

www.e-rara.ch

Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen

Neumann, C.

Leipzig, 1896

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 3832

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-19077>

Erstes Capitel. Einleitende Untersuchungen.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Erstes Capitel.

Einleitende Untersuchungen.

Schon *Gauss* hat darauf hingewiesen, dass das *Newton'sche Gesetz*, bei seiner Anwendung auf die Erscheinungen der Capillarität, für sehr *kleine* Entfernungen einer gewissen Modification bedarf *). Und genau dasselbe ist offenbar zu sagen mit Bezug auf die Erscheinungen der Elasticität, der Krystallisation, der chemischen Actionen, u. s. w.

Aber nicht nur für sehr *kleine*, sondern auch für sehr *grosse* Entfernungen dürfte eine Modification des *Newton'schen Gesetzes* geboten sein, wenigstens, falls man der gewöhnlichen Vorstellung sich hingiebt, dass der ganze Weltraum ins Unendliche hin, in einigermaßen gleichförmiger Vertheilung, von Sternen erfüllt sei. Denn alsdann würde das Universum der Hauptsache nach anzusehen sein als eine unendlich grosse Kugel von einigermaßen constanter Dichtigkeit. Und diese das Universum im Grossen und Ganzen repräsentirende unendlich grosse homogene Kugel würde offenbar, bei Zugrundelegung des *Newton'schen Gesetzes*, die einzelnen Himmelskörper, wie z. B. Sonne, Mercur, Venus, Erde, Mars, u. s. w., nach ihrem Centrum hinzuziehen bestrebt sein. Auch würden die Intensitäten der betreffenden Kräfte proportional sein mit den Abständen der einzelnen Himmelskörper von jenem Centrum.

Nun liegt aber die Oberfläche der in Rede stehenden Universal-kugel überall im Unendlichen. Folglich hat ihr Centrum eine völlig *unbestimmte Lage*. Und es würden daher jene von dieser Universal-kugel auf die einzelnen Himmelskörper ausgeübten Kräfte, ihrer

*) *Gauss* Ges. Werke, Bd. 5, Seite 31. Dasselbst heisst es mit Bezug auf das *Newton'sche Gesetz*: *Recte — — concluditur, illam attractionis legem in distantis minimis naturae haud amplius consentaneam esse, sed modificationem quandam postulare, sive, quod eodem redit, corporum particulas praeter illam vim attractivam exercere aliam, in distantis minimis tantum conspicuam.*

Richtung und Stärke nach, ebenfalls völlig *unbestimmt* sein; — was offenbar absurd wäre*).

Andererseits scheinen gewisse Thatsachen der Elektrostatik und Elektrodynamik darauf hinzudeuten, dass das Newton'sche Gesetz auch in diesen Gebieten keine ganz unbedingte Herrschaft in Anspruch nehmen darf. Wären nämlich die elektrischen Kräfte in aller Strenge, selbst bei sehr kleinen Entfernungen, umgekehrt proportional mit den Quadraten der Entfernungen, so müsste z. B. die magnetische oder elektrodynamische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, ihrem Winkelbetrage nach, von *allen* Dimensionen der durchlaufenen Platte abhängen; während sie doch in Wirklichkeit (nach den bisherigen Beobachtungen zu urtheilen) nur von *einer* Dimension der Platte, nämlich nur von ihrer Dicke abhängt.

Aus diesem Grunde habe ich schon im Jahre 1858, bei meinen Untersuchungen über die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes**), mich gezwungen gesehen, die Newton'sche Potentialfunction $\frac{1}{r}$ durch eine andere Function $\varphi(r)$ zu ersetzen, welche für grössere Werthe von r mit jener in Uebereinstimmung, für sehr kleine Werthe von r aber von noch unbekannter Beschaffenheit sein sollte. Auch habe ich an dieser Abänderung in meinen späteren Publicationen, z. B. in meiner Theorie der elektrischen Kräfte (Leipzig, 1873), festgehalten.

Ferner werden — um ein weiteres Argument für die Nothwendigkeit einer Modification des Newton'schen Gesetzes beizubringen — jene *unendlich dünnen* elektrischen Schichten, zu denen die auf Grund des Newton'schen (oder Coulomb'schen) Gesetzes construirte Poisson'sche Theorie mit Nothwendigkeit hinführt, doch wohl stets mit mehr oder weniger Misstrauen anzusehen sein.

Und noch grösser dürfte unser Misstrauen sein gegenüber jenen unendlich dünnen elektrischen *Doppelschichten*, welche an den Contactflächen heterogener Metalle vorhanden sein sollen. Auch ist z. B. die auf Grund des Newton'schen Gesetzes von Poisson für die elek-

*) Schon vor langer Zeit ist von mir auf diese Dinge aufmerksam gemacht worden, in den Abhandl. der K. Sächs. Ges. d. Wiss., 1874, Seite 97, 98. Uebrigens ist Aehnliches neuerdings auch von dem Astronomen *Seeliger* (in München) bemerkt worden, in den Astron. Nachrichten, 1894, Bd. 137, Seite 3272.

**) Man vgl. meine kleine Schrift: *Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes*, Halle, Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses, 1863; daselbst Seite 16—19.

trische Vertheilung in zwei einander berührenden Kugeln gegebene Theorie, so meisterhaft und bewundernswerth sie sonst auch sein mag, nicht mehr anwendbar auf den Fall, dass die beiden Kugeln aus heterogenen Metallen (etwa die eine aus Zink, die andere aus Kupfer) bestehen. Dem jene Theorie führt in diesem Fall zu unendlich grossen oder unbestimmten Ausdrücken, kurz zu keinem irgendwie befriedigenden Resultat.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass jene uns anstössigen *unendlich dünnen* elektrischen Schichten mit mathematischer Nothwendigkeit sich ergeben müssen, solange wir festhalten am Newton'schen Gesetz oder (was auf dasselbe hinauskommt) an der Newton'schen Potentialfunction:

$$(I.) \quad \varphi(r) = \frac{1}{r}.$$

Zugleich drängt sich die Vermuthung auf, dass das Auftreten jener *unendlich dünnen* Schichten vielleicht in causalem Zusammenhange stehen möchte mit dem Umstande, dass diese Newton'sche Potentialfunction (I.) die Eigenthümlichkeit hat, für $r = 0$ *unendlich gross* zu werden. Somit entsteht die Frage, ob man jene Schichten von der anstössigen Eigenschaft, *unendlich dünn* zu sein, nicht vielleicht dadurch befreien könnte, dass man die Newton'sche Potentialfunction (I.) durch eine für $r = 0$ *endlich* bleibende Function, z. B. durch folgende Function ersetzt:

$$(II.) \quad \varphi(r) = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r}, \quad (e = 2,718 \dots).$$

Auch dürfte diese specielle Function (II.), falls man auf jene Frage näher eingehen will, zu einem ersten vorläufigen Versuch sich einigermaßen empfehlen, einmal deswegen, weil sie der mathematischen Behandlung keine gar zu grossen Schwierigkeiten bereitet, dann aber andererseits auch deswegen, weil sie, falls man die Constante α *positiv* und *enorm gross* sich denkt, mit der Newton'schen Potentialfunction (I.) fast zusammenfällt, von ihr nur abweichend für sehr kleine Werthe von r .

Demgemäss wollen wir im gegenwärtigen Capitel diese ganz specielle Function (II.) einer näheren Untersuchung unterwerfen, und dabei namentlich die Umgestaltung ins Auge fassen, welche die Theorie der Elektrostatik erfahren wird, wenn man, an Stelle der Newton'schen (oder Coulomb'schen) Potentialfunction (I.), diese neue Potentialfunction (II.) der Betrachtung zu Grunde legt.

Zuvor aber wird es gut sein, an gewisse schon von *Laplace* angestellte, und später von *Bertrand* vervollständigte Untersuchungen zu erinnern, um in solcher Weise nicht bloss für die Betrachtungen des gegenwärtigen Capitels, sondern auch für die weiterhin folgenden Capitel ein festes und bequemes Fundament zu gewinnen. Bei der Reproduction dieser theils von Laplace, theils von Bertrand berührenden Untersuchungen werden wir eine etwas grössere Einfachheit und Uebersichtlichkeit dadurch zu gewinnen suchen, dass wir die von Laplace und Bertrand in Betracht gezogenen *Kräfte* ganz bei Seite setzen, und an Stelle dieser Kräfte immer nur das *Potential* ins Auge fassen.

§ 1.

Ueber die **Einwirkung einer homogenen Kugelschaale auf äussere und innere Punkte. Die Sätze von Laplace und Bertrand.**

Ist eine unendlich dünne homogene Kugelschaale*) auf alle innern Punkte *ohne* Wirkung, so folgt daraus bekanntlich, dass je zwei Massenpunkte nach dem *Newton'schen Gesetz* aufeinander einwirken. Dieser berühmte, schon von *Laplace* aufgestellte Satz bedarf indessen einer gewissen Einschränkung, respective einer etwas genaueren Formulirung. Die Dinge liegen nämlich folgendermassen:

Weiss man, dass eine ganz bestimmte, individuell gegebene unendlich dünne homogene Kugelschaale die Eigenschaft besitzt, auf alle innern Punkte ohne Wirkung zu sein, — so folgt hieraus noch keineswegs das Newton'sche Gesetz.

Weiss man hingegen, dass alle derartigen Schaalen, wie gross oder wie klein ihre Radien auch sein mögen, mit jener Eigenschaft behaftet sind, so folgt hieraus in der That das Newton'sche Gesetz.

Um näher auf den Gegenstand einzugehen, wollen wir uns eine unendlich dünne homogene Kugelschaale vom Radius ζ , von der Dicke $d\zeta$ und von der Dichtigkeit ε gegeben denken, und die Einwirkung dieser Schaale auf irgend einen beliebigen Punkt zu berechnen suchen, indem wir dabei von der Vorstellung ausgehen, dass das gegenseitige Potential zweier Massenpunkte m_1 und m_2 den Werth besitzt:

*) Es wird im gegenwärtigen Paragraph immer nur von solchen Kugelschaalen die Rede sein, die begrenzt sind von zwei zu einander *concentrischen* Kugelflächen.

$$(1.) \quad m_1 m_2 \varphi(r),$$

wo $\varphi(r)$ eine beliebig gegebene Function der Entfernung r sein soll.

Nehmen wir das Centrum der Kugelschaale zum Anfangspunkt eines Polarcoordinatensystems, und die von jenem Centrum nach dem sollicitirten Punkt hinlaufende Linie zur Axe dieses Systems, und bezeichnen wir überdies die Polarcoordinaten irgend eines *Elementes* der gegebenen Schaale mit ϱ, ϑ, ψ , mithin die *Masse* des Elementes mit $\varepsilon \varrho^2 d\varrho \sin \vartheta d\vartheta d\psi$, so wird das *Potential* v der Schaale auf jenen sollicitirten Punkt offenbar den Werth haben:

$$(2.) \quad v = \varepsilon \cdot \varrho^2 d\varrho \cdot \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(r) \sin \vartheta d\vartheta d\psi;$$

vorausgesetzt, dass wir die Masse des sollicitirten Punktes (wie stets geschehen soll) = 1 uns denken. Dabei bezeichnet r den Abstand dieses Punktes von jenem bei $(\varrho, \vartheta, \psi)$ gelegenen Element; sodass also z. B. die Formel stattfindet:

$$(3.) \quad r^2 = \varrho^2 + \varrho^2 - 2\varrho\varrho \cos \vartheta,$$

wo ϱ den Centralabstand des sollicitirten Punktes bezeichnet.

Wir können nun den Ausdruck (2.) offenbar auch so schreiben:

$$v = \frac{\varepsilon \cdot 4\pi \varrho^2 d\varrho}{2} \int_0^\pi \varphi(r) \sin \vartheta d\vartheta,$$

oder, indem wir mittelst (3.) die Variable r , an Stelle von ϑ , als Integrationsvariable einführen, auch so:

$$(4.) \quad v = \frac{\varepsilon \cdot 4\pi \varrho^2 d\varrho}{2\varrho\varrho} \int_k^g \varphi(r) r dr = \frac{m}{2\varrho\varrho} \int_k^g \varphi(r) r dr,$$

wo m die *Gesammtmasse* der gegebenen Kugelschaale vorstellt:

$$(5.) \quad m = \varepsilon \cdot 4\pi \varrho^2 d\varrho.$$

Dabei bezeichnen k und g den *kleinsten* und *grössten* Werth von r , d. i. diejenigen Werthe, welche r annimmt respective für $\vartheta = 0$, und für $\vartheta = \pi$.

Wir führen jetzt eine neue Function $\xi(r)$ in unsere Betrachtungen ein. Sie mag die zu $\varphi(r)$ *adjungirte* Function heissen, und definiert sein durch folgende Formel:

$$(6.) \quad \xi(r) = \int_{r_0}^r \varphi(r) \cdot r dr,$$

wo r_0 eine beliebig gewählte positive Constante sein soll. Alsdann ergibt sich aus (4.):

$$(7.) \quad v = \frac{2\pi\varepsilon \cdot s d s}{\varrho} [\xi(g) - \xi(k)] = \frac{m}{2\varrho s} [\xi(g) - \xi(k)].$$

Liegt der sollicitirte Punkt *ausserhalb* der Kugelschaale, ist mithin $\varrho > s$, so wird, wie aus der geometrischen Anschauung sofort sich ergibt, $g = \varrho + s$ und $k = \varrho - s$ sein; so dass also in diesem Fall die Formel (7.) übergeht in:

$$(8a.) \quad v = \frac{2\pi\varepsilon \cdot s d s}{\varrho} [\xi(\varrho + s) - \xi(\varrho - s)] = \frac{m}{2\varrho s} [\xi(\varrho + s) - \xi(\varrho - s)].$$

Liegt hingegen der sollicitirte Punkt *innerhalb* der Schaale, ist mithin $\varrho < s$, so wird $g = s + \varrho$ und $k = s - \varrho$; folglich:

$$(8j.) \quad v = \frac{2\pi\varepsilon \cdot s d s}{\varrho} [\xi(s + \varrho) - \xi(s - \varrho)] = \frac{m}{2\varrho s} [\xi(s + \varrho) - \xi(s - \varrho)].$$

Bemerkung. — Auf Grund der Formeln (8a, j.) lässt sich leicht das Potential V einer *vollen Kugel* auf irgend welchen Punkt berechnen, vorausgesetzt dass die Massenvertheilung der Kugel *symmetrisch* ist in Bezug auf ihr Centrum, dass also ihre Dichtigkeit ε eine blosse Function des Centralabstandes ist.

In der That wird das Potential V einer solchen vollen Kugel vom Radius R in Bezug auf irgend welchen *äusseren* Punkt folgenden Werth haben:

$$(A.) \quad V = \frac{2\pi}{\varrho} \int_0^R [\xi(\varrho + s) - \xi(\varrho - s)] \varepsilon(s) \cdot s d s;$$

wie sich aus (8a.) sofort ergibt. Dabei bezeichnet $\varepsilon(s)$ die Dichtigkeit der Kugel im Centralabstand s ; während andererseits ϱ den Centralabstand des sollicitirten äussern Punktes repräsentirt.

Ferner erhält man aus (8a., j.) für das Potential dieser Kugel auf irgend einen *innern* Punkt den Werth:

$$(J.) \quad V = \frac{2\pi}{\varrho} \int_0^{\varrho} [\xi(\varrho + s) - \xi(\varrho - s)] \varepsilon(s) \cdot s d s \\ + \frac{2\pi}{\varrho} \int_{\varrho}^R [\xi(s + \varrho) - \xi(s - \varrho)] \varepsilon(s) \cdot s d s,$$

wo alsdann ϱ den Centralabstand dieses innern Punktes vorstellt. — Von diesen Formeln (A.), (J.) wird später Gebrauch zu machen sein.

Es sei nun, um zu unserer eigentlichen Untersuchung zurückzukehren, irgend eine *unendlich dünne homogene Kugelschaale vom Radius s gegeben; und es sei bekannt, dass die Wirkung dieser Schaale auf alle innern Punkte = 0 ist.* Alsdann wird das Potential

dieser Schaafe auf alle innern Punkte *constant* sein, und also nach (8j.) die Formel stattfinden:

$$(9.) \quad \frac{\xi(s + \varrho) - \xi(s - \varrho)}{2\varrho} = A, \quad \text{für } \varrho = 0 \dots s,$$

wo A eine Constante, d. h. eine von ϱ unabhängige Grösse bezeichnet. Diese Formel (9.) ist offenbar auch so darstellbar:

$$\xi(s + \varrho) - \xi(s - \varrho) = 2A\varrho, \quad \text{für } \varrho = 0 \dots s,$$

oder auch so:

$$\xi(s + \varrho) - A\varrho = \xi(s - \varrho) + A\varrho, \quad \text{für } \varrho = 0 \dots s.$$

Hieraus folgt, dass der Ausdruck

$$\xi(s + \varrho) - A\varrho$$

eine *gerade* Function von ϱ ist für das Intervall $\varrho = 0 \dots s$, mithin auch für das Intervall $\varrho = 0 \dots -s$; sodass man also schreiben kann:

$$(10.) \quad \xi(s + \varrho) - A\varrho = [\text{einer geraden Funct. von } \varrho], \quad \text{für } \varrho = -s \dots +s.$$

Differenzirt man eine *gerade* Function von ϱ nach ϱ , so wird die so entstehende neue Function stets eine *ungerade* Function von ϱ sein. Demgemäss ergibt sich aus (10.) durch Differentiation nach ϱ :

$$(11.) \quad \xi'(s + \varrho) - A = [\text{einer ungeraden Funct. von } \varrho], \quad \text{für } \varrho = -s \dots +s.$$

Und hieraus folgt, falls man $s + \varrho = r$ setzt, und in solcher Weise, an Stelle von ϱ , eine neue Variable r einführt:

$$(12.) \quad \xi'(r) - A = [\text{einer ungeraden Funct. von } (r - s)], \quad \text{für } r = 0 \dots 2s.$$

Diese letzte Formel aber kann, weil [nach (6.)] $\xi'(r) = r\varphi(r)$ ist, auch so geschrieben werden:

$$(13.) \quad \varphi(r) - \frac{A}{r} = \frac{[\text{ungerade Funct. von } (r - s)]}{r}, \quad \text{für } r = 0 \dots 2s;$$

sodass wir also zu folgendem Resultat gelangen:

Theorem. — *Ist die Wirkung irgend einer individuell gegebenen unendlich dünnen homogenen Kugelschaafe auf alle innern Punkte = 0, so folgt hieraus, dass die Potentialfunction $\varphi(r)$ einen Werth haben muss von folgender Gestalt:*

$$(14.) \quad \varphi(r) = \frac{A + F}{r}.$$

Dabei kann A irgend eine Constante, und F irgend eine Function von r sein. Nur muss F die Eigenschaft besitzen, ausdrückbar zu sein als eine *ungerade* Function von $(r - s)$, wo s den Radius der gegebenen Schaafe bezeichnet.

Die Function F muss also *entgegengesetzte* Werthe haben für je zwei einander *entgegengesetzte* Werthe des Argumentes $(r - s)$, d. i. für je zwei Argumente $(r_1 - s)$ und $(r_2 - s)$, die zu einander in der Beziehung stehen:

$$(r_1 - s) + (r_2 - s) = 0.$$

Diese Beziehung ist aber offenbar auch so darstellbar:

$$r_1 + r_2 = 2s.$$

Somit sehen wir, dass F entgegengesetzte Werthe haben muss für je zwei Argumente r_1 und r_2 , deren Summe eben so gross ist wie der Durchmesser $2s$ der gegebenen Kugelschaale. Demgemäss können wir unser Theorem auch so aussprechen:

Andere Gestalt des Theorems. — *Ist die Wirkung irgend einer individuell gegebenen unendlich dünnen homogenen Kugelschaale auf alle innern Punkte = 0, so folgt hieraus, dass die Potentialfunction $\varphi(r)$ folgende Gestalt besitzen muss:*

$$(15.) \quad \varphi(r) = \frac{A + F(r)}{r}.$$

Dabei kann A irgend eine Constante, und $F(r)$ irgend eine Function von r sein. Nur muss diese Function $F(r)$ die Eigenschaft besitzen, entgegengesetzte Werthe anzunehmen für je zwei Argumente r_1 und r_2 , die zu einander complementar sind in Bezug auf den Durchmesser $2s$ der gegebenen Schaale.

Leicht übersieht man, dass das Theorem (14.) oder (15.) *umkehrbar* ist. Hat nämlich die Potentialfunction $\varphi(r)$ die in (15.) oder (14.) angegebene Gestalt, so ergeben sich hieraus rückwärts die Formeln (13.), (12.), (11.), (10.), (9.); woraus alsdann folgt, dass die Wirkung jener gegebenen Schaale vom Radius s auf alle innern Punkte = 0 ist. So z. B. wird diese Wirkung = 0 sein, falls man setzt:

$$(U.) \quad \varphi(r) = \frac{A + B \sin [\beta(r - s)]}{r},$$

wo A, B, β beliebige Constanten sein dürfen.

Leicht kann man sich übrigens von der Richtigkeit dieser letzten Behauptung auch *direct* überzeugen. Es ist nämlich nach (6.):

$$r\varphi(r) = \xi'(r),$$

mithin die Formel (U.) auch so darstellbar:

$$\xi'(r) = A + B \sin [\beta(r - s)].$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\xi(r) = Ar - \frac{B \cos [\beta(r - s)]}{\beta} + \text{Const.}$$

Bildet man aber diese Formel successive für $r = s + \varrho$ und für $r = s - \varrho$,

und subtrahirt die so entstehenden beiden Gleichungen von einander, so erhält man:

$$\xi(s + \varrho) - \xi(s - \varrho) = 2A\varrho,$$

und daher nach (8j.):

$$v = \frac{m}{2\varrho s} 2A\varrho = \frac{mA}{s},$$

d. i. $v = \text{Const.} - Q. e. d.$

Beispielsweise kann man in (U.) die Constante $A = 0$ und $B = 1$ machen, und gelangt alsdann zu folgendem

Specialsatz. — *Legt man der Betrachtung die Potentialfunction zu Grunde:*

$$(V.) \quad \varphi(r) = \frac{\sin [\beta(r - s)]}{r},$$

und versteht man dabei unter s eine positive, andererseits unter β eine ganz beliebig gewählte Constante, so wird die Wirkung einer unendlich dünnen homogenen Kugelschaale auf alle innern Punkte = 0 sein, sobald man den Radius dieser Schaale gleich jener Constanten s sich denkt.

Wir kehren zurück zu unserm Theorem (14.). Die dortige Formel

$$\varphi = \frac{A + F}{r}$$

geht, falls man nach r differenzirt, über in:

$$\varphi' = -\frac{A + F}{r^2} + \frac{F'}{r}.$$

Hieraus folgt durch nochmalige Differentiation nach r :

$$\varphi'' = \frac{2(A + F)}{r^3} - \frac{2F'}{r^2} + \frac{F''}{r}.$$

Multiplcirt man die beiden letzten Formeln respective mit 2 und r , und addirt, so erhält man sofort:

$$(16.) \quad 2\varphi' + r\varphi'' = F''.$$

Das hier auftretende F'' wird offenbar (ebenso wie F selbst) eine ungerade Function von $(r - s)$ sein, mithin (ebenso wie F) die Eigenschaft haben, entgegengesetzte Werthe anzunehmen für je zwei Argumente r_1 und r_2 , die zu einander complementar sind in Bezug auf den Durchmesser $2s$ der gegebenen Kugelschaale. Auf Grund der Formel (16.) können wir daher unserm Theorem folgende dritte Gestalt geben:

Dritte Gestalt des Theorems (Bertrand'scher Satz). — *Die Ableitungen der Potentialfunction $\varphi(r)$ mögen mit $\varphi'(r)$, $\varphi''(r)$, ... bezeichnet sein.*

Ist nun die Wirkung irgend einer individuell gegebenen unend-

lich dünnen homogenen Kugelschaale auf alle innern Punkte $= 0$, so folgt hieraus, dass der Ausdruck

$$(17.) \quad 2\varphi'(r) + r\varphi''(r)$$

die Eigenschaft besitzt, entgegengesetzte Werthe anzunehmen für je zwei Argumente r_1 und r_2 , die zu einander complementar sind in Bezug auf den Durchmesser $2s$ der gegebenen Kugelschaale.

In dieser Gestalt (17.) ist der Satz schon vor langer Zeit von *Bertrand* in seinen Vorlesungen ausgesprochen worden; wie sich solches aus dem bekannten Werke von *Jullien* ergibt: *Problèmes de Mécanique, Paris 1855, Tome I.* Man vgl. daselbst die dritte Formel auf Seite 51, wo übrigens statt meiner Bezeichnungen r, s, φ' respective die Buchstaben u, r, f gebraucht sind.

Wir kehren nochmals zurück zu unserm Theorem (14.). In der dortigen Formel:

$$(18.) \quad \varphi(r) = \frac{A + F}{r}$$

soll A eine Constante, und F eine ungerade Function von $(r - s)$ sein. Eine ungerade Function von x ist aber, wie man leicht übersieht, stets darstellbar in der Gestalt $\Psi(x) - \Psi(-x)$, wo Ψ eine ganz willkürliche Function sein kann. Folglich ist F in die Gestalt versetzbar: $\Psi(r - s) - \Psi(s - r)$; wodurch die Formel (18.) die Gestalt erhält:

$$(19.) \quad \varphi(r) = \frac{A + \Psi(r - s) - \Psi(s - r)}{r}.$$

Die Grösse der Constanten A und die Beschaffenheit der ungeraden Function $\Psi(r - s) - \Psi(s - r)$ können verschieden sein, je nach dem Radius s der gegebenen Kugelschaale. Demgemäss wird

A durch $\Phi(s)$, und

$[\Psi(r - s) - \Psi(s - r)]$ durch $[\Psi(r - s, s) - \Psi(s - r, s)]$

zu ersetzen sein, wo $\Phi(x)$ und $\Psi(x, y)$ völlig willkürliche Functionen vorstellen. Somit können wir also unserm Theorem (14.) auch folgende Gestalt zuertheilen:

Vierte Gestalt des Theorems. *Ist die Wirkung einer unendlich dünnen homogenen Kugelschaale auf alle innern Punkte $= 0$, so folgt daraus, dass die Potentialfunction $\varphi(r)$ die Form besitzen muss:*

$$(20.) \quad \varphi(r) = \frac{\Phi(s) + \Psi(r - s, s) - \Psi(s - r, s)}{r},$$

wo s den Radius der Kugelschaale vorstellt. Dabei sind unter $\Phi(x)$ und $\Psi(x, y)$ ganz willkürliche Functionen zu verstehen.

Wir wollen jetzt annehmen, die in Rede stehende Eigenschaft der Wirkungslosigkeit auf innere Punkte sei eine Eigenschaft, die *allen* unendlich dünnen homogenen Kugelschaalen zukommt, wie klein oder wie gross die Radien derselben auch sein mögen. Zuzufolge unseres Theorems (15.) muss alsdann die im Ausdruck

$$(21.) \quad \varphi(r) = \frac{A + F(r)}{r}$$

enthaltene Function $F(r)$ entgegengesetzte Werthe annehmen für je zwei Argumente r_1 und r_2 , die der Relation $r_1 + r_2 = 2\zeta$ entsprechen. Dabei*) aber ist im gegenwärtigen Fall die Grösse 2ζ , weil sie die Durchmesser aller überhaupt denkbaren Schaalen repräsentirt, eine völlig *unbestimmte*. Die Relation $r_1 + r_2 = 2\zeta$ hört daher auf, eine Relation zu sein; so dass also r_1 und r_2 von einer gegenseitigen Fesselung frei, mithin vollkommen *willkürlich* werden. Wir sehen somit, dass $F(r)$ entgegengesetzte Werthe besitzen muss für je zwei völlig *willkürlich* zu wählende Argumente r_1 und r_2 . Hieraus aber folgt, dass $F(r)$ identisch mit Null sein muss.

Dieses Räsonnement scheint durchaus einwandfrei. *Trotzdem ist dasselbe fehlerhaft.* Denn es könnte z. B.

$$A = 5 + 7\zeta \quad \text{und} \quad F(r) = 7(r - \zeta)$$

sein. In der That würde alsdann $F(r)$ für je zwei der Bedingung $r_1 + r_2 = 2\zeta$ entsprechende Argumente r_1, r_2 entgegengesetzte Werthe annehmen, zugleich aber auch das Binom $A + F(r)$ ein von ζ unabhängiger Ausdruck sein.

Um einen *besseren Weg* zu gewinnen, geben wir der Formel (21.) die Gestalt

$$(22.) \quad \varphi(r) = \frac{f(r)}{r},$$

indem wir unter $f(r)$ das Binom verstehen:

$$f(r) = A + F(r).$$

Als dann ist offenbar:

$$f(r_1) + f(r_2) = 2A + F(r_1) + F(r_2).$$

Nun sollen aber $F(r_1)$ und $F(r_2)$ entgegengesetzte Werthe haben, sobald $r_1 + r_2 = 2\zeta$ ist. Somit ergibt sich:

$$(23.) \quad f(r_1) + f(r_2) = 2A, \quad \text{sobald} \quad r_1 + r_2 = 2\zeta \quad \text{ist.}$$

*) Will man mehr oder weniger Ueberflüssiges vermeiden, so dürfte es sich empfehlen, diese Zeile und die vierzehn folgenden Zeilen zu überspringen, und sofort den alsdann beginnenden „besseren Weg“ zu betreten.

Mit andern Worten: Es ergibt sich, dass für jedes beliebige Argument r_1 die Formel stattfinden muss:

$$f(r_1) + f(2s - r_1) = 2A.$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach r_1 :

$$f'(r_1) = f'(2s - r_1).$$

Folglich wird stets die Formel stattfinden:

$$(24.) \quad f'(r_1) = f'(r_2), \text{ falls nur } r_1 + r_2 = 2s \text{ ist.}$$

Die Function $f'(r)$ wird also einerlei Werth haben für je zwei der Relation $r_1 + r_2 = 2s$ entsprechende Argumente r_1, r_2 . Im gegenwärtigen Fall ist aber die Constante $2s$, weil sie die Durchmesser aller überhaupt denkbaren Kugelschaalen repräsentiren soll, eine völlig *unbestimmte*. Die Relation $r_1 + r_2 = 2s$ hört also auf, eine Relation zu sein. D. h. r_1 und r_2 sind völlig willkürlich. Wir sehen somit, dass die Function $f'(r)$ einerlei Werth haben wird für je zwei ganz willkürlich zu wählende Argumente r_1 und r_2 . Hieraus folgt, dass diese Function eine Constante ist. Somit erhalten wir:

$$(25.) \quad f'(r) = C;$$

und hieraus durch Integration:

$$(26.) \quad f(r) = Cr + D,$$

wo C und D Constanten sind. Dies in (22.) substituirt, ergibt sich:

$$(27.) \quad \varphi(r) = C + \frac{D}{r};$$

sodass wir also schliesslich zu folgendem Resultat gelangen:

Laplace'sches Theorem. — *Ist die Wirkung einer unendlich dünnen homogenen Kugelschaale auf innere Punkte stets = 0, wie gross oder klein der Radius der Schaale auch sein mag; — so folgt hieraus, dass die Potentialfunction $\varphi(r)$ die Gestalt haben muss:*

$$(28.) \quad \varphi(r) = C + \frac{D}{r},$$

wo C und D Constanten sind.

§ 2.

Ueber ein eigenthümliches *perpetuum mobile*, nämlich über ein Grundgesetz, bei dessen Annahme die in einer isolirten Metallkugel enthaltene Elektrizität niemals zur Ruhe kommen würde.

Eine isolirte Metallkugel sei mit einer gegebenen Elektrizitätsmenge M geladen; und zwar mag diese Menge M , um die Vorstellung zu fixiren, = 1 sein.

Alsdann wird bei Zugrundelegung des *Newton-Coulomb'schen Gesetzes*, d. i. bei Annahme der Potentialfunction:

$$(1.) \quad \varphi(r) = \frac{1}{r},$$

ein bestimmter elektrischer Gleichgewichtszustand existiren. Nach Eintritt dieses Zustandes wird jene Elektrizitätsmenge $M = 1$ an der Oberfläche der Kugel abgelagert sein, in Gestalt einer unendlich dünnen elektrischen Schicht, mithin im Innern der Kugel nur noch neutrale Elektrizität sich vorfinden. Das sind bekannte Dinge.

Wir wollen nun untersuchen, welchen Effect eine kleine Abänderung des Grundgesetzes (1.) auf diesen Gleichgewichtszustand ausüben wird, wie nämlich dieser Zustand sich gestalten wird, sobald man jene Function (1.) durch die schon früher (Seite 3) genannte Function:

$$(2.) \quad \varphi(r) = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r}$$

ersetzt.

Die Constante α soll *positiv* und *äusserst gross* sein; so dass also die Ausdrücke (1.) und (2.) nur wenig von einander abweichen. Demgemäss steht zu erwarten, dass es ziemlich einerlei sein werde, ob man das Gesetz (1.) oder das Gesetz (2.) der Betrachtung zu Grunde legt. Es drängt sich uns also die Vermuthung auf, dass bei Annahme des Gesetzes (2.), wenn auch nicht *alle* Elektrizität, so doch ein sehr grosser Theil derselben an der Oberfläche sich ablagern werde, und dass die Dicke dieser elektrischen Oberflächenschicht, wenn auch nicht *unendlich* klein, so doch wenigstens *ausserordentlich* klein sein werde. Aber all' diese Vermuthungen sind hinfällig, wie sich in wenig Augenblicken herausstellen wird.

Um näher auf die Sache einzugehen, wollen wir uns zuvörderst jene in der Kugel enthaltene Elektrizitätsmenge $M = 1$ theils im Innern der Kugel, theils an der Oberfläche derselben *ganz beliebig vertheilt* denken. Das von dieser beliebigen Vertheilung auf irgend einen innern Punkt (x, y, z) ausgeübte Potential bezeichnen wir mit:

$$(3.) \quad V = \int \varphi(r) \varepsilon d\tau + \int \varphi(r) \eta d\omega,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $d\tau$, respective über alle Oberflächenelemente $d\omega$ der gegebenen Kugel. Dabei soll ε die räumliche Dichtigkeit der in $d\tau$ enthaltenen Elektrizität, und η die Flächendichtigkeit der auf $d\omega$ vorhandenen Elektrizität vorstellen. Ferner soll r die Abstände dieser Elemente $\varepsilon d\tau$

und $\eta d\omega$ vom sollicitirten Punkt (x, y, z) bezeichnen. Endlich soll $\varphi(r)$ die gegenwärtig von uns adoptirte Potentialfunction (2.) repräsentiren:

$$(4.) \quad \varphi(r) = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r}.$$

Diese Function $\varphi(r)$ ist offenbar auch so darstellbar:

$$(5.) \quad \varphi(r) = \frac{\alpha}{\Pi 1} - \frac{\alpha^2 r}{\Pi 2} + \frac{\alpha^3 r^2}{\Pi 3} - \frac{\alpha^4 r^3}{\Pi 4} + \dots,$$

wo $\Pi n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$. Der eine Endpunkt von r ist der sollicitirte innere Punkt (x, y, z) . Unterwirft man nun den Ausdruck (5.) mit Bezug auf diesen Punkt (x, y, z) der Laplace'schen Operation Δ , so erhält man:

$$\Delta \varphi(r) = -\frac{\alpha^2 \Delta r}{\Pi 2} + \frac{\alpha^3 \Delta(r^2)}{\Pi 3} - \frac{\alpha^4 \Delta(r^3)}{\Pi 4} + \dots,$$

oder weil $\Delta(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$ ist:

$$\Delta \varphi(r) = -\frac{\alpha^2}{r} + \frac{\alpha^3}{\Pi 1} - \frac{\alpha^4 r}{\Pi 2} + \frac{\alpha^5 r^2}{\Pi 3} - \frac{\alpha^6 r^3}{\Pi 4} + \dots,$$

also mit Rücksicht auf (5.):

$$(6.) \quad \Delta \varphi(r) = -\frac{\alpha^2}{r} + \alpha^2 \varphi(r).$$

Will man jetzt, mit Bezug auf den sollicitirten Punkt (x, y, z) , das Potential V , d. i. die Integralsumme (3.) ebenfalls der Operation Δ unterwerfen, so wird man offenbar — in Anbetracht des soeben für $\Delta \varphi(r)$ erhaltenen Ausdruckes (6.) — diese Operation *unter* den Integralzeichen auszuführen berechtigt sein. Somit er giebt sich:

$$\Delta V = \int \Delta \varphi(r) \cdot \varepsilon d\tau + \int \Delta \varphi(r) \cdot \eta d\omega,$$

oder, falls man für $\Delta \varphi(r)$ seinen Werth (6.) einsetzt:

$$\Delta V = -\alpha^2 \left(\int \frac{\varepsilon d\tau}{r} + \int \frac{\eta d\omega}{r} \right) + \alpha^2 \left(\int \varphi(r) \cdot \varepsilon d\tau + \int \varphi(r) \cdot \eta d\omega \right).$$

Hieraus aber folgt mit Hinblick auf (3.):

$$\Delta V = -\alpha^2 \left(\int \frac{\varepsilon d\tau}{r} + \int \frac{\eta d\omega}{r} \right) + \alpha^2 V,$$

oder besser geordnet:

$$(7.) \quad \Delta V - \alpha^2 V + \alpha^2 \left(\int \frac{\varepsilon d\tau}{r} + \int \frac{\eta d\omega}{r} \right) = 0,$$

oder, falls man mit Bezug auf den sollicitirten innern Punkt (x, y, z) von Neuem die Operation Δ zur Ausführung bringt:

$$(8.) \quad \Delta \Delta V - \alpha^2 \Delta V - 4\pi \alpha^2 \varepsilon = 0.$$

Nach Aufstellung dieser allgemeinen Formeln wollen wir nun Näheres festsetzen über den *Anfangszustand* der in der Kugel enthaltenen elektrischen Materie. Dieser, etwa der Zeit $t = 0$ entsprechende, Anfangszustand mag *symmetrisch* in Bezug auf das Kugelcentrum gedacht werden; so dass also im Augenblick $t = 0$ die Dichtigkeit ε eine blosse Function des Centralabstandes, und die Dichtigkeit η an allen Stellen der Kugeloberfläche von ein und demselben Werthe sein soll.

Diese Symmetrie des Anfangszustandes wird sich offenbar vererben auf alle späteren Zustände, mithin z. B. sich auch vererben auf den schliesslich eintretenden *Gleichgewichtszustand*. Zur Zeit dieses symmetrischen Gleichgewichtszustandes muss aber bekanntlich das Potential V im ganzen Raume der Kugel *constant*, und folglich, wie aus (8.) sich ergibt, die Dichtigkeit

$$(9.) \quad \varepsilon \text{ überall} = 0$$

sein; sodass also im Innern der Kugel nur noch neutrale Elektrizität sich vorfinden kann. Die in der Kugel enthaltene freie Elektrizität $M = 1$ wird also, nach Eintritt dieses symmetrischen Gleichgewichtszustandes, in symmetrischer Weise an der Kugeloberfläche abgelagert sein, in Gestalt einer elektrischen Belegung von überall gleicher Flächendichtigkeit:

$$(10.) \quad \eta = \frac{M}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi R^2},$$

wo R den Radius der Kugel bezeichnet.

Die Einwirkung, welche diese gleichförmige elektrische Oberflächenbelegung von der Gesamtmasse $M = 1$ auf die neutrale Elektrizität im Innern ausübt, kann aber *unmöglich* $= 0$ sein. Denn wäre sie $= 0$, so müsste die der Betrachtung zu Grunde gelegte Potentialfunction (4.), je nachdem unsere Untersuchungen ganz allgemein für Kugeln *beliebiger* Grösse, oder nur für eine einzige *individuell* gegebene Kugel gelten sollen, entweder dem Laplace'schen Theorem Seite 12, oder doch wenigstens dem Theorem (15.) Seite 8 entsprechen; — was nicht der Fall ist.

Die Wirkung jener gleichförmigen elektrischen Oberflächenbelegung auf die neutrale Elektrizität im Innern ist also *nicht* $= 0$. Folglich wird diese neutrale Elektrizität nicht in Ruhe sein können, sondern in Bewegung gerathen, der betrachtete Zustand also kein Gleichgewichtszustand sein.

Einerseits sind wir also zu der Einsicht gelangt, dass der

Gleichgewichtszustand charakterisirt sein muss durch die Formeln (9.), (10.). Und andererseits haben wir soeben erkannt, dass der durch diese Formeln (9.), (10.) charakterisirte Zustand unmöglich ein Gleichgewichtszustand sein kann. Hieraus folgt, dass ein Gleichgewichtszustand überhaupt nicht existirt, dass also die Elektrizität im Innern der Kugel in unaufhörlicher Bewegung sich befinden wird. Demgemäss gelangen wir zu folgendem Satz:

Erster Satz. — Die Masse M der in einer isolirten Metallkugel enthaltenen Elektrizität sei gegeben $= 1$.

Man denke sich nun diese Elektrizitätsmenge $M = 1$ zu Anfang im Innern der Kugel beliebig vertheilt, jedoch symmetrisch in Bezug auf das Kugelcentrum. Alsdann wird diese Elektrizität, bei Zugrundelegung des Gesetzes:

$$(11.) \quad \varphi(r) = \frac{1 - e^{-ar}}{r},$$

niemals zur Ruhe kommen können, sondern in unaufhörlicher Bewegung sich befinden; sodass man also hier ein wirkliches *perpetuum mobile* vor sich hat.

NB. Nur der Bequemlichkeit willen ist von uns $M = 1$ gesetzt worden. Der Satz gilt offenbar ganz allgemein für jeden beliebigen Werth von M , ausser für $M = 0$.

Von selber drängt sich die Frage auf nach der Beschaffenheit der in Rede stehenden unaufhörlichen Bewegung, namentlich die Frage, ob dieselbe eine stationäre sein kann. — Um hierauf näher einzugehen, bedienen wir uns der gewöhnlichen Gleichungen:

$$(12.) \quad \begin{aligned} \kappa u &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ \kappa v &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ \kappa w &= -\frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo u, v, w die elektrischen Strömungskomponenten vorstellen, während κ eine Constante, nämlich den spezifischen Widerstand desjenigen Metalles bezeichnet, aus welchem die Kugel besteht.

Aus diesen Gleichungen (12.) ergibt sich sofort:

$$(13.) \quad \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\Delta V.$$

Das hier eingeklammerte Trinom ist aber bekanntlich $= -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$,

wo ε die elektrische Dichtigkeit an der Stelle (x, y, z) , und t die Zeit bezeichnet. Somit folgt:

$$(14.) \quad \kappa \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \Delta V;$$

und hieraus folgt weiter:

$$(15.) \quad \kappa \Delta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \Delta \Delta V.$$

Multipliziert man die beiden letzten Formeln respective mit α^2 und -1 , und addirt, so erhält man:

$$\kappa \alpha^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \kappa \Delta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha^2 \Delta V - \Delta \Delta V,$$

also mit Rücksicht auf (8.):

$$(16.) \quad \kappa \alpha^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \kappa \Delta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -4\pi \alpha^2 \varepsilon.$$

Diese für ε geltende *partielle Differentialgleichung dritter Ordnung* entspricht unsern augenblicklichen Bedürfnissen, ohne dass es dabei nöthig wäre, dieselbe zu integriren.

Um näher auf die Dinge einzugehen, wollen wir annehmen, die zu untersuchende elektrische Bewegung sei von irgend einem Augenblick ab eine stationäre, und die aus dieser Annahme sich ergebenden Consequenzen zu entwickeln suchen.

Zur Zeit dieses stationären Zustandes ist offenbar $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$, und also, nach (16.), ε selbst ebenfalls überall $= 0$; sodass also im Innern der Kugel nur noch neutrale Elektrizität vorhanden sein kann, die in der Kugel enthaltene freie Elektrizität $M = 1$ also an ihrer Oberfläche abgelagert sein muss, in Gestalt einer gleichförmigen elektrischen Belegung. Mit andern Worten: Wir gelangen zu der Einsicht, dass zur Zeit des stationären Zustandes für die Dichtigkeiten ε und η folgende Formeln gelten müssen:

$$(17.) \quad \varepsilon = 0, \quad \text{und} \quad \eta = \frac{M}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi R^2},$$

wo R den Radius der Kugel bezeichnet.

Somit gewinnt die Formel (3.) die einfachere Gestalt:

$$V = \frac{1}{4\pi R^2} \int \varphi(r) \cdot d\omega.$$

Hieraus folgt weiter, mit Rücksicht auf (6.):

$$\Delta V = -\frac{\alpha^2}{4\pi R^2} \int \left(\frac{1}{r} - \varphi(r) \right) d\omega,$$

also mit Rücksicht auf (4.):

$$(18.) \quad \Delta V = \frac{-\alpha^2}{4\pi R^2} \int \left(\frac{e^{-\alpha r}}{r} \right) d\omega.$$

Nach (14.) und (17.) ist aber $\Delta V = 0$. Folglich muss das in (18.) enthaltene Integral ebenfalls $= 0$ sein, mithin die Formel stattfinden:

$$(19.) \quad \int \left(\frac{e^{-\alpha r}}{r} \right) d\omega = 0.$$

Offenbar repräsentirt dieses Integral (19.) dasjenige Potential, welches eine gleichförmige elektrische Belegung von der Flächen-dichtigkeit 1 auf irgend einen innern Punkt (x, y, z) ausüben würde bei Zugrundelegung der Potentialfunction:

$$(20.) \quad \psi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}.$$

Dieses Integral oder Potential (19.) kann daher unmöglich $= 0$ sein. Denn wäre es $= 0$, so müsste die soeben genannte Potentialfunction (20.) entweder dem Laplace'schen Theorem Seite 12, oder doch wenigstens dem Theorem (15.) Seite 8 entsprechen; — was nicht der Fall ist.

Die von uns gemachte Annahme führt also zu einer Gleichung (19.), die nicht stattfinden kann. Folglich ist jene Annahme unhaltbar. Und wir gelangen daher zu folgendem Satz:

Zweiter Satz. — *Die unaufhörliche Bewegung, von welcher im ersten Satz (Seite 16) die Rede war, wird niemals, wieviel Zeit auch verstreichen mag, einen stationären Charakter anzunehmen im Stande sein.*

Allerdings hat dieser zweite Satz, weil er auf die mehr oder weniger hypothetischen Gleichungen (12.) sich stützt, nicht dieselbe Sicherheit, wie jener erste Satz.

§ 3.

Angabe anderer Grundgesetze, die ebenfalls in Widerspruch stehen mit der Vorstellung des elektrostatischen Gleichgewichts.

Die Gesetze, von denen hier die Rede sein soll, werden ganz aus der Luft gegriffen sein, und weit abseits liegen von der Wirklichkeit. Trotzdem dürften sie einigermassen von Interesse sein als ein Argument dafür, dass, ausser dem Gesetz des vorigen Paragraphs, noch andere Gesetze *denkbar* sind, die ebenfalls in Widerspruch stehen mit der Vorstellung des elektrostatischen Gleichgewichts.

Der Kürze halber werde ich den eigentlichen Inhalt des gegen-

wärtigen Paragraphs sofort, in Form eines bestimmten Satzes, hinstellen, und sodann den Beweis dieses Satzes folgen lassen.

Satz. — Die Masse M der in einer isolirten Metallkugel enthaltenen Elektrizität sei gegeben $= 1$.

Man denke sich nun diese Elektrizitätsmenge $M = 1$ zu Anfang im Innern der Kugel beliebig vertheilt, jedoch symmetrisch in Bezug auf das Kugelcentrum. Alsdann wird diese Elektrizität, bei Zugrundelegung des Gesetzes:

$$(1.) \quad \varphi(r) = Ar^N, \quad (N = 1, 3, 5, 7, \dots),$$

niemals zur Ruhe kommen können. Dabei soll A eine beliebig gegebene Constante sein.

NB. Der Satz gilt nicht nur für $M = 1$, sondern ganz allgemein für jeden beliebigen Werth von M , ausser für $M = 0$.

Beweis des Satzes für $N = 1$. — Für den Specialfall $N = 1$ lautet unsere Potentialfunction (1.) folgendermassen:

$$(2.) \quad \varphi(r) = Ar;$$

sodass also das Potential V [Seite 13 (3.)] in diesem Fall den Werth hat:

$$(3.) \quad V = A \int r \cdot \varepsilon d\tau + A \int r \cdot \eta d\omega.$$

Nun ist, wie schon früher erwähnt wurde, $\Delta(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$, mithin z. B. $\Delta r = 1 \cdot 2 \cdot r^{-1}$. Somit folgt aus (3.):

$$(4.) \quad \Delta V = 2A \int \frac{\varepsilon d\tau}{r} + 2A \int \frac{\eta d\omega}{r};$$

und hieraus folgt weiter:

$$(5.) \quad \Delta \Delta V = -8\pi A \varepsilon.$$

Wir wollen nun die *Annahme* machen, dass die zu Anfang in der Kugel symmetrisch vertheilte Elektrizität irgend welchen *Gleichgewichtszustand* anzunehmen fähig sei, und die aus dieser Annahme sich ergebenden Consequenzen ins Auge fassen.

Zur Zeit jenes Gleichgewichtszustandes muss V im Raume der Kugel *constant*, und also nach (5.) die Dichtigkeit ε überall $= 0$ sein. Folglich muss zur Zeit jenes Zustandes die in der Kugel enthaltene Elektrizität $M = 1$ an ihrer Oberfläche abgelagert sein, in Gestalt einer gleichförmigen elektrischen Belegung. Die Einwirkung dieser Belegung auf die neutrale Elektrizität im Innern kann aber unmöglich $= 0$ sein, weil sonst die Potentialfunction (2.): $\varphi(r) = Ar$ dem Laplace'schen Theorem Seite 12 oder wenigstens dem Theorem (15.) Seite 8 entsprechen müsste, — was nicht der Fall ist.

Folglich wird zur Zeit des Gleichgewichtszustandes jene innerhalb der Kugel vorhandene neutrale Elektrizität in Bewegung gerathen; was dem Begriff des Gleichgewichtszustandes widerspricht.

Somit sehen wir, dass jene Annahme, von der wir ausgingen, *unhaltbar* ist. — Q. e. d.

Beweis des Satzes für $N = 3$. — Alsdann ist

$$(A.) \quad \varphi(r) = Ar^3;$$

sodass also das Potential V [Seite 13 (3.)] lauten wird:

$$(B.) \quad V = A \int r^3 \cdot \varepsilon d\tau + A \int r^3 \cdot \eta d\omega.$$

Hieraus folgt, unter Anwendung der schon mehrfach benutzten Formel: $\Delta(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$, sofort:

$$(C.) \quad \Delta V = 12A \int r \cdot \varepsilon d\tau + 12A \int r \cdot \eta d\omega,$$

$$(D.) \quad \Delta\Delta V = 24A \int \frac{\varepsilon d\tau}{r} + 24A \int \frac{\eta d\omega}{r},$$

$$(E.) \quad \Delta\Delta\Delta V = -96\pi A\varepsilon.$$

Dass aber an diese letzte Formel (E.) genau dieselbe Schlussfolge sich anreihen lässt, wie vorhin an die Formel (5.), übersieht man leicht. U. s. w. — Q. e. d.

Der Beweis des Satzes für $N = 5, 7, 9, \dots$ wird offenbar in analoger Art zu führen sein, und bedarf also keiner weiteren Andeutung.

Bemerkung. — Hingegen würde die hier angewendete Beweismethode *versagen*, falls man $N = 0, 2, 4, 6, 8, \dots$ machen wollte. So z. B. würde

$$\text{für } N = 0: \quad \Delta V = 0,$$

$$\text{für } N = 2: \quad \Delta\Delta V = 0,$$

$$\text{für } N = 4: \quad \Delta\Delta\Delta V = 0,$$

$$\text{etc.} \quad \text{etc.} \quad \text{etc.}$$

sich ergeben; so dass man in all' diesen Fällen aus der Constanz von V keinen Schluss machen könnte auf die Beschaffenheit von ε . Wir werden später (auf Seite 59) eine Methode kennen lernen, die von ganz anderer Art ist, und die für diese Fälle $N = 0, 2, 4, 6, 8, \dots$ sich eignet. Und dabei werden wir zu der Erkenntniss gelangen, dass das Gesetz (1.) in den Fällen $N = 2, 4, 6, 8, \dots$ mit der Vorstellung des elektrostatischen Gleichgewichts *in Widerspruch* steht. Der Fall $N = 0$ erledigt sich von selber, und bedarf keiner weitern Besprechung, weil in diesem Fall die Potentialfunction *constant*, mithin die Kräfte alle $= 0$ werden.

§ 4.

Sich anschliessende Ueberlegungen.

Unsere bisherigen Betrachtungen zeigen, dass man der Potentialfunction $\varphi(r)$ vielerlei Gestalten beizulegen vermag, die mit der Vorstellung eines elektrostatischen Gleichgewichtszustandes in Widerspruch stehen würden. Ja sie erwecken die Vermuthung, dass im Ganzen vielleicht nur *wenige* Gestalten von $\varphi(r)$ existiren möchten, die mit jener Vorstellung verträglich sind. Sollte es nicht möglich sein, diese wenigen wirklich zu finden?

Bei einem nähern Eingehen auf diese Frage würden, was z. B. die Functionen von der Form

$$\varphi(r) = Ar^N$$

anbetrifft, der Reihe nach *sämmtliche* Werthe von N zu durchmustern sein, die positiven wie die negativen, die rationalen wie die irrationalen.

Dabei aber tritt uns von selber eine gewisse *Schranke* entgegen. Ohne besondere Mühe ergibt sich nämlich, dass man bei einer solchen Durchmusterung nur allein diejenigen Werthe von N in Betracht zu ziehen braucht, die ≥ -2 , respective ≥ -1 sind. Welche von diesen beiden Schranken (-2 oder -1) die eigentlich richtige, die in Wirklichkeit gebotene sei, — das hängt wesentlich ab von den Vorstellungen, die man mit den Worten *Kraft* und *Potential* verbindet. In der That wird jene Schranke (wie sogleich gezeigt werden soll) $= -2$ oder $= -1$ sein, je nachdem man das *Potential* oder aber die *Kraft* als das eigentlich Primäre ansieht.

Um diese Dinge an irgend einem Beispiel zu erläutern, wollen wir annehmen, die in einem gegebenen Conductor enthaltene Elektrizität sei daselbst in *beliebiger* Weise vertheilt, jedoch nur in seinem Innern, nicht an der Oberfläche; der Art, dass die räumliche Dichtigkeit ε eine beliebige Function der Coordinaten, hingegen die Oberflächendichtigkeit η überall $= 0$ ist. Die in dem Conductor enthaltene Elektrizität wird alsdann in Bezug auf irgend welchen Punkt (x, y, z) das Potential besitzen:

$$V = \int \varphi(r) \cdot \varepsilon d\tau, \quad [\text{vgl. (3.) Seite 13}],$$

wo r den Abstand der einzelnen Elemente $\varepsilon d\tau$ von jenem Punkte (x, y, z) bezeichnet. Auch wollen wir annehmen, der sollicitirte Punkt (x, y, z) liege *innerhalb* des Conductors. Wir haben nun die Wahl zwischen zweierlei Vorstellungen.

Erste Vorstellungsweise. — Wir werden nämlich entweder das *Potential* als das eigentlich *Primäre* (mithin die Kraft als einen blossen Appendix, als den negativen Differentialquotienten des Potentials) ansehen. Alsdann gilt die Regel, dass ein solches Potential aus seinen einzelnen Bestandtheilen durch *Addition* (respective *Integration*) entsteht, entsprechend der Formel:

$$(\alpha.) \quad V = \int \varphi(r) \cdot \varepsilon d\tau.$$

Gleichzeitig wird alsdann aber eine solche Regel der Addition für die Kräfte im Allgemeinen *nicht* existiren. Denn bei der genannten Vorstellungsweise wird allerdings die in der Richtung der x -Axe auf den Punkt (x, y, z) ausgeübte Kraft X den Werth haben:

$$X = - \frac{\partial V}{\partial x},$$

woraus mittelst der Formel $(\alpha.)$ sich ergibt:

$$(\beta.) \quad X = - \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int \varphi(r) \cdot \varepsilon d\tau \right).$$

Keineswegs aber wird man hieraus weiter folgern dürfen, dass diese Kraft X unter allen Umständen

$$= - \int \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} \varepsilon d\tau$$

sei; was doch der Fall sein müsste, wenn die in der Richtung der x -Axe auf den Punkt (x, y, z) ausgeübten Kräfte unter allen Umständen sich schlechtweg addirten.

Zweite Vorstellungsweise. — Oder aber wir werden umgekehrt die *Kraft* als das eigentlich *Primäre* (mithin das Potential als einen blossen Appendix, als das negative Integral der Kraft) uns vorstellen. Alsdann werden wir an der althergebrachten Regel, dass Kräfte von einerlei Richtung sich addiren, festzuhalten haben. Und es wird also in diesem Fall der Regel der Addition der Kräfte, mithin z. B. auch der Formel

$$(\gamma.) \quad X = - \int \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x} \varepsilon d\tau$$

ganz allgemeine Gültigkeit beizulegen sein.

Bei der ersten Vorstellungsweise wird man, was die Beschaffenheit von $\varphi(r)$ betrifft, dafür sorgen müssen, dass das in $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ enthaltene Integral einen Sinn hat. Bei der *zweiten* hingegen wird darauf zu achten sein, dass das Integral $(\gamma.)$ einen Sinn hat.

Setzt man also z. B.:

$$\varphi(r) = Ar^N,$$

so wird die Zahl N bei der *ersten* Vorstellungsweise ≥ -2 , bei der *zweiten* hingegen ≥ -1 sein müssen. Mit andern Worten: Die Zahl N wird bei der *ersten* Vorstellungsweise auf den Spielraum:

$$-2 \dots \dots 0 \dots \dots + \infty$$

bei der *zweiten* aber auf den etwas engeren Spielraum:

$$-1 \dots 0 \dots \dots + \infty$$

zu beschränken sein.

Festsetzung. — Um den Gegenstand unserer künftigen Untersuchungen nicht gar zu sehr zu zersplittern, und unsere Gedanken gleich von vornherein besser zu fixiren, wollen wir durchweg die erste Vorstellungsweise uns aneignen, also das Potential als das eigentlich Primäre ansehen. Demgemäss werden wir, was die zu untersuchende Potentialfunction $\varphi(r)$ betrifft, nur darauf zu achten haben, dass für sie das Integral (α):

$$(\delta) \quad \int \varphi(r) \cdot \varepsilon d\tau$$

einen bestimmten Sinn hat. Und wir werden also, was z. B. die speciellere Potentialfunction

$$(\Delta) \quad \varphi(r) = Ar^N$$

betrifft, die Zahl $N \geq -2$ uns zu denken haben.

Bemerkung. — Die berühmte und grossartige Poisson'sche Theorie der magnetischen Induction leidet bekanntlich an dem Uebelstande, dass die von den magnetischen Molekülen herrührenden Kräfte nicht ohne Weiteres integrirbar sind, sobald der sollicitirte Punkt inmitten dieser Moleküle liegt. Und die nach dem Vorbilde dieser Poisson'schen Theorie construirte Theorie der Dielectrica leidet an genau demselben Uebelstande.

Seit etwa 1850 bis in unsere Zeit hinein sind vielfach Versuche gemacht zur Beseitigung dieses Uebelstandes. Aber all' diese Versuche sind, wie ich später einmal näher darzulegen gedenke, als mehr oder weniger misslungen zu bezeichnen. Der einzige Ausweg *in hoc discrimine rerum* dürfte vielleicht der sein, dass man, entsprechend der soeben getroffenen Festsetzung, das Potential in den Vordergrund stellt, und dieses als das eigentlich Primäre, die Kräfte aber als einen blossen Appendix des Potentials ansieht.

Zweite Bemerkung. — Die obige Festsetzung ist genau dieselbe, deren ich mich schon früher bei einer ganz andern Gelegenheit bedient habe, nämlich bei meinen Bemühungen, das *Weber'sche* Gesetz durch eine zeitliche Fortpflanzung der ausgeübten Wirkung zu erklären.

§ 5.

Ueber ein Grundgesetz, welches unendlich viele elektrische Gleichgewichtszustände zulassen würde.

Nachdem wir Gesetze kennen gelernt haben, die dadurch ausgezeichnet sind, dass sie *keinen* elektrischen Gleichgewichtszustand zulassen, dürfte es wohl von Interesse sein, auch Gesetze kennen zu lernen, die gewissermassen die *entgegengesetzte* Absonderlichkeit darbieten, nämlich solcher Art sind, dass sie *unendlich viele* elektrische Gleichgewichtszustände zulassen. Selbstverständlich soll es sich dabei nur um ein Beispiel handeln.

Ein solches Beispiel bietet sich uns dar in folgender Potentialfunction:

$$(1.) \quad \varphi(r) = A \frac{e^{\alpha r} - e^{-\alpha r}}{r},$$

wo A und α beliebig gegebene Constanten sind. Die dieser Potentialfunction $\varphi(r)$ *adjungirte* Function $\xi(r)$, [vgl. Seite 5 (6.)], lautet:

$$(2.) \quad \xi(r) = \int_{r_0}^r \varphi(r) \cdot r dr = \frac{A}{\alpha} (e^{\alpha r} + e^{-\alpha r}) - \frac{A}{\alpha} (e^{\alpha r_0} + e^{-\alpha r_0}).$$

Setzt man hier successive $r = \varrho + \varsigma$ und $r = \varrho - \varsigma$, so erhält man:

$$\xi(\varrho + \varsigma) = \frac{A}{\alpha} (e^{\alpha(\varrho+\varsigma)} + e^{-\alpha(\varrho+\varsigma)}) - \frac{A}{\alpha} (e^{\alpha r_0} + e^{-\alpha r_0}),$$

$$\xi(\varrho - \varsigma) = \frac{A}{\alpha} (e^{\alpha(\varrho-\varsigma)} + e^{-\alpha(\varrho-\varsigma)}) - \frac{A}{\alpha} (e^{\alpha r_0} + e^{-\alpha r_0}),$$

und hieraus durch Subtraction:

$$(3.) \quad \xi(\varrho + \varsigma) - \xi(\varrho - \varsigma) = \frac{A}{\alpha} (e^{\alpha\varrho} - e^{-\alpha\varrho}) (e^{\alpha\varsigma} - e^{-\alpha\varsigma}),$$

also, falls man ϱ und ς mit einander vertauscht:

$$(4.) \quad \xi(\varsigma + \varrho) - \xi(\varsigma - \varrho) = \frac{A}{\alpha} (e^{\alpha\varrho} - e^{-\alpha\varrho}) (e^{\alpha\varsigma} - e^{-\alpha\varsigma}).$$

Substituirt man diese Werthe (3.), (4.) in die für das Potential v einer Kugelschaale erhaltenen Ausdrücke (8a., j.) Seite 6:

$$(5a.) \quad v = \frac{m}{2qs} [\xi(\varrho + s) - \xi(\varrho - s)],$$

$$(5j.) \quad v = \frac{m}{2qs} [\xi(s + \varrho) - \xi(s - \varrho)],$$

so erkennt man sofort, dass dieses Potential v ein und dieselbe analytische Gestalt besitzt, einerlei ob der sollicitirte Punkt ausserhalb oder innerhalb der Schaale liegt. Im einen wie im andern Fall erhält man nämlich:

$$v = \frac{m}{2qs} \frac{A}{\alpha} (e^{\alpha\varrho} - e^{-\alpha\varrho}) (e^{\alpha s} - e^{-\alpha s}),$$

oder besser geordnet:

$$(6.) \quad v = \left(\frac{A}{2\alpha} \frac{e^{\alpha\varrho} - e^{-\alpha\varrho}}{\varrho} \right) \left(m \frac{e^{\alpha s} - e^{-\alpha s}}{s} \right).$$

Dabei bezeichnet m die Gesamtmasse der gegebenen unendlich dünnen homogenen Schaale, s ihren Radius, und ϱ den Centralabstand des sollicitirten Punktes.

Es sei nun gegeben eine isolirte und mit irgend welcher Elektrizitätsmenge M geladene *Metallkugel*. Alle überhaupt in der Kugel enthaltene Elektrizität mag vorläufig *beliebig* vertheilt sein, jedoch *symmetrisch* in Bezug auf das Kugelcentrum.

Denkt man sich nun die gegebene Metallkugel in lauter unendlich dünne concentrische Schichten zerlegt, und bezeichnet man die in diesen einzelnen Schichten enthaltenen Elektrizitätsmengen mit m_1, m_2, m_3, \dots , ferner die Radien der einzelnen Schichten mit s_1, s_2, s_3, \dots , so wird das von der ganzen Kugel auf irgend einen *innern* Punkt ausgeübte elektrische Potential V , zufolge der Formel (6.), folgendermassen lauten:

$$(7.) \quad V = \left(\frac{A}{2\alpha} \frac{e^{\alpha\varrho} - e^{-\alpha\varrho}}{\varrho} \right) \left(m_1 \frac{e^{\alpha s_1} - e^{-\alpha s_1}}{s_1} + m_2 \frac{e^{\alpha s_2} - e^{-\alpha s_2}}{s_2} + \dots \right),$$

wo ϱ den Centralabstand jenes innern Punktes bezeichnet. Ueberdies werden die soeben genannten Massen m_1, m_2, m_3, \dots zu der *gegebenen* Gesamtmasse M in der Beziehung stehen:

$$(8.) \quad m_1 + m_2 + m_3 + \dots = M.$$

Soll nun die hier betrachtete elektrische Vertheilung einen *Gleichgewichtszustand* repräsentiren, so muss V *constant*, d. i. unabhängig von ϱ sein. Ein Blick auf die vorstehende Formel (7.) zeigt daher, dass wir einen solchen Gleichgewichtszustand erhalten werden, wenn wir jene von Hause aus schon der Bedingung (8.) unter-

worfenen Massen m_1, m_2, m_3, \dots überdies noch folgender Bedingung unterwerfen:

$$(9.) \quad m_1 \frac{e^{\alpha z_1} - e^{-\alpha z_1}}{s_1} + m_2 \frac{e^{\alpha z_2} - e^{-\alpha z_2}}{s_2} + \dots = 0.$$

Offenbar aber werden die unendlich vielen Grössen m_1, m_2, m_3, \dots auf unendlich viele Arten sich so bestimmen lassen, dass sie diesen beiden Bedingungen (8.) und (9.) gleichzeitig Genüge leisten. Somit ist also nachgewiesen, dass eine gegebene Elektrizitätsmenge M in einer isolirten Metallkugel, bei Zugrundelegung des Gesetzes (1.), unendlich vieler Gleichgewichtszustände fähig ist.

Ein anderes Gesetz, von welchem genau dasselbe zu sagen wäre, und zwar mit Bezug auf jeden beliebigen Conductor, ist offenbar das Gesetz: $\varphi(r) = Ar^0 = A$. Uebrigens sind derartige Gesetze einstweilen nur als ein *Curiosum* anzusehen, und ohne Belang für unsere weiteren Untersuchungen.

§ 6.

Ueber eine gewisse Gattung gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Da wir im gegenwärtigen Capitel allerhand Betrachtungen angestellt haben, die zum Theil nur *lose* mit einander zusammenhängen, so wird es kaum noch Anstoss erregen, wenn der Zusammenhang beim Uebergang zu diesem letzten Paragraph jetzt völlig *verschwinden* wird.

Ebenso aber wie die vorhergehenden Paragraphen, ebenso soll auch dieser letzte Paragraph dazu dienen, die Expositionen in den weiter folgenden Capiteln vor störenden Unterbrechungen zu bewahren, und denselben eine möglichst einheitliche und übersichtliche Gestalt zu verleihen.

Die Ableitungen einer unbekanntten Function $f = f(x)$ seien bezeichnet mit f', f'', \dots . Soll nun diese Function $f = f(x)$ der Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} f & f' \\ f'' & f''' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad ff''' - f'f'' = 0$$

Genüge leisten, so muss sein:

$$\frac{f'''}{f''} = \frac{f'}{f}.$$

Hieraus folgt durch Integration sofort:

$$\log f'' = \log f + 2 \log h,$$

wo h eine *willkürliche Constante* vorstellt. — Aus der letzten Formel folgt aber offenbar:

$$f'' = h^2 f;$$

und hieraus folgt weiter:

$$f = h_1 e^{hx} + h_2 e^{-hx},$$

wo h_1 und h_2 ebenfalls *willkürliche Constanten* sind.

Somit gelangen wir zu dem Satz, dass das *vollständige Integral der Differentialgleichung dritter Ordnung*:

$$(1.) \quad \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) \\ f''(x) & f'''(x) \end{vmatrix} = 0$$

den Werth besitzt:

$$(1a.) \quad f(x) = h_1 e^{hx} + h_2 e^{-hx},$$

wo h, h_1, h_2 *willkürliche Constanten* sind.

In Anbetracht dieses Satzes drängt sich die Vermuthung auf, dass das *vollständige Integral der Differentialgleichung sechster Ordnung*:

$$(2.) \quad \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) \\ f''(x) & f'''(x) & f^{IV}(x) \\ f^{IV}(x) & f^V(x) & f^{VI}(x) \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt sein werde durch folgenden mit den sechs *willkürlichen Constanten* h, h_1, h_2, j, j_1, j_2 behafteten Ausdruck:

$$(2a.) \quad f(x) = (h_1 e^{hx} + h_2 e^{-hx}) + (j_1 e^{jx} + j_2 e^{-jx}).$$

Und diese Vermuthung bestätigt sich. Denn man überzeugt sich leicht davon, dass die vorgelegte Differentialgleichung durch diesen Ausdruck identisch erfüllt wird.

Auch kann man leicht auf *rationelle* Weise zur Integration der vorgelegten Differentialgleichung (2.) gelangen, indem man bemerkt, dass sie, unter Hinzuziehung zweier neuer unbekanntener Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, äquivalent ist mit folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x) + \varphi(x)f'(x) + \psi(x)f''(x) &= 0, \\ f''(x) + \varphi(x)f'''(x) + \psi(x)f^{IV}(x) &= 0, \\ f^{IV}(x) + \varphi(x)f^V(x) + \psi(x)f^{VI}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Doch würde es zu weit führen, auf solche elementare Dinge hier näher eingehen zu wollen.

In analoger Weise findet man nun weiter, dass das *vollständige Integral der Differentialgleichung neunter Ordnung*:

$$(3.) \quad \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) & f''(x) & f'''(x) \\ f''(x) & f'''(x) & f^{IV}(x) & f^V(x) \\ f^{IV}(x) & f^V(x) & f^{VI}(x) & f^{VII}(x) \\ f^{VI}(x) & f^{VII}(x) & f^{VIII}(x) & f^{IX}(x) \end{vmatrix} = 0$$

folgendermassen lautet:

$$(3a.) \quad f(x) = (h_1 e^{hx} + h_2 e^{-hx}) + (j_1 e^{jx} + j_2 e^{-jx}) + (k_1 e^{kx} + k_2 e^{-kx}),$$

wo $h, h_1, h_2, j, j_1, j_2, k, k_1, k_2$ willkürliche Constanten sind.

Diese Sätze (1.), (2.), (3.) sind offenbar nur die Anfangsglieder einer Reihe von unendlich vielen Sätzen. Es würde leicht sein, all' diese Sätze zu einem einzigen *Generalsatz* zu vereinigen. Doch scheint es überflüssig, bei so nahe liegenden Dingen uns noch länger aufzuhalten.

•