Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. 1er série

Cauchy, Augustin Louis

Paris, 1882-1900

Persistent Link: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-17997

Mémoire sur l' équation qui à pour racines les moments d' inertie principaux d' un corps solide, et sur diverses équations du même genre.

MÉMOIRE SUR L'ÉQUATION

QUI A POUR RACINES LES

MOMENTS D'INERTIE PRINCIPAUX D'UN CORPS SOLIDE,

ET SUR

DIVERSES ÉQUATIONS DU MÊME GENRE (¹).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. IX, p. 111; 1830.

On sait que la détermination des axes d'une surface du second degré, ou des axes *principaux et des moments d'inertie d'un corps solide* dépend d'une équation du troisième degré, dont les trois racines sont nécessairement réelles. Toutefois, les géomètres ne sont parvenus à démontrer la réalité des trois racines qu'à l'aide de moyens indirects, par exemple en ayant recours à une transformation de coordonnées dans l'espace, afin de réduire l'équation dont il s'agit à une autre équation qui soit du second degré seulement, ou en faisant voir que l'on arriverait à des conclusions absurdes si l'on supposait deux racines imaginaires. La question que je me suis proposée consiste à établir directement la réalité des trois racines, quelles que soient les valeurs des six coefficients renfermés dans l'équation donnée. La solution, qui mérite d'être remarquée à cause de sa simplicité, se trouve comprise dans un théorème que je vais énoncer.

Théorème I. — *Concevons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de déterminer les moments d'inertie principaux d'un corps. Pour obtenir les*

(¹) Lu à l'Académie royale des Sciences, le 20 novembre 1826.

limites des trois racines de l'équation qui sert à déterminer ces moments, il suffira de supprimer dans cette équation les termes qui s'évanouiraient si l'un des axes coordonnés coïncidait avec l'un des axes principaux. Alors on obtiendra une nouvelle équation qui sera immédiatement divisible par un facteur du premier degré, et pourra être ainsi réduite à une équation du second degré dont les deux racines seront réelles. Soient α, 6 ces deux dernières racines, rangées par ordre de grandeur. Si, dans l'équation proposée, on substitue successivement à la variable les quatre valeurs

$$-\infty, \quad \alpha, \quad 6, \quad \infty,$$

on obtiendra quatre résultats alternativement positifs et négatifs. Donc la proposée aura trois racines réelles : l'une inférieure à la quantité α; l'autre comprise entre les limites α, 6; la troisième supérieure à 6.

La démonstration de ce théorème ne présente aucune espèce de difficulté. Ajoutons qu'il se trouve compris comme cas particulier dans un autre théorème plus général, et que je vais indiquer.

Théorème II. — *Si l'on nomme s la somme des carrés de n variables indépendantes $x, y, z, u, \ldots$, et r une fonction homogène du second degré, composée avec ces mêmes variables, et si l'on cherche les valeurs maximum ou minimum du rapport $\frac{r}{s}$, la détermination de ces valeurs dépendra d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré dont toutes les racines sont réelles.*

La méthode que j'ai suivie pour arriver à la démonstration de ce théorème m'a encore fourni quelques autres propositions, parmi lesquelles je citerai la suivante :

Théorème III. — *Étant donnée une fonction homogène du second degré de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ on peut toujours leur substituer d'autres variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ liées à $x, y, z, \ldots$ par des équations linéaires tellement choisies que la somme des carrés de $x, y, z, \ldots$ soit équivalente à la somme des carrés de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, et que la fonction donnée de $x, y, z, \ldots$ se transforme en une fonction de $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ homogène et du* *second degré, mais qui renferme seulement les carrés de ces dernières variables.*

Le dernier théorème entraîne évidemment plusieurs relations entre les coefficients des équations linéaires par lesquelles les variables ξ, η, ζ sont liées aux variables $x, y, z, \ldots$. Ces relations sont semblables à celles qui existent entre les cosinus des angles que forment trois axes rectangulaires donnés avec les axes des coordonnées, supposés eux-mêmes rectangulaires.