Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. 1er série

Cauchy, Augustin Louis

Paris, 1882-1900

2. Optique mathématique. Lettre à M. le Président de l'Académie des Sciences.

NOTES ET ARTICLES

EXTRAITS DES

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

1.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'intégration des équations différentielles.*

C. R., t. II, p. 85 (25 janvier 1836).

Dans ce Mémoire, l'auteur ramène d'abord l'intégration d'un système quelconque d'équations différentielles à l'intégration d'une seule équation aux différences partielles du premier ordre. Il exprime, par des intégrales définies, les intégrales des équations proposées.

Il s'occupe ensuite de la convergence des séries dans lesquelles ces intégrales se développent. Il donne les conditions de cette convergence et les limites des restes que l'on néglige.

Il annonce, en terminant, qu'il appliquera les méthodes contenues dans ce Mémoire à l'intégration des équations différentielles qui expriment les mouvements simultanés des astres dont se compose notre système planétaire.

2.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Lettre à M. le Président de l'Académie des Sciences.*

C. R., t. II, p. 182 (22 février 1836).

L'Académie des Sciences a déjà reçu les premières livraisons des *Nouveaux Exercices* que j'ai eu l'honneur de lui offrir. En attendant que les suivantes lui parviennent, je ne puis résister au désir d'indiquer ici quelques-uns des résultats qui s'y trouvent contenus. Ces résultats me paraissent de nature à intéresser l'Académie, à laquelle je vous prie de vouloir bien donner lecture de cette Note, en demandant qu'elle soit jointe au procès-verbal et déposée dans les archives.

Les livraisons, déjà imprimées jusqu'à la septième, renferment la suite du Mémoire sur la dispersion de la lumière. Quelques autres encore se rapporteront au même objet. Dans le § III, que vous avez reçu, j'ai donné (p. 34 et 35) les conditions nécessaires et suffisantes pour que la propagation de la lumière soit la même en tous sens. Ces conditions établissent des rapports numériques entre certaines sommes triples et aux différences finies, composées de termes dont chacun dépend : 1° de la distance r de deux molécules éthérées; 2° des angles α, β, γ formés par cette distance avec les axes coordonnés; 3° de l'action réciproque $f(r)$ de deux molécules l'une sur l'autre, et fournissent le moyen de débarrasser des angles α, β, γ les *sommes que l'on conserve* dans le calcul. En supposant ces conditions remplies, on obtient pour tous les milieux une première approximation des mouvements de l'éther; et l'on reconnaît que la durée T d'une oscillation moléculaire pour une couleur donnée, ou le rapport $s = \frac{2\pi}{T}$, est liée avec l'épaisseur l d'une onde plane, ou le rapport $k = \frac{2\pi}{l}$, par une équation du troisième degré en s^2 qui offre deux racines égales et une racine simple, toutes développables en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de k^2. Pour une couleur donnée, c'est-à-dire, pour une valeur donnée de s, cette équation sert à déterminer la longueur d'ondulation, ou la valeur de k, et la vitesse de propagation de l'onde lumineuse, ou $\Omega = \frac{s}{k}$.

D'autre part, les conditions dont il s'agit sont toujours remplies lorsque les sommations doubles relatives aux angles peuvent être transformées en intégrations doubles aux différences infiniment petites. Il est donc naturel de penser qu'on obtiendra une première approximation des mouvements de l'éther dans tous les milieux, et probablement avec une grande précision les lois de son mouvement dans le vide, si l'on transforme les sommes triples aux différences finies en intégrales triples aux différences infiniment petites. Alors, dans la série qui représente le développement de la racine double de l'équation du troisième degré, le coefficient de k^{2n} devient une intégrale simple relative à r, et se réduit même à une constante multipliée par la différence entre les deux valeurs qu'acquiert le produit

$$r^{2n+2} f(r)$$

quand on attribue successivement à la distance r des valeurs nulle et infinie. Cela posé, le phénomène de la dispersion disparaîtra si le produit en question s'évanouit toujours pour une valeur infinie de r, et se réduit à une constante différente de zéro, pour $n = 1$, et pour une valeur nulle de r. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si la fonction $f(r)$ est de la forme

$$\frac{A}{r^h} e^{-hr},$$

h étant positif. D'ailleurs, pour que le rapport $\frac{k^2}{s^2}$ reste positif, il faudra que la constante A soit négative, c'est-à-dire que les molécules d'éther se repoussent. Donc nos formules donneront dans le vide, conformément à l'expérience, la même vitesse de propagation pour toutes les couleurs, si l'action réciproque de deux molécules est une force qui, pour un rapprochement considérable de ces molécules, soit *répulsive* et *réciproquement proportionnelle à la quatrième puissance de la distance*. Déjà dans les *Anciens Exercices* (III^{e} Volume, p. 203), en considérant le mouvement d'un système de points matériels, j'avais remarqué qu'il fallait supposer le produit $r^4 f(r)$ nul avec r pour faire disparaître des termes que M. Navier a conservés dans les équations des corps élastiques. Mes nouvelles recherches sur la lumière doivent faire croire que ce produit ne s'évanouit pas avec r dans le fluide éthéré. Probablement il ne s'évanouit pas non plus avec r dans les corps solides; d'où il résulte qu'on peut calculer le mouvement des corps élastiques avec une approximation qui sera suffisante dans un grand nombre de cas, en transformant, avec M. Navier, les sommes aux différences finies en intégrales aux différences infiniment petites.

Lorsqu'on cesse de transformer les sommes relatives aux angles en intégrales aux différences infiniment petites, les deux racines égales de l'équation du deuxième degré sont généralement remplacées par deux racines peu différentes l'une de l'autre, et l'on obtient les phénomènes de la polarisation et de la double réfraction, comme on l'a vu dans les paragraphes déjà publiés de mon Mémoire. Mais on peut généraliser encore les résultats qui s'y trouvent contenus en développant les formules (24) du § II, et cessant de négliger les sommes composées de termes qui changent de signe en même temps que les cosinus des trois angles α, β, γ. Alors les racines de l'équation du troisième degré, développées en séries, renferment des puissances impaires de k multipliées par $\sqrt{-1}$; par suite la valeur de k, correspondante à une valeur donnée de s^2, devient en partie imaginaire, et des exponentielles négatives, introduites comme facteurs dans les valeurs des déplacements moléculaires, peuvent les faire décroître très rapidement et les rendre insensibles à une distance plus ou moins considérable de la surface d'un milieu réfringent. Lorsque cette distance est comparable aux longueurs d'ondulation, le milieu devient opaque. D'ailleurs les coefficients de r, dans les exponentielles négatives, étant fonctions de k, varient avec les couleurs, ainsi que dans le passage du rayon ordinaire au rayon extraordinaire. Nos formules ainsi généralisées représentent les phénomènes de l'absorption de la lumière ou de certains rayons, produite par les verres colorés, la tourmaline, etc., le phénomène de la polarisation circulaire produite par le cristal de roche, l'huile de térébenthine, etc. (*Voir* les expériences de MM. Arago, Biot, Fresnel, etc.) Elles servent même à déterminer les conditions et les lois de ces phénomènes; elles montrent que généralement, dans un rayon de lumière polarisée, une molécule d'éther décrit une ellipse. Mais, dans certains cas particuliers, cette ellipse se change en une droite; et alors on obtient la polarisation rectiligne. Ajoutons que, si le coefficient de r dans les exponentielles négatives diffère de zéro, les ellipses décrites par les diverses molécules décroîtront de plus en plus pour des valeurs croissantes de r, et que, si ces valeurs croissent en progression arithmétique, l'intensité de la lumière décroîtra en progression géométrique. Enfin le calcul prouve que, dans le cristal de roche, l'huile de térébenthine, etc., la polarisation des rayons transmis parallèlement à l'axe (s'il s'agit du cristal de roche) n'est pas rigoureusement circulaire, mais qu'alors l'ellipse diffère très peu du cercle.

3.

Optique mathématique. — *Lettre à M. Ampère sur la théorie de la lumière.*

C. R., t. II, p. 207. (9 février 1836.)

Dans ma Lettre de vendredi, je vous ai fait connaître les divers résultats auxquels j'ai été conduit par mes dernières recherches sur la théorie de la lumière. (*Voir* p. 5 du présent Volume.) J'aurai bientôt l'honneur de vous adresser un extrait de ces recherches. Mais, en attendant, je désire joindre encore à l'exposition que j'en ai faite quelques observations nouvelles que je vous prie de vouloir bien communiquer à l'Académie dans sa plus prochaine séance.

Lorsque la propagation de la lumière est la même en tous sens, l'équation du troisième dégré, qui établit une relation entre le carré de la quantité s, réciproquement proportionnelle aux durées des oscillations moléculaires, et la quantité k, réciproquement proportionnelle aux longueurs d'ondulations, étant résolue par rapport à s^2, fournit deux racines égales et une racine simple. Or je trouve qu'au lieu de développer ces racines en séries, il est plus commode de les présenter sous forme finie. Dans ce cas, en nommant r la distance des deux molécules, $f(r)$ l'action de l'une sur l'autre, et changeant les sommes triples en