c$: quo casu curva satisfaciens abit in lineam rectam axi normalem, quæ utique centrum suum gravitatis a se minime habet remotum.

E X E M P L U M IV.

30. *Invenire curvam, in qua, pro data abscissa $x=a$, sit hæc expressio $\frac{\int y x dx}{\int dx \sqrt{1+pp}}$ maximum vel minimum.*

Posito $x=a$, fiet $\int y x dx = A$, & $\int dx \sqrt{1+pp} = B$. Jam formulæ $\int y x dx$ valor differentialis est $dA = n v. dx. x = n v. x dx$, & formulæ $\int dx \sqrt{1+pp}$ valor differentialis est $dB = - n v. d. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$. Quare cum sit $B dA = A dB$, habebitur ista æquatio $B x dx = - d. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$, seu $x dx = - c c d. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$, posito $A = B c^2$. Unde integrando obtinebitur $xx = C - \frac{2ccp}{\sqrt{1+pp}}$, hincque $p = \frac{bc - xx}{\sqrt{4c^2 - (bc - xx)^2}}$ $= \frac{dy}{dx}$; quæ præbet $y = \int \frac{(bc - xx) dx}{\sqrt{4c^2 - (bc - xx)^2}}$, quæ est æquatio generalis pro curva Elastica: cujus hæc proprietas, quod radius osculi ubique abscissæ x sit reciproce proportionalis: id quod patet ex æquatione $x dx = - c c d. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$, quæ abit in $\frac{-dx}{d. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}} = \frac{cc}{x}$, estque $\frac{-dx}{d. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}} = - \frac{dx(1+pp)^{3/2}}{dp}$ radius osculi in curva. Hujus autem curvæ tanta portio ab initio computando satisfacit, in qua erit $\int y x dx =$

$\equiv cc \int dx \sqrt{(1+pp)} = 2c^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(4c^2 - (bc - xx)^2)}}$; quæ determinatio eo revocatur, ut effici debeat $\int dx \sqrt{(4c^2 - (bc - xx)^2)}$
 $\equiv (aa - bc) \int \frac{dx (bc - xx)}{\sqrt{(4c^2 - (bc - xx)^2)}}$, si post integrationem utramque ponatur $x = a$. Hoc itaque modo constans illa c per a determinabitur.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA.

31. *Invenire æquationem inter binas variables x & y ita comparatam, ut, posita variabili x = a, maximum minimumve fiat expressio W, quæ sit functio quacunque formularum integralium, $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$, &c. in quibus denotent Z, Y, X &c. functiones quascunque ipsarum x, y, p, q, &c. sive, determinatas, sive indeterminatas.*

S O L U T I O.

Ponamus idoneam æquationem inter x & y jam esse inventam, positoque $x = a$, fieri $\int Z dx = A$; $\int Y dx = B$; $\int X dx = C$ &c. hisque valoribus in expressione W substitutis, habebitur revera maximum vel minimum. Quod si igitur altera variabilis y in uno loco particula n ν augeri ponatur, atque nascentes hinc mutationes in singulis formulis $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. introducantur, idem pro W valor prodire debet. At ab illa particula n ν formulæ $\int Z dx$, $\int Y dx$, & $\int X dx$ &c. quæque suis valoribus differentialibus augebuntur. Si ergo ponatur formulæ $\int Z dx$ valor differentialis $= dA$, formulæ $\int Y dx = dB$, formulæ $\int X dx = dC$, &c. loco quantitatum A , B , C , &c. orientur a particula n ν istæ auctæ $A + dA$, $B + dB$, $C + dC$ &c. quæ in W substitutæ eundem valorem producere debent, quem ipsæ A , B , C , &c. Ponamus, $A + dA$, $B + dB$, $C + dC$ &c. loco $\int Z dx$, $\int Y dx$, $\int X dx$ &c. substitutis, prodire $W + dW$; eritque $W + dW = W$, ideoque $dW = 0$. Hic autem valor dW , ut ex differentiationis natura liquet, invenitur,
 Euleri De Max. & Min. X tur,

tur, si quantitas W , postquam in illa, loco formularum integralium, litteræ A, B, C &c. sunt substitutæ, differentietur, his ipsis litteris A, B, C , &c. tanquam variabilibus tractatis; in hocque differentiali, dA, dB, dC &c. valores differentiales formularum respondentium $\int Z dx, \int Y dx, \int X dx$ &c. designent. Hac igitur significatione sumptum differentiale quantitatis propositæ W , si id nihilo æquale ponatur, dabit æquationem inter x & y quæsitam. Q. E. I.

COROLL. I.

32. Si ergo proposita fuerit ejusmodi expressio W functio formularum integralium $\int Z dx, \int Y dx, \int X dx$ &c. quæ, pro determinato ipsius x valore $= a$, debeat esse maximum vel minimum: tum loco formularum $\int Z dx, \int Y dx, \int X dx$ &c. scribantur litteræ A, B, C , &c. quo factò, expressio W differentietur his litteris A, B, C , &c. solis tanquam variabilibus tractatis, atque differentiale ponatur $= 0$.

COROLL. II.

33. In hoc differentiali, in quo inerunt litteræ A, B, C ; &c. cum suis differentialibus dA, dB, dC &c. litteræ A, B, C &c. denotabunt respective valores formularum $\int Z dx, \int Y dx, \int X dx$ &c. quos induunt posito $x = a$; at differentialia dA, dB, dC , &c. exprimunt valores differentiales earundem formularum integralium abscissæ $x = a$ respondentes.

COROLL. III.

34. Ex præcedentibus autem apparet, si Z, Y, X &c. fuerint functiones determinatæ quantitatum x, y, p, q , &c. tum valores differentiales dA, dB, dC , &c. non a valore a pendere: contra vero si Z, Y, X &c. fuerint functiones indefinitæ, tum valores differentiales dA, dB, dC &c. simul a valore a pendere debere.

COROLL. IV.

35. Cum igitur hoc modo W fiat functio litterarum A, B, C , &c. ejus differentiale hujusmodi habebit formam $FdA + GdB + HdC + \&c.$ hincque æquatio quæsitæ erit $0 = FdA + GdB + HdC + \&c.$ ubi F, G, H &c. erunt quantitates constantes, per A, B, C &c. determinatæ.

COROLL. V.

36. Æquatio ergo Problemati satisfaciens, constabit ex valoribus differentialibus singularum formularum integralium in maximi minimive expressione W contentarum, singulis per constantes quantitates determinatas multiplicatis: horum scilicet productorum aggregatum nihilo æquale positum dabit æquationem desideratam.

SCHOLIUM I.

37. Potuiffemus hanc Problema propositum resolvendi methodum, ex solutionibus binorum Problematum præcedentium, per inductionem, jam concludere: quippe ex quibus jam patebat, si fuerit maximi minimive formula W , vel productum ex duabus formulis integralibus, vel quotus ex divisione unius per alteram ortus, tum differentiale expressionis W modo exposito sumtum præbere æquationem Problemati convenientem. Præstitit autem hoc Problema, ob summam ejus extensionem, singulari solutione munire. In hoc enim Problemate continentur omnes omnino Quæstiones, quæ in hoc genere, quo expressio quæpiam maxima minimave desideratur, unquam proponi atque excogitari possunt: ideoque per istam Propositionem penitus exhausta est methodus maximorum ac minimorum absoluta, quam primo pertractandam suscepimus. Præterea hîc notandum est, si expressio W non tantum formulas integrales, uti posui-

mus, complectatur; verum etiam functiones determinatas ipsarum x, y, p, q , &c. tum solutionem nihilo difficiliorem reddi. Nam pari modo, loco harum functionum determinatarum, quantitates constantes poni debent, in quas scilicet abeunt posito $x = a$; at postmodum, in differentiatione ipsius W , has quantitates etiam tanquam constantes tractari oportet; eo quod functiones determinatæ nullos valores differentiales recipiunt. Quo autem clarius appareat, quomodo istiusmodi expressiones tractari conveniat; in sequentibus Exemplis nonnulla occurrent, quæ hoc argumentum penitus illustrabunt.

EXEMPLUM I.

38. *Invenire curvam coordinatis orthogonalibus contentam, in qua sit maximum vel minimum ista expressio $(1 + pp)^{1/2} \int y dx + \int x dy \sqrt{1 + pp}$; si ponatur abscissa $x = a$.*

Ponamus æquationem inter x & y quæsito satisfaciendam jam esse inventam, atque posito $x = a$ fieri $y = f$ & $\sqrt{1 + pp} = g$; itemque $\int y dx = A$, & $\int x dy \sqrt{1 + pp} = B$; erit $dA = y \cdot dx$, & $dB = x \cdot d\sqrt{1 + pp}$. Expressio igitur, quæ maxima erit vel minima, hoc casu est $gA + fB$, cujus differentiale est $g dA + f dB$; quod positum $= 0$, dabit æquationem desideratam pro curva. Hic scilicet intelligitur litteras y & f , quæ ex functionibus determinatis sunt ortæ, in differentiatione tanquam quantitates constantes esse tractatas. Substitutis jam pro dA & dB valoribus debitis, divisioneque per ny facta, oritur ista æquatio pro curva quæsitæ $g dx = f d \frac{p}{\sqrt{1 + pp}}$. Ponatur $\frac{f}{g} = c$, ita ut sit $\frac{y}{\sqrt{1 + pp}} = c$, casu quo est $x = a$; erit integrando $x + b = \frac{cp}{\sqrt{1 + pp}}$, atque $p =$

$\frac{x+b}{\sqrt{cc - (x+b)^2}} = \frac{dy}{dx}$; ex qua fit $y = b \pm \sqrt{c^2 - (x+b)^2}$. Curva igitur satisfaciens est Circulus, radio c descriptus, abscissis super recta quacunque assumptis, pariterque abscissarum initio ubicumque statuto. Quantitas autem c , quæ radium Circuli constituit, ex definita abscissa $x = a$ determinatur; quia esse debet $\frac{y}{\sqrt{(1+pp)}} = c$, casu quo $x = a$. Fit autem hoc casu $y = b \pm \sqrt{c^2 - (a+b)^2}$, & $\sqrt{(1+pp)} = \frac{c}{\sqrt{cc - (a+b)^2}}$: unde oritur $cc = b\sqrt{cc - (a+b)^2} \pm (cc - (a+b)^2)$, per quam, vel c per a , vel vicissim a per c determinari potest. Ponamus esse $b = 0$, $b = -c$, ita ut axis sit Circuli diameter, initiumque abscissarum in vertice constituatur; erit $y = \sqrt{(2cx - xx)}$, atque fiet $(a-c)^2 = 0$, seu $c = a$. Ex quo intelligitur, hoc casu quadrantem Circuli quæsito satisfacere. Sin autem initium abscissarum in loco diametri quocunque capiatur, fiet tantum $b = 0$, & si applicatæ positivæ sumantur fiet $(a+b)^2 = 0$, seu, $b = -a$. Diameter Circuli ergo manet indeterminatus: portioque Circuli hoc modo sumti quæstioni satisfaciet, quæ abscissæ a sua origine ad centrum Circuli usque productæ respondet.

E X E M P L U M I I.

39. Invenire æquationem inter x & y , ut pro valore definito $x = a$, hæc expressio $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ $\int y dx$ fiat maximum vel minimum.

Posito $x = a$, fiat $y = f$, $\int dx \sqrt{(1+pp)} = A$, & $\int y dx = B$, erit $dA = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ & $dB = n v. dx$.

Maximum ergo minimumve esse oportet hanc quantitatem $f^A B$, cujus differentiale est $f^A B dA + f^A dB$; quod positum $= 0$ dabit $B dA = -dB$. Pro æquatione quæsitæ igitur ha-

betur $B l f d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = dx$, & integrando $x+b = \frac{B p l f}{\sqrt{(1+pp)}}$
 $= \frac{c p}{\sqrt{(1+pp)}}$, posito $B l f = c$. Habetur ergo $p =$
 $\frac{b+x}{\sqrt{(cc-(b+x)^2)}}$ & $y = b \pm \sqrt{(c^2 - (b+x)^2)}$. Erit
 igitur $f = b \pm \sqrt{(c^2 - (b+x)^2)}$, posito $x = a$, atque
 $B = \int y dx = b a \pm \int dx \sqrt{(c^2 - (b+x)^2)}$, posito post
 integrationem $x = a$. Facto igitur $B l f = c$, innotescet va-
 lor a , cui si x æqualis capiatur in Circulo radii c , portio abscin-
 detur Problemati satisfaciens. Caterum ex his & Coroll. 5
 colligere licet, quoties formula maximi minimive fuerit functio
 quæcunque binarum harum formularum $\int y dx$ & $\int dx \sqrt{(1+pp)}$,
 curvam satisfaciens perpetuo esse Circulum: tantum ex solu-
 tione quantitas portionis satisfaciens debet diligenter investi-
 gari ac determinari.

E X E M P L U M III.

40. Invenire æquationem inter x & y , ut, posito $x = a$, maximum
 minimumve fiat ista expressio $e^{-n \int dx \sqrt{(1+pp)}} \int e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}} dx$.

Ponamus, casu proposito quo $x = a$, fieri $n \int dx \sqrt{(1+pp)} = A$, atque $\int e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}} dx = B$; ita ut maximum mi-
 nimumve sit hæc quantitas $e^{-A} B$, cujus differentiale est
 $e^{-A} dB - e^{-A} B dA$; quod positum $= 0$ dabit æqua-
 tionem hanc $dB = B dA$. At est dA valor differentialis for-
 mulæ $n \int dx \sqrt{(1+pp)}$, unde erit $dA = n v. d. \frac{np}{\sqrt{(1+pp)}}$;
 atque dB est valor differentialis formulæ $\int e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}} dx$,
 quæ continetur in Casu secundo §. 7, ubi est $Z = e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}}$
 & $\Pi = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, ita ut sit $Z = e^{n \Pi}$, & dZ
 $= e^{n \Pi} n d \Pi$, unde erit $L = e^{n \Pi} n$, & reliquæ litteræ $M, N,$
 $P.$

P , &c. fiet $= 0$. Porro, ob $\pi = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, erit $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$, & $d[Z] = \frac{p dp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ex quo erit $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Jam est $\int L dx = \int n e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}} dx$, cujus valor, posito $x = a$, erit $= nB$; hincque $V = n(B - \int e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}} dx)$. Per Regulam ergo datam fiet $dB = n v. dx (- \frac{d.[P] V}{dx}) = - n v. d. \frac{n p (B - \int e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}} dx)}{\sqrt{(1+pp)}} = - n v. d. \frac{n B p}{\sqrt{(1+pp)}}$, ob $dB = B dA$. Integrando itaque eris $\frac{n p (B - \int e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}} dx)}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{n B p}{\sqrt{(1+pp)}} - nb$; hincque $\frac{b \sqrt{(1+pp)}}{p} = \int e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}} dx$. Ex qua æquatione, quia valor determinatus a excessit, perspicuum est æquationem inventam pro quovis ipsius x valore æque valere. Ut autem hanc æquationem evolvamus, erit, differentialibus sumtis, $\frac{-b dp}{p^2 \sqrt{(1+pp)}} = e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}} dx$: quæ, per $\sqrt{(1+pp)}$ multiplicata atque integrata, dat $\frac{nb}{p} + c = \int e^{n \int dx \sqrt{(1+pp)}} dx$, qui exponentialis quantitatis valor in illa æquatione substitutus, dabit $\frac{nb dx}{p} + c dx = \frac{b dp}{p^2 \sqrt{(1+pp)^2}}$ seu $dx = \frac{-b dp}{p(nb+cp) \sqrt{(1+pp)}}$. Commodior autem æquatio oritur, si ponatur $\int dx \sqrt{(1+pp)} = s$, eritque s arcus curvæ, si fuerint x & y coordinatæ normales. Quare habebitur ista æquatio $nb + cp = e^{ns} p$, quæ per dx multiplicata, ob $dy = p dx$, abit in hanc $nb dx + c dy = e^{ns} dy$.
Cum

Cum autem, posito, $x = 0$, arcus s evanescere debeât, necesse est ut sit hoc casu $\frac{n b}{p} + c = 0$; hinc itaque vel dato curvæ initio constans c determinabitur, vel vicissim ex c positio primæ tangentis innotescet. Cæterum si hanc quæstionem attentius contemplemur, deprehendemus eam jam contineri in Exemplo quodam Capitis præced. §. 45. Cum enim nostra expressio, quæ maximum minimumve esse debeat, sit $e^{-n \int dx \sqrt{1+pp}}$ $\int e^{n \int dx \sqrt{1+pp}} dx$; ponatur ea $= W$, erit $e^{n \int dx \sqrt{1+pp}} W = \int e^{n \int dx \sqrt{1+pp}} dx$, atque differentiando fiet $dW + nW dx \sqrt{1+pp} = dx$. Maximi igitur minimive expressio W datur per æquationem differentialem, quæ in Casu quarto §. 7 continetur: atque methodo convenienti tractata ad eandem perducit æquationem, quam hîc invenimus. Quæstionem autem illam in se complectentem supra in Cap. præc. §. 45 tractavimus, in quo hunc ipsum casum adjunctum spectare licet. Comparatione autem instituta, summus perspicietur consensus solutionum variarum ejusdem Problematis, quæ quidem tentari queant.

E X E M P L U M IV.

41. *Invenire curvam in qua, pro data abscissa $= a$, fiat ista expressio*
 $\frac{\int dx \sin. Ay \sqrt{1+pp}}{\int dx \cos. Ay \sqrt{1+pp}}$ *maximum vel minimum.*

Posito $x = a$, fiat $\int dx (1+pp)^{1/2} \sin. Ay = A$, & $\int dx (1+pp)^{1/2} \cos. Ay = B$; erit, per valores differentiales, $dA = n v. dx ((1+pp)^{1/2} \cos. Ay - \frac{1}{dx} d. \frac{p \sin. Ay}{\sqrt{1+pp}})$, & $dB = n v. dx (-(1+pp)^{1/2} \sin. Ay - \frac{1}{dx} d. \frac{p \cos. Ay}{\sqrt{1+pp}})$.
 Cum igitur $\frac{A}{B}$ debeat esse maximum vel minimum, erit $B dA$

=

$\equiv A dB$; posito ergo $\frac{A}{B} = m$, fiet $(1+pp)^{1:2} dx \text{ cof. } Ay$
 $\text{--- } d. \frac{p \text{ fin. } Ay}{\sqrt{(1+pp)}} = \text{--- } m(1+pp)^{1:2} dx \text{ fin. } Ay \text{ --- } md. \frac{p \text{ cof. } Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$
 Multiplicetur per p , erit [ob $d. (1+pp)^{1:2} \text{ fin. } Ay =$
 $dy(1+pp)^{1:2} \text{ cof. } Ay + \frac{p dp \text{ fin. } Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$, & $d. (1+pp)^{1:2} \text{ cof.}$
 $Ay = \text{--- } dy(1+pp)^{1:2} \text{ fin. } Ay + \frac{p dp \text{ cof. } Ay}{\sqrt{(1+pp)}}] d. (1+pp)^{1:2}$
 $\text{fin. } Ay \text{ --- } d. \frac{pp \text{ fin. } Ay}{\sqrt{(1+pp)}} = m d. (1+pp)^{1:2} \text{ cof. } Ay \text{ ---}$
 $md. \frac{pp \text{ cof. } Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$; quæ integrata & reducta præbet $\frac{\text{fin. } Ay}{\sqrt{(1+pp)}}$
 $\equiv \frac{m \text{ cof. } Ay}{\sqrt{(1+pp)}} + b$, sive $b\sqrt{(1+pp)} = \text{fin. } Ay \text{ --- } m \text{ cof. } Ay$;
 ubi notandum est fieri debere, si $x = a$ ponatur, $m =$
 $\frac{\int dx (1+pp)^{1:2} \text{ fin. } Ay}{\int dx (1+pp)^{1:2} \text{ cof. } Ay}$. Sit $m = \frac{\text{fin. } An}{\text{cof. } An} = \text{tang. } An$; fiet
 $b\sqrt{(1+pp)} = \frac{\text{fin. } A(y-n)}{\text{cof. } An}$, atque $y = n + A \text{ fin. } b(1+pp)^{1:2}$
 $\text{cof. } An$. Quia vero est $dy = p dx$, erit $dx = \frac{dy}{p}$. At est $dy =$
 $\frac{cp dp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$, posito $b \text{ cof. } An = c$. Ex
 quibus conficitur $x = \int \frac{cdp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$, atque
 $y = \int \frac{cp dp}{\sqrt{(1+pp)(1-cc-ccpp)}}$; longitudo autem curvæ
 erit $= \int \frac{cdp}{\sqrt{(1-cc-ccpp)}} = A \text{ fin. } \frac{cp}{\sqrt{(1-cc)}}$. Quare si
 arcus curvæ dicatur s ; habebitur ista concinna æquatio $dx \text{ fin. } As$
 $= \frac{cdy}{\sqrt{(1-cc)}}$: Constructio vero ex anterioribus formulis spon-
 te consequitur.

SCHOLIUM II.

42. His igitur Capitibus penitus absolvimus eam Methodi maximorum ac minimorum ad lineas curvas inveniendas accommodatæ partem, quam absolutam vocavimus: in qua semper linea curva requiri solet, quæ habeat, pro dato quodam abscissæ seu alterius variabilis x valore, expressionem quamcunque indeterminatam, maximum minimumve. Nam ista expressio, quæ maximum minimumve esse debet, vel erit una quædam formula integralis formæ $\int Z dx$, ita ut Z sit functio quæcunque ipsarum x, y, p, q , &c. sive definita sive indefinita; pro quibus casibus Methodum tradidimus in Capitibus præcedentibus: Vel maximi minimive expressio illa continebit in se plures ejusmodi formulas integrales, ita ut sit duarum pluriumve formularum integralium functio quæcunque; pro hocque casu Methodus idonea in isto Capite est exposita, atque Exemplis illustrata. Univerfa autem Methodus, quam hic dedimus, nititur inventionem valorum differentialium, qui singulis formulis integralibus quæ vel ipsæ maximum minimumve esse debeant, vel in maximi minimive expressione contineantur, atque ideo tota solvendi Methodus reducitur ad Casus illos, quos §. 7 hujus Capitis conjunctim representavimus. Qui igitur illos casus in memoria tenet, vel in promptu habet, is ad omnia hujus generis Problemata expedite resolvenda erit paratus. Neque vero solum Casus ibi enumerati Methodum maximorum ac minimorum absolutam constituunt; verum etiam Methodum alteram relativam, quam in sequentibus aggrediemur, absolvunt; ex quo illorum Casuum summus usus in utraque Methodo abunde perspicitur. Hanc autem tractationem duobus Capitibus absolvemus, in quorum priori omnibus curvis, ex quibus quaesita debet erui, unam quandam proprietatem communem, in posteriori vero plures tribuemus.