

www.e-rara.ch

**Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes
sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti**

Euler, Leonhard

Lausannae & Genevae, 1744

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 4999

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-1490>

Caput V. Methodus, inter omnes curvas eadem proprietate praeditas, inveniendi eam, quae
maximi minimive proprietate gaudeat.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

CAPUT V.

Methodus, inter omnes curvas eadem proprietate præditas, inveniendi eam, quæ maximi minimive proprietate gaudeat.

DEFINITIO.

1. **P**roprietas communis est Formula integralis, seu expressio indefinita, quæ in omnes curvas ex quibus quæsitam determinari oportet, æqualiter competit.

SCHOLIUM I.

2. Hactenus Methodum maximorum ac minimorum tradidimus absolutam, in qua perpetuo, inter omnes omnino curvas eidem abscissæ respondentes, una requiri solebat, quæ maximi minimive cujuscumque proprietate gauderet. Nunc autem progredimur ad Methodum relativam, in qua unam lineam maximi minimive proprietate præditam determinare docebimus, non ex omnibus omnino lineis eidem abscissæ respondentibus, verum ex illis, innumerabilibus quidem, lineis curvis tantum, quibus una quædam proprietas proposita pluresve sint communes. Ac primo quidem, in hoc Capite, innumerabiles curvas eidem abscissæ respondentes contemplabimur, quæ unam quandam proprietatem habeant communem; ex hisque unam lineam investigabimus, in qua expressio quæcunque indefinita maximum minimumve obtineat valorem. Hoc in genere inprimis celebre est *Problema Isoperimetricum*, initio hujus sæculi publice propositum, in quo, inter omnes curvas ejusdem longitudinis quæ quidem eidem abscissæ respondeant, eam definiri oportebat, quæ contineret maximi minimive cujuscumque proprietatem. Postmodum autem hæc Quæstio in latiori sensu est accepta, ut ista deter-

minatio non solum inter omnes curvas ejusdem longitudinis fieret, verum etiam inter omnes curvas alia quacunq; proprietate communi præditas; quam ipsam quæstionem in hoc Capite pertractare suscepimus. Cum igitur curva sit eligenda, non ex omnibus omnino curvis eidem abscissæ respondentibus, verum ex iis, innumerabilibus duntaxat, in quas proprietas quæpiam proposita æqualiter competat; hanc ipsam proprietatem ante omnia considerari oportet, quam hîc nomine proprietatis communis indicamus. Hæc igitur proprietas communis, veluti æqualitas longitudinis curvarum, omnia puncta media afficere debet, & hanc ob rem erit functio indefinita, quæ, non ex unius curvæ elementi, verum ex totius curvæ positione determinetur. Quam ob rem istiusmodi proprietas communis erit, vel formula integralis indefinita simplex, vel expressio plures ejusmodi formulas integrales complectens. Omnino igitur pari modo erit comparata, quo ipsa maximi minimive formula, seu expressio. Eadem igitur varietates atque divisiones, quas ante circa maximi minimive expressionem fecimus & tractavimus, æque ad proprietatem communem pertinebunt.

C O R O L L. I.

3. Si igitur proprietas communis fuerit proposita, quæ sit B , tum omnes curvæ sunt considerandæ, quæ pro eadem data abscissa eundem valorem ipsius B continent; atque ex his ea debet definiri, quæ habeat maximum vel minimum.

C O R O L L. II.

4. In Problematis ergo huc pertinentibus duas res datas esse oportet, proprietatem communem B , ac maximi minimive expressionem A . Quibus datis, inter omnes curvas pro data abscissa eundem valorem B continentes, ea definiri debebit, quæ pro eadem abscissa valorem ipsius A habeat maximum vel minimum.

COROLL. III.

5. Dantur autem non solum infinitæ curvæ, quæ pro data abscissa eandem proprietatem communem habeant, sed etiam dantur infinitis modis. Assumta enim curva quacunque pro lubitu, ea determinatum habebit valorem proprietatis communis propositæ; præter eam autem dabuntur innumerabiles aliæ eundem valorem proprietatis communis pro eadem abscissa continentes.

COROLL. IV.

6. Proposita igitur expressione quacunque indefinita, innumerabilia infinitarum curvarum dabuntur genera; quorum quodlibet genus infinitas in se complectitur curvas, quæ pro eadem data abscissa eundem illius expressionis valorem contineant.

COROLL. V.

7. Cum igitur infinita dentur genera, quorum singula innumerabiles lineas curvas comprehendunt, in quas proposita proprietate communi expressio æqualiter competat; in uno quoque genere dabitur una curva, quæ, pro reliquis ejusdem generis curvis, alteram expressionem in maximo minimeve gradu contineat.

COROLL. VI.

8. Quoniam ergo, ex quolibet genere, una curva maximi minimeve proprietate prædita invenitur; omnino ejusmodi curvæ satisfaciens infinitæ invenientur, quarum quævis ita erit comparata, ut inter omnes alias eadem proprietate communi gaudentes, maximi minimeve proprietate sit prædita.

9. Hæc omnia magis illustrabuntur, si proprietatem communem, de qua hætenus in genere sumus locuti, definiamus. Sit igitur proprietas communis, formula longitudinem arcus curvæ exprimens, maximi minimive expressio autem sit $\int Z dx$; ita ut, inter omnes curvas quæ habeant arcus eidem abscissæ respondentes inter se æquales, ea debeat determinari, in qua pro eadem abscissâ fiat $\int Z dx$ maximum vel minimum. Manifestum autem est, non solum infinitas lineas curvas dari pro eadem abscissâ longitudine æquales, verum hoc etiam infinitis modis fieri posse. Sit enim abscissâ communis $= a$, sumaturque quæcunque longitudo c major quam a , infinitæ exhiberi poterunt lineæ, tum rectæ tum curvæ, quarum singularum longitudo sit $= c$; atque inter has definiri poterit una, in qua sit $\int Z dx$ maximum vel minimum. Loco c autem infinitæ accipi possunt quantitates; eo quod alia non adest conditio, nisi ut sit $c > a$; atque quilibet valor pro c assumtus dabit unam curvam maximi minimive proprietate præditam. Quamobrem, pro infinitis ipsius c valoribus, infinitæ reperientur lineæ curvæ quæstioni satisfaciennes. Neque tamen idcirco Quæstio pro indeterminata est habenda: nam solutio ipsa, infinitas curvas satisfaciennes præbens, ita est interpretanda, ut unaquæque harum curvarum inventarum inter omnes alias æque longas possideat valorem formulæ $\int Z dx$ in maximo minimove gradu. Perspicuum autem est, quod hîc de æqualibus arcibus curvarum ostendimus, idem de alia quacunque formula seu expressione indeterminata valere debere. Ita si, inter omnes curvas quæ, pro data abscissâ $x = a$, valorem formulæ $\int Y dx$ eundem continent, ea requiratur in qua sit $\int Z dx$ maximum vel minimum; tum infinitæ quidem reperientur lineæ satisfaciennes: verum hæc inter se ita discrepabunt, ut quælibet, inter omnes alias possibiles lineas curvas secum valorem formulæ $\int Y dx$ communem habentes, contineat formulæ $\int Z dx$ valorem maximum vel minimum.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

10. *Quæ curva, inter omnes omnino curvas eidem abscissæ respondententes, maximi minimive cujuscumque propositi proprietate gaudet; eadem curva simul, inter omnes curvas communi quacunque cum ipsa proprietate præditas, eadem maximi minimive proprietate gaudebit.*

DEMONSTRATIO.

Sit maximi minimive expressio $= A$, proprietâs autem communis $= B$; eritque tam A quam B , vel formula integralis indefinita, vel expressio ex hujusmodi pluribus formulis composita. Ponamus jam curvam esse inventam, quæ, inter omnes omnino curvas eidem abscissæ respondententes, expressionem A contineat maximam vel minimam; ea curva certum quemdam expressionis B continebit valorem; præter eam autem dabuntur innumerabiles aliæ, in quas idem expressionis B valor competet; hæque innumerabiles curvæ omnes jam continentur in illis omnibus omnino curvis, ex quibus ea, in qua expressio A est maximum minimumve, est inventa. Cum igitur hæc curva, inter omnes omnino curvas, proposita maximi minimive proprietate gaudeat; eadem quoque, inter illas infinitas curvas secum expressionem B communem habentes, valorem expressionis A maximum minimumve possidebit. Q. E. D.

COROLL. I.

11. Methodus igitur absoluta etiam Problematis Methodi relativæ resolvendis inservit: dum unam semper curvam satisficientem exhibet. Verum tamen solutionem completam non largitur.

COROLL. II.

12. Curva ergo, quæ, inter omnes, expressionem A habet
maxi-

maximam vel minimam, erit una ex infinitis illis curvis, quarum singulæ, inter omnes alias secum communi proprietate *B* gaudentes, eandem expressionem *A* maximam habent minimamve.

C O R O L L. III.

13. Solutio igitur Problematis, quo, inter omnes curvas eadem communi proprietate *B* præditas, ea quæritur in qua sit *A* maximum vel minimum, latius patebit, quam si absolute, inter omnes curvas, ea quæreretur in qua est *A* maximum vel minimum; illaque solutio hanc tanquam casum specialem in se comprehendet.

P R O P O S I T I O II. P R O B L E M A.

14. *Methodum resolvendi Problemata, in quibus, inter omnes curvas communi quadam proprietate gaudentes, ea requiritur qua maximi minimive cujuscumque propositi proprietate gaudeat, in genere adumbrare.*

S O L U T I O.

Fig. 15. Omne maximum vel minimum ita est comparatum, ut, facta mutatione infinite parva, valor ejus omnino non immutetur. Quamobrem si curva *az*, inter omnes curvas eidem abscissæ *AZ* respondententes, quæ quidem communi proprietate *B* gaudeant, habeat valorem expressionis *A* maximum vel minimum; eundem valorem retinebit, si ipsi talis mutatio infinite parva inferatur, qua communis proprietas *B* non turbetur. Ad hoc autem non sufficit, ut ante fecimus, unicam applicatam, puta *Nn*, particula infinite parva *n* auxisse: quoniam enim hoc modo tota mutatio unica conditione determinatur, per eam effici nequit, ut tam proprietas communis *B* in ipsam curvam & immutatam æqualiter competat, quam maximi minimive expressio *A*. Quocirca mutationem adhibendam binis conditionibus

nibus determinatum esse oportet; id quod obtinebitur, si binæ applicatæ Nn , & Oo particulis infinite parvis n & o augeantur. Quod si ergo curva hoc modo immutari concipiatur; primum efficiendum est, ut proprietas communis cum in ipsam curvam tum in mutatam æque competat; deinde etiam maximi minimive expressio in utraque curva eundem valorem retinere debet. Prius præstabitur, si expressionis, qua proprietas communis continetur, valor differentialis investigetur, oriundus ex translatione binorum n & o in v & ω , isque evanescens ponatur; posteriori vero conditioni satisfiet, si pari modo valor differentialis expressionis, quæ maximum minimumve esse debet, quæratur, oriundus ex binis particulis n & o , atque nihilo æqualis ponatur. Hoc pacto, duæ obtinebuntur æquationes, altera ex proprietate communi, altera ex maximi minimive expressione; utraque autem ejusmodi habebit formam $S. n + T. o = 0$; in qua S & T erunt quantitates ad curvam pertinentes. Ex binis autem ejusmodi æquationibus eliminabuntur particule n & o ; provenietque æquatio pro curva quæsita, quæ, inter omnes alias eadem communi proprietate B præditas, habeat valorem expressionis A maximum vel minimum. *Q. E. I.*

COROLL. I.

15. Solutio igitur hujusmodi Problematum quoque reduci-
tur ad inventionem valorum differentialium: ipsi autem valo-
res differentiales ab iis quos ante dedimus in hoc discrepant,
quod ex translatione duorum curvæ punctorum definiri debeant.

COROLL. II.

16. Ejusmodi valores differentiales ergo ex duabus particu-
lis n & o oriundos, in quovis Problemate, binos investi-
gari oportet; alterum pro proprietate communi, alterum pro
maximi minimive expressione,

Euleri de Max. & Min.

Z

Co-

COROLL. III.

17. Inventis autem in quovis Problemate his duobus valoribus differentialibus, uterque nihilo æqualis poni debet; ex quobinæ nascentur æquationes, quæ, eliminandis particulis assumptis n & o , præbebunt unam æquationem naturam curvæ quæsitæ exprimentem.

COROLL. IV.

18. Si ergo, inter omnes curvas eidem abscissæ respondentes, quæ communi proprietate B æqualiter sunt præditæ, ea requiratur, in qua expressio A fiat maximum vel minimum; tum utriusque expressionis A & B valores differentiales, ex binis particulis n & o oriundi, quæri, & nihilo æquales poni debent; ex quibus duabus æquationibus si eliminentur particulæ n & o , emerget æquatio pro curva quæsitæ.

COROLL. V.

19. In hac itaque operatione, ambæ expressiones A & B omnino pariter tractantur; neque in considerationem venit, utra vel proprietatem communem vel maximum minimumve denotet. Ex quo perspicuum est, eandem solutionem prodire debere, si expressiones A & B inter se commutentur.

COROLL. VI.

20. Eadem ergo solutio locum habebit, si, inter omnes curvas communi proprietate B gaudentes, ea quærat in qua fit A maximum vel minimum: si vicissim, inter omnes curvas communi proprietate A gaudentes, ea quærat in qua fit B maximum vel minimum.

SCHOLIUM.

21. Ambas expressiones A & B , licet in se spectatæ res omnino diversas significant, inter se commutabiles esse ipsa solutionis natura sponte patet. Quod si enim ad binas particulas $n \nu$ & $o \omega$ respiciamus, quibus applicatæ $N n$ & $O o$ augentur; primum eas ita comparatas esse oportet, ut proprietas communis B , tam in ipsa curva quam in mutata, eundem valorem obtineat; scilicet proprietas communis B in curvam $a m n o p z$ & in $a m \nu \omega p z$ æque competere debet; deinde pari modo per eadem particulas $n \nu$ & $o \omega$ efficiendum est, ut expressio A , quæ maximum minimumve esse debet, tam pro curva $a m n o p z$ quam pro $a m \nu \omega p z$ eundem valorem recipiat. Atque adeo, tam proprietas communis, quam maximi minimive natura, eandem plane conditionem in calculum inducit; ex quo manifestum est ambas expressiones datas, quarum altera proprietatem communem, altera maximi minimive rationem continet, inter se commutari atque confundi posse, salva Solutione. Hanc ob rem ergo, in Solutione hujusmodi Problematum, sufficit nosse ambas illas expressiones; neque ad Solutionem absolvendam nosse opus est, utra proprietatem communem aut maximum minimumve significet. Sic si, inter omnes curvas longitudine æquales, quæratür ea, quæ maximam aream comprehendat; eadem reperitur curva quæ prodit, si, inter omnes curvas æquales areas includentes, ea quæratür quæ sit brevissima, vel minimam longitudinem habeat. Hæc ita se habent, si maximi minimive quod quæritür natura ita fuerit comparata, ut ejus valor differentialis sit $= 0$. Jam supra autem animadvertimus, duplicis generis dari maxima & minima, in quorum altero valor differentialis sit $= 0$, in altero vero $= \infty$. Hic vero tantum maxima ac minima prioris generis contemplamur; nam, in hac Methodo relativa, posterius genus locum omnino habere nequit. Quod si enim valor differentialis, qui convenit maximi minimive expressioni, infinite magnus ponatur; tum ex hoc solo æquatio pro curva reperitur; neque ideo proprietas communis in computum ingreditür. Quare, si hujus

generis maximum vel minimum in Methodo absoluta locum habet, eadem curva in Methodo relativa eadem proprietate gaudebit, quacunque proprietas communis adjungatur. Cum igitur totum Solutionis hujusmodi Problematum momentum versetur in inventione valorum differentialium, qui ex binis particulis $n\nu$ & $o\omega$ oriuntur; Methodum trademus, ejusmodi valores differentiales pro quacunque expressione indeterminata inveniendi, eo modo, quo supra usi sumus ad inveniendos valores differentiales ex unica particula $n\nu$ oriundos.

PROPOSITIO III. PROBLEMA.

Fig. 15. 22. *Proposita quacunque expressione indeterminata, quæ ad datam abscissam AZ referatur; invenire ejus valorem differentialem, ortum ex translatione binorum curva punctorum n & o in ν & ω .*

S O L U T I O.

Ponamus abscissam $AI = x$, & applicatam $Ii = y$, erit $Kk = y'$, $Ll = y''$, $Mm = y'''$, $Nn = y^{iv}$, $Oo = y^{v}$, $Pp = y^{vi}$ &c. Harum applicatarum duæ tantum, nempe y^{iv} & y^{v} patiuntur alterationem a particulis $n\nu$ & $o\omega$ ipsis adjunctis. Erit igitur applicatæ y^{iv} valor differentialis $= n\nu$, & applicatæ y^{v} valor differentialis $= o\omega$, reliquarum vero applicatarum omnium valor differentialis erit $= 0$. Hinc reliquarum quantitatum ad curvam pertinentium p, q, r, s , &c. valores differentiales habebuntur, quatenus eæ ab his binis applicatis y^{iv} & y^{v} pendent. Sic cum sit $p = \frac{y' - y}{dx}$, erit valor differentialis ipsius $p = 0$; similiterque ipsius p' , & p'' : at cum sit $p''' = \frac{y^{iv} - y'''}{dx}$, erit ipsius p''' valor differentialis $= \frac{n\nu}{dx}$; &c., ob $p^{iv} = \frac{y^{v} - y^{iv}}{dx}$, erit valor differentialis ipsius $p^{iv} = \frac{o\omega}{dx} - \frac{n\nu}{dx}$; porroque ipsius p^v erit $= -\frac{o\omega}{dx}$. Deinde cum sit

$q =$

$q = \frac{y^p}{dx}$; erit valor differentialis ipsius $q' = \frac{ny}{dx^2}$; ipsius $q'' = \frac{0\omega}{dx^2} - \frac{2ny}{dx^2}$, ipsius $q''' = -\frac{20\omega}{dx^2} + \frac{ny}{dx^2}$; ipsius $q^{iv} = \frac{0\omega}{dx^2}$. Hocque modo similiter progredi licet ad sequentes quantitates $r, s, \&c.$ cum suis derivativis; hincque nascetur sequens Tabella, qua singularum harum quantitatum valores differentiales exhibentur.

$d. y^{iv} = ny$	$d. q'' = \frac{ny}{dx^2}$
$d. y^{iv} = 0\omega$	$d. q''' = -\frac{2ny}{dx^2} + \frac{0\omega}{dx^2}$
$d. p''' = \frac{ny}{dx}$	$d. q^{iv} = \frac{ny}{dx^2} - \frac{20\omega}{dx^2}$
$d. p^{iv} = -\frac{ny}{dx} + \frac{0\omega}{dx}$	$d. q^v = \frac{0\omega}{dx^2}$
$d. p^v = -\frac{0\omega}{dx}$	

$d. r' = + \frac{ny}{dx^2}$	$d. s = + \frac{ny}{dx^4}$
$d. r'' = -\frac{3ny}{dx^3} + \frac{0\omega}{dx^3}$	$d. s' = -\frac{4ny}{dx^4} + \frac{0\omega}{dx^4}$
$d. r''' = + \frac{3ny}{dx^3} - \frac{30\omega}{dx^3}$	$d. s'' = + \frac{6ny}{dx^4} - \frac{40\omega}{dx^4}$
$d. r^{iv} = -\frac{ny}{dx^3} + \frac{30\omega}{dx^3}$	$d. s''' = -\frac{4ny}{dx^4} + \frac{60\omega}{dx^4}$
$d. r^v = -\frac{0\omega}{dx^3}$	$d. s^{iv} = + \frac{ny}{dx^4} - \frac{40\omega}{dx^4}$
	$d. s^v = + \frac{0\omega}{dx^4}$

&c.

Ex hac Tabella perspicitur, in valoribus differentialibus totidem terminos particula 0ω affectos occurrere, ac particula ny ; atque in utrisque pares adesse coefficients: discrimen vero in hoc consistere, ut cuilibet termino particula 0ω affecto respon-

deat quantitas immediate sequens eam, cui respondet similis terminus particula $n \nu$ affectus. Sic dum terminus $-\frac{2 n \nu}{d x^2}$ reperitur in valore differentiali quantitatis q''' , ita terminus $-\frac{2 o \omega}{d x^2}$ adest in valore differentiali quantitatis sequentis q'' .

Deinceps, ob duplicis generis terminos in valoribus differentialibus occurrentes, quorum alteri particulam $n \nu$, alteri particulam $o \omega$ involvunt, valor differentialis cujuscunque expressionis indeterminatæ hujusmodi habebit formam $n \nu. I + o \omega. K$; de qua primum, manifestum est membrum prius $n \nu. I$ esse ejusdem expressionis valorem differentialem, qui oritur si sola particula $n \nu$ consideretur; eritque ideo $n \nu. I$ ille ipse valor differentialis, quem supra pro quavis expressione oblata definire docuimus; ita ut hoc membrum per præcepta supra tradita pro quavis expressione indeterminata exhibere liceat. Quod ad alterum membrum $o \omega. K$ attinet, quia singuli termini in quibus $o \omega$ inest perpetuo respondent quantitibus sequentibus eas, quibus respondent similes termini particulam $n \nu$ involventes, palam est quantitatem K fore valorem, quem quantitas I in proximo sequente loco induit, atque idcirco esse $K = I' = I + dI$. Quare cum membrum $n \nu. I$ ex præceptis jam supra datis assignare queamus, ex eo porro alterum membrum $o \omega. K = o \omega (I + dI)$ innotescet. Sit igitur V expressio quæcunque indeterminata, cujus valorem differentialem ex duabus particulis $n \nu$ & $o \omega$ oriundum definiri oporteat. Ponamus ejus valorem differentialem ex unica particula $n \nu$ oriundum esse $= n \nu. I$; eritque valor differentialis, qui ex ambabus particulis $n \nu$ & $o \omega$ oritur, $= n \nu. I + o \omega. I'$, seu $= n \nu. I + o \omega (I + dI)$; qui igitur ope regularum supra datarum facile assignari poterit.

Q. E. I.

C O R O L L. I.

23. Omnium ergo expressionum, quarum valores differentiales ex unica particula $n \nu$ oriundos invenire docuimus, earundem
 valo-

valores differentiales ex binis particulis $n \nu$ & $o \omega$ oriundos nunc definire possumus.

COROLL. II.

24. Hæc igitur Methodus valebit tam ad expressionum valores differentiales inveniendos, qui non pendent a quantitate abscissæ propositæ AZ, quam qui ab istius abscissæ longitudine pendent.

COROLL. III.

25. Quin etiam si expressio proposita, quæ vel proprietatem communem continet, vel maximum minimumve esse debet, fuerit functio duarum pluriumve formularum integralium; ejus valor differentialis ex binis particulis $n \nu$ & $o \omega$ oriundus eadem lege definietur.

SCHOLIUM.

26. In Capitibus superioribus vidimus valorem differentialem cujuscunque expressionis, qui ex unica particula $n \nu$ oritur, hujusmodi habere formam $n \nu. dx. T$, seu $n \nu. T dx$; ubi T denotat quantitatem finitam: quare ejusdem expressionis valor differentialis ex binis particulis $n \nu$ & $o \omega$ ortus erit $= n \nu. T dx + o \omega. T' dx$. quemadmodum in Solutione ostendimus. Eadem autem forma facile ad hunc modum potest evinci: Scilicet si ponatur $o \omega = 0$, tum prodire debet ipse valor differentialis ex unica particula $n \nu$ ortus, quem supra invenire docuimus, eritque $n \nu. T dx$. Sin autem ponatur $n \nu = 0$, ac sola particula $o \omega$ consideratur, valor differentialis simili modo reperietur quo supra usi sumus: non autem erit $= o \omega. T dx$; nam quia particula $o \omega$ in situ sequente accipitur, loco T ejus valor sequens pariter sumi debet; ita ut valor differentialis verus futurus sit $= o \omega. T' dx$. Quod si ergo utraque particula $n \nu$ & $o \omega$ conjunctim consideretur, erit valor differentialis $= n \nu. T dx + o \omega. T' dx$; eo quod in ipso
cal-

calculo particulae $n\nu$ & $o\omega$ nusquam inter se permiscantur, sed utraque perpetuo seorsim tractari possit. Ut autem hæc ad notandi modum in superiori capite receptum accommodemus; ponamus V esse expressionem quameunque indeterminatam, quæ, pro abscissa definita $AZ = a$, valorem recipiat $= A$; ejusque valorem differentialem ex particula $n\nu$ ortum esse $= n\nu. dA$; ubi dA nobis denotet idem quod ante Tdx ; poteritque iste valor dA ex expressione V , modo in Capitibus præcedentibus exposito, inveniri. Hoc invento erit ejusdem expressionis V valor differentialis ex binis particulis $n\nu$ & $o\omega$ oriundus $= n\nu. dA + o\omega. dA'$ ubi dA' denotat valorem dA suo differentiali auctum. Quamquam autem ista valorum differentialium ex binis particulis oriundorum ad nostrum institutum omnino est necessaria; tamen solutio ipsa Problematum huc pertinentium eo iterum reducetur, ut per solos valores differentiales modo supra exposito inventos, qui scilicet ex unica particula $n\nu$ nascuntur, absolvi queat; id quod ex sequente Propositione mox patebit.

PROPOSITIO IV. PROBLEMA:

27. *Inter omnes curvas ad eandem datam abscissam $AZ = a$ relatas, in quas idem valor expressionis indefinitæ W competit; determinare eam, in qua sit expressio V maximum vel minimum,*

S O L U T I O.

Ponamus curvam az quæsito satisfacere, atque expressionem W in ea obtinere valorem determinatum $= B$; erit ergo hæc curva az inter omnes alias curvas ad eandem abscissam AZ relatas, in quibus expressio W eundem obtinet valorem, ita comparata, ut in ea expressio V maximum minimumve valorem recipiat, qui sit $= A$. Ad curvam ergo hanc inveniendam, positis abscissa indefinita $AI = x$, & applicata respondente $Ii = y$; binæ applicatæ Nn & Oo particulis infinite parvis $n\nu$ & $o\omega$ augeri concipiantur: quo factò, tam ipsius W quam ipsius V va-
lor

lor differentialis, qui ex his duabus particulis $n\nu$ & $o\omega$ adjunctis nascetur nihilo æqualis poni debet, uti in Propositione secunda ostendimus. Sit jam expressionis V valor differentialis ex unica particula $n\nu$ ortus $= n\nu. dA$, atque expressionis alterius W valor differentialis ex eadem unica particula $n\nu$ ortus $= n\nu. dB$, quos valores differentiales ex præceptis in superioribus Capitibus datis invenire licebit. Nunc igitur, dum binas particulas $n\nu$ & $o\omega$ contemplamur, erit expressionis V valor differentialis $= n\nu. dA + o\omega. dA'$; alterius vero expressionis W valor differentialis erit $= n\nu. dB + o\omega. dB'$. Quocirca, ad quæsitam curvam inveniendam, fieri oportet cum $n\nu. dA + o\omega. dA' = 0$, tum etiam $n\nu. dB + o\omega. dB' = 0$. Multiplicentur ambæ æquationes per quantitates quascunque, ita ut prodeat

$$\begin{aligned} n\nu. \alpha dA + o\omega. \alpha dA' &= 0 \\ n\nu. \zeta dB + o\omega. \zeta dB' &= 0. \end{aligned}$$

Fiatque ad particulas $n\nu$ & $o\omega$ eliminandas tam $\alpha dA + \zeta dB = 0$, quam $\alpha dA' + \zeta dB' = 0$; eruntque α & ζ ejusmodi quantitates, sive constantes, sive variables, quæ utrique æquationi satisfaciunt. Quoniam vero est $\alpha dA + \zeta dB = 0$, erit quoque $\alpha' dA' + \zeta' dB' = 0$; quæ æquatio, cum $\alpha dA + \zeta dB = 0$ comparata, monstrat esse debere $\alpha' = \alpha$, & $\zeta' = \zeta$; ex quo quantitates hæc α & ζ debebunt esse constantes, & quidem quæcunque. Sumtis itaque pro α & ζ quantitibus quibuscunque constantibus, æquatio pro curva erit $\alpha dA + \zeta dB = 0$. Hæc eadem æquatio prodit, si methodo consueta particulas $n\nu$ & $o\omega$ eliminemus. Erit nempe $\frac{n\nu}{o\omega} = -\frac{dA'}{dA} = -\frac{dB'}{dB}$, ideoque $\frac{dA'}{dA} = \frac{dB'}{dB}$, seu $\frac{ddA}{dA} = \frac{ddB}{dB}$, ob $dA' = dA + ddA$, & $dB' = dB + ddB$. Æquatio autem $\frac{ddA}{dA} = \frac{ddB}{dB}$ integrata dat $\int dA + \int dB + \int C$. Seu $dA =$
 Euleri de Max. & Min. A a CdB;

CdB ; quæ, posito $C = -\frac{\epsilon}{a}$, transit in $a dA + \epsilon dB = 0$; quam ipsam ante invenimus. Quamobrem ad Problema resolvendum oportet, tam expressionis proprietatem communem continentis W , quam expressionis quæ maximum minimumve esse debet V , valores differentiales, methodo in superioribus Capitibus tradita, investigare, eosque per quantitates constantes quascunque multiplicare, summamque $= 0$ ponere; quo facto, resultabit æquatio naturam curvæ quæsitæ exprimens. *Q. E. I.*

COROLL. I.

28. Nunc igitur, ad Quæstiones in hac Propositione contentas resolvendas, sufficit nosse valores differentiales ex unica particula n oriundos; quos supra jam expedite invenire docuimus.

COROLL. II.

29. Quare ad hoc negotium in subsidium vocari debet Caput præcedens IV, ex eoque cum §. 7 tum §. 31. In loco priore enim continentur præcepta valores differentiales inveniendi, si expressiones indeterminatæ propositæ fuerint formulæ integrales singularis, in altero vero, si sint functiones duarum pluriumve ejusmodi formularum integralium.

COROLL. III.

30. Proposita ergo proprietate communi W , & maximi minimive expressione V , utriusque expressionis valorem differentialem ex his præceptis quæri oportet: quibus inventis, & per constantes arbitrarias multiplicatis, eorum aggregatum nihilo æquale positum dabit æquationem pro curva quæsitæ.

COROLL. IV.

31. Si, inter omnes omnino curvas eidem abscissæ AZ res-

pondentes, queratur ea, in qua expressio V maximum minimumve obtineat valorem; pro ea habetur ista æquatio $dA = 0$; denotante dA valorem differentialem expressionis V .

COROLL. V.

32. Quod si autem, inter omnes curvas eidem abscissæ AZ respondententes, in quas expressio W æqualiter competat, queratur ea in qua expressio V maximum minimumve habeat valorem; invenitur pro ea ista æquatio $\alpha dA + \epsilon dB = 0$.

COROLL. VI.

33. Perspicuum ergo est, curvam, quæ, inter omnes omnino curvas, habeat V maximum vel minimum, cujus æquatio est $dA = 0$, contineri in æquatione $\alpha dA + \epsilon dB = 0$, qua exprimitur curva, quæ, inter omnes eadem communi proprietate W gaudentes, habeat V maximum vel minimum.

COROLL. VII.

34. In ipsa igitur prima æquatione, quam Solutio præbet; $\alpha dA + \epsilon dB = 0$; jam inest una constans arbitraria; quæ autem per id determinari debet, ut valor expressionis W datum obtineat valorem.

COROLL. VIII.

35. Problema itaque sic solvi poterit, ut, inter omnes curvas eidem abscissæ AZ respondententes, in quibus expressio W eundem datum obtineat valorem, definiatur ea in qua sit valor ipsius V maximus vel minimus.

COROLL. IX.

36. Ex his denique intelligitur, Solutionem Problematis pro-

positi, convenire cum Solutione hujus Problematis, quo, inter omnes omnino curvas eidem abscissæ AZ respondentes, requiratur ea quæ habeat $aV + cW$ maximum vel minimum. Quæ quæstio, etsi ad Methodum absolutam pertineat, tamen dat æquationem $adA + cdB = 0$, quam ipsam invenimus.

S C H O L I O N I.

37. Ex his igitur non solum Methodus facilis atque expedita colligitur, omnes Quæstiones huc pertinentes resolvendi; verum etiam natura hujus generis Problematum penitus cognoscitur. Primo enim apparet, quod jam supra demonstravimus, Solutionem eandem fore, sive, inter omnes curvas communi proprietate W præditas, quærat eam quæ habeat V maximum vel minimum; sive inverse, inter omnes curvas communi proprietate V præditas, eam requiratur in qua sit W maximum vel minimum. Deinde etiam intelligitur, Quæstionem ita proponi posse, ut ejus Solutio ad Methodum maximorum ac minimorum absolutam pertineat; congruit enim Problema propositum cum hoc, quo, inter omnes omnino curvas ad eandem abscissam AZ relatas, requiratur ea in qua sit ista expressio $aV + cW$ maximum vel minimum; atque hæc Problematis transformatio in causa est, quod Solutio per valores differentiales ex unica particula n oriundos perfici queat, neque amplius opus sit duas hujusmodi particulas considerare, prouti primo intuitu natura Quæstionis postulare videbatur. Hanc autem convenientiam postmodum, per se, ac sine ista Methodo qua binæ particule considerantur, demonstrabimus; quo veritas hæc, summi in isto negotio momenti, magis confirmetur. Ad solvendas cæterum hujusmodi Quæstiones, ante oculos habere oportet præcepta Capite præcedente in compendium redacta; quorum ope valores differentiales quarumcunque expressionum inveniri poterunt. Primo enim, §. 7 illius Capitis recensentur Casus, quibus formularum integralium solitariarum valores exhibentur: tum vero §. 31 traditur Methodus inveniendi valores differentiales expressio-

pressionum, quæ ex duabus pluribusve formulis integralibus ut-
cunque sint compositæ. Ex his itaque subsidiis, pro quavis
Quæstione oblata, tam maximi minimive expressionis quam
proprietas communis valor differentialis assignari poterit: utro-
que autem invento, æquatio pro Curva quæsitâ nullo negotio
formabitur; cum tantum opus sit aggregatum quorumcunque
multiplicum illorum binorum valorum differentialium nihilo æ-
quale poni. Hæcque æquatio inventa, deinceps pari modo
erit tractanda, quo supra, cum in reductione ad construendum,
tum in integratione usi sumus.

SCHOLION II.

38. Jam observavimus in æquatione $a dA + \epsilon dB = 0$;
quam Solutio immediate suppeditat, unam inesse quantitatem
constantem; quæ autem non omnino sit arbitraria, sed ex con-
ditione proposita debeat determinari. Scilicet, cum in omnes cur-
vas ex quibus quæsitam definiri oportet, eadem expressio W æqua-
liter competere debeat, seu in omnibus eundem valorem, pu-
ta B , obtinere; hæc quantitas B tanquam data spectari potest;
atque cum ipsa in calculum non ingrediatur, ita constantes a & ϵ de-
finire licebit, ut valor expressionis W , abscissæ $AZ = a$ res-
pondens, ipsi B æqualis fiat; hocque pacto, Quæstio alioquin
indeterminata determinabitur. Eatenus autem tantum determi-
nabitur, quatenus, per integrationes post instituendas, novæ
constantes arbitrariæ etiam per totidem puncta definiuntur. Pro-
fus nimirum ut ante, totidem puncta præscribi poterunt, per
quæ curva quæsitâ transeat, quot novæ constantes per integra-
tiones ingredi censendæ sunt. Horum autem numerus innotescet
ex gradu differentialium summo, qui in æquatione inerit. Quo-
niam vero tota Quæstio ad Methodum absolutam revocari po-
test, numerus istiusmodi constantium perpetuo erit par; seu
æquatio resultans $a dA + \epsilon dB = 0$, erit vel finita, vel dif-
ferentialis secundi gradus, vel differentialis quarti gradus, vel
differentialis sexti gradus, vel octavi, vel ita porro. Quod

si æquatio prodit finita, tum quoque curva penitus jam erit determinata; siquidem ratio inter a & c ita definiatur, ut expressio W datum recipiat valorem B in curva inventa, quam determinationem perpetuo adhiberi ponimus. Si æquatio inveniatur differentialis secundi gradus, tum duobus punctis curva inventa determinabitur; congruum autem ac more receptum est ipsos curvæ terminos a & z præscribi, hisque casibus Problema determinabitur, si conditio ista adjungatur, ut curva quæsitæ intra datos terminos a & z contineatur. Sin autem æquatio prodeat differentialis quarti gradus, tum quatuor punctis pro lubitu assignatis, curva satisfaciens determinabitur; hæc igitur definiri ita conveniet, ut, præter terminos extremos a & z , simul positio tangentium in his terminis præscribatur. Sin perveniatur ad æquationem differentialem sexti gradus, tum curva per sex quæcunque puncta determinabitur: eorum autem loco præscribi poterunt primo ambo termini a & z , tum positio tangentium in his terminis, ac tertio curvæ in his ipsis locis seu radii osculi quantitas. His igitur notatis, intelligitur ex ipsa Solutione cujusmodi conditio ad Problematis cujusque propositionem adjungi debeat, ut id fiat penitus determinatum: hæcque admonitio, non solum hîc, sed etiam in Methodo absoluta atque reliqua Methodo relativa, locum habet.

S C H O L I O N III.

39. Discrimen hîc etiam maximi momenti inprimis est notandum, ex quo in Methodo absoluta primariam tractationis partitionem desumimus. Consistit id autem in modo, quo curva inventa Quæstioni satisfaciunt. Fieri enim potest, ut ejus quæcunque portio ad abscissam indefinitam relata requisita proprietate gaudeat; deinde etiam dantur casus, quibus nonnisi ea portio quæ definitæ abscissæ $AZ = a$ respondet, conditioni Problematis satisfaciunt. Illud scilicet evenit, si quantitas hæc a in æquationem, quam Solutio suppeditat, vel omnino non ingreditur, vel in quantitates arbitrarias a & c comprehendiqueat.

queat. Ex quo manifestum est, si ambæ formulæ W & V in casu primo §. 7 Capitis præcedentis recensito contineantur, tum curvæ inventæ quamlibet portionem ad Quæstionem esse accomodatam. Deinde vero etiam fieri potest, ut licet quantitas a , seu quantitates ab ea pendentés, vel in alterutro valore differentiâ insint, vel in utroque; tamen eæ vel se mutuo tollant in æquatione $a dA + \epsilon dB = 0$, vel sub arbitrariis a & ϵ comprehendi queant; quo casu pariter quamvis curvæ inventæ portionem satisfacere oportet. Hoc autem tantum locum habet, si non datus ac determinatus præscribatur valor, quem proprietas communis W in portione satisfaciēte obtinere debeat: tum enim fieri nequit, ut in quavis portione eundem valorem fortiatur. Ex Solutione autem unius cujusque Quæstionis facile intelligetur, qua conditione, sive tota curva a z, sive quævis portio, satisfacere queat; id quod commodissime in Exemplis ostendi poterit.

E X E M P L U M I.

40. *Inter omnes curvas ad abscissam AZ relatas, in quibus formula $\int y x dx$ eundem obtinet valorem, invenire eam in qua sit valor formulæ $\int y y dx$ minimus.*

Erit igitur proprietas communis $W = \int x y dx$, cujus, ob $dxy = y dx + x dy$, valor differentialis est $= n v. dx. x$. Maximi autem minimive formula est $V = \int y y dx$, cujus, ob $d. yy = 2 y dy$, valor differentialis est $= n v. dx. 2 y$. Obtinebitur ergo, divisione per $n v. dx$ instituta, hæc æquatio $ax + 2 \epsilon y = 0$; ex qua patet Quæstioni satisfacere lineam rectam in A cum axe AZ angulum quemcunque constituentem. Et quia longitudo abscissæ AZ $= a$ non in computum ingreditur, quævis hujus rectæ portio æque satisfaciet. Quod si autem postuletur, ut pro data abscissa AZ $= a$, formula $\int y x dx$ datum obtineat valorem, puta B; tum ob $y = m x$, fiet $\int y x dx = \frac{1}{3} m x^3$; ideoque $\frac{1}{3} m a^3 = B$; ex quo positio lineæ rectæ
ita

ita definietur, ut esse debeat $y = \frac{3Bx}{a}$. Hæc igitur recta jam ista proprietate gaudebit, ut ea inter omnes lineas, five rectas, five curvas, quæ pro data abscissa $AZ = a$ habeant formulæ $\int xy dx$ valorem $= B$, producat formulæ $\int yy dx$ minimum valorem.

E X E M P L U M II.

41. *Inter omnes curvas ejusdem longitudinis puncta a & z jungentes, invenire eam qua maximam vel minimam aream a AZz comprehendat.*

Quoniam proprietas communis est longitudo arcus $= \int dx \sqrt{1+pp}$; erit ejus valor differentialis $= -nv. d. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$. Deinde maximi minimive formula est $\int y dx$, cujus valor differentialis est $nv. dx$: unde pro curva quæsita ista habebitur æquatio $dx = b d. \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$, & integrando $x+c = \frac{bp}{\sqrt{1+pp}}$; ideoque $p = \frac{x+c}{\sqrt{b^2 - (x+c)^2}} = \frac{dy}{dx}$. Hinc ergo integrando fit $y = f \pm \sqrt{b^2 - (x+c)^2}$, seu $b^2 = (y-f)^2 + (x+c)^2$; quæ est æquatio generalis pro Circulo. Quamobrem arcus Circuli quicumque per puncta a & z ductus, inter omnes alias lineas curvas ejusdem longitudinis, vel maximam vel minimam aream a AZz includet. Duplici autem modo Circuli arcus datæ longitudinis intra terminos a & z constitui potest; altero, quo concavitatem axi AZ obvertit; altero, quo convexitatem. Priori casu manifestum est aream fore maximam, posteriore vero minimam. Atque hinc si dentur termini a & z, una cum longitudine curvæ intra hos terminos constitutæ, quam majorem quidem esse oportet lineam rectam hos terminos jungentem; Solutio penitus erit determinata: arcus Circuli enim hujus longitudinis per hos terminos poterit describi unicus,

unicus, qui, prout vel concavitatem vel convexitatem axi AZ obvertat, aream formabit vel maximam vel minimam.

COROLLARIUM.

42. Hinc etiam patet arcum circulem a z, per terminos a Fig. 16. & z ductum, non solum maximam aream a AZz, inter omnes alias lineas ejusdem longitudinis formare; sed etiam quæcunque linea a CEDz a termino a ad terminum z ducta detur, cum ea arcus circularis a z maximam includet aream. Nam si area a AZz est maxima, erit quoque area a AZz — a AC — z ZD + CED, ob areas a AC, z ZD & CED constantis magnitudinis quæcunque linea pro az capiatur, maxima.

EXEMPLUM III.

43. Inter omnes curvas ejusdem longitudinis puncta A & M Fig. 7. jungentes, invenire eam que, cum rectis AC & MC ad punctum fixum C ductis, maximam vel minimam comprehendat aream ACM.

Quoniam, ob data puncta A, C, M, rectæ AC & MC positione dantur, ponatur angulus ACM = x, seu descripto, centro C, radio CB = 1, arcu circulari BS, fit hic arcus BS = x, & ponatur CM = y; erit Ss = dx, Mn = ydx, & area ACM = $\frac{1}{2} \int yy dx$. Porro ob mn = dy, erit Mm = $\sqrt{y^2 dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{yy + pp}$, posito dy = p dx. Quare inter omnes æquationes relationem ipsarum x & y continentes, quæ, pro dato ipsius x valore, eandem præbent quantitatem $\int dx \sqrt{yy + pp}$, eam definiri oportet, quæ, pro eodem ipsius x valore, præbeat formulæ $\frac{1}{2} \int yy dx$ quantitatem vel maximam vel minimam. Cum igitur formulæ $\int dx \sqrt{yy + pp}$ valor differentialis fit = $nv. dx \left(\frac{y}{\sqrt{yy + pp}} - \frac{1}{dx} \right)$

$d. \frac{p}{\sqrt{yy + pp}} \int yy dx$ valor differentialis =
 Euleri De Max. & Min. B b $nv.$

$ny \cdot dx \cdot y$; habebitur pro curva quaesita ista æquatio $y dx =$
 $\frac{by dx}{\sqrt{yy+pp}} - b d. \frac{p}{\sqrt{yy+pp}}$, quæ, per p multiplicata,
 abit in hanc $y dy = \frac{by dy}{\sqrt{yy+pp}} - b p d. \frac{p}{\sqrt{yy+pp}} =$
 $b d. \sqrt{yy+pp} - \frac{b p d p}{\sqrt{yy+pp}} - b p d. \frac{p}{\sqrt{yy+pp}}$;
 cujus integrale est $\frac{1}{2} yy = b \sqrt{yy+pp} - \frac{b p p}{\sqrt{yy+pp}} +$
 $b c = \frac{byy}{\sqrt{yy+pp}} + b c$. Ducatur in tangentem MP ex
 C perpendiculum CP = u ; erit $u = \frac{yy}{\sqrt{yy+pp}}$; ha-
 bebaturque $yy = 2bu + bc$: quam æquationem supra jam of-
 tendimus esse ad Circulum. Quamobrem arcus Circuli per ter-
 minos A & M ductus hanc habebit proprietatem, ut, inter
 omnes alias curvas ejusdem secum longitudinis terminos A & M
 jungentes, aream ACM exhibeat vel maximam vel minimam;
 prout ille arcus, vel concavitatem, vel convexitatem intra an-
 gulum ACM vertat. Quo ipso id confirmatur, quod §. præ-
 ced. in genere adnotavimus.

EXEMPLUM IV.

Fig. 45. 44. Inter omnes curvas puncta a & z jungentes, quæ circa axem
 AZ rotata generant solida ejusdem superficiæ; determinare eam
 quæ simul producat volumen solidi hoc modo generati maximum.

Superficies solidi hoc modo generati, proportionalis inveni-
 tur formulæ integrali huic $\int y dx \sqrt{1+pp}$, cujus valor diffe-
 rentialis est $ny \cdot dx \left(\sqrt{1+pp} - \frac{1}{dx} d. \frac{yp}{\sqrt{1+pp}} \right)$
 Volumen vero solidi hoc modo generati est ut $\int yy dx$,
 cujus valor differentialis est $= ny \cdot dx \cdot 2y$. Quocirca resulta-
 bit ista æquatio $2y dx = b dx \sqrt{1+pp} - b d. \frac{yp}{\sqrt{1+pp}}$.
 Multi-

Multiplicetur hæc per p , ut prodeat $2 y dy = b dy \sqrt{(1+pp)}$

$$- b p d. \frac{y p}{\sqrt{(1+pp)}} = b d. y \sqrt{(1+pp)} - \frac{b y p d p}{\sqrt{(1+pp)}}$$

$$- b p d. \frac{y p}{\sqrt{(1+pp)}}, \text{cujus integrale est } y y = b y \sqrt{(1+pp)}$$

$$- \frac{b y p p}{\sqrt{(1+pp)}} - b c = \frac{b y}{\sqrt{(1+pp)}} + b c. \text{ Erit ergo}$$

$$b y = (y y - b c) \sqrt{(1+pp)}, \text{ \& } p = \frac{\sqrt{(b^2 y^2 - (y y - b c)^2)}}{y y - b c}$$

$$= \frac{d y}{d x}. \text{ Quare erit } d x = \frac{(y y - b c) d y}{\sqrt{(b b y y - (y y - b c)^2)}}. \text{ De}$$

hac æquatione primo notandum est, si fuerit $c = 0$ fore $d x = \frac{y d y}{\sqrt{(b b - y y)}}$; ideoque curvam esse Circulum, cujus centrum in

axe $A Z$ sit positum; ille igitur arcus circularis, centro in axe $A N$ sumpto descriptus & per data duo puncta a & z transiens Quæstioni satisfaciet; erit autem is unicus, ideoque solidum definitæ superficiæ generabit. Quare si, inter omnes curvas quæ solida alius atque diversæ superficiæ generant, quæratu ea quæ maximum volumen producat, ea non erit Circulus, sed alia

curva in æquatione $d x = \frac{(y y - b c) d y}{\sqrt{(b b y y - (y y - b c)^2)}}$ con-

tenta. Non solum enim, ob binas constantes b & c , effici potest, ut curva per præscripta duo puncta a & z transeat; sed etiam ut longitudo curvæ $a z$ existat datæ magnitudinis. Cæterum longitudo curvæ, ob $\int d x \sqrt{(1+pp)} = \int \frac{b y d x}{y y - b c}$

fiet $= \int \frac{b y d y}{\sqrt{(b b y y - (y y - b c)^2)}}$, cujus integrale a quadratura

Circuli pendet, estque $= \frac{b}{2} A \cos. \frac{b(2c+b) - 2y y}{b \sqrt{(b b + 4 b c)}} +$

Const. Quod si autem b ponatur $= \infty$, casus oritur singularis; æquatio namque prodit hæc $d x = - \frac{c d y}{\sqrt{(y y - c \infty)}}$, quæ est pro curva Catenaria convexitatem axi $A Z$ obvertente.

EXEMPLUM V.

45. Inter omnes curvas az equales areas aAZz' continentes, determinare eam, quæ circa axem AZ rotata generet solidum minima superficies.

Quoniam proprietas communis in area $= \int y dx$ constituitur; erit ejus valor differentialis $= ny. dx$. Deinde formula, quæ minimum esse debet, est $\int y dx \sqrt{(1+pp)}$, cujus valor differentialis est $= ny. (dx \sqrt{(1+pp)} - d. \frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}})$; unde orietur, pro curva quæsita, ista æquatio $ndx = dx \sqrt{(1+pp)} - d. \frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$, quæ, per p multiplicata & integrata, præbet $ny + b = \frac{y}{\sqrt{(1+pp)}}$, seu $\sqrt{(1+pp)} = \frac{y}{ny + b}$; unde fit $p = \frac{\sqrt{(y^2 - (ny + b)^2)}}{ny + b} = \frac{dy}{dx}$; ac $dx = \frac{(ny + b) dy}{\sqrt{((1-n^2)y^2 - 2bn y - bb)}}$. Ex qua patet, si fit $b = 0$, tum curvam esse abituram in lineam rectam puncta a & z jungentem. Deinde si fit $n = 0$, ob $dx = \frac{b dy}{\sqrt{(yy - bb)}}$, curva erit Catenaria concavitatem axi AZ obvertens. Quod si autem fit $n = -1$, fiet $dx = \frac{(b-y) dy}{\sqrt{(2by - bb)}}$; ex qua integrando oritur $x = c + \frac{2b-y}{3b} \sqrt{(2by - bb)}$; quæ est pro curva algebraica, & in rationalibus præbet $9b(x-c)^2 = (2b-y)^2(2y-b)$. Est ideo linea tertii ordinis & pertinet ad speciem 68 NEWTONI.

EXEMPLUM VI.

45. Inter omnes curvas az ejusdem longitudinis; definire eam qua circa axem AZ rotata producat maximum solidum.

Inter

Inter omnes igitur curvas proprietate communi $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ gaudentes, ea quaeritur in qua fit $\int yy dx$ maximum. Quoniam ergo formulæ $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis est = $n v. d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; formulæ vero $\int yy dx$ valor differentialis est = $2 n v. y dx$; habebitur pro curva quaesita ista æquatio $2 y dx = \pm bb d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, quæ, multiplicata per p & integrata, dabit $yy + bc = \pm \frac{bb}{\sqrt{(1+pp)}}$; seu $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\pm bb}{yy + bc}$; hincque $p = \frac{\sqrt{(b^4 - (yy + bc)^2)}}{yy + bc} = \frac{dy}{dx}$; ex qua fit $x = \int \frac{(yy + bc) dy}{\sqrt{(b^4 - (yy + bc)^2)}}$. Hæc curva hanc habet proprietatem ut ejus radius osculi, qui generaliter est = $dx : d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, fiat = $\frac{bb}{2y}$; hoc est, proportionalis est applicatæ y inversæ; unde patet curvam quaesitam esse Elasticam. Non solum autem per constantes b & c arbitrarias effici potest, ut curva per datos terminos a & z transeat, sed etiam ut ejus arcus intra hos terminos interceptus fiat datæ magnitudinis. Si fit $c = 0$, prodit Elastica rectangula. Caterum nullo casu constructio per quadraturam vel Circuli vel Hyperbolæ absolvi potest; nisi sint vel b & c infinita, quo quidem casu linea az prodit recta, vel $b = c$. Hoc enim casu, habebitur $x = \int \frac{(yy + bb) dy}{y \sqrt{(2bb - yy)}}$, seu, sumto bb negativo, erit $x = \int \frac{(yy - bb) dy}{y \sqrt{(2bb - yy)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(2bb - yy)}} - bb \int \frac{dy}{y \sqrt{(2bb - yy)}}$; & integratione per logarithmos absoluta, fiet $x = \int \frac{dy}{\sqrt{(2bb - yy)}} + bl \frac{b + \sqrt{(2bb - yy)}}{y}$. Ipsa vero curvæ longitudo, quæ generaliter est = $\int \frac{bb dy}{\sqrt{(b^4 - (yy + bc)^2)}}$, erit hoc casu = $g - bl \frac{b + \sqrt{(2bb - yy)}}{y}$.

EXEMPLUM VII.

47. Invenire curvam, quæ, inter omnes alias ejusdem longitudinis, circa axem AZ rotata, producat solidum cujus superficies sit vel maxima vel minima.

Quoniam proprietas communis est $= \int dx \sqrt{1 + pp}$; cujus valor differentialis est $= nv. d. \frac{p}{\sqrt{1 + pp}}$; maximi minime formulæ autem $\int y dx \sqrt{1 + pp}$ valor differentialis est $= nv. (dx \sqrt{1 + pp}) - d. \frac{yp}{\sqrt{1 + pp}}$; habebitur pro curva quæ sita ista æquatio $b d. \frac{p}{\sqrt{1 + pp}} = dx \sqrt{1 + pp} - d. \frac{yp}{\sqrt{1 + pp}}$, quæ per p multiplicata & integrata præbet $c - \frac{b}{\sqrt{1 + pp}} = \frac{y}{\sqrt{1 + pp}}$, seu $c = \frac{b + y}{\sqrt{1 + pp}}$. Hinc fiet $\sqrt{1 + pp} = \frac{b + y}{c}$, & $p = \frac{\sqrt{((b + y)^2 - cc)}}{c} = \frac{dy}{dx}$; ex hacque $dx = \frac{c dy}{\sqrt{((b + y)^2 - cc)}}$, quæ est æquatio generalis pro Catenaria, & satisfacit, dummodo axis respectu catenæ suspensæ situm teneat horizontalem. Fieri igitur potest, ut curva vel convexitatem vel concavitatem axi AZ obvertat, priori casu superficies solidi fiet minima, posteriori maxima.

EXEMPLUM VIII.

Fig. 17. 48. Inter omnes curvas per puncta A & C transeuntes, quæ omnes æquales areas ABC comprehendant; definire eam quæ in fluido secundum directionem axis BA mota minimam patiatur resistentiam.

Positis abscissa AP $= x$, applicata PM $= y$, proprietas communis est $\int y dx$, ejusque valor differentialis $= nv. dx$. Resistentia autem totalis, quam figura in directione AB sentit, est
ut

ut $\int \frac{p^3 dx}{1+pp}$, cujus valor differentialis — *uv. d.* $\frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$. Ex his emergit pro curva ista æquatio $dx = b d. \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$; quæ integrata dat $x = c + \frac{bpp(3+pp)}{(1+pp)^2}$. Æquatio autem differentialis per p multiplicata, abit in hanc $dy = bpd. \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$, quæ in hanc formam $dy = bpd \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2} + bdp. \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2} - b d p. \frac{3pp+p^4}{(1+pp)^2}$ transmutata, habet integrale $y = f + \frac{bp^3(3+pp)}{(1+pp)^2} - \frac{bp^3}{1+pp}$ seu $y = f + \frac{2bp^3}{(1+pp)^2}$; cum igitur sit $x = c + \frac{bpp(3+pp)}{(1+pp)^2}$, curva erit algebraïca. Efficiendum est autem, ut, quo casu fit $x = 0$ [quod fieri nequit, nisi vel b vel c capiatur negativum] simul y evanescat. Quo autem curva cognoscatur, ponatur $x - c = t$ & $y - f = u$, erit $t = \frac{bpp(3+pp)}{(1+pp)^2}$, & $u = \frac{2bp^3}{(1+pp)^2}$; unde fit $t+u\sqrt{3} = \frac{b(p^4+2p^3\sqrt{3}+3pp)}{(1+pp)^2}$ atque $t-u\sqrt{3} = \frac{b(p^4-2p^3\sqrt{3}+3pp)}{(1+pp)^2}$. Extrahendis igitur radicibus quadratis habebitur $\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} = \frac{pp+p\sqrt{3}}{b}$, & $\sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} = \frac{pp-p\sqrt{3}}{1+pp}$; hincque $\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} + \sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} = \frac{2pp}{1+pp}$, & $\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} - \sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} = \frac{2p\sqrt{3}}{1+pp}$: At est $\frac{t}{b} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2pp}{1+pp} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4p^4}{(1+pp)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} - \frac{1}{2} \left(\frac{2t}{b} + 2\sqrt{\frac{tt-3uu}{bb}} \right)$. Ergo $\frac{4t}{b} = 3\sqrt{\frac{t+u\sqrt{3}}{b}} + 3\sqrt{\frac{t-u\sqrt{3}}{b}} - 2\sqrt{\frac{tt-3uu}{bb}}$; quæ rationalis facta præbet æquationem hanc quarti ordinis

$$4t^4 + 8t^3u + 4u^4 = 4bt^3 + 36bt^2u - 27b^2uu, \text{ seu } 4(t+uu)^3 \\ = 4bt^3 + 36bt^2u - 27b^2u^2.$$

Ad curvam autem per infinita puncta construendam, expedit adhibere has formulas, $t = \frac{b(p^4 + 3pp)}{(1+pp)^2}$ & $u = \frac{2bp^3}{(1+pp)^2}$. Primum autem patet curvam habere diametrum in positione abscissarum t fitam, duobusque locis fieri $u = 0$, nempe casu $p = 0$, quo simul fit $t = 0$, & casu $p = \infty$, quo fit $t = b$. Quod si ponatur $b = 4c$, atque $t = 3c + r$, orietur ista æquatio $(rr+uu)^3 + 8c(r^3 - 3ru^2) + 18cc(r^2 + u^2) - 27c^4 = 0$ quæ cum sit functio ipsarum $rr + uu$ & $r^3 - 3ruu$, declarat curvam hanc habere tres diametros sese in initio abscissarum harum r decussantes. Curva ergo quæ sita triangulo æquilatelo ABC ita erit inscriptibilis, ut constet ex tribus ramis ADB, AEC & BFC inter se similibus & æqualibus, qui in punctis A, B, & C cuspidēs forment acutissimos. Ejus igitur diametri erunt tres rectæ AI, BH & CG, sese in centro trianguli O decussantibus. Erit autem AO = 3c, OF = c, & OI = $\frac{2}{3}c$, ita ut sit AI = $\frac{2}{3}c$ & FI = $\frac{1}{3}c = \frac{1}{2}OF$. Hujus jam curvæ quæcunque portio abc rectis ab & bc parallelis ipsis AI & BI & arcu curvæ ac comprehensa, ita erit comparata, ut arcus ac inter omnes alios puncta a & c jungentes, & æqualem aream abc continentem, in fluido secundum directionem ba mota minimam patiatur resistantiam. Porro autem hæc curva erit rectificabilis, reperiturque arcus ADB = $\frac{1}{3}c$; ex quo erit ADB: AI = $\frac{1}{3}c : \frac{2}{3}c = 32 : 27$, atque ADB: AB = $32 : 18\sqrt{3} = 16 : 9\sqrt{3}$.

E X E M P L U M IX.

Fig. 19.

49. Inter omnes curvas AM æquales areas APM includentes; invenire eam, quæ sit ita comparata, ut, si perpetuo a centro circuli osculantis O ad applicatam MP productam ducatur perpendicularis ON; curva a punctis N formata minimam comprehendat aream, APN.

Positis abscissa AP = x, & applicata PM = y; erit area
APM

APM = $\int y dx$, quæ est proprietas communis, ejusque valor differentialis = $ny \cdot dx$. Deinde, cum fit radius osculi MO

$$= \frac{(1+pp)^{3/2}}{q}, \text{ fiet } MN = \frac{(1+pp)}{q} \text{ \& } PN =$$

$$\frac{(1+pp)}{q} - y; \text{ ex quo area APN erit } = \int y dx$$

$$- \int \frac{(1+pp)}{q} dx; \text{ quæ debet esse minima, cujus valor dif-}$$

$$\text{ferentialis est } = ny \cdot \left(- dx + d \cdot \frac{2p}{q} + \frac{1}{dx} dd \cdot \frac{(1+pp)}{qq} \right);$$

$$\text{unde ista nascitur æquatio } ndx^2 = dx d \cdot \frac{2p}{q} + dd \cdot \frac{(1+pp)}{qq};$$

$$\text{quæ integrata dat } nxdx = \frac{2pdx}{q} + d \cdot \frac{1+pp}{qq} + bdx. \text{ Illa}$$

$$\text{vero eadem æquatio, per } p \text{ multiplicata, dat } ndxdy =$$

$$dy d \cdot \frac{2p}{q} + p dd \cdot \frac{1+pp}{qq}; \text{ cujus integrale est } nydx = cdx$$

$$- \frac{2dx}{q} + pd \cdot \frac{1+pp}{qq}. \text{ His æquationibus conjungendis,}$$

$$\text{oritur } nxdy - nydx = bdy - cdx + \frac{2pdy}{q} + \frac{2dx}{q} =$$

$$bdy - cdx + \frac{2dx^2 + 2dy^2}{dp}. \text{ Ponatur } nx - b = nt, \text{ \&}$$

$$ny - c = nu; \text{ erit } dy = du, \text{ \& } dx = dt, \text{ atque } ndp =$$

$$\frac{2dt^2 + 2du^2}{tdu - ndt} = \frac{nddu}{dt}, \text{ seu } 2dt^3 + 2dtdu^2 = ntduddu$$

$$- nndtddu, \text{ posito } dt \text{ constante. Sit } u = st, \text{ erit } du =$$

$$sdt + tds, \text{ \& } ddu = tdds + 2dtds; \text{ hisque substitutis}$$

$$\text{prodibit ista æquatio: } 2(1+ss)dt^3 + 4st dt^2 ds +$$

$$2(1-n)tdtds^2 = nt^3 dsdds. \text{ Ponatur } t = e^{frds}, \text{ erit}$$

$$dt = e^{frds} rds, \text{ \& } ddt = 0 = e^{frds} (rdds + drds$$

$$+ r r ds^2); \text{ unde fit } dds = - \frac{drds}{r} - rds^2; \text{ ex quibus}$$

$$\text{tandem emergit } 2(1+ss)r^3 ds + 4sr^2 ds + 2(1-n)rds$$

$$= - \frac{ndr}{r} - nrds, \text{ seu } \frac{ndr}{r} + (2-n)rds +$$

$4sr^2 ds + 2r^3 ds + 2r^3 s^2 ds = 0$. Sit $s = v - \frac{1}{r}$, fiet
 $dr + rrdv = \frac{ndv}{2(1+vv)}$; quæ æquatio integrationem ad-
 mittit, quoties est $n = 2i(i-1)$ denotante i numerum in-
 tegrum quemcunque: ut si sit $n = 4$, fiet $r = \frac{2v}{1+vv} +$
 $\frac{1}{(1+vv)^2} \int \frac{dv}{(1+vv)^2}$; ex qua retrogrediendo constructio
 absolvi poterit.

EXEMPLUM X.

50. Inter omnes curvas, in quibus $\int xT dx$ eundem obtinet
 valorem; invenire eam in qua sit $\int yT dx$ maximum vel minimum,
 existente T functione quacunque ipsius p , ita ut sit $dT = P dp$.

Ad formulæ $\int xT dx$ valorem differentialem inveniendum;
 notandum est esse $d.xT = Tdx + xPdp$, ex quo illius va-
 lor differentialis erit $= -n.v.d.xP$. Ex altera autem for-
 mula $\int yT dx$ habetur $d.yT = Tdy + yPdp$, unde ejus
 valor differentialis erit $n.v.(Tdx - d.yP)$. Quare, pro
 curva quæ sita oriatur ista æquatio $nd.xP = Tdx - d.yP$.
 Ergo $\int Tdx = nxP + yP + b$. Porro si illa æquatio per p
 multiplicetur, habebitur $npd.xP = Tdy - pd.yP =$
 $d.yT - yP.dp - pd.yP = d.yT - d.yPp$. At est
 $pd.xP = Ppdx + px dP + xPdp + Tdx - d.xT =$
 $d.xPp + Tdx - dxT$. Quamobrem oriatur $d.yT -$
 $d.yPp = nd.xPp + nTdx - nd.xT$; hincque $\int nTdx$
 $= yT - yPp - nxPp + nxT + c$. Quia vero, ex su-
 periori integratione habemus $\int nTdx = nnxP + nyP + nb$,
 erit, eliminando $\int nTdx$, ista æquatio $nnxP + nyP + nb$
 $= yT - yPp - nxPp + nxT + c$, seu y
 $= \frac{nx(nP + Pp - T) + c}{-nP - Pp + T}$, vel $y = -nx + \frac{c}{T - nP - Pp}$.
 Ergo

Ergo prodit tandem $x = c \int \frac{dP}{(T - nP - Pp)^2}$, atque $y =$
 $c \int \frac{p dP}{(T - nP - Pp)^2} = \frac{c}{T - nP - Pp} \dots$
 $nc \int \frac{dP}{(T - nP - Pp)^3}$

EXEMPLUM XI.

51. Invenire curvam, qua, inter omnes alias intra eosdem terminos contentas, & eundem formulæ $\int x dx \sqrt{(1+pp)}$ valorem continentes, habeat $\int y dx \sqrt{(1+pp)}$ maximum vel minimum.

Exemplum hoc est Casus præcedentis, atque ex illo manat, ponendo $T = \sqrt{(1+pp)}$, ex quo erit $P = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & $dP = \frac{dp}{(1+pp)^{3/2}}$. Porro vero erit $T - nP - Pp$

$= \frac{1-np}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex his jam surrogatis, prodibit $x =$
 $c \int \frac{dp}{(1-np)^2 \sqrt{(1+pp)}}$ & $y = \frac{c \sqrt{(1+pp)}}{1-np} - nx$. In-

tegratione autem per logarithmos instituta fiet
 $x = \frac{nc(p + \sqrt{(1+pp)}) - c}{(1+nn)(1-np)} + \frac{c}{(1+nn)^{3/2}} \times$

$\int \frac{n + (1 + \sqrt{(1+nn)})(p + \sqrt{(1+pp)})}{n + (1 - \sqrt{(1+nn)})(p + \sqrt{(1+pp)})} + b$, &

$y = \frac{nc + c(\sqrt{(1+pp)} - nnp)}{(1+nn)(1-np)} - \frac{nc}{(1+nn)^{3/2}} \times$

$\int \frac{n + (1 + \sqrt{(1+nn)})(p + \sqrt{(1+pp)})}{n + (1 - \sqrt{(1+nn)})(p + \sqrt{(1+pp)})} - nb$; ex qui-

bus valoribus curva construi poterit per logarithmos. Generaliter autem, quamcunque T functionem ipsius p denotet, constructio semper per quadraturas absolvi potest. Caterum hoc Exemplum sine subsidio præcedentis multo difficilius solutum fuisset;

set; non tam facile enim perspicere licuisset, quomodo æquatio inventa integrabilis redderetur quam in casu generali.

PROPOSITIO V. PROBLEMA.

§2. Inter omnes curvas ad eandem abscissam $= a$ relatas, qua eundem formulæ $\Pi = \int [Z] dx$ valorem recipiunt; invenire eam, in qua sit $\int Z dx$ maximum vel minimum; existente Z functione simul ipsius Π , ita ut sit $dZ = L d\Pi + M dx + N dy + P dp + Q dq + \&c.$ atque $d[Z] = [M] dx + [N] dy + [P] dp + [Q] dq + \&c.$

S O L U T I O.

Quoniam est $d[Z] = [M] dx + [N] dy + [P] dp + [Q] dq + \&c.$ erit formulæ $\int [Z] dx$, quæ hic quantitatem omnibus curvis communem repræsentat, valor differentialis $= n.v. dx ([N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} - \&c.)$, qui ex Casu primo §. 7 Cap. præced. sequitur. At formula $\int Z dx$, maximum minimumve exprimens, quia Z involvit formulam integram $\Pi = \int [Z] dx$, pertinet ad Casum secundum loci citati: ejusque adeo valor differentialis erit $= n.v. dx (N + [N] V - \frac{d(P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} - \&c.)$, denotante $V = H - \int L dx$, ubi H est quantitas determinata, quæ oritur si in integrali $\int L dx$ ponatur $x = a$. Atque, ob hanc ipsam quantitatem H , iste valor differentialis a præscripta longitudine abscissæ $x = a$ pendet. Ex his igitur duobus valoribus differentialis ambarum formularum propositarum, quarum altera proprietatem communem, altera maximum minimumve exponit, secundum regulam datam, nascitur æquatio pro curva sequens:

$$0 = \alpha [N] - \frac{\alpha d[P]}{dx} + \frac{\alpha dd[Q]}{dx^2} - \&c. + N + [N] V - \frac{d(P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} - \&c. \text{ quæ, ob } V = H -$$

$$H - \int L dx, \text{ transit in hanc } 0 = N + (\alpha + H - \int L dx)[N] - \frac{d(P + (\alpha + H - \int L dx)[P])}{dx} + \frac{dd(Q + (\alpha + H - \int L dx)[Q])}{dx^2}$$

— &c.

Cum jam α fit quantitas constans arbitraria; etiamsi H fit quantitas constans determinata, tamen $\alpha + H$ fiet quantitas arbitraria: ideoque non amplius a definita abscissæ longitudine α pendet. Quare si, loco $\alpha + H$, scribamus C , habebimus pro curva quæsitâ hanc æquationem:

$$0 = N + (C - \int L dx)[N] - \frac{d(P + (C - \int L dx)[P])}{dx} + \frac{dd(Q + (C - \int L dx)[Q])}{dx^2} \text{ — \&c. quæ ergo pro quacun-}$$

que abscissa exhibet Curvam, quæ, inter omnes alias eundem formulæ $\int [Z] dx$ valorem recipientes, continebit formulæ $\int Z dx$ maximum minimumve valorem. Q. E. I.

COROLL. I.

53. Si igitur proprietas communis fuerit ea ipsa formula integralis, quæ in maximi minimive formula implicatur; tum consideratio determinatæ abscissæ magnitudinis ex calculo egreditur, & Curva inventa pro quavis abscissa quæsitâ satisfaciet.

COROLL. II.

54. In hac æquatione inventa, duæ adhuc inerunt formulæ integrales; primo nempe formula $\int L dx$, ac deinde formula $\pi = \int [Z] dx$, quæ cum ea in Z contineatur, inerit in quantitatibus L, M, N, P &c.

COROLL. III.

55. Si igitur hæc integralia per differentiationem tollere liceat; pervenietur ad differentialia binis gradibus altiora, simulque exhibit constans arbitraria C . Interim tamen numerus constans

tantium arbitrariorum unitate minor erit quam gradus iste differentialium; eo quod integrale $\pi = \int [Z] dx$ definitum obtinere debet valorem, eum ipsum scilicet, quem in maximi minimive formula $\int Z dx$ habet.

COROLL. IV.

56. Hinc igitur in æquatione inventa, ob constantem arbitrariam C , potestate una plures inerunt constantes, quam differentialium gradus indicat. Quarum una eo determinabitur, ut valor formulæ communis $\pi = \int [Z] dx$ fiat pro curva inventa datæ magnitudinis; reliquæ vero per data puncta vel tangentium positionem datam determinabuntur.

COROLL. V.

57. Si Z fuerit functio cum quantitatum $x, y, p, q, \&c.$ tum arcus curvæ s : atque inter omnes Curvas isoperimétras quærat eam, in qua sit $\int Z dx$ maximum vel minimum; tum fiet $\pi = s = \int [Z] dx$ & $[Z] = \sqrt{(1 + pp)}$, ita ut sit $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}}$;

COROLL. VI.

58. Hoc igitur casu, si fuerit $dZ = Lds + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \&c.$ habebitur pro Curva quæ, inter omnes isoperimétras, habeat $\int Z dx$ maximum vel minimum, ista æquatio:

$$0 = N - \frac{1}{dx} d\left(P + \frac{(C - \int L dx)p}{\sqrt{(1 + pp)}}\right) + \frac{ddQ}{dx^2} - \&c.$$

$$\text{seu } N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = \frac{(C - \int L dx) dp}{dx (1 + pp)^{3/2}} - \frac{Lp}{\sqrt{(1 + pp)}}$$

$$\text{sive } \frac{Lp}{\sqrt{(1 + pp)}} + N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = \&c. = \frac{(C - \int L dx) dp}{dx (1 + pp)^{3/2}}$$

COROLL. VII.

59. Cum sit C quantitas arbitraria; in genere notari convenit, quod si pro C accipiatur ille formulæ $\int L dx$ valor, quem inducit si ponatur $x = a$, tum prodituram esse curvam, quæ inter omnes omnino curvas eidem abscissæ $x = a$ respondentes, habeat valorem formulæ $\int Z dx$ maximum vel minimum.

SCHOLIION I.

60. Casus Coroll. 6, quia is ab Auctoribus potissimum tractari est solitus, peculiarem evolutionem meretur, ut ejus ope Problemata quæ forte occurrere queant, facilius & expeditius resolvi possint. Inter omnes igitur Curvas isoperimetas, seu quæ eandem habeant longitudinem $s = \int dx \sqrt{(1 + pp)}$, quærat eam, in qua sit $\int Z dx$ maximum vel minimum, existente Z functione cum quantitatum definitarum x, y, p, q &c. tum arcus curvæ s ; ita ut sit $dZ = L ds + M dx + N dp + P dp + \&c.$ Pro curva hac proprietate gaudente jam inventa est hæc æquatio:

$$\frac{1}{dx} d. \frac{(C - \int L dx) p}{\sqrt{(1 + pp)}} = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \&c. \text{ quæ quidem, in hoc latissimo sensu nec integrari nec ad simpliciore}$$

formam se reduci patitur. At casus notasse juvabit, quibus eam integrare licebit. Ac primo quidem si sit $N = 0$ sponte prodit ista pro curva æquatio:

$$A + \frac{(C - \int L dx) p}{\sqrt{(1 + pp)}} = -P + \frac{dQ}{dx} - \&c. \text{ jam semel integrata. Secundo ponamus esse } M = 0; \text{ atque æquatio per}$$

$p dx = dy$ multiplicata abibit in hanc

$$p d. \frac{(C - \int L dx) p}{\sqrt{(1 + pp)}} = N dy - P dp + \frac{p ddQ}{dx} - \&c. \text{ ad}$$

quam si addatur $L ds = L dx \sqrt{(1 + pp)} = dZ - N dy - P dp - Q dq$ &c.; integratione instituta prodibit $\int (L dx \sqrt{(1 + pp)}$

$$+ \frac{p d. (C - \int L dx) p}{\sqrt{(1 + pp)}}) = Z - Pp - Qq + \frac{p dQ}{dx} \&c.$$

Prius

- p d Q

Prius vero membrum si evolvatur, transit in $f(Ldx \sqrt{1+pp})$
 $+ \frac{(C-fLdx)pdp}{(1+pp)^{3/2}} - \frac{Lppdx}{\sqrt{1+pp}} = f\left(\frac{Ldx}{\sqrt{1+pp}} + \frac{(C-fLdx)pdp}{(1+pp)^{3/2}}\right)$,
 cujus integrale est $-\frac{C-fLdx}{\sqrt{1+pp}}$. Quare, casu quo $M=0$,
 habebitur ista æquatio $\frac{C-fLdx}{\sqrt{1+pp}} = A - Z + Pp + Qq -$
 $\frac{p dQ}{dx}$. Sin autem tertio fuerit tam $M=0$ quam $N=0$, ha-
 bebatur primum, ob $N=0$, hæc æquatio: $A + \frac{(C-fLdx)p}{\sqrt{1+pp}}$
 $= -P + \frac{dQ}{dx}$; quæ, multiplicata per $dp = qdx$, abit in
 hanc $Adp + \frac{(C-fLdx)pdp}{\sqrt{1+pp}} = -Pdp + Qdq$. Cum au-
 tem sit $dZ = Ldx \sqrt{1+pp} + Pdp + Qdq$, habebitur
 $dZ + Adp - Ldx \sqrt{1+pp} + \frac{(C-fLdx)pdp}{\sqrt{1+pp}} = qdQ$
 $+ Qdq$; quæ integrata dabit, $Z + B + Ap + (C-fLdx)$
 $\sqrt{1+pp} = Qq$, seu $C - fLdx = \frac{Qq - B - Ap - Z}{\sqrt{1+pp}}$.
 At ex prioræ æquatione est $C - fLdx = -\frac{A\sqrt{1+pp}}{p}$
 $-\frac{p\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{dQ\sqrt{1+pp}}{pdx}$; ex quibus conjungen-
 dis elicitur: $Adx - Bdy = Zdy - Pdx - Ppdy + dQ$
 $+ ppdQ - Qpdp$, in qua non amplius inest formula inte-
 gralis $fLdx$. Usus igitur horum casuum in Exemplis monstra-
 bimus.

E X E M P L U M I.

61. *Inter omnes curvas isoperimétras; definire eam, in qua sit*
 $\int s^n dx$ *maximum vel minimum, denotante s arcum curvæ abscissa x respondentem.*

Quo-

Quoniam proprietas communis longitudinem arcus $s = \int dx \sqrt{(1 + pp)}$ respicit, atque in maximi minimive formula $\int s^n dx$ inest ipse arcus, solutio pertinebit ad Casum in Scholio pertractatum. Comparata ergo formula $\int s^n dx$ cum generali $\int Z dx$, fiet $Z = s^n$ & $dZ = n s^{n-1} ds$; hincque $L = n s^{n-1}$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ &c. Quare ex Scholii Casu ultimo, quo posueramus $M = 0$ & $N = 0$, habebitur ista æquatio $A dx - B dy = Z dy = s^n dy$, ex qua oritur $A dx = dy (B + s^n)$ & $A^2 dx^2 + A^2 dy^2 = A^2 ds^2 = dy^2 (A^2 + (B + s^n)^2)$ ideoque $dy = \frac{A ds}{\sqrt{(A^2 + (B + s^n)^2)}}$

atque $dx = \frac{(B + s^n) ds}{\sqrt{(A^2 + (B + s^n)^2)}}$; unde Curvæ constructio

perfici poterit. Vel posito $dy = p dx$, erit $s^n = \frac{A - Bp}{p}$,

atque $s = \sqrt[n]{\frac{A - Bp}{p}}$: ex quo fiet $ds = dx \sqrt{(1 + pp)} = \frac{A dp (A - Bp)^{(1-n):n}}{n p^{(1+n):n}}$. Atque hinc per p coordinatæ

curvæ x & y ita determinabuntur, ut sit $x = - \frac{A}{n} \int \frac{dp (A - Bp)^{(1-n):n}}{p^{(1+n):n} \sqrt{(1 + pp)}}$ & $y = - \frac{A}{n} \int \frac{dp (A - Bp)^{(1-n):n}}{p^{1:n} \sqrt{(1 + pp)}}$.

Videntur hinc quidem quatuor constantes, duæ scilicet novæ, præter A & B , ingredi, ob duplicem integrationem y & x .

At cum posito $x = 0$, simul arcus curvæ $s = \sqrt[n]{\frac{A - Bp}{p}}$ evanescere debeat; hinc vicissim constans in integratione ipsius x orta definietur. Nimirum si n fuerit numerus affirmativus, arcus Euleri *De Max. & Min.* D d cus

cus s evanescit, posito $p = \frac{A}{B}$; ex quo valor ipsius x ita determinari debet, ut posito $p = \frac{A}{B}$ fiat $= 0$.

Quod si ponatur $n = 1$; habebitur ex priorē constructione, statim $dx = \frac{(B+s)ds}{\sqrt{(A^2 + (B+s)^2)}}$; ideoque $x = \sqrt{(A^2 + B^2 + 2Bs + ss)} - \sqrt{(A^2 + B^2)}$, seu posito $B = b$, & $\sqrt{(A^2 + B^2)} = c$, erit $x + c = \sqrt{(c^2 + 2bs + ss)}$. Ex posteriore autem construendi modo, oritur $x = -As \frac{dp}{pp\sqrt{(1+pp)}} = \frac{A\sqrt{(1+pp)}}{p} + b$, seu $(x - b)p = c\sqrt{(1+pp)}$; hincque $p = \frac{c}{\sqrt{((x-b)^2 - c^2)}} = \frac{dy}{dx}$. Quare cum sit $y = \int \frac{cdx}{\sqrt{((x-b)^2 - c^2)}}$; curva satisfaciens erit Catenaria.

E X E M P L U M II.

62. *Inter omnes curvas ejusdem longitudinis, eam determinare, in qua sit $\int S dx$ maximum vel minimum, existente S functione quacunque arcus s .*

Quia proprietas communis arcu $s = \int dx \sqrt{(1+pp)}$ continetur; solutio ex Scholio peti poterit. Scilicet cum sit $Z = S =$ functioni ipsius s , erit $L ds = dS$, & $M = N = P = Q$ &c. $= 0$. Quare, per tertium Scholii Casum, habebitur pro curva quaesita ista aequatio $A dx - B dy = S dy$, & $A dx = dy(B + S)$. Hinc ergo erit $A^2 dx^2 + A^2 dy^2 = A^2 ds^2 = dy^2(A^2 + (B + S)^2)$ & $y = \int \frac{A ds}{\sqrt{(A^2 + (B + S)^2)}}$; erit autem abscissa $x = \int \frac{(B + S) ds}{\sqrt{(A^2 + (B + S)^2)}}$; unde curvae constructio absolvi poterit.

Ponamus esse $S = e^s$; positoque $dy = p dx$, erit $\frac{A - Bp}{p}$

$$= e^s, \text{ \& } e^s ds = \frac{-A dp}{p p} = \frac{(A - Bp) dx \sqrt{(1 + pp)}}{p}, \text{ hincque}$$

$$dx = \frac{-A dp}{(A - Bp) p \sqrt{(1 + pp)}} \text{ \& } dy = \frac{-A dp}{(A - Bp) \sqrt{(1 + pp)}}.$$

Componendo vero fiet $dx - \frac{B dy}{A} = \frac{-dp}{p \sqrt{(1 + pp)}}$, \& inte-

grando $Ax - By = A \int \frac{1 + \sqrt{(1 + pp)}}{p} + C$, seu

$$\frac{1 + \sqrt{(1 + pp)}}{p} = e^{(Ax - By - C) : A}.$$

Cum autem,

facto $s = 0$, evanescere debeat x , atque ob $\frac{A - Bp}{p} = e^s$,

facto $s = 0$, fiat $p = \frac{A}{A + 1}$, per integrationes efficiendum

est, ut facto $p = \frac{A}{B + 1}$ fiat $x = 0$.

EXEMPLUM III.

63. *Inter omnes curvas ejusdem longitudinis, determinare eam in qua sit $\int s y dx$ maximum vel minimum, denotante s arcum curvae.*

Solutio hujus Quaestionis iterum petenda est ex Scholio; erit namque $Z = sy$ \& $dZ = y ds + s dy$, ex quo fit $L = y$, $M = 0$ \& $N = s$, reliquæ litteræ P, Q , \&c. evanescunt. Cum igitur fit $M = 0$, Casus Scholii secundus hanc suppeditabit solutionem:

$$\frac{C - \int y dx}{\sqrt{(1 + pp)}} = A - ys; \text{ immediate vero pro-$$

$$\text{dit } s dx = d. \frac{(C - \int y dx) p}{\sqrt{(1 + pp)}} = \frac{(C - \int y dx) dp}{(1 + pp)^{3/2}} - \frac{y p dx}{\sqrt{(1 + pp)}}.$$

Quare, cum sit $C - \int y dx = A \sqrt{(1 + pp)} - y s \sqrt{(1 + pp)}$,

$$\text{erit } s dx = \frac{A dp - y s dp - y dy}{1 + pp}, \text{ seu } s dx + s p dy + y s dp +$$

$$y dy = A dp. \text{ Sin autem lubuerit arcum } s \text{ eliminare, habebitur}$$

$$\text{ex binis æquationibus, } s = \frac{A}{y} - \frac{(C - \int y dx)}{y \sqrt{(1 + pp)}} = \frac{(C - \int y dx) dp}{dx (1 + pp)^{3/2}}$$

— $\frac{yp}{\sqrt{(1+pp)}}$; hincque $\frac{A dx}{y} + \frac{yp dx}{\sqrt{(1+pp)}} = (C - \int y dx)$
 $(\frac{dp}{(1+pp)^{3/2}} + \frac{dx}{y\sqrt{(1+pp)}})$. In utroque autem casu diffi-
 cile est ad æquationem ad curvam construendum accommoda-
 tam pertinere.

EXEMPLUM IV.

64. Inter omnes curvas eandem aream $\Pi = \int y dx$ continentis,
 definire eam, in qua sit $\int \frac{dx \sqrt{(1+pp)}}{\Pi}$ maximum vel minimum.

Si hanc Questionem cum Solutione generali comparemus,
 habebimus $\int [Z] dx = \int y dx$; hincque $[Z] = y$, & $[N] = 1$;
 reliquis litteris $[M]$ $[P]$ $[Q]$, &c. evanescentibus. Porro erit
 $Z = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\Pi}$, & $dZ = -\frac{d\Pi \sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2} + \frac{p dp}{\Pi \sqrt{(1+pp)}}$,
 unde erit $L = -\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}$, $M = 0$, $N = 0$, & $P =$
 $\frac{p}{\Pi \sqrt{(1+pp)}}$. Quocirca pro curva quaesita sequens emerget
 æquatio:

$$0 = C + \int \frac{dx \sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2} - \frac{1}{dx} d. \frac{p}{\Pi \sqrt{(1+pp)}}$$

Multiplicetur hæc æquatio per $dy = p dx$, erit $0 = C dy$
 $+ dy \int \frac{dx \sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2} - p d. \frac{p}{\Pi \sqrt{(1+pp)}}$, quæ integrata dabit:

$$0 = B + Cy + y \int \frac{dx \sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2} - \int \frac{d\Pi \sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2} -$$

$$\frac{pp}{\Pi \sqrt{(1+pp)}} + \int \frac{p dp}{\Pi \sqrt{(1+pp)}} = B + Cy + y \int \frac{dx \sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2}$$

$$- \frac{pp}{\Pi \sqrt{(1+pp)}} + \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\Pi}$$

Hinc itaque istam obtinebi-
 mus æquationem $0 = B + Cy + y \int \frac{dx \sqrt{(1+pp)}}{\Pi^2} + \frac{1}{\Pi \sqrt{(1+pp)}}$;
 a qua si prior per y multiplicata subtrahatur, erit

0 =

$$0 = B + \frac{1}{\pi \sqrt{(1+pp)}} + \frac{y}{dx} d. \frac{p}{\pi \sqrt{(1+pp)}}, \text{ seu}$$

$$0 = B dx + \frac{dx}{\pi \sqrt{(1+pp)}} + \frac{y dp}{\pi (1+pp)^{3/2}} - \frac{y^2 p dx}{\pi^2 \sqrt{(1+pp)}};$$

ex qua æquatione si denuo $\pi = \int y dx$ exterminare velimus, prodiret æquatio differentialis tertii ordinis, ex qua multo minus quicquam ad Curvam cognoscendam deduci posset.

SCHOLIUM II.

65. Quanquam, in hac Propositione posuimus [Z] esse functionem determinatam quantitatum $x, y, p, q,$ &c. tamen Methodus solvendi patet, si hæc ipsa quantitas [Z] fuerit functio indefinita formulas integrales in se complectens. Ponamus enim in formula $\pi = \int [Z] dx$, quæ omnibus curvis debet esse communis, esse

$$d[Z] = [L] d\pi + [M] dx + [N] dy + [P] dp + [Q] dq + \&c.$$

existente $\pi = \int [z] dx,$ &c

$$d[z] = [m] dx + [n] dy + [p] dp + [q] dq + \&c.$$

Maximum minimumve autem esse oportere formulam $\int Z dx$, existente: $dZ = L d\pi + M dx + N dy + P dp + \&c.$ Jam formula $\int [Z] dx$ continetur in Casu secundo §. 7 Cap. præc: inde ergo si capiatur integrale $\int [L] dx$ ejusque valor respondens abscissæ $x = a$, ad quam solutio debet accommodari, ponatur $= [H]$, atque $[H] - \int [L] dx = [V]$; habebitur formulæ $\int [Z] dx$ valor differentialis $= n v. dx ([N] + [n][V] - \frac{d([P] + [p][V])}{dx} + \frac{dd([Q] + [q][V])}{dx^2}$

$- \&c.)$. Deinde vero maximi-minimive formula $\int Z dx$ continetur in Casu tertio loci citati; ad ejusque valorem differentialem inveniendum, ponatur formulæ $\int L dx$ valor abscissæ $x = a$ respondens $= H$, ac $H - \int L dx = V$. Jam capiatur integrale $\int [L] V dx = H \int [L] dx - \int [L] dx \int L dx$ fitque, posito $x = a$, valor formulæ $\int [L] dx \int L dx = K$, eodem autem casu formulæ $\int [L] dx$ valor est $= [H]$, ex quo formulæ

$\int [L] V dx$, casu $x = a$, valor erit $= H[H] - K$, & vocetur $H[H] - K - H/[L] dx + \int [L] dx \int L dx = W$, ita ut sit $W = H[V] - K + \int [L] dx \int L dx$, eritque formulæ propositæ $\int Z dx$ valor differentialis $= n v. dx (N + [N] V + [n] W - \frac{d.(P + [P] V + [p] W)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q] V + [q] W)}{dx^2}$

— &c.). Quod si jam ad hunc valorem differentialem addatur præcedens per quantitatem constantem arbitrariam α multiplicatus, summaque ponatur $= 0$, prodibit æquatio pro curva quæsitæ hæc :

$$0 = N + [N](\alpha + V) + [n](\alpha[V] + W) - \frac{1}{dx}$$

$$d(P + [P](\alpha + V) + [p](\alpha[V] + W) + \frac{1}{dx^2}$$

$dd(Q + [Q](\alpha + V) + [q](\alpha[V] + W) - \&c.$ Est vero hic $\alpha + V = \alpha + H - \int L dx$; unde si ponatur $\alpha + H = C$, erit C constans arbitraria, & $\alpha + V = C - \int L dx$, atque $\alpha[V] + W = C[H] - K - C \int [L] dx + \int [L] dx \int L dx$. Hoc igitur pacto, pervenietur ad curvam quæsitam, in cujus æquatione, quia ob $[H]$ & K adhuc inest constans data a , ea quæsito satisfaciet tantum pro proposita abscissa $x = a$. Quod si autem formularum ambarum altera ad Casum 4, altera ad Casum 5 pertineat, tum iterum consideratio datæ abscissæ a ex calculo egreditur, eademque curva pro omni abscissa satisfaciet, id quod unico sequenti Exemplo declarasse sufficiet.

EXEMPLUM V.

66. *Inter omnes curvas eidem abscissæ respondententes, qua eundem formulæ v valorem recipiunt; invenire eam, in qua sit $\int \frac{dx \sqrt{(1 + pp)}}{v}$ maximum vel minimum, existente $dv = g dx + W dx \sqrt{(1 + pp)}$ & W functione quacunque ipsius v .*

Solutio hujus Quæstionis exhibebit curvam super qua corpus descen-

descendens a gravitate uniformi g deorsum, in directione abscissarum sollicitatum in medio quocunque resistente celerrime delabitur, inter omnes alias curvas super quibus descendendo eandem acquirit celeritatem. Est enim \sqrt{v} celeritas corporis in quocunque curvæ puncto, & W exprimit resistantiam medii.

Quod nunc primum ad proprietatem communem $v = \int dx (g + W \sqrt{(1 + pp)})$; ponamus esse $dW = U dv$, atque hæc formula ad Casum quartum pertinebit; erit namque $\pi = v$, & $Z = g + W \sqrt{(1 + pp)}$, ac $dZ = U dv \sqrt{(1 + pp)} + \frac{W p dp}{\sqrt{(1 + pp)}}$; unde erit $L = U \sqrt{(1 + pp)}$, $M = 0$, $N = 0$,

& $P = \frac{W p}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Sumatur ergo integrale $\int U dx \sqrt{(1 + pp)}$,

fitque, casu quo $x = a$ ponitur, $e^{\int U dx \sqrt{(1 + pp)}} = H$,

ac ponatur $V = H e^{-\int U dx \sqrt{(1 + pp)}}$. Ex his erit formula

λv valor differentialis $= n v. dx \left(-\frac{1}{dx} d. \frac{W V p}{\sqrt{(1 + pp)}} \right)$

$= -n v. d. \frac{W V p}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Porro maximi minimive formula:

$\int \frac{dx \sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{v}}$ pertinebit ad Casum quintum, eritque $Z =$

$\frac{\sqrt{(1 + pp)}}{\sqrt{v}}$, & $dZ = -\frac{dv \sqrt{(1 + pp)}}{2v \sqrt{v}} + \frac{p dp}{\sqrt{v(1 + pp)}}$;

ideoque $\pi = v$, & $L = -\frac{\sqrt{(1 + pp)}}{2v \sqrt{v}}$; $M = 0$, $N = 0$,

& $P = \frac{p}{\sqrt{v(1 + pp)}}$. Deinde vero, ob $v = \int dx (g +$

$W \sqrt{(1 + pp)})$, erit $[Z] = g + W \sqrt{(1 + pp)}$, & $d[Z] =$

$U dv \sqrt{(1 + pp)} + \frac{W p dp}{\sqrt{(1 + pp)}}$; unde $[L] = U \sqrt{(1 + pp)}$,

$[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{W p}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Ponatur, si

post integrationem fiat $x = a$, $e^{\int U dx \sqrt{(1 + pp)}} \frac{dx \sqrt{(1 + pp)}}{2v \sqrt{v}} = K$,

fitque

fitque $e^{-\int U dx \sqrt{1+pp}} (K + \int e^{\int U dx \sqrt{1+pp}} \frac{dx \sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}}) = T$:

atque erit formulæ $\int \frac{dx \sqrt{1+pp}}{\sqrt{v}}$ valor differentialis =

$$nv \cdot dx \left(\frac{1}{dx} d \left(\frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} + \frac{W Tp}{\sqrt{1+pp}} \right) = -nv \cdot d \left(\frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} + \frac{W Tp}{\sqrt{1+pp}} \right) \right).$$

Ex his duobus valoribus differentialibus inventis nascitur pro curva quæsitâ sequens æquatio, $0 = \alpha d \cdot \frac{W V p}{\sqrt{1+pp}}$

$$+ d \left(\frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} + \frac{W Tp}{\sqrt{1+pp}} \right), \text{ \& integrando, } B = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} + \frac{W Tp}{\sqrt{1+pp}}$$

$$+ \frac{W p (\alpha V + T)}{\sqrt{1+pp}}. \text{ At est } \alpha V + T = e^{-\int U dx \sqrt{1+pp}}$$

$$\left(\alpha H + K + \int e^{\int U dx \sqrt{1+pp}} \frac{dx \sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}} \right). \text{ Quod si ergo}$$

ponatur $\alpha H + K = C$, erit C constans arbitraria, atque quantitas definita α omnino ex æquatione evanescet; ideoque curva quæsitâ desideratam proprietatem pro quavis abscissa possidebit. Pro curva quæsitâ habebitur ergo ista æquatio:

$$e^{\int U dx \sqrt{1+pp}} \left(\frac{B \sqrt{1+pp}}{W p} - \frac{1}{W \sqrt{v}} \right) = C +$$

$$\int e^{\int U dx \sqrt{1+pp}} \frac{dx \sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}}, \text{ \& differentiando } \frac{-B dp}{W p^2 \sqrt{1+pp}}$$

$$- \frac{B U dv \sqrt{1+pp}}{W^2 p} + \frac{U dv}{W^2 \sqrt{v}} + \frac{dv}{2 W v \sqrt{v}} + \frac{B U dx \sqrt{1+pp}}{W p}$$

$$- \frac{U dx \sqrt{1+pp}}{W \sqrt{v}} = \frac{dx \sqrt{1+pp}}{2v\sqrt{v}}. \text{ Cum autem sit } dv$$

$$= g dx + W dx \sqrt{1+pp}, \text{ habebimus factâ substitutione,}$$

$$\text{ hanc æquationem } \frac{B dp}{W p^2 \sqrt{1+pp}} = \frac{g dx}{2 W v \sqrt{v}} + \frac{g U dx}{W^2 \sqrt{v}} -$$

$$\frac{g B U dx \sqrt{1+pp}}{W^2 p}, \text{ sive istam } \frac{2 B W dp}{\sqrt{1+pp}} = \frac{g W p^2 dx}{v \sqrt{v}} +$$

$$\frac{2 g U p^2 dx}{\sqrt{v}} - 2 g B U p dx \sqrt{1+pp}. \text{ Multiplicetur hæc æqua-}$$

$$\text{ tio per } dv, \text{ \& in primo termino loco } dv \text{ scribatur } g dx + W dx$$

$W dx \sqrt{(1+pp)}$, ac dW loco Udv ; quo facto, habebitur ista æquatio $\frac{2gBdp}{W\sqrt{(1+pp)}} + 2Bdp - \frac{gp^2dv}{Wv\sqrt{v}} = \frac{2gppdW}{W^2\sqrt{v}} - \frac{2gBpdW\sqrt{(1+pp)}}{W^2}$; quæ divisa per p^2 fit integralis; eritque æquatio integrata hæc, $2C - \frac{2B}{p} = \frac{2gB\sqrt{(1+pp)}}{Wp} = \frac{2g}{W\sqrt{v}}$, sive $W = \frac{gB\sqrt{v(1+pp)} - gp}{Cp\sqrt{v} - B\sqrt{v}} = \frac{dv - gdx}{dx\sqrt{(1+pp)}}$. Unde nascitur æquatio a resistentia W libera hæc, $(Cp - B)dv = gCpdx + gBppdx - \frac{gpdv\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$. Cum autem W sit functio ipsius v data, ope æquationis $W\sqrt{v} = \frac{gB\sqrt{v(1+pp)} - gp}{Cp - B}$, dabitur p per v ; qui valor si in præcedente æquatione substituatur, dabitur dx per v & dv ; hincque curva quæsitæ poterit construi.

PROPOSITIO VI. PROBLEMA.

67. Inter omnes curvas proprietate communi A præditas, determinare eam, in qua sit functio quacunque, cum ipsius illius expressionis A , tum alius cujuscunque B , maximum vel minimum.

S O L U T I O.

Sit dA valor differentialis expressionis A , atque dB valor differentialis expressionis B ; habebit functionis illius ipsarum A & B , quam maximum minimumve esse oportet, valor differentialis hujusmodi formam $a dA + \epsilon dB$; in qua constantes a & ϵ a ratione compositionis qua expressiones A & B in illa functione inter se permiscentur pendent; ita ut valores obtineant determinatos ab abscissæ quantitate, cui solutionem accomodatam esse oportet pendent. Quoniam vero expressionis A , quæ proprietatem communem complectitur, valor differentialis est
Euleri de Max. & Min. E c dA ;

dA ; hujus multipulum quodcumque γdA addatur ad valorem differentialem $\alpha dA + \zeta dB$ expressionis, quæ maximum minimumve esse debet, ac summa $(\alpha + \gamma) dA + \zeta dB$ nihilo æqualis posita dabit æquationem pro curva quæsita. Habebitur igitur ista æquatio $(\alpha + \gamma) dA + \zeta dB = 0$, seu $(\alpha + \gamma) dA + \zeta dB = 0$; in qua, etiamsi α & ζ sint quantitates constantes determinatæ, tamen, ob γ & δ quantitates constantes arbitrarias, coëfficientes valorum dA & dB , qui sunt $(\alpha + \gamma) d$ & ζd evadent constantes arbitrariæ magnitudinis. Harum igitur loco si scribantur litteræ ξ & η , habebitur pro curva quæsita ista æquatio $\xi dA + \eta dB = 0$. Quo-circa ad Problema solvendum, expressionum A & B , quarum altera proprietatem communem continet, utriusque autem functio quæcumque maximum minimumve esse debet, singulatim valores differentiales dA & dB capi oportet, eosque, per quantitates constantes arbitrarias, quasque multiplicatos nihilo æquales poni, quo pacto resultabit ista æquatio $\xi dA + \eta dB = 0$, quæ naturam curvæ quæsitæ exprimet. Q. E. I.

C O R O L L. I.

68. Natura igitur curvæ satisfaciens tantum ab expressionibus A & B pendet; neque ratio functionis ipsarum A & B , quæ maximum minimumve esse debet, ullo modo in computo manet; sed quæcumque sit functio, eadem solutio prodibit.

C O R O L L. II.

69. Quæcumque itaque ipsarum A & B functio, inter omnes curvas eadem proprietate A gaudentes, debeat esse maximum vel minimum; solutio perinde se habebit, ac si, inter omnes curvas eadem communi proprietate A gaudentes, ea requiratur, in qua expressio altera B maximum minimumve obtineat valorem.

COROLL. III.

70. Quod si ergo expressiones A & B ejusmodi fuerint formulae, quarum valores differentiales dA & dB non pendeant a magnitudine abscissae x cui respondent; quod evenit, si illae formulae pertineant ad Casum vel primum vel quartum, secundum nostram enumerationem Capite praecedente §. 7 factam, tum curva inventa pro quacunque abscissa aequae satisfaciet.

COROLL. IV.

71. Eadem Solutio locum habebit si, inter omnes curvas quarum communis sit proprietas functio quaecunque ipsarum A & B , ea requiratur in qua alia quaequam earundem A & B functio sit maximum vel minimum. Hoc enim quoque casu pervenitur ad aequationem $\xi dA + \eta dB = 0$, in qua ξ & η sint quantitates constantes ad arbitrium accipiendae.

EXEMPLUM I.

72. Inter omnes curvas a Mb cum axe AB eandem aream Fig. 20. $\int y dx$ continent, invenire eam in qua sit $\frac{\int y y dx}{\int y dx}$ minimum.

Quaestio haec initur, si inter omnes areas aequales quae intra ordinatas extremas Aa & Bb atque basi AB formari possunt, desideretur ea, quae habeat suum centrum gravitatis in loco infimo positum. Sumpta enim curva quaecunque a Mb , positisque abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$, erit portio a APM centrum gravitatis a basi AP remotum intervallo $= \frac{\int y y dx}{2 \int y dx}$; quod adeo fiet minimum, si reddatur haec expressio $\frac{\int y y dx}{\int y dx}$ minima. Habemus ergo binas has formulas $\int y dx$ & $\int y y dx$, quarum valores differentiales sunt $n v. dx. 1$ & $n v. dx. 2y$, ex
 E e 2 qui-

quibus pro curva quæsitâ ista colligitur æquatio $\xi + 2\eta y = 0$; seu $y = c$. Quæstioni igitur satisfacit linea recta $a\zeta$ basi AB parallela seu horizontalis, atque parallelogrammum rectangulum $Aa\zeta B$, præ omnibus aliis figuris ut $Aa b B$ ejusdem areæ, hac gaudebit prærogativa, ut ejus centrum gravitatis ad basin AB proxime accedat. Quod si ergo $a\zeta$ concipiatur tanquam vas aqua repletum, si suprema aquæ superficies $a\zeta$ sese ad situm horizontalem composuerit, tum aqua habebit suum centrum gravitatis profundius situm, quam si ejus suprema superficies alium quemcunque situm teneret.

E X E M P L U M II.

Fig. 14. 73. *Inter omnes curvas ejusdem longitudinis DAD , invenire eam qua habeat suum gravitatis centrum quam profundissime situm, seu in qua sit $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ minimum.*

Jam intelligitur Solutio hujus Quæstionis datura esse curvam Catenariam; namque secundum leges Staticas catena ex punctis D & D suspensa ejusmodi induet figuram ut ejus centrum gravitatis maxime descendat. Quamobrem inter omnes figuras, quas catena inducere potest, quæ quidem omnes ejusdem sunt longitudinis, curva Catenaria orietur, si quæratur ea, in qua sit $\frac{\int x dx \sqrt{(1+pp)}{\int dx \sqrt{(1+pp)}}$ minimum; quippe quæ expressio dat distantiam centri gravitatis G ab abscissarum initio A . Cum igitur habeantur binæ istæ formulæ $\int dx \sqrt{(1+pp)}$, & $\int x dx \sqrt{(1+pp)}$; quærantur earum valores differentiales; qui erunt, primæ = — $n v. d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & alterius = — $n v. d. \frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ex quibus nascitur pro curva quæsitâ ista æquatio $c d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ = $d. \frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}}$, & integrando $\frac{xp}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{cp}{\sqrt{(1+pp)}}$ +

+ b, seu $x - c = \frac{b\sqrt{(1+pp)}}{p}$, & $dx = \frac{-b dp}{pp\sqrt{(1+pp)}}$. Hinc ergo fiet $y = \int p dx = -b \int \frac{dp}{p\sqrt{(1+pp)}}$; ex quibus æquationibus curva constructur, eritque curvæ longitudo $\int dx\sqrt{(1+pp)} = s = \frac{b}{p} + \text{Const.} = \frac{b}{p} + f$. Hinc alia Constructio, definiendis x & y per s formari poterit: erit nempe $p = \frac{b}{s-f}$, & si initium capiatur in A, ubi fit $p = \infty$, ponendum est $f = 0$, ita ut sit $p = \frac{b}{s}$; unde fit $\sqrt{(1+pp)} = \frac{\sqrt{(bb+ss)}}{s}$ & $dx\sqrt{(1+pp)} = ds = \frac{dx\sqrt{(bb+ss)}}{s}$; hincque $dx = \frac{s ds}{\sqrt{(bb+ss)}}$, & $x = \sqrt{(bb+ss)} - b$. Porro erit $dy = p dx = \frac{b ds}{\sqrt{(bb+ss)}}$, atque $y = bl \frac{s + \sqrt{(bb+ss)}}{b}$. Æquatio autem inter coordinatas orthogonales x & y deducetur ex æquatione $x - c = \frac{b\sqrt{(1+pp)}}{p}$; quæ si desideretur super axe AP, qui est diameter, & pro initio abscissarum in A sumpto, ubi est $p = \infty$, poni oportet $c = -b$; eritque $(x+b)p = b\sqrt{(1+pp)}$, hincque $(x+b)^2 pp = bb + bbpp$, & $p = \frac{b}{\sqrt{(xx+2bx)}}$; ideoque $dy = \frac{b dx}{\sqrt{(xx+2bx)}}$, quæ est æquatio pro Catenaria nota.

EXEMPLUM III.

74. Inter omnes curvas ejusdem longitudinis, determinare eam in qua sit $\frac{\int Sx dx \sqrt{(1+pp)}}{\int S dx \sqrt{(1+pp)}}$ minimum; denotante S functionem quamcunque arcus curvæ $s = \int dx \sqrt{(1+pp)}$.

In hoc Exemplo continetur inventio curvæ Catenariæ, si catena non fuerit ubique uniformiter crassa, sed cujus crassities ar-

cui s respondens est ut S functio ipsius s . Tum enim exprimet
 $\int S dx \sqrt{(1+pp)}$ hujus catenæ pondus, & $\frac{\int S x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int S dx \sqrt{(1+pp)}}$
 altitudinem centri gravitatis supra abscissarum initium; quæ esse
 debet minima. Principio quidem hic casus in Problemate præ-
 cedente non contineri videtur, quia formula arcum exprimens ip-
 sa $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ non inest in maximi minimive expressione
 $\frac{\int S x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int S dx \sqrt{(1+pp)}}$, quippe quæ est functio duarum aliarum for-
 mularum integralium. At cum sit S functio arcus curvæ s , at-
 que $ds = dx \sqrt{(1+pp)}$, erit $\int S dx \sqrt{(1+pp)} = \int S ds$,
 ideoque functio ipsius s : ex quo expressio $\frac{\int S x dx \sqrt{(1+pp)}}{\int S dx \sqrt{(1+pp)}}$ erit
 functio formularum $\int dx \sqrt{(1+pp)}$ & $\int S x dx \sqrt{(1+pp)}$, qua-
 rum illa proprietatem communem continet. Idem igitur est ac
 si quærere deberemus inter omnes curvas æque longas eam in
 qua sit $\int S x dx \sqrt{(1+pp)}$ minimum. Cum jam S sit functio
 ipsius $s = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, pertinebit hæc Quæstio ad Propo-
 sitionem præcedentem, eumque casum qui §. 60 est pertractatus.
 Scilicet erit $Z = Sx \sqrt{(1+pp)}$; unde, si ponamus $dS =$
 $T ds$, fiet $dZ = x T ds \sqrt{(1+pp)} + S dx \sqrt{(1+pp)} +$
 $\frac{S x p dx}{\sqrt{(1+pp)}}$, ita ut sit $L = x T \sqrt{(1+pp)}$; $M = S \sqrt{(1+pp)}$,
 $N = 0$ & $P = \frac{S x p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Jam ob $N = 0$, obtinemus ex
 eodem loco citato statim hanc æquationem
 $A + \frac{(C - \int x T dx \sqrt{(1+pp)}) p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{-S x p}{\sqrt{(1+pp)}}$, seu $\frac{A \sqrt{(1+pp)}}{p}$
 $+ C - \int x T dx \sqrt{(1+pp)} + S x = 0$. At est $T dx \sqrt{(1+pp)}$
 $= T ds = dS$; unde habetur $\frac{A \sqrt{(1+pp)}}{p} + C + S x -$
 $\int x dS = 0$, ubi A & C sunt quantitates arbitrariæ. Differentie-
 tur hæc æquatio, fietque $\frac{-A dp}{pp \sqrt{(1+pp)}} + S dx = 0$, seu
 $S dx \sqrt{(1+pp)} = -\frac{cdp}{pp} = S ds$. Quare cum sit S functio
 ipsius

ipsius s , integretur $S ds$, eritque integrale, quod sit $= R$, pondus catenæ longitudini s respondens. Fiet ergo integrando $\frac{c}{p} = R + C$; & si initium curvæ capere placeat in loco A , ubi curvæ tangens est horizontalis, erit $C = 0$, atque $p = \frac{c}{R}$. Hinc ergo porro erit $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{\sqrt{(cc + RR)}}{R} = \frac{ds}{dx}$; ideoque $dx = \frac{R ds}{\sqrt{(cc + RR)}}$, atque $dy = \frac{cds}{\sqrt{(cc + RR)}}$, ex quibus æquationibus curva ita poterit construi, ut statim ad quamvis catenæ longitudinem tam abscissa quam applicata respondens definiatur. Manifestum autem est casu quo $R = s$, hoc est quo catena ponitur uniformis crassitiei, tum prodire Catenariam curvam ordinariam.

SCHOLIUM.

75. Nisi hujus Exempli convenientia, tam cum ista Propositione quam cum præcedente, esset observata, tum Solutio quidem per regulam generalem absolvi potuisset: verum tamen multo prolixior evasisset. Quo autem nihilominus Methodi generalis usus clarius ob oculos ponatur, idem hoc Exemplum secundum generalia præcepta resolvere visum est. Quærat igitur inter omnes curvas ejusdem longitudinis $s = \int dx \sqrt{(1 + pp)}$,

ea quæ habeat valorem expressionis hujus $\frac{\int S x dx \sqrt{(1 + pp)}}{\int S dx \sqrt{(1 + pp)}}$

maximum vel minimum; existente S functione quacunque arcus curvæ s . Et quoniam nondum suspicari licet considerationem

datæ abscissæ, a qua valor differentialis expressionis $\frac{\int S x dx \sqrt{(1 + pp)}}{\int S dx \sqrt{(1 + pp)}}$

pendet, ex calculo esse egressuram; ponamus huic Quæstioni tantum pro data abscissæ longitudine $x = a$ satisfieri oportere.

Ab hac longitudine quidem formulæ communem proprietatem continentis $\int dx \sqrt{(1 + pp)}$ valor differentialis non pendet, quippe

quippe qui constanter est $= -nv. d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; at in maximi minimive expressione $\frac{\int Sx dx \sqrt{(1+pp)}}{\int S dx \sqrt{(1+pp)}}$ ponamus, casu quo $x = a$, fore $\int Sx dx \sqrt{(1+pp)} = A$ & $\int S dx \sqrt{(1+pp)} = B$: illius vero numeratoris $\int Sx dx \sqrt{(1+pp)}$ valorem differentialem esse $= dA$, denominatoris vero $\int S dx \sqrt{(1+pp)}$ valorem differentialem esse $= dB$. Hinc igitur maximi minimive expressionis, quæ, casu $x = a$, fit $= \frac{A}{B}$, valor differentialis erit $= \frac{B dA - A dB}{B B}$, qui multiplo cuicunque formulæ

communis valoris differentialis $= nv. d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ æqualis positus dabit æquationem pro curva quæsita. Jam ad valores differentiales dA & dB inveniendos, consideremus primum formulam $\int S dx \sqrt{(1+pp)}$, quæ secundum enumerationem §. 7 Cap. præced. factam, pertinet ad Casum secundum: quo erit $Z = S \sqrt{(1+pp)}$, & posito $dS = T ds$, erit $dZ = T ds \sqrt{(1+pp)} + \frac{Sp dp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Comparatione ergo facta, erit $\pi = s$;

$L = T \sqrt{(1+pp)}$, $M = 0$, $N = 0$, & $P = \frac{Sp}{\sqrt{(1+pp)}}$: tum vero ob $\pi = s = \int dx \sqrt{(1+pp)}$, erit $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$ & $[M] = 0$, $[N] = 0$, & $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Jam sumatur integrale $\int L dx = \int T dx \sqrt{(1+pp)} = \int T ds = S$, cujus valor, casu $x = a$, fiat $= G$, eritque $V = G - S$. Quamobrem habebitur formulæ $\int S dx \sqrt{(1+pp)}$ valor differentialis

$$dB = -nv. d. \left(\frac{Sp}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{p(G-S)}{\sqrt{(1+pp)}} \right) = -nv. d. \frac{Gp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

Altera porro formula $\int Sx dx \sqrt{(1+pp)}$ pariter in eodem Casu secundo comprehenditur, eritque $Z = Sx \sqrt{(1+pp)}$ &

$$dZ = Tx ds \sqrt{(1+pp)} + S dx \sqrt{(1+pp)} + \frac{Sxp dp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

unde fit $\pi = s$; $L = Tx \sqrt{(1+pp)}$; $M = S \sqrt{(1+pp)}$; $N = 0$

$N = 0$ & $P = \frac{Sxp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Deinde, ob $\pi = s = \int dx \sqrt{(1+pp)}$,
erit, ut ante, $[Z] = \sqrt{(1+pp)}$, $[M] = 0$, $[N] = 0$,
& $[P] = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$. Nunc sumatur integrale $\int L dx =$
 $\int T x dx \sqrt{(1+pp)} = \int T x ds = \int x dS$, cujus valor, posi-
to $x = a$, fit $= H$; erit $V = H - \int x dS$, hincque prodit
istius formulæ valor differentialis $dA = \dots$

$-mv.d\left(\frac{Sxp + p(H - \int x dS)}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = -mv.d\left(\frac{p(H + \int S dx)}{\sqrt{(1+pp)}}\right)$. In-
ventis ergo valoribus dA & dB , æquatio pro curva quæsitæ erit
 $\alpha B^2 d\left(\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}\right) - \epsilon A d\left(\frac{Gp}{\sqrt{(1+pp)}}\right) + \epsilon B d\left(\frac{p(H + \int S dx)}{\sqrt{(1+pp)}}\right) = 0$,
& integrando $\frac{\alpha B^2 p - \epsilon A G p + \epsilon B H p + \epsilon B p \int S dx}{\sqrt{(1+pp)}} = C$; in
qua α , ϵ , & C sunt constantes arbitrariæ, & G & H constan-
tes determinatæ. Quod si ergo ponatur $\frac{\alpha B}{\epsilon} + \frac{AG}{B} + H = b$ &
 $\frac{C}{\epsilon B} = c$, erunt b & c constantes arbitrariæ, atque constantes

determinatæ G & H a definito abscissæ valore $x = a$ penden-
tes omnino ex æquatione evanescent; ita ut Curva inventa pro
quavis abscissâ gavisura sit desiderata proprietate: ejusque æqua-

tio erit hæc $c = \frac{bp + p \int S dx}{\sqrt{(1+pp)}}$, seu $\frac{c\sqrt{(1+pp)}}{p} = b + \int S dx$;

quæ differentiata dabit $S dx = -\frac{cdp}{pp\sqrt{(1+pp)}}$, seu $S dx \sqrt{(1+pp)}$
 $= S ds = -\frac{cdp}{pp}$. Ponatur, ut supra, $\int S ds = R$, ita ut R

pondus longitudinis catenæ s representet, erit $R = \frac{c}{p} + \text{Const.}$
quæ est ipsa æquatio, quam præcedenti Methodo eluimus. Ex
hac itaque solutione intelligitur, quemadmodum per Methodum
generalem hujusmodi Quæstiones resolvi possint, si proprietas
communis non ingrediatur in maximi minimive expressionem;
quod ut clarius intelligatur unum adhuc hujusmodi Exemplum
apposuisse sufficiet.

EXEMPLUM IV.

Fig. 14. 76. Inter omnes curvas ejusdem longitudinis DAD data abscissa AC = a respondentes, eam definire qua comprehendat aream DAD, cujus centrum gravitatis G sit vel altissime, vel profundissime positum, seu in qua sit $\frac{\int y x dx}{\int y dx}$ maximum vel minimum.

Proprietas igitur communis est $\int dx \sqrt{1 + pp}$, cujus valor differentialis cuicunque abscissæ x respondens est = $\frac{p}{\sqrt{1 + pp}}$. Maximi autem minimive expressionis $\frac{\int y x dx}{\int y dx}$ valor differentialis pendebit a præscripta abscissæ longitudine $x = a$; qui ut inveniatur; casu quo $x = a$, fiat $\int y x dx = A$, hujusque formulæ valor differentialis sit = dA , qui per Regulas supra datas invenitur = $nv. dx. x = nv. x dx$. Porro, eodem casu $x = a$, abeat altera formula $\int y dx$ in B , sitque ejus valor differentialis = dB , qui per Regulas datas reperitur = $nv. dx$; ita ut sit $dA = nv. x dx$ & $dB = nv. dx$. Ex his, maximi minimive expressionis $\frac{\int y x dx}{\int y dx}$, quæ, casu $x = a$, abit in $\frac{A}{B}$, valor differentialis erit = $\frac{B dA - A dB}{BB} = \frac{nv. (B x dx - A dx)}{BB}$, qui multiplo valoris differentialis = $\frac{p}{\sqrt{1 + pp}}$, qui ex proprietate communi prodiit, æqualis positus dabit pro curva quæ sita istam æquationem $a d. \frac{p}{\sqrt{1 + pp}} = \frac{B x dx - A dx}{BB}$. Sit $\frac{A}{B} = b$, erit b quantitas constans determinata, quam præbet formula $\frac{\int y x dx}{\int y dx}$, si ponatur $x = a$, & aB ponatur = cc , erit cc quantitas arbitraria. Hinc habebitur ista pro curva æquatio $cc d. \frac{p}{\sqrt{1 + pp}} = x dx - b dx$,
quæ

quæ integrata dat $\frac{2ccp}{\sqrt{(1+pp)}} = xx - 2hx + bb$; ergo $4c^2pp$
 $= (xx - 2hx + bb)^2(1+pp)$, atque $p = \frac{xx - 2hx + bb}{\sqrt{4c^2 - (xx - 2hx + bb)^2}}$
 $= \frac{dy}{dx}$. Quocirca erit $y = \int \frac{(xx - 2hx + bb) dx}{\sqrt{4c^2 - (xx - 2hx + bb)^2}}$, ubi
 constantem bb , pro arbitrio, sive affirmativam, sive negativam
 accipere licet. Hæc autem curva Quæstioni satisfacit tantum
 casu, quo $x = a$; atque ut satisfaciat litteræ h istribui debet va-
 lor quem, casu $x = a$, recipiet expressio $\frac{\int y x dx}{\int y dx}$, ex quo valor
 h determinabitur. Cæterum notari convenit hanc curvam esse
 eam quæ vulgo sub nomine Elasticæ est cognita.

CAPUT VI.

*Methodus, inter omnes curvas pluribus proprietati-
 bus communibus gaudentes, eam determinandi
 quæ maximi minimive proprietate sit prædita.*

PROPOSITIO I. THEOREMA.

I. **C**URVA, quæ inter omnes omnino curvas habet expressionem
 $aA + cB$ maximum vel minimum, eadem simul ita erit
 comparata, ut inter omnes eadem proprietate A præditas contineat
 valorem formulæ B maximum vel minimum.

DEMONSTRATIO.

Ponamus inventam esse curvam, in qua inter omnes alias ei-
 dem abscissæ respondententes valor expressionis $aA + cB$ sit ma-
 ximus; quod enim de maximo demonstrabitur, idem mutatis
 mutandis de minimo valebit. Denotant autem litteræ A & B
 hic nobis ejusmodi formulæ vel expressiones indeterminatæ, in
 quas Quæstio de maximis & minimis cadere queat; tum vero