Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen

Neumann, C.

Leipzig, 1896

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-19077

Viertes Capitel. Ueber die Entwicklung des exponentiellen Grundgesetzes nach Kugelfunctionen.

Viertes Capitel.

Ueber die Entwicklung des exponentiellen Grundgesetzes nach Kugelfunctionen.

Das von uns gefundene exponentielle Grundgesetz lautet, was seine Potentialfunction $\varphi(r)$ betrifft, folgendermassen (vgl. Seite 48):

$$\text{(E.)} \qquad \varphi(r) = \frac{Ae^{-\alpha r}}{r} + \frac{Be^{-\beta r}}{r} + \frac{Ce^{-\gamma r}}{r} + \cdots.$$

Ebenso wie man nun die dem Newton'schen Gesetz entsprechende Potentialfunction $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ (unter Anwendung der Polarcoordinaten) in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe zu entwickeln im Stande ist, — ebenso wollen wir im gegenwärtigen Capitel eine analoge Entwicklung zu finden suchen für die hier in (E.) angegebene viel allgemeinere Potentialfunction $\varphi(r)$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, für die einzelnen Glieder dieser Function.

Zu einer solchen Entwicklung werden wir gelangen im ersten Theorem des zweiten Paragraphs (Seite 99). Sodann aber werden wir in den weiter folgenden Paragraphen die in dieser Entwicklung auftretenden neuen Functionen ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$) einer näheren Untersuchung unterwerfen*).

In der Theorie der Kugelfunctionen sind bekanntlich die Bezeichnungsweisen sehr verschieden bei verschiedenen Autoren. Ich werde (wie ich es auch sonst gethan habe) im hier vorliegenden Werke durchweg der Bezeichnungsweise meines Vaters mich anschliessen, und demgemäss an mehreren Stellen auf das betreffende Werk meines Vaters verweisen**).

---

*) Eine kurze Mittheilung über diesen Gegenstand ist von mir bereits vor langer Zeit gemacht worden in den Berichten der K. Sächs. Ges. der Wiss. 1886, Seite 75—82.

**) *F. Neumann: Vorl. üb. d. Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen*, Leipzig 1887, Verlag von Teubner.

§ 1.

Ueber die Differentialgleichung $\Delta F = F$.

Die partielle Differentialgleichung:

(1.) $$\Delta F = F \quad \text{d. i.} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = F$$

wird erfüllt werden durch

$$F = \frac{e^r}{r}, \quad \text{ebenso durch} \quad F = \frac{e^{-r}}{r},$$

vorausgesetzt, dass man unter r den Abstand des Punktes (x, y, z) von irgend welchem andern Punkte (x_1, y_1, z_1) versteht. Es ist das ein ziemlich bekannter Satz, der übrigens auch im Laufe unserer eigenen Untersuchungen schon von selber zu Tage getreten ist. [Vgl. die Formel (12.) Seite 70].

Demgemäss wird die partielle Differentialgleichung (1.) erfüllt werden, wenn man für F einen der vier Ausdrücke nimmt:

(2.) $$u = \frac{e^r}{r}, \qquad U = \frac{e^r - e^{-r}}{2r},$$
$$v = \frac{e^{-r}}{r}, \qquad V = \frac{e^r + e^{-r}}{2r}.$$

Setzt man nun, was die beiden Endpunkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) der Entfernung r betrifft:

(3.) $$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \gamma, & x_1 &= \varrho_1, \\ y &= \varrho \sin \gamma \cos \psi, & y_1 &= 0, \\ z &= \varrho \sin \gamma \sin \psi, & z_1 &= 0, \end{aligned}$$

und überdies

(4.) $$\cos \gamma = \mu,$$

so nimmt bekanntlich*) die Differentialgleichung (1.) die Gestalt an:

(5.) $$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \frac{\partial F}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1 - \mu^2) \frac{\partial F}{\partial \mu}\right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} = \varrho^2 F;$$

während gleichzeitig r den Werth besitzen wird:

(6.) $$r = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\mu}.$$

Dies vorangeschickt, wollen wir nun zuvörderst die Ausdrücke U, V einer genaueren Untersuchung unterwerfen. Diese Ausdrücke U, V (2.) sind offenbar entwickelbar in die convergenten Reihen:

---

*) Man vgl. *F. Neumann: Vorl. üb. d. Theorie des Potentials etc.*, Leipzig. 1887, Seite 23.

(7.) $$U = 1 + \frac{r^2}{\Pi 3} + \frac{r^4}{\Pi 5} + \frac{r^6}{\Pi 7} + \frac{r^8}{\Pi 9} + \cdots,$$

(8.) $$V = \frac{1}{r} + \frac{r}{\Pi 2} + \frac{r^3}{\Pi 4} + \frac{r^5}{\Pi 6} + \frac{r^7}{\Pi 8} + \cdots.$$

Demgemäss ist z. B. U eine *stetige* Function von r und also nach (6.) auch eine *stetige* Function von ϱ, ϱ_1, μ. Folglich wird U ganz allgemein, d. h. für beliebige Werthe der Argumente ϱ, ϱ_1, μ, entwickelbar sein in eine nach den Kugelfunctionen $P_n(\mu)$ fortschreitende Reihe:

(9.) $$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\varrho, \varrho_1) P_n(\mu), \quad (\varrho \text{ und } \varrho_1 \text{ beliebig}).$$

Auch werden die hier auftretenden neuen Functionen $U_n(\varrho, \varrho_1)$, ebenso wie U selbst, *stetig* sein für beliebige Werthe von ϱ, ϱ_1, mithin z. B. auch stetig sein für $\varrho = 0$.

Andrerseits ist der Ausdruck V (8.) eine *stetige* Function von r, *exclusive:* $r = 0$. Nach (6.) wird daher dieser Ausdruck V nur dann eine *stetige* Function der drei Argumente ϱ, ϱ_1, μ sein, wenn man diese drei Argumente in ihrer Beweglichkeit der Art beschränkt, dass r niemals $= 0$ werden kann. Eine derartige Beschränkung kann aber offenbar am Einfachsten dadurch erreicht werden, dass man festsetzt, es solle ϱ stets $< \varrho_1$ bleiben. Somit ergiebt sich, dass der Ausdruck V für $\varrho < \varrho_1$ eine *stetige* Function von ϱ, ϱ_1, μ, und folglich für $\varrho < \varrho_1$ in eine nach den $P_n(\mu)$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist; so dass man also zu folgender Formel gelangt:

(10.) $$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(\varrho, \varrho_1) P_n(\mu), \quad (\varrho < \varrho_1).$$

Auch werden die hier auftretenden Functionen $V_n(\varrho, \varrho_1)$, ebenso wie V selbst, für alle der Bedingung $\varrho < \varrho_1$ entsprechenden Werthe von ϱ, ϱ_1 *stetig* sein, mithin z. B. auch stetig sein für $\varrho = 0$.

Der Ausdruck U ist, wie schon erwähnt, ein Integral der Differentialgleichung (1.) oder (5.). Die in (9.) angegebene Entwicklung dieses Ausdruckes U muss daher ebenfalls jener Differentialgleichung Genüge leisten. Somit folgt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho^2 \frac{\partial U_n}{\partial \varrho} \right) - \varrho^2 U_n \right] P_n(\mu) + U_n \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \right) \right\} = 0.$$

Diese Formel aber kann, weil bekanntlich*)

*) Vgl. das genannte *F. Neumann'sche* Werk, Seite 34, Formel (4).

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\mu}\right) = -n(n+1)P_n(\mu)$$

ist, auch so geschrieben werden:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial U_n}{\partial\varrho}\right) - [\varrho^2 + n(n+1)]\,U_n\right\}P_n(\mu) = 0;$$

und hieraus folgt sofort:

$$(\alpha.)\qquad \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial U_n}{\partial\varrho}\right) - [\varrho^2 + n(n+1)]\,U_n = 0\,.$$

Nun ist U [nach (7.)] eine blosse Function von r, und r seinerseits [nach (6.)] eine *symmetrische* Function von ϱ, ϱ_1. Und diese Symmetrie wird offenbar [nach (9.)] auch auf die Functionen $U_n = U_n(\varrho, \varrho_1)$ sich übertragen. Folglich wird U_n nicht nur der Differentialgleichung (α.), sondern ebenso auch der analogen Differentialgleichung

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\varrho_1^2\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\right) - [\varrho_1^2 + n(n+1)]\,U_n = 0$$

Genüge leisten.

Einigermassen Aehnliches*) ist zu bemerken mit Bezug auf V und V_n. Kurz man gelangt zu der Einsicht, *dass jede der beiden Functionen* $U_n = U_n(\varrho, \varrho_1)$ *und* $V_n = V_n(\varrho, \varrho_1)$ *sowohl der Differentialgleichung:*

$$(11.)\qquad \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{\partial F}{\partial\varrho}\right) - [\varrho^2 + n(n+1)]\,F = 0,$$

wie auch der Differentialgleichung:

$$(12.)\qquad \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\varrho_1^2\frac{\partial F}{\partial\varrho_1}\right) - [\varrho_1^2 + n(n+1)]\,F = 0$$

Genüge leistet. Und diese Differentialgleichungen können nun dienen zur näheren Bestimmung jener noch unbekannten Functionen U_n *und* V_n.

Die Gleichung (11.) ist offenbar eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ihre beiden particularen Integrale sind durch Reihenentwicklung leicht zu finden. In der That ergiebt sich, dass die Gleichung erfüllt wird, wenn man für F eine der beiden Functionen nimmt:

---

*) *Vollkommene* Aehnlichkeit ist keineswegs vorhanden; schon deswegen nicht, weil bei der Behandlung von U, U_n die Argumente ϱ, ϱ_1 ganz *beliebig* sein sollen, während dieselben bei der Behandlung von V, V_n der Bedingung $\varrho < \varrho_1$ unterworfen zu denken sind. Hiemit hängt z. B. zusammen, dass U_n in der That *symmetrisch* ist in Bezug auf (ϱ, ϱ_1), V_n aber nicht. [Vgl. die weiterhin folgenden Formeln (21.), (22.)].

$$(13.)\quad \mathfrak{S}_n(\varrho) = \varrho^n \left(1 + \frac{\varrho^2}{2(2n+3)} + \frac{\varrho^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + + \cdots\right),$$

$$(14.)\quad \mathfrak{T}_n(\varrho) = \frac{1}{\varrho^{n+1}} \left(1 - \frac{\varrho^2}{2(2n-1)} + \frac{\varrho^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} - + \cdots\right).$$

Demgemäss müssen die jener Differentialgleichung (11.) Genüge leistenden Functionen $U_n = U_n(\varrho, \varrho_1)$ und $V_n = V_n(\varrho, \varrho_1)$ von folgender Gestalt sein:

$$(15.)\quad U_n(\varrho, \varrho_1) = \Phi_n(\varrho_1) \cdot \mathfrak{S}_n(\varrho) + X_n(\varrho_1) \cdot \mathfrak{T}_n(\varrho),$$

$$(16.)\quad V_n(\varrho, \varrho_1) = \Psi_n(\varrho_1) \cdot \mathfrak{S}_n(\varrho) + \Omega_n(\varrho_1) \cdot \mathfrak{T}_n(\varrho).$$

Die Functionen $U_n(\varrho, \varrho_1)$ und $V_n(\varrho, \varrho_1)$ bleiben, wie bei (9.) und (10.) bemerkt wurde, *stetig* für $\varrho = 0$. Folglich darf in ihren Ausdrücken (15.), (16.) die für $\varrho = 0$ ins Unendliche aufspringende Function $\mathfrak{T}_n(\varrho)$, (14.), nicht vorkommen. Folglich müssen $X_n(\varrho_1)$ und $\Omega_n(\varrho_1)$ identisch gleich Null sein; so dass also jene Formeln (15.), (16.) sich reduciren auf:

$$(17.)\quad U_n(\varrho, \varrho_1) = \Phi_n(\varrho_1) \cdot \mathfrak{S}_n(\varrho),$$

$$(18.)\quad V_n(\varrho, \varrho_1) = \Psi_n(\varrho_1) \cdot \mathfrak{S}_n(\varrho).$$

Nun wissen wir aber, dass $U_n(\varrho, \varrho_1)$ und $V_n(\varrho, \varrho_1)$ auch der Differentialgleichung (12.) Genüge leisten. Hieraus folgt, dass die in (17.), (18.) auftretenden Functionen $\Phi_n(\varrho_1)$ und $\Psi_n(\varrho_1)$ in linearer Weise ausdrückbar sind durch die beiden particularen Integrale $\mathfrak{S}_n(\varrho_1)$ und $\mathfrak{T}_n(\varrho_1)$ der Gleichung (12.). Somit ergiebt sich:

$$(19.)\quad U_n(\varrho, \varrho_1) = [a_n \mathfrak{S}_n(\varrho_1) + b_n \mathfrak{T}_n(\varrho_1)] \mathfrak{S}_n(\varrho),$$

$$(20.)\quad V_n(\varrho, \varrho_1) = [c_n \mathfrak{S}_n(\varrho_1) + d_n \mathfrak{T}_n(\varrho_1)] \mathfrak{S}_n(\varrho),$$

wo a_n, b_n, c_n, d_n *unbekannte Constanten* sind. Und es handelt sich jetzt also nur noch um die Bestimmung dieser Constanten.

Die Function $U_n(\varrho, \varrho_1)$ ist, wie bei (9.) bemerkt wurde, *stetig* für ganz beliebige Werthe von ϱ, ϱ_1; mithin z. B. auch für $\varrho_1 = 0$. Folglich darf die für $\varrho_1 = 0$ ins Unendliche aufspringende Function $\mathfrak{T}_n(\varrho_1)$ in der Formel (19.) nicht vorkommen. Folglich muss die Constante

$$(A.)\quad b_n = 0$$

sein.

Weniger einfach liegen die Dinge bei der Betrachtung von $V_n(\varrho, \varrho_1)$. Denn bei dieser Betrachtung ist die bei (10.) festgesetzte Ungleichung $\varrho < \varrho_1$ im Auge zu behalten, der zufolge wohl ϱ, niemals aber ϱ_1 zu 0 herabsinken darf*). Um nun trotzdem über den Werth von $V_n(\varrho, \varrho_1)$ näheren Aufschluss zu gewinnen, greifen wir zurück zur Formel (10.). Diese nimmt mit Rücksicht auf (8.) und (20.) die Gestalt an:

$$\text{(B.)} \qquad \frac{1}{r} + \frac{r}{\Pi 2} + \frac{r^3}{\Pi 4} + \frac{r^5}{\Pi 6} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [c_n \mathfrak{S}_n(\varrho_1) + d_n \mathfrak{T}_n(\varrho_1)] \mathfrak{S}_n(\varrho) P_n(\mu), \quad (\varrho < \varrho_1).$$

Ohne Verletzung der getroffenen Festsetzung: $\varrho < \varrho_1$, kann man nun in dieser Formel ϱ und ϱ_1 respective durch $\lambda\varrho$ und $\lambda\varrho_1$ ersetzen, falls man nur unter λ irgend welchen *positiven* Factor versteht. Alsdann aber wird in dieser Formel (B.) das r in λr übergehen [vgl. (6.)]; sodass also auf der *linken Seite* der Formel folgende Potenzen von λ auftreten werden:

$$\lambda^{-1}, \ \lambda, \ \lambda^3, \ \lambda^5, \ \lambda^7, \ \ldots.$$

Und gleichzeitig werden alsdann auf der *rechten Seite* der Formel in den Producten $\mathfrak{S}_n \mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{T}_n \mathfrak{S}_n$ folgende Potenzen von λ auftreten [vgl. (13.), (14.)]:

$$\text{in } \mathfrak{S}_n \mathfrak{S}_n\text{:} \quad \lambda^{2n}, \ \lambda^{2n+2}, \ \lambda^{2n+4}, \ \lambda^{2n+6}, \ \ldots$$

$$\text{in } \mathfrak{T}_n \mathfrak{S}_n\text{:} \quad \lambda^{-1}, \ \lambda, \ \lambda^3, \ \lambda^5, \ \lambda^7, \ \ldots.$$

Hieraus folgt sofort, dass auf der rechten Seite der Formel (B.) das Product $\mathfrak{S}_n \mathfrak{S}_n$ nicht vorkommen darf, dass mithin die Constante

$$\text{(C.)} \qquad c_n = 0$$

sein muss.

In Anbetracht dieser Resultate (A.) und (C.) reduciren sich unsere Ausdrücke (19.), (20.) auf:

$$\text{(21.)} \qquad U_n(\varrho, \varrho_1) = a_n \mathfrak{S}_n(\varrho) \mathfrak{S}_n(\varrho_1),$$

$$\text{(22.)} \qquad V_n(\varrho, \varrho_1) = d_n \mathfrak{S}_n(\varrho) \mathfrak{T}_n(\varrho_1);$$

wodurch die Entwicklungen (9.) und (10.) übergehen in:

$$\text{(23.)} \qquad U = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \mathfrak{S}_n(\varrho) \, \mathfrak{S}_n(\varrho_1) \, P_n(\mu), \quad (\varrho \text{ und } \varrho_1 \text{ beliebig}),$$

$$\text{(24.)} \qquad V = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \, \mathfrak{S}_n(\varrho) \, \mathfrak{T}_n(\varrho_1) \, P_n(\mu), \quad (\varrho < \varrho_1).$$

*) In der That folgt aus $\varrho < \varrho_1$, dass ϱ_1 stets *grösser* bleiben muss als der kleinste Werth von ϱ. Dieser kleinste Werth von ϱ aber ist die 0.

Es handelt sich jetzt also nur noch um die Ermittelung der beiden Constanten a_n und d_n.

Zur Bestimmung der a_n betrachten wir den Specialfall $\varrho = \varrho_1$. Alsdann ist nach (6.): $r^2 = \varrho^2(2 - 2\mu)$, also nach (7.):

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{\Pi(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^{2n}(2-2\mu)^n}{\Pi(2n+1)};$$

sodass also für diesen Fall die Formel (23.) übergeht in:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho^{2n}(2-2\mu)^n}{\Pi(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\mathfrak{S}_n(\varrho)]^2 P_n(\mu). \tag{25.}$$

Denkt man sich hier beide Seiten geordnet nach Potenzen von μ, so wird das mit μ^n behaftete Glied auf der *linken* Seite lauten:

$$\mu^n \left(\frac{(-2)^n}{\Pi(2n+1)} \varrho^{2n} + C\varrho^{2n+2} + C'\varrho^{2n+4} + \cdots \right), \tag{L.}$$

und das auf der *rechten* Seite mit μ^n behaftete Glied folgende Gestalt besitzen:

$$\mu^n \left(a_n \frac{\Pi(2n)}{2^n[\Pi(n)]^2} \varrho^{2n} + D\varrho^{2n+2} + D'\varrho^{2n+4} + \cdots \right); \tag{R.}$$

dabei bezeichnen $C, C', \ldots$ und $D, D', \ldots$ gewisse Constanten, auf deren Werthe es hier nicht weiter ankommt. Der hier soeben aufgeführte Ausdruck (R.) ergiebt sich sofort, falls man nur die Bedeutung von $\mathfrak{S}_n(\varrho)$, d. i. die Formel (13.), im Auge behält, und überdies beachtet, dass die Kugelfunction $P_n(\mu)$ den Werth besitzt*):

$$P_n(\mu) = \frac{\Pi(2n)}{2^n[\Pi(n)]^2} \mu^n + K\mu^{n-2} + K'\mu^{n-4} + \ldots,$$

wo $K, K', \ldots$ gewisse Constanten vorstellen.

Da nun jene Glieder (L.) und (R.) untereinander identisch sein müssen, so ergiebt sich sofort:

$$a_n = \frac{2^n[\Pi(n)]^2}{\Pi(2n)} \frac{(-2)^n}{\Pi(2n+1)},$$

d. i.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{2^n \Pi(n)}{\Pi(2n)} \right)^2. \tag{26.}$$

---

*) Vgl. das *F. Neumann*'sche Werk, daselbst Seite 34, Formel (7.). Dabei ist zu bemerken, dass jene Formel (7.) mit einem Druckfehler behaftet ist. Im Nenner derselben muss nämlich, statt $2\Pi^2(n)$, gesetzt werden $2^n\Pi^2(n)$, d. i. $2^n[\Pi(n)]^2$.

Zur Bestimmung der d_n benutzen wir die aus (8.) und (24.) entstehende Formel:

$$V = \frac{1}{r} + \frac{r}{\Pi 2} + \frac{r^3}{\Pi 4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \mathfrak{S}_n(\varrho)\mathfrak{T}_n(\varrho_1)P_n(\mu), \quad (\varrho < \varrho_1).$$

Ersetzt man hier die Argumente ϱ, ϱ_1 durch $\lambda\varrho$, $\lambda\varrho_1$, mithin r durch λr, wo λ einen *positiven* Factor vorstellen soll, so erhält man:

$$(27.) \quad \frac{1}{\lambda r} + \frac{\lambda r}{\Pi 2} + \frac{\lambda^3 r^3}{\Pi 4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \mathfrak{S}_n(\lambda\varrho)\mathfrak{T}_n(\lambda\varrho_1)P_n(\mu), \quad (\varrho < \varrho_1).$$

Nach (13.), (14) ist aber:

$$(28.) \quad \mathfrak{S}_n(\lambda\varrho)\mathfrak{T}_n(\lambda\varrho_1) = \frac{1}{\lambda} \frac{\varrho^n}{\varrho_1^{n+1}} (1 + f\lambda^2 + f'\lambda^4 + \cdots),$$

wo $f, f', \cdots$ Functionen von ϱ, ϱ_1 sind, auf deren Werthe es hier nicht weiter ankommt. Da nun die Formel (27.) gültig sein muss für beliebige Werthe des positiven Factors λ, so müssen in ihr z. B. die Coefficienten von $\frac{1}{\lambda}$ auf beiden Seiten einander gleich sein. Demgemäss ergiebt sich mit Rücksicht auf (28.):

$$(29.) \quad \frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{\varrho^n}{\varrho_1^{n+1}} P_n(\mu),$$

d. i.

$$(29a.) \quad \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\mu}} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{\varrho^n}{\varrho_1^{n+1}} P_n(\mu);$$

und hieraus folgt sofort, dass die Constanten d_n sämmtlich $= 1$ sind. Also:

$$(30.) \quad d_n = 1.$$

Wir können einstweilen die Ergebnisse unserer Untersuchung folgendermassen zusammenfassen:

I. Versteht man unter r den gegenseitigen Abstand zweier Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1), so wird der partiellen Differentialgleichung

$$(31.) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = F$$

Genüge geleistet, falls man für F einen der vier Ausdrücke nimmt:

$$(32.) \quad u = \frac{e^r}{r}, \qquad U = \frac{e^r - e^{-r}}{2r},$$
$$v = \frac{e^{-r}}{r}, \qquad V = \frac{e^r + e^{-r}}{2r}.$$

II. Man bezeichne die Abstände der Punkte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) vom Anfangspunkt des Coordinatensystems mit ϱ und ϱ_1, und den

Winkel, unter welchem diese beiden Linien ϱ, ϱ_1 gegen einander geneigt sind, mit γ, sodass also r den Werth hat:

(33.) $$r = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^{\,2} - 2\varrho\varrho_1 \cos\gamma}.$$

Denkt man sich diesen Werth von r in den Ausdrücken U, V substituirt, so verwandeln sich dieselben in Functionen von ϱ, ϱ_1, γ. Und diese Functionen sind folgendermassen entwickelbar [*vgl.* (23.), (24.) *und* (26.), (30.)]:

(34.) $$\begin{aligned} U &= \frac{e^r - e^{-r}}{2r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathfrak{S}_n(\varrho)\mathfrak{S}_n(\varrho_1) P_n(\cos\gamma), \quad (\varrho \text{ und } \varrho_1 \text{ beliebig}), \\ V &= \frac{e^r + e^{-r}}{2r} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n(\varrho)\mathfrak{T}_n(\varrho_1) P_n(\cos\gamma), \quad (\varrho < \varrho_1), \end{aligned}$$

wo die Constante a_n den Werth hat:

(35.) $$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{2^n\Pi(n)}{\Pi(2n)}\right)^2,$$

während $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{T}_n$ die in (13.), (14.) *angegebenen Functionen vorstellen.*

III. Hinzuzufügen sind noch die aus (34.) *durch Addition und Subtraction entstehenden Formeln:*

(36.) $$\begin{aligned} u &= \frac{e^r}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n(\varrho)\mathfrak{C}_n(\varrho_1) P_n(\cos\gamma), \quad (\varrho < \varrho_1), \\ v &= \frac{e^{-r}}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n(\varrho)\mathfrak{D}_n(\varrho_1) P_n(\cos\gamma), \quad (\varrho < \varrho_1), \end{aligned}$$

wo alsdann $\mathfrak{C}_n(\varrho_1)$ und $\mathfrak{D}_n(\varrho_1)$ aus den Functionen $\mathfrak{S}_n(\varrho_1)$, $\mathfrak{T}_n(\varrho_1)$ und aus der soeben genannten Constanten a_n (35.) *folgendermassen zusammengesetzt sind:*

(37.) $$\begin{aligned} \mathfrak{C}_n(\varrho_1) &= \mathfrak{T}_n(\varrho_1) + a_n \mathfrak{S}_n(\varrho_1), \\ \mathfrak{D}_n(\varrho_1) &= \mathfrak{T}_n(\varrho_1) - a_n \mathfrak{S}_n(\varrho_1). \end{aligned}$$

IV. Dabei ist mit Bezug auf die vier Entwicklungen (34.), (36.) *besonders zu betonen, dass die erste derselben ganz allgemein brauchbar ist für beliebige Werthe von ϱ und ϱ_1, dass hingegen die drei übrigen nur gelten für $\varrho < \varrho_1$.*

V. Setzt man endlich:

(38.) $$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\vartheta, \\ y &= \varrho\sin\vartheta\cos\psi, \\ z &= \varrho\sin\vartheta\sin\psi, \quad \text{und} \quad \cos\vartheta = \mu, \end{aligned}$$

so wird der partiellen Differentialgleichung (31.), *wie sogleich bewiesen werden soll, Genüge geleistet werden, sobald man in ihr für F einen der vier Ausdrücke nimmt:*

(39.)
$$\begin{array}{ll} \mathfrak{S}_n(\varrho)\,Y_n(\mu,\psi), & \mathfrak{T}_n(\varrho)\,Y_n(\mu,\psi), \\ \mathfrak{C}_n(\varrho)\,Y_n(\mu,\psi), & \mathfrak{D}_n(\varrho)\,Y_n(\mu,\psi), \end{array}$$

vorausgesetzt, dass man unter $Y_n(\mu,\psi)$ irgend eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung versteht.

Der Beweis dieser in (38.), (39.) gemachten Behauptung ergiebt sich folgendermassen. Man setze:

(α.)
$$\begin{array}{ll} x = \varrho\cos\vartheta, & x_1 = \varrho_1\cos\vartheta_1, \\ y = \varrho\sin\vartheta\cos\psi, & y_1 = \varrho_1\sin\vartheta_1\cos\psi_1, \\ z = \varrho\sin\vartheta\sin\psi, & z_1 = \varrho_1\sin\vartheta_1\sin\psi_1, \end{array}$$

und zugleich:

(β.)
$$\cos\vartheta = \mu, \qquad \cos\vartheta_1 = \mu_1.$$

Ueberdies bezeichne man den gegenseitigen Neigungswinkel der beiden Strahlen ϱ und ϱ_1 mit γ. Alsdann ist bekanntlich:

(γ.)
$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\psi-\psi_1),$$

und*):

(δ.)
$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)} P_{nj}(\mu)P_{nj}(\mu_1)\cos j(\psi-\psi_1),$$

wo $\varepsilon_0 = 1$, und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = 2$ ist. Substituirt man diesen Werth von $P_n(\cos\gamma)$ in (34.), so erhält man eine Formel von folgender Gestalt:

(ε.)
$$U = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\Big(K_{nj}\mathfrak{S}_n(\varrho)P_{nj}(\mu)\cos j\psi + L_{nj}\mathfrak{S}_n(\varrho)P_{nj}(\mu)\sin j\psi\Big),$$

wo K_{nj} und L_{nj} Functionen von ϱ_1, μ_1, ψ_1 sind, hingegen unabhängig sind von ϱ, μ, ψ.

Nun ist aber U ein Integral der partiellen Differentialgleichung (31.). Gleiches gilt daher, zufolge der Formel (ε.), auch von

$$\mathfrak{S}_n(\varrho)P_{nj}(\mu)\cos j\psi \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}_n(\varrho)P_{nj}(\mu)\sin j\psi.$$

Folglich**) gilt Gleiches auch von dem Ausdruck:

(ζ.)
$$\mathfrak{S}_n(\varrho)\,Y_n(\mu,\psi),$$

*) Vgl. das *F. Neumann*'sche Werk Seite 69, Formel (2.), (4.), (5.).

**) Denn jedwede Kugelfunction n^{ter} Ordnung $Y_n(\mu,\psi)$ besitzt die Gestalt:

$$Y_n(\mu,\psi) = \sum_{j=0}^{n}\Big[A^{(j)}P_{nj}(\mu)\cos j\psi + B^{(j)}P_{nj}(\mu)\sin j\psi\Big].$$

Vgl. das genannte Werk, namentlich daselbst den Satz auf Seite 76.

vorausgesetzt, dass man unter $Y_n(\mu, \psi)$ irgend eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung versteht.

In analoger Art wird sich, wie man leicht übersieht, Gleiches auch erweisen lassen von den drei übrigen in (39.) angegebenen Ausdrücken, falls man nur beachtet, dass die Functionen u, v, U, V (32.) nicht nur der Gleichung (31.), sondern ebenso auch folgender Differentialgleichung Genüge leisten:

$$(\eta.)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^{\,2}} = F. \quad - \quad Q.\ e.\ d.$$

§ 2.

Ueber die Differentialgleichung $\Delta F = \alpha^2 F$, wo α eine positive Constante sein soll.

Um die soeben erhaltenen Resultate für unsere spätern Bedürfnisse besser einzurichten, wollen wir schliesslich x, y, z, ϱ durch αx, αy, αz, $\alpha\varrho$, ferner x_1, y_1, z_1, ϱ_1 durch αx_1, αy_1, αz_1, $\alpha\varrho_1$, mithin z. B. auch r durch αr ersetzen, wo α eine positive Constante sein soll. Alsdann gelangen wir auf Grund der auf Seite 96 in *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* ausgesprochenen Resultate zu folgenden beiden Theoremen:

Erstes Theorem. — *Es bezeichne r den gegenseitigen Abstand der beiden Punkte:*

$$(40.)\qquad \begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta, \\ y = \varrho \sin\vartheta \cos\psi, \\ z = \varrho \sin\vartheta \sin\psi, \end{cases} \qquad \textit{und} \qquad \begin{cases} x_1 = \varrho_1 \cos\vartheta_1, \\ y_1 = \varrho_1 \sin\vartheta_1 \cos\psi_1, \\ z_1 = \varrho_1 \sin\vartheta_1 \sin\psi_1, \end{cases}$$

ferner werde gesetzt:

$$(41.)\qquad \mu = \cos\vartheta \qquad \textit{und} \qquad \mu_1 = \cos\vartheta_1 .$$

Ueberdies bezeichne γ den gegenseitigen Neigungswinkel der beiden Strahlen ϱ und ϱ_1; sodass also jener Abstand r den Werth hat:

$$(42.)\qquad r = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^{\,2} - 2\varrho\varrho_1 \cos\gamma}.$$

Endlich sei α eine beliebig gegebene positive Constante.

Alsdann wird der partiellen Differentialgleichung:

$$(43.)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \alpha^2 F$$

genügt werden, wenn man in ihr für F einen der beiden Ausdrücke nimmt:

$$(44.)\qquad \frac{e^{\alpha r}}{\alpha r}, \qquad \frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r}.$$

Auch werden diese Ausdrücke (44.) *folgendermassen entwickelbar sein:*

(45.) $$\frac{e^{\alpha r}}{\alpha r} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n(\alpha\varrho)\mathfrak{C}_n(\alpha\varrho_1)P_n(\cos\gamma), \quad (\varrho < \varrho_1),$$

(46.) $$\frac{e^{-\alpha r}}{\alpha r} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n(\alpha\varrho)\mathfrak{D}_n(\alpha\varrho_1)P_n(\cos\gamma), \quad (\varrho < \varrho_1).$$

Die hier auftretenden Functionen $\mathfrak{C}_n(X)$ *und* $\mathfrak{D}_n(X)$ *sind ganz allgemein, für jedes beliebige Argument* X, *definirt zu denken durch die Ausdrücke:*

(47.) $$\begin{aligned} \mathfrak{C}_n(X) &= \mathfrak{T}_n(X) + a_n\mathfrak{S}_n(X), \\ \mathfrak{D}_n(X) &= \mathfrak{T}_n(X) - a_n\mathfrak{S}_n(X); \end{aligned}$$

und dabei sind unter $\mathfrak{S}_n(X)$ *und* $\mathfrak{T}_n(X)$ *folgende Functionen zu verstehen* [*vgl.* (13.), (14.) *Seite* 93]:

(48.) $$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n(X) &= X^n\left(1 + \frac{X^2}{2(2n+3)} + \frac{X^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + + \cdots\right), \\ \mathfrak{T}_n(X) &= \frac{1}{X^{n+1}}\left(1 - \frac{X^2}{2(2n-1)} + \frac{X^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} - + \cdots\right); \end{aligned}$$

überdiess ist in (47.) *unter* a_n *folgende Constante zu verstehen* [*vgl.* (35.)]:

(49.) $$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{2^n\Pi(n)}{\Pi(2n)}\right)^2.$$

Zweites Theorem. — *Der partiellen Differentialgleichung* (43.) *wird Genüge geleistet, wenn man in ihr für* F *einen der vier Ausdrücke nimmt:*

(50.) $$\begin{aligned} &\mathfrak{S}_n(\alpha\varrho)\,Y_n(\mu,\psi), \qquad &&\mathfrak{T}_n(\alpha\varrho)\,Y_n(\mu,\psi), \\ &\mathfrak{C}_n(\alpha\varrho)\,Y_n(\mu,\psi), &&\mathfrak{D}_n(\alpha\varrho)\,Y_n(\mu,\psi), \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass man unter $Y_n(\mu,\psi)$ *irgend welche Kugelfunction* n^{ter} *Ordnung versteht.*

§ 3.

Darstellung der Functionen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ in geschlossener Gestalt.

Die Functionen $\mathfrak{S}_n(x)$ und $\mathfrak{T}_n(x)$ sind definirt durch die soeben in (48.) angegebenen Formeln:

(1.) $$\mathfrak{S}_n(x) = x^n\left(1 + \frac{x^2}{2(2n+3)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + + \cdots\right),$$

(2.) $$\mathfrak{T}_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\left(1 - \frac{x^2}{2(2n-1)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} - + \cdots\right).$$

Hieraus folgt z. B. für $n = 0$:

$$\mathfrak{S}_0(x) = 1 + \frac{x^2}{\Pi 3} + \frac{x^4}{\Pi 5} + \frac{x^6}{\Pi 7} + \cdots,$$

$$\mathfrak{T}_0(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{\Pi 2} + \frac{x^4}{\Pi 4} + \frac{x^6}{\Pi 6} + \cdots\right),$$

d. i.

(3.) $$\mathfrak{S}_0(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x},$$

(4.) $$\mathfrak{T}_0(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2x}.$$

Wie man sofort erkennt, geht der Ausdruck (1.), falls man in ihm die Zahl n durch $-(n+1)$ ersetzt, über in den Ausdruck (2.) Somit ist also:

(5.) $$\mathfrak{T}_n(x) = \mathfrak{S}_{-(n+1)}(x),$$

also z. B.:

(6.) $$\mathfrak{T}_0(x) = \mathfrak{S}_{-1}(x), \quad \mathfrak{T}_1(x) = \mathfrak{S}_{-2}(x), \quad \mathfrak{T}_2(x) = \mathfrak{S}_{-3}(x), \quad \text{etc. etc.}$$

Recurrente Relationen. — Auf Grund der Formel (1.) ergeben sich, was hier weiter auszuführen überflüssig sein würde, für die Functionen $\mathfrak{S}$ folgende beiden recurrenten Relationen:

(7.) $$\mathfrak{S}_{n+1}(x) = (2n+3)\left(\mathfrak{S}_n'(x) - \frac{n}{x}\mathfrak{S}_n(x)\right),$$

(8.) $$\mathfrak{S}_{n-1}(x) = \frac{1}{2n+1}\left(\mathfrak{S}_n'(x) + \frac{n+1}{x}\mathfrak{S}_n(x)\right),$$

wo die Accente die Ableitungen andeuten. Die letzte Relation ist mit Rücksicht auf (5.) auch so darstellbar:

(8a.) $$\mathfrak{T}_{-n}(x) = \frac{1}{2n+1}\left(\mathfrak{T}_{-(n+1)}'(x) + \frac{n+1}{x}\mathfrak{T}_{-(n+1)}(x)\right),$$

oder, falls man $-n = m$ setzt, auch so:

(8b.) $$\mathfrak{T}_m(x) = -\frac{1}{2m-1}\left(\mathfrak{T}_{m-1}'(x) - \frac{m-1}{x}\mathfrak{T}_{m-1}(x)\right).$$

Noch sei, um auf einen ganz *speciellen Fall* näher einzugehen, die Bemerkung hinzugefügt, dass die Formel (8.) für $n = 0$ die Gestalt annimmt:

(8c.) $$\mathfrak{S}_{-1}(x) = \mathfrak{S}_0'(x) + \frac{1}{x}\mathfrak{S}_0(x).$$

Nach (6.) ist aber $\mathfrak{S}_{-1}(x) = \mathfrak{T}_0(x)$. Somit folgt:

(8d.) $$\mathfrak{T}_0(x) = \mathfrak{S}_0'(x) + \frac{1}{x}\mathfrak{S}_0(x).$$

Die Werthe der $\mathfrak{S}$ in geschlossener Gestalt. — Setzt man in (7.) die Zahl n successive $= 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{S}_1(x) = 3\mathfrak{S}_0'(x),\\
&\mathfrak{S}_2(x) = 5\left(\mathfrak{S}_1'(x) - \tfrac{1}{x}\,\mathfrak{S}_1(x)\right),\\
(9.)\quad &\mathfrak{S}_3(x) = 7\left(\mathfrak{S}_2'(x) - \tfrac{2}{x}\,\mathfrak{S}_2(x)\right),\\
&\mathfrak{S}_4(x) = 9\left(\mathfrak{S}_3'(x) - \tfrac{3}{x}\,\mathfrak{S}_3(x)\right),\\
&\qquad\text{etc.}\qquad\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Setzt man nun ferner zur Abkürzung:

$$(10.)\quad f = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \text{mithin z. B.: } f' = f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

so ist nach (3.): $\mathfrak{S}_0(x) = \frac{f'}{x}\cdot$ Und hieraus ergeben sich, durch Anwendung der Relationen (9.), für $\mathfrak{S}_1(x)$, $\mathfrak{S}_2(x)$, ... folgende *endliche* Ausdrücke:

$$
(11.)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{S}_0(x) = \frac{f'}{x},\quad \text{d. i.}\quad \mathfrak{S}_0(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2x},\\
&\mathfrak{S}_1(x) = 3\left(\frac{f}{x} - \frac{f'}{x^2}\right)\\
&\mathfrak{S}_2(x) = 3\cdot 5\left(\frac{f'}{x} - \frac{3f}{x^2} + \frac{3f'}{x^3}\right),\\
&\mathfrak{S}_3(x) = 3\cdot 5\cdot 7\left(\frac{f}{x} - \frac{6f'}{x^2} + \frac{15f}{x^3} - \frac{15f'}{x^4}\right),\\
&\mathfrak{S}_4(x) = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\left(\frac{f'}{x} - \frac{10f}{x^2} + \frac{45f'}{x^3} - \frac{105f}{x^4} + \frac{105f'}{x^5}\right),\\
&\qquad\quad\text{etc.}\qquad\quad\text{etc.}\qquad\quad\text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

Das Gesetz der hier auftretenden Zahlencoefficienten ist leicht zu übersehen. Es sind nämlich diese Zahlencoefficienten folgendermassen ausdrückbar:

$$
(11\text{a.})\quad \left\{
\begin{aligned}
&1,\\
&1,\ 1 = \frac{1\cdot 2}{2},\\
&1,\ 3 = \frac{2\cdot 3}{2},\ 3 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4},\\
&1,\ 6 = \frac{3\cdot 4}{2},\ 15 = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 4},\ 15 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6},\\
&1,\ 10 = \frac{4\cdot 5}{2},\ 45 = \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4},\ 105 = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6},\ 105 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8},\\
&\qquad\qquad\text{etc.}\qquad\quad\text{etc.}\qquad\quad\text{etc.}
\end{aligned}
\right.
$$

Die Werthe der $\mathfrak{T}$ in geschlossener Gestalt. — Setzt man in (8b.) die Zahl m successive $= 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, so erhält man:

$$(12.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{T}_1(x) &= -\frac{1}{1}\,\mathfrak{T}_0'(x), \\ \mathfrak{T}_2(x) &= -\frac{1}{3}\left(\mathfrak{T}_1'(x) - \frac{1}{x}\,\mathfrak{T}_1(x)\right), \\ \mathfrak{T}_3(x) &= -\frac{1}{5}\left(\mathfrak{T}_2'(x) - \frac{2}{x}\,\mathfrak{T}_2(x)\right), \\ \mathfrak{T}_4(x) &= -\frac{1}{7}\left(\mathfrak{T}_3'(x) - \frac{3}{x}\,\mathfrak{T}_3(x)\right), \\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Nun ist unter Anwendung der in (10.) eingeführten Function f, die Formel (4.) folgendermassen darstellbar: $\mathfrak{T}_0(x) = \frac{f}{x}$. Auf Grund dieses Werthes von $\mathfrak{T}_0(x)$ führen sodann aber die Formeln (12.) zu folgenden *endlichen* Darstellungen:

$$(13.)\quad \begin{cases} \mathfrak{T}_0(x) = \dfrac{f}{x}, \\ \mathfrak{T}_1(x) = \dfrac{1}{1}\left(-\dfrac{f'}{x} + \dfrac{f}{x^2}\right), \\ \mathfrak{T}_2(x) = \dfrac{1}{1\cdot 3}\left(\dfrac{f}{x} - \dfrac{3f'}{x^2} + \dfrac{3f}{x^3}\right), \\ \mathfrak{T}_3(x) = \dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5}\left(-\dfrac{f'}{x} + \dfrac{6f}{x^2} - \dfrac{15f'}{x^3} + \dfrac{15f}{x^4}\right), \\ \mathfrak{T}_4(x) = \dfrac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\left(\dfrac{f}{x} - \dfrac{10f'}{x^2} + \dfrac{45f}{x^3} - \dfrac{105f'}{x^4} + \dfrac{105f}{x^5}\right), \\ \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{cases}$$

Hier sind die Zahlencoefficienten *dieselben* wie in (11.), sodass also wiederum das in (11a.) angegebene Gesetz gilt.

§ 4.

Darstellung der Functionen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ in geschlossener Gestalt.

Die Functionen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sind von uns eingeführt worden mittelst der Formeln:

$$(14.)\quad \mathfrak{C}_n(x) = \mathfrak{T}_n(x) + a_n\mathfrak{S}_n(x),$$
$$(15.)\quad \mathfrak{D}_n(x) = \mathfrak{T}_n(x) - a_n\mathfrak{S}_n(x), \qquad \text{[vgl. (47.) Seite 100]},$$

wo die Constante a_n den Werth hat:

$$(16.)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{2^n\Pi(n)}{\Pi(2n)}\right)^2 \qquad \text{[vgl. (49.) Seite 100]}.$$

Demgemäss sind also unter a_0, a_1, a_2, a_3, ... folgende Zahlen zu verstehen:

$$
(17.)\quad \begin{cases}
a_0 = +1, \\
a_1 = -\frac{1}{1}\,\frac{1}{1\cdot 3}, \\
a_2 = +\frac{1}{1\cdot 3}\,\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}, \\
a_3 = -\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}\,\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}, \\
a_4 = +\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\,\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}, \\
\quad\text{etc.}\quad\text{etc.}\quad\text{etc.}
\end{cases}
$$

Substituirt man nun in (14.) für $\mathfrak{S}_n(x)$, $\mathfrak{T}_n(x)$ und a_n die Werthe (11.), (13.) und (17.), und beachtet man dabei, dass die Function f (10.) durch den Ausdruck

$$
(18.)\qquad f = \frac{e^x + e^{-x}}{2}
$$

dargestellt ist, so findet man ohne besondere Mühe:

$$
(19.)\quad \begin{cases}
\mathfrak{C}_0(x) = \frac{1}{x}\,e^x, \\
\mathfrak{C}_1(x) = \frac{1}{1}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^x, \\
\mathfrak{C}_2(x) = \frac{1}{1\cdot 3}\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)e^x, \\
\mathfrak{C}_3(x) = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}\left(-\frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{15}{x^3} + \frac{15}{x^4}\right)e^x, \\
\mathfrak{C}_4(x) = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{1}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{45}{x^3} - \frac{105}{x^4} + \frac{105}{x^5}\right)e^x, \\
\quad\text{etc.}\qquad\text{etc.}\qquad\text{etc.},
\end{cases}
$$

wo die Zahlencoefficienten dieselben sind, wie in (11.) oder (11a.).

In analoger Art gelangt man endlich, auf Grund der Formel (15.), zu folgenden Ausdrücken:

$$
(20.)\quad \begin{cases}
\mathfrak{D}_0(x) = \frac{1}{x}\,e^{-x}, \\
\mathfrak{D}_1(x) = \frac{1}{1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-x}, \\
\mathfrak{D}_2(x) = \frac{1}{1\cdot 3}\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)e^{-x}, \\
\mathfrak{D}_3(x) = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}\left(\frac{1}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{15}{x^3} + \frac{15}{x^4}\right)e^{-x}, \\
\mathfrak{D}_4(x) = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{1}{x} + \frac{10}{x^2} + \frac{45}{x^3} + \frac{105}{x^4} + \frac{105}{x^5}\right)e^{-x}, \\
\quad\text{etc.}\qquad\text{etc.}\qquad\text{etc.},
\end{cases}
$$

wo die Zahlencoefficienten wiederum dieselben sind, wie in (11.) oder (11a.); sodass also z. B. die Zahlencoefficienten der letzten Zeile folgendermassen darstellbar sind:

$$(20a.)\quad 10 = \frac{4\cdot 5}{2},\ 45 = \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4},\ 105 = \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6},\ 105 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}.$$

Demgemäss kann man, auf Grund der Formeln (20.), sofort ganz allgemein den Werth von $\mathfrak{D}_n(x)$ hinschreiben. Derselbe wird lauten:

$$(21.)\quad \mathfrak{D}_n(x) = \frac{2^n \Pi(n)}{\Pi(2n)}\Big(\frac{1}{x} + \frac{n(n+1)}{2\cdot x^2} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\cdot 4\cdot x^3} +$$
$$+ \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot x^4} +$$
$$+ \cdots\cdots + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots(2n)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)\cdot x^{n+1}}\Big) e^{-x}.$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass zwischen den Functionen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ der einfache Zusammenhang besteht:

$$(22.)\quad \mathfrak{D}_n(x) = (-1)^{n+1}\mathfrak{C}_n(-x);$$

wie sich solches durch Vergleichung der Formeln (19.) und (20.) sofort ergiebt.

§ 5.

Darstellung der Functionen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ mittelst bestimmter Integrale.

Setzt man

$$(1.)\quad r = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 c},$$

und versteht man unter α irgend eine *positive* Constante, so gilt für $\varrho < \varrho_1$ die Entwicklung:

$$(2.)\quad \frac{e^{-\alpha r}}{r} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n(\alpha\varrho)\mathfrak{D}_n(\alpha\varrho_1)P_n(c), \qquad (\varrho < \varrho_1);$$

wie sich solches sofort ergiebt aus dem ersten Theorem Seite 99, falls man das dortige $\cos\gamma$ mit c bezeichnet.

Wir wollen nun den Abstand ϱ_1 *ganz ausserordentlich gross* uns denken, so gross, dass ϱ dagegen so gut wie verschwindet. Alsdann kann man in (1.) das ϱ^2 nach Belieben entweder ganz fortlassen, oder auch durch $\varrho^2 c^2$ ersetzen. Im letztern Fall geht die Formel (1.) über in: $r = \varrho_1 - \varrho c$; sodass also die Entwicklung (2.) die Gestalt erhält:

$$\frac{e^{-\alpha(\varrho_1 - \varrho c)}}{\varrho_1 - \varrho c} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n(\alpha\varrho)\mathfrak{D}_n(\alpha\varrho_1)P_n(c).$$

Aus dieser letzten Formel ergiebt sich, falls man für den Ausdruck $\mathfrak{D}_n(\alpha\varrho_1)$ seinen aus (21.) Seite 105 entspringenden Werth substituirt:

$$\frac{e^{-\alpha(\varrho_1-\varrho c)}}{\varrho_1-\varrho c}=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mathfrak{S}_n(\alpha\varrho)\frac{2^n\Pi(n)}{\Pi(2n)}\left(\frac{1}{\alpha\varrho_1}+\frac{N}{(\alpha\varrho_1)^2}+\frac{N'}{(\alpha\varrho_1)^3}+\cdot\cdot\right)e^{-\alpha\varrho_1}P_n(c)\right\},$$

oder, falls man mit $\varrho_1 e^{\alpha\varrho_1}$ multiplicirt:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_1-\varrho c}e^{\alpha\varrho c}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\mathfrak{S}_n(\alpha\varrho)\frac{2^n\Pi(n)}{\Pi(2n)}\left(1+\frac{N}{\alpha\varrho_1}+\frac{N'}{(\alpha\varrho_1)^2}+\cdots\right)P_n(c)\right\};$$

Dabei sind $N, N', \ldots$ gewisse von n abhängende Zahlen, auf deren Werthe es hier nicht weiter ankommt.

Lässt man nun schliesslich dass ausserordentlich grosse ϱ_1 *ins Unendliche* anwachsen, so reducirt sich die letzte Formel auf:

(3.) $$e^{\alpha\varrho c}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2^n\Pi(n)}{\Pi(2n)}\mathfrak{S}_n(\alpha\varrho)P_n(c)\right\}\cdot$$

Unter ϱ haben wir stets eine Entfernung, d. i. eine *positive* Grösse verstanden. Ferner sollte α ebenfalls *positiv* sein, zufolge unserer ausdrücklichen zu Anfang dieses Paragraphs getroffenen Festsetzung; so dass also das Product $\alpha\varrho$, welches wir fortan mit x bezeichnen wollen, ebenfalls stets *positiv* ist. Endlich sei daran erinnert, dass c für $\cos\gamma$ gesetzt wurde, mithin zwischen -1 und $+1$ liegt. Wir gelangen somit, $\alpha\varrho=x$ gesetzt, zu folgender Formel:

(4.) $$e^{xc}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2^n\Pi(n)}{\Pi(2n)}\mathfrak{S}_n(x)P_n(c)\right\},$$

und zugleich zu der Einsicht, dass diese Formel stets gültig sein wird, falls nur x positiv, und c zwischen -1 und $+1$ gelegen ist.

Multiplicirt man nun diese Formel (4.) mit $P_m(c)dc$, und integrirt über $c=-1\cdots+1$, so erhält man sofort:

$$\int_{-1}^{+1}e^{xc}P_m(c)dc=\frac{2^m\Pi(m)}{\Pi(2m)}\mathfrak{S}_m(x)\frac{2}{2m+1};$$

oder, was dasselbe ist:

(5.) $$\mathfrak{S}_m(x)=\frac{\Pi(2m+1)}{2^{m+1}\Pi(m)}\int_{-1}^{+1}e^{xc}P_m(c)dc,$$

eine Formel, die ebenso wie die Formel (4.), *immer gelten wird, falls nur x positiv ist.* Aus derselben ergiebt sich z. B.:

$$
(6.)\quad
\begin{aligned}
2\mathfrak{S}_0(x) &= 1\cdot\int_{-1}^{+1} e^{xc}P_0(c)\,dc = \int_{-1}^{+1} e^{xc}\,dc,\\
2\mathfrak{S}_1(x) &= 1\cdot 3\int_{-1}^{+1} e^{xc}P_1(c)\,dc = 3\int_{-1}^{+1} e^{xc}c\,dc,\\
2\mathfrak{S}_2(x) &= 1\cdot 3\cdot 5\int_{-1}^{+1} e^{xc}P_2(c)\,dc = 15\int_{-1}^{+1} e^{xc}\,\frac{3c^2-1}{2}\,dc,\\
2\mathfrak{S}_3(x) &= 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\int_{-1}^{+1} e^{xc}P_3(c)\,dc = 105\int_{-1}^{+1} e^{xc}\,\frac{5c^3-3c}{2}\,dc,\\
&\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Dies sind die Integraldarstellungen der Functionen $\mathfrak{S}$.

Was nun ferner die Functionen $\mathfrak{T}$ betrifft, so wollen wir, um für dieselben zu einigermassen analogen Integraldarstellungen zu gelangen, die Formel (8d.) Seite 101 benutzen:

$$
(7.)\qquad \mathfrak{T}_0(x) = \mathfrak{S}_0'(x) + \frac{1}{x}\,\mathfrak{S}_0(x).
$$

Substituiren wir hier für $\mathfrak{S}_0(x)$ den soeben in (6.) gefundenen Werth, so erhalten wir:

$$
2\mathfrak{T}_0(x) = \int_{-1}^{+1} e^{xc}c\,dc + \frac{1}{x}\int_{-1}^{+1} e^{xc}\,dc,
$$

oder, was dasselbe ist:

$$
(8.)\qquad 2\mathfrak{T}_0(x) = \int_{-1}^{+1} e^{xc}\left(c+\frac{1}{x}\right)dc.
$$

Auf Grund dieser Formel ergeben sich nun aber, unter Anwendung der recurrenten Relationen (12.), Seite 103 folgende Darstellungen:

$$
(9.)\quad
\begin{aligned}
2\mathfrak{T}_0(x) &= +\int_{-1}^{+1} e^{xc}\left(c+\frac{1}{x}\right)dc,\\
2\mathfrak{T}_1(x) &= -\frac{1}{1}\int_{-1}^{+1} e^{xc}\left(c^2+\frac{c}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dc,\\
2\mathfrak{T}_2(x) &= +\frac{1}{1\cdot 3}\int_{-1}^{+1} e^{xc}\left(c^3+0-\frac{3c}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)dc,\\
2\mathfrak{T}_3(x) &= -\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}\int_{-1}^{+1} e^{xc}\left(c^4-\frac{2c^3}{x}-\frac{3c^2}{x^2}+\frac{15c}{x^3}-\frac{15}{x^4}\right)dc,\\
2\mathfrak{T}_4(x) &= +\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\int_{-1}^{+1} e^{xc}\left(c^5-\frac{5c^4}{x}+\frac{5c^3}{x^2}+\frac{30c^2}{x^3}-\frac{105c}{x^4}+\frac{105}{x^5}\right)dc,\\
&\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Ich habe diese Formeln (9.), von denen weiterhin *kein* Gebrauch gemacht werden wird, hier nur ganz beiläufig angegeben. Sie sind schon deswegen *unbefriedigend*, weil das Gesetz der in ihnen auftretenden Zahlencoefficienten nicht gut ersichtlich ist.

§ 6.

Weitere Eigenschaften der Functionen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.

Bevor wir dieses Capitel abschliessen, ist es nothwendig, noch auf einige Formeln aufmerksam zu machen, die weiterhin von besonderem Nutzen sein werden.

Die Functionen:

$$(1.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{S}_n(x) &= x^n \left(1 + \frac{x^2}{2(2n+3)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} + + \cdots\right), \\ \mathfrak{T}_n(x) &= x^{-n-1} \left(1 - \frac{x^2}{2(2n-1)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)} - + \cdots\right) \end{aligned}$$

sind [vgl. (13.), (14.) Seite 93] in unsere Betrachtungen hineingetreten als *particulare Integrale* der Differentialgleichung:

$$(2.)\quad \frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dF}{dx}\right) = [x^2 + n(n+1)]F;$$

und diese Gleichung ist offenbar auch so darstellbar:

$$(2a.)\quad x^2 \frac{d^2F}{dx^2} + 2x\frac{dF}{dx} = [x^2 + n(n+1)]F.$$

Ferner sind die Functionen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ von uns definirt worden durch die Formeln (47.), (49.) Seite 100:

$$(3.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{C}_n(x) &= \mathfrak{T}_n(x) + a_n \mathfrak{S}_n(x), \\ \mathfrak{D}_n(x) &= \mathfrak{T}_n(x) - a_n \mathfrak{S}_n(x), \quad \text{wo} \quad a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{2^n \Pi(n)}{\Pi(2n)}\right)^2. \end{aligned}$$

Folglich sind diese Functionen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ebenfalls *particulare Integrale* der Differentialgleichung (2.) oder (2a.).

Substituirt man in der Gleichung (2a.) zuvörderst die particularen Integrale (1.), so erhält man:

$$\begin{aligned} x^2\mathfrak{S}_n''(x) + 2x\mathfrak{S}_n'(x) &= [x^2 + n(n+1)]\mathfrak{S}_n(x), \\ x^2\mathfrak{T}_n''(x) + 2x\mathfrak{T}_n'(x) &= [x^2 + n(n+1)]\mathfrak{T}_n(x). \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun diese beiden Formeln respective mit $\mathfrak{T}_n(x)$ und $-\mathfrak{S}_n(x)$, und addirt, so ergiebt sich:

$$x^2[\mathfrak{T}_n(x)\mathfrak{S}_n''(x) - \mathfrak{S}_n(x)\mathfrak{T}_n''(x)] + 2x[\mathfrak{T}_n(x)\mathfrak{S}_n'(x) - \mathfrak{S}_n(x)\mathfrak{T}_n'(x)] = 0,$$

und hieraus durch Integration:

$$(4.)\quad x^2[\mathfrak{T}_n(x)\mathfrak{S}_n'(x) - \mathfrak{S}_n(x)\mathfrak{T}_n'(x)] = \mathit{Const.}$$

Die hier auftretende *Const.* ist leicht angebbar, nämlich $+(2n+1)$; wie sich solches sofort ergiebt, falls man die Werthe (1.) in (4.) substituirt. Somit erhält man die erste Formel des folgenden Systems:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{T}_n(x)\mathfrak{S}_n'(x) - \mathfrak{S}_n(x)\mathfrak{T}_n'(x) = \frac{2n+1}{x^2}, \\
(5.)\qquad &\mathfrak{C}_n(x)\mathfrak{S}_n'(x) - \mathfrak{S}_n(x)\mathfrak{C}_n'(x) = \frac{2n+1}{x^2}, \\
&\mathfrak{D}_n(x)\mathfrak{S}_n'(x) - \mathfrak{S}_n(x)\mathfrak{D}_n'(x) = \frac{2n+1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Die beiden andern Formeln ergeben sich aus der ersten sofort, falls man nur einen Blick wirft auf die Gleichungen (3.).

Weitere Formeln. — Die Function $\mathfrak{S}_n(x)$ genügt der Differentialgleichung (2.) Folglich ist:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\mathfrak{S}_n'(x)\right) = [x^2 + n(n+1)]\,\mathfrak{S}_n(x).$$

Vertauscht man hier die Variable x mit αx, wo α eine *beliebige* Constante sein soll, so erhält man:

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha x^2\mathfrak{S}_n'(\alpha x)\right) = [\alpha^2x^2 + n(n+1)]\,\mathfrak{S}_n(\alpha x),$$

oder, falls man für den Augenblick $\mathfrak{S}_n(\alpha x) = U$ setzt:

$$(6.)\qquad \frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dU}{dx}\right) = [\alpha^2x^2 + n(n+1)]\,U,$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$(7.)\qquad x^2\frac{d^2U}{dx^2} + 2x\frac{dU}{dx} = [\alpha^2x^2 + n(n+1]\,U.$$

In analoger Art wird sich offenbar für $\mathfrak{S}_n(\beta x) = V$ die analoge Formel ergeben:

$$(8.)\qquad x^2\frac{d^2V}{dx^2} + 2x\frac{dV}{dx} = [\beta^2x^2 + n(n+1)]\,V,$$

wo β eine zweite Constante vorstellt, die ebenfalls ganz *beliebig* zu wählen ist. Multiplicirt man die Formeln (7.) und (8.) respective mit $-V$ und $+U$, und addirt, so erhält man:

$$(9.)\qquad x^2\left(U\frac{d^2V}{dx^2} - V\frac{d^2U}{dx^2}\right) + 2x\left(U\frac{dV}{dx} - V\frac{dU}{dx}\right) = (\beta^2 - \alpha^2)x^2UV,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(10.)\qquad \frac{d}{dx}\left[x^2\left(U\frac{dV}{dx} - V\frac{dU}{dx}\right)\right] = (\beta^2 - \alpha^2)\,x^2UV.$$

Diese Formeln (6.), (7.), (8.), (9.), (10.) werden offenbar nicht nur für die Function $\mathfrak{S}_n$, sondern für *sämmtliche* Integrale der Differentialgleichung (2.) gelten, also z. B. auch gültig sein für $\mathfrak{T}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$. Demgemäss gelangen wir, auf Grund der beiden Formeln (6.) und (10.), zu folgendem Satz:

Satz. — *Es seien α und β beliebige Constanten. Ferner bezeichne U irgend eine der Functionen*

(11.) $$\mathfrak{S}_n(\alpha x),\quad \mathfrak{T}_n(\alpha x),\quad \mathfrak{C}_n(\alpha x),\quad \mathfrak{D}_n(\alpha x),$$

und V irgend eine der Functionen:

(12.) $$\mathfrak{S}_n(\beta x),\quad \mathfrak{T}_n(\beta x),\quad \mathfrak{C}_n(\beta x),\quad \mathfrak{D}_n(\beta x).$$

Dabei mag dahingestellt bleiben, ob U und V einander entsprechende Functionen der beiden Reihen (11.) *und* (12.) *sind, oder nicht.*

Alsdann werden für U und V stets folgende Formeln gelten:

(13.) $$\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dU}{dx}\right) = [\alpha^2x^2 + n(n+1)]\,U,$$

(14.) $$\frac{d}{dx}\left[x^2\left(U\frac{dV}{dx} - V\frac{dU}{dx}\right)\right] = (\beta^2-\alpha^2)x^2UV,$$

von denen die eine nur U, die andere aber gleichzeitig U und V enthält.

Setzt man z. B. $U = \mathfrak{S}_n(\alpha x)$, so ergiebt sich aus (13.):

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\alpha\mathfrak{S}_n'(\alpha x)\right) = [\alpha^2x^2 + n(n+1)]\,\mathfrak{S}_n(\alpha x),$$

oder, was dasselbe ist:

(15.) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2\mathfrak{S}_n'(\alpha x)}{\alpha}\right) = \left(x^2 + \frac{n(n+1)}{\alpha^2}\right)\mathfrak{S}_n(\alpha x).$$

In ganz analoger Weise wird man offenbar erhalten:

(16.) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2\mathfrak{D}_n'(\alpha x)}{\alpha}\right) = \left(x^2 + \frac{n(n+1)}{\alpha^2}\right)\mathfrak{D}_n(\alpha x).$$

U. s. w. — Dabei sei noch bemerkt, dass die Formeln (15.), (16.) z. B. für $n = 0$ folgende besonders einfache Gestalt annehmen:

(17.) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2\mathfrak{S}_0'(\alpha x)}{\alpha}\right) = x^2\mathfrak{S}_0(\alpha x),$$

(18.) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2\mathfrak{D}_0'(\alpha x)}{\alpha}\right) = x^2\mathfrak{D}_0(\alpha x).$$

Setzen wir nun ferner, um zu einer andern Anwendung unseres Satzes überzugehen, $U = \mathfrak{S}_n(\alpha x)$ und $V = \mathfrak{S}_n(\beta x)$, so erhalten wir aus (14.):

$$\frac{d}{dx}\left(x^2[\mathfrak{S}_n(\alpha x)\beta\mathfrak{S}_n'(\beta x) - \mathfrak{S}_n(\beta x)\alpha\mathfrak{S}_n'(\alpha x)]\right) = (\beta^2-\alpha^2)x^2\mathfrak{S}_n(\alpha x)\mathfrak{S}_n(\beta x),$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2[\mathfrak{S}_n(\alpha x)\beta\mathfrak{S}_n'(\beta x) - \mathfrak{S}_n(\beta x)\alpha\mathfrak{S}_n'(\alpha x)]}{\beta^2 - \alpha^2}\right) = x^2\mathfrak{S}_n(\alpha x)\mathfrak{S}_n(\beta x). \tag{19.}$$

Ebenso wird sich offenbar z. B. auch folgende Formel ergeben:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2[\mathfrak{D}_n(\alpha x)\beta\mathfrak{S}_n'(\beta x) - \mathfrak{S}_n(\beta x)\alpha\mathfrak{D}_n'(\alpha x)]}{\beta^2 - \alpha^2}\right) = x^2\mathfrak{D}_n(\alpha x)\mathfrak{S}_n(\beta x). \tag{20.}$$

U. s. w. — Diese Formeln (15.), (16.), (17.), (18.), (19.), (20.) werden uns im folgenden Capitel gute Dienste leisten zur Ausführung gewisser Integrationen.