Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. 1er série

Cauchy, Augustin Louis

Paris, 1882-1900

Extrait du mémoire sur quelques séries analogues à la série de Lagrange, sur les fonctions symétriques et sur la formation directe des équations que produit l' élimination des inconnues entre des ...

EXTRAIT DU MÉMOIRE

SUR QUELQUES

SÉRIES ANALOGUES A LA SÉRIE DE LAGRANGE,

SUR

LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

ET SUR

LA FORMATION DIRECTE DES ÉQUATIONS

QUE PRODUIT L'ÉLIMINATION DES INCONNUES ENTRE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DONNÉES (¹).

Mémoires de l'Académie des Sciences, t. IX, p. 104; 1830.

Dans ce Mémoire, après avoir rappelé les formules que j'ai données dans le XIXᵉ Cahier du *Journal de l'École royale Polytechnique* (²), et qui servent à convertir en intégrales définies les sommes des fonctions semblables des racines d'une équation quelconque, j'ai fait voir que le développement de ces intégrales en séries conduisait à plusieurs formules remarquables qui comprennent, comme cas particulier, la formule de Taylor et la série de Lagrange. Quelquefois les séries obtenues se composent d'un nombre fini de termes. Ainsi, par exemple, si l'on désigne par a une quantité constante, par m un nombre entier, par $\varphi(x)$, $f(x)$ deux fonctions entières de x, dont la seconde soit d'un degré inférieur à m et par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les racines de l'équation

$$(x-a)^m - f(x) = 0, \tag{1}$$

(¹) Lu à l'Académie royale des Sciences, le 9 août 1824.

(²) *Œuvres de Cauchy,* S. II, T. I, p. 304.

on trouvera

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_m)\\ &=m\,\varphi(a)+\frac{1}{1.2.3\ldots..(m-1)}\frac{d^{m-1}[\varphi'(a)\,\mathrm{f}(a)]}{da^{m-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1.2.3\ldots..(2m-1)}\frac{d^{2m-1}\{\varphi'(a)[\mathrm{f}(a)]^2\}}{da^{2m-1}}\\ &+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots..(3m-1)}\frac{d^{3m-1}\{\varphi'(a)[\mathrm{f}(a)]^3\}}{da^{3m-1}}+\ldots,\end{aligned}\right.$$

et il est clair que le terme général de la série comprise dans le second membre de l'équation (2), savoir

$$(3)\qquad \frac{1}{n}\frac{1}{1.2.3\ldots..(nm-1)}\frac{d^{nm-1}\{\varphi'(a)[\mathrm{f}(a)]^n\}}{da^{nm-1}},$$

s'évanouira, dès que le nombre $nm-1$ deviendra supérieur au degré de la fonction $\varphi'(x)[\mathrm{f}(x)]^n$.

Si l'on pose, en particulier,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} (x-a)^m-\mathrm{f}(x)&=x^2-2rx\cos 2z+r^2\\ &=(x-r)^2+4rx\sin^2 z=(x+r)^2-4rx\cos^2 z,\end{aligned}\right.$$

l'équation (2) donnera

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi[r(\cos 2z+\sqrt{-1}\sin 2z)]+\varphi[r(\cos 2z-\sqrt{-1}\sin 2z)]\\ &=2\varphi(r)-\frac{4r}{1}\frac{d[r\varphi'(r)]}{dr}\sin^2 z+\frac{\frac{1}{2}(4r)^2}{1.2.3}\frac{d^3[r^2\varphi'(r)]}{dr^3}\sin^4 z\\ &\qquad-\frac{\frac{1}{3}(4r)^3}{1.2.3.4.5}\frac{d^5[r^3\varphi'(r)]}{dr^5}\sin^6 z+\ldots\\ &=2\varphi(-r)+\frac{4r}{1}\frac{d[r\varphi'(-r)]}{dr}\cos^2 z-\frac{\frac{1}{2}(4r)^2}{1.2.3}\frac{d^3[r^2\varphi'(-r)]}{dr^3}\cos^4 z\\ &\qquad+\frac{\frac{1}{3}(4r)^2}{1.2.3.4.5}\frac{d^5[r^3\varphi'(-r)]}{dr^5}\cos^6 z-\ldots.\end{aligned}\right.$$

En terminant le Mémoire j'ai indiqué les moyens de composer directement l'équation qui résulte de l'élimination de plusieurs inconnues entre des équations algébriques. Pour y parvenir, dans le cas où l'on considère seulement deux inconnues, il suffit de résoudre les deux problèmes que nous allons énoncer.

PROBLÈME I. — $F(x)$ *désignant une fonction entière du degré m, et* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *les racines de l'équation*

$$F(x) = 0, \tag{6}$$

on demande la somme S_n *déterminée par la formule*

$$S_n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_m^n. \tag{7}$$

Solution. — Concevons que le coefficient de x^m dans $F(x)$ ait été réduit à l'unité; posons, pour abréger,

$$F(x) = x^m - f(x), \tag{8}$$

et désignons par k un nombre entier quelconque. Les deux expressions

$$\frac{F'(x)}{F(x)}\{x^{mk} - [f(x)]^k\} = F'(x)\frac{x^{mk} - [f(x)]^k}{x^m - f(x)}$$

seront des fonctions entières de x, la première d'un degré inférieur à m, la seconde du degré $mk - 1$. De plus, on aura évidemment

$$\left\{\begin{aligned} \frac{F'(x)}{F(x)} &= \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_m} \\ &= \frac{m}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \ldots + \frac{S_n}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+1}}\left(\frac{x_1^{n+1}}{x - x_1} + \ldots + \frac{x_m^{n+1}}{x - x_m}\right), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

et l'on en conclura

$$\frac{F'(x)}{F(x)}\{x^{mk} - [f(x)]^k\} = x^{mk-n-1}(mx^n + S_1 x^{n-1} + \ldots + S_{n-1}x + S_n) + \varpi(x), \tag{10}$$

$\varpi(x)$ étant un polynome déterminé par la formule

$$\varpi(x) = x^{mk-n-1}\left(\frac{x_1^{n+1}}{x - x_1} + \ldots + \frac{x_m^{n+1}}{x - x_m}\right) - \frac{F'(x)}{F(x)}[f(x)]^k, \tag{11}$$

et, par conséquent, un polynome dont le degré ne pourra surpasser le plus grand des deux nombres $mk - n - 2$, $(m - 1)k - 1$. Ce degré sera donc inférieur à $mk - n - 1$, si l'on suppose $k =$ ou $> n + 1$; et alors il suffira, pour obtenir S_n, de chercher dans le développement de l'expression (10) le coefficient de x^{mk-n-1}. Donc, si l'on désigne par ε une quantité infiniment petite, on trouvera

$$(12)\qquad S_n = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(mk-n-1)} \frac{d^{mk-n-1}}{d\varepsilon^{mk-n-1}} \left\{ F'(\varepsilon) \frac{\varepsilon^{mk} - [f(\varepsilon)]^k}{\varepsilon^m - f(\varepsilon)} \right\},$$

ε devant être réduit à zéro, après que l'on aura effectué les différentiations.

Corollaire I. — Comme le coefficient de x^{mk-n-1}, dans l'expression (10), est égal au coefficient de x^{mk-1} dans le produit qu'on obtient en multipliant cette expression par x^n, il en résulte que la formule (12) peut être remplacée par la suivante

$$(13)\qquad S_n = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(mk-1)} \frac{d^{mk-1}}{d\varepsilon^{mk-1}} \left\{ \varepsilon^n F'(\varepsilon) \frac{\varepsilon^{mk} - [f(\varepsilon)]^k}{\varepsilon^m - f(\varepsilon)} \right\}.$$

Corollaire II. — Soit $\varphi(x)$ une fonction entière du degré n. Comme la formule (13) subsiste dans le cas où l'on y remplace le nombre entier n par un nombre entier plus petit, on en tirera, en ayant égard à l'équation identique $F'(x) = mx^{m-1} - f'(x)$,

$$(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_m) \\ &\quad = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(mk-1)} \frac{d^{mk-1}}{d\varepsilon^{mk-1}} \left\{ \varphi(\varepsilon)[m\varepsilon^{m-1} - f'(\varepsilon)] \frac{\varepsilon^{mk} - [f(\varepsilon)]^k}{\varepsilon^m - f(\varepsilon)} \right\}, \end{aligned} \right.$$

k désignant toujours un nombre entier égal ou supérieur à $n+1$. En développant le second membre de la formule (14) et supprimant les termes qui se détruisent mutuellement, on en conclura

$$(15)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_m) \\ &\quad = m\,\varphi(0) + \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(m-1)} \frac{d^{m-1}[\varphi'(\varepsilon) f(\varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}} \\ &\qquad + \frac{1}{2} \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(2m-1)} \frac{d^{2m-1}\{\varphi'(\varepsilon)[f(\varepsilon)]^2\}}{d\varepsilon^{2m-1}} \\ &\qquad + \frac{1}{3} \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(3m-1)} \frac{d^{3m-1}\{\varphi'(\varepsilon)[f(\varepsilon)]^3\}}{d\varepsilon^{3m-1}} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Corollaire III. — Si l'on supposait la fonction $F(x)$ déterminée, non par l'équation (8), mais par la suivante

$$(16) \qquad F(x) = (x-a)^m - f(x),$$

alors il faudrait à la formule (14) substituer celle-ci

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_m) \\ & = \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(mk-1)} \frac{d^{mk-1}}{d\varepsilon^{mk-1}} \left\{ \varphi(a+\varepsilon)[m\varepsilon^{m-1} - f'(a+\varepsilon)] \frac{\varepsilon^{mk} - [f(a+\varepsilon)]^k}{\varepsilon^m - f(\varepsilon)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

En développant le second membre de cette dernière on retrouvera l'équation (2).

Problème II. — *Étant données les sommes*

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m, \qquad S_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2, \qquad \ldots, \\ & \qquad\qquad S_m = x_1^m + x_2^m + \ldots + x_m^m, \end{aligned} \right.$$

on demande la valeur du produit $x_1 x_2 \ldots x_m$.

Soit toujours ε une quantité infiniment petite, et posons

$$(19) \qquad E = S_1 - \frac{\varepsilon}{2} S_2 + \frac{\varepsilon^2}{3} S_3 - \ldots \pm \frac{\varepsilon^{m-1}}{m} S_m .$$

On aura évidemment

$$\begin{aligned} \mathrm{l}[(1+\varepsilon x_1)(1+\varepsilon x_2)\ldots(1+\varepsilon x_m)] &= \mathrm{l}(1+\varepsilon x_1) + \ldots + \mathrm{l}(1+\varepsilon x_m) \\ &= \varepsilon E \mp \frac{\varepsilon^{m+1}}{m+1}(S_{m+1} + \alpha), \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(20) \qquad (1+\varepsilon x_1)(1+\varepsilon x_2)\ldots(1+\varepsilon x_m) = e^{\varepsilon E \mp \frac{\varepsilon^{m+1}}{m+1}(S_{m+1}+\alpha)},$$

α devant s'évanouir avec ε. Si, maintenant, on développe les deux membres de la formule (20) suivant les puissances ascendantes de ε, on trouvera, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur à m,

$$(21) \quad (1+\varepsilon x_1)(1+\varepsilon x_2)\ldots(1+\varepsilon x_m) = e^{\varepsilon E} = 1 + \frac{\varepsilon E}{1} + \frac{\varepsilon E^2}{1.2} + \ldots + \frac{\varepsilon^m E^m}{1.2.3\ldots\ldots m},$$

puis, en égalant de part et d'autre les coefficients de ε^m, on aura définitivement

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 x_2 \ldots x_m &= \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots m}\,\frac{d^m(e^{\varepsilon E})}{d\varepsilon^m} \\ &= \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots m}\left[E^m + \frac{m}{1}\,\frac{dE^{m-1}}{d\varepsilon} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{d^2E^{m-2}}{d\varepsilon^2} + \ldots\right], \end{aligned}\right.$$

ε devant être réduit à zéro après les différentiations.

Corollaire. — Si, dans les formules (18) et (22), l'on remplace x_1, x_2, ..., x_m par $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, ..., $\varphi(x_m)$, la dernière de ces formules suffira pour déterminer la valeur du produit

$$(23)\qquad \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_m)$$

quand on connaîtra les valeurs des sommes

$$\begin{gathered} \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_m), \\ [\varphi(x_1)]^2 + [\varphi(x_2)]^2 + \ldots + [\varphi(x_m)]^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [\varphi(x_1)]^m + [\varphi(x_2)]^m + \ldots + [\varphi(x_m)]^m. \end{gathered}$$

Or, ces mêmes sommes pouvant être facilement calculées à l'aide du premier problème, quand on connaît les fonctions $\varphi(x)$ et $F(x)$, nous devons conclure que, ces fonctions étant données, on formera sans peine le produit (23). D'ailleurs, lorsque les fonctions $\varphi(x)$ et $F(x)$ renferment, avec la variable x, d'autres variables y, z, ..., le produit (23) est précisément le premier membre de l'équation qui résulte de l'élimination de x entre les deux suivantes :

$$(24)\qquad \varphi(x) = 0, \qquad F(x) = 0.$$

Au reste, la méthode d'élimination que nous venons d'indiquer diffère peu de celle qui a été donnée par Lagrange dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, pour l'année 1769, et qui est également fondée sur la solution des problèmes I et II.