

www.e-rara.ch

Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen

Neumann, C.

Leipzig, 1896

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 3832

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-19077>

Neuntes Capitel. Ueber die Integration der Differentialgleichung [...].

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Neuntes Capitel.

Ueber die Integration der Differentialgleichung: $\Delta\Psi = \alpha^2\Psi$, unter Anwendung der Methode des arithmetischen Mittels.

Durch Anwendung meiner Methode des arithmetischen Mittels kann man bekanntlich eine Function $\Psi = \Psi(x, y, z)$ construiren, welche innerhalb einer geschlossenen Fläche o die Gleichung

$$(I.) \quad \Delta\Psi = 0,$$

und zugleich auch gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt, und welche überdies auf jener Fläche o vorgeschriebene Werthe besitzt; — vorausgesetzt, dass die Fläche o (mit etwaiger Ausnahme irgend welcher ebener Theile) überall convex ist.

Im Folgenden werde ich nun zeigen, dass man mittelst der genannten Methode auch eine gewisse *allgemeinere* Aufgabe zu lösen im Stande ist. Diese allgemeinere Aufgabe unterscheidet sich von der soeben genannten nur dadurch, dass an Stelle der Gleichung (I.) folgende Gleichung tritt:

$$(II.) \quad \Delta\Psi = \alpha^2\Psi,$$

wo α eine gegebene Constante sein soll. Ja es ergibt sich sogar, dass diese neue Aufgabe, falls α wirklich > 0 ist, *weniger Schwierigkeiten* darbietet, als jene frühere Aufgabe.

Noch sei bemerkt, dass die in Rede stehende allgemeinere Aufgabe im Folgenden nicht nur für den *Innenraum* der gegebenen Fläche o , sondern ebenso auch für den *Aussenraum* derselben behandelt werden soll. Ausser dem Δ wird übrigens in diesem Capitel auch das Zeichen \square angewendet werden. [Vgl. (f.) Seite 62].

§ 1.

Definition der Fundamentalfunctionen des Raumes \mathfrak{R} .

Der ganze unendliche Raum \mathfrak{T} sei durch eine geschlossene Fläche o in zwei Theile zerlegt, in einen äussern Theil \mathfrak{R} und einen innern Theil \mathfrak{S} :

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A} + \mathfrak{S}.$$

Die Fläche o mag weder Ecken noch Kanten besitzen, vielmehr überall von *stetiger Biegung* sein. Auch mag sie mit all' ihren Punkten *im Endlichen* liegen.

Der Raum \mathfrak{A} erstreckt sich nach aussen hin überall ins Unendliche, und ist also nach aussen hin *unbegrenzt*. Demgemäss besitzt der Raum \mathfrak{A} nur *eine einzige* Begrenzungsfläche oder Oberfläche; und diese ist repräsentirt durch jene gegebene Fläche o . Desgleichen besitzt offenbar auch der Raum \mathfrak{S} nur *eine einzige* Oberfläche, die ebenfalls identisch sein wird mit jener gegebenen Fläche o .

Durch die Fläche o zerfallen alle überhaupt vorhandenen Raumpunkte in drei Kategorien, nämlich erstens in die *auf* o befindlichen Punkte s , zweitens in die *innerhalb* \mathfrak{A} befindlichen Punkte a , und drittens in die *innerhalb* \mathfrak{S} liegenden Punkte j . Wir verstehen also unter den *innerhalb* \mathfrak{A} liegenden Punkten a diejenigen dem Raum \mathfrak{A} zugehörigen Punkte, welche von seiner Oberfläche o durch irgend welche (wenn auch noch so kleine) Entfernungen getrennt sind. Desgleichen verstehen wir unter den *innerhalb* \mathfrak{S} liegenden Punkten j diejenigen dem Raum \mathfrak{S} angehörigen Punkte, welche von seiner Oberfläche o durch irgend welche (wenn auch noch so kleine) Entfernungen getrennt sind.

Hin und wieder wird es nothwendig sein, die beiden Kategorien a und s zusammenzufassen, auf einmal in Betracht zu ziehen. Und dabei erscheint es zweckmässig, diese Punkte a, s kurzweg als die Gesamtheit derjenigen Punkte zu bezeichnen, welche *in Erstreckung* oder *in ganzer Erstreckung* des Raumes \mathfrak{A} sich befinden. Desgleichen mögen die Punkte j, s in ihrer Gesamtheit als diejenigen bezeichnet werden, welche *in Erstreckung* oder *in ganzer Erstreckung* des Raumes \mathfrak{S} sich befinden.

Definition. — Wir wollen nun im gegenwärtigen Capitel unter einer *Fundamentalfunktion* des Raumes \mathfrak{A} jedwede Function $U = U(x, y, z)$ verstehen, die folgenden drei Bedingungen entspricht:

- (1.) **Erstens.** — In ganzer Erstreckung des Raumes \mathfrak{A} soll die Function $U = U(x, y, z)$ *eindeutig und stetig* sein.
- Zweitens.** — Innerhalb \mathfrak{A} sollen die nach x, y, z genommenen Ableitungen der Function U *überall stetig* sein. Und ausserdem soll
- (2.) *innerhalb* \mathfrak{A} *überall* die Differentialgleichung: $\Delta U = \alpha^2 U$ erfüllt sein, wo α eine beliebig gegebene positive und von Null verschiedene Constante bezeichnet.

- Drittens. — Die Function U soll in allen unendlich fernen Punkten des Raumes \mathfrak{A} ein und denselben endlichen Werth besitzen. Oder genauer ausgedrückt: Denkt man sich um irgend einen
- (3.) festen Punkt (als Centrum) eine sehr grosse Kugel beschrieben, so soll die Function ausserhalb dieser Kugel Werthe besitzen, deren gegenseitige Differenzen durch Vergrösserung des Kugelradius unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind.

Wir werden uns im Folgenden die Aufgabe stellen, diejenige Fundamentalfuction des Raumes \mathfrak{A} zu finden, welche auf der Oberfläche dieses Raumes, d. i. auf der gegebenen Fläche o , vorgeschriebene Werthe besitzt. — Zuvörderst aber wollen wir im folgenden Paragraph die Fundamentalfunctionen des Raumes \mathfrak{S} definiren.

§ 2.

Definition der Fundamentalfunctionen des Raumes \mathfrak{S} .

Diese Definition mag genau ebenso lauten, wie die für den Raum \mathfrak{A} , nur mit dem Unterschiede, dass die dritte Bedingung fortfällt.

Definition. — Wir wollen nämlich unter einer Fundamentalfuction des Raumes \mathfrak{S} jedwede Function $U = U(x, y, z)$ verstehen, die folgenden beiden Bedingungen entspricht:

- (1.) **Erstens.** — In ganzer Erstreckung des Raumes \mathfrak{S} soll die Function $U = U(x, y, z)$ eindeutig und stetig sein.
- Zweitens.** — Innerhalb \mathfrak{S} sollen die nach x, y, z gebildeten Ableitungen der Function U überall stetig sein. Und ausserdem soll
- (2.) innerhalb \mathfrak{S} überall die Differentialgleichung: $\Delta U = \alpha^2 U$ erfüllt sein, wo α eine beliebig gegebene positive und von Null verschiedene Constante vorstellt.

Wir werden uns im Folgenden die Aufgabe stellen, diejenige Fundamentalfuction U des Raumes \mathfrak{S} zu finden, welche auf der Oberfläche o dieses Raumes irgend welche vorgeschriebenen Werthe f besitzt. Dabei kommt zuvörderst die Frage in Betracht, ob diese Aufgabe nur eine Lösung zulässt.

Existirten zwei Fundamentalfunctionen des Raumes \mathfrak{S} , etwa U und U' , welche beide jene vorgeschriebenen Oberflächenwerthe f besitzen, so würde offenbar die Differenz

$$(3.) \quad u = U - U'$$

eine Fundamentalfuction des Raumes \mathfrak{S} sein, welche auf der Ober-

fläche o allenthalben $= 0$ ist. Bringt man daher auf diese Function u die bekannte Green'sche Formel*):

$$(4.) \quad \int (\square u + u \Delta u) d\tau = - \int u \frac{du}{dn} do$$

in Anwendung (in welcher die Integrale über alle Volumelemente $d\tau$, resp. über alle Oberflächenelemente do des Raumes \mathfrak{S} ausgedehnt sind, und in welcher n die *innere* Normale des Elementes do bezeichnet), so werden rechter Hand die den Elementen do entsprechenden Werthe u alle $= 0$ sein. Auch wird das links befindliche Δu nach (2.) identisch sein mit $\alpha^2 u$; sodass also die Formel übergeht in:

$$(5.) \quad \int (\square u + \alpha^2 u^2) d\tau = 0.$$

Hieraus folgt sofort, dass u im Integrationsraum \mathfrak{S} überall *constant*, und zwar $= 0$ sein muss. Somit ergibt sich aus (3.), dass im Raume \mathfrak{S} überall $U = U'$ ist.

Existirten also *zwei* Lösungen U und U' der gestellten Aufgabe, so müssten dieselben unter einander identisch sein. D. h.

(6.) *Es kann in Wirklichkeit nur eine Lösung existiren.*

Diese einfachen Ueberlegungen leiden indessen an dem *Uebelstande*, dass die Ableitungen der hier betrachteten Fundamentalfunctionen U , U' und $u = U - U'$ [nach der in (1.), (2.) gegebenen Definition] nur *innerhalb* \mathfrak{S} , nicht aber *in ganzer Erstreckung* von \mathfrak{S} als stetig anzusehen sind, und dass daher die Anwendung der Green'schen Formel (4.) auf diesen Raum \mathfrak{S} nicht ohne Weiteres zulässig erscheint. Wollen wir diesen Uebelstand beseitigen, so sind wir gezwungen einen wesentlich andern Weg einzuschlagen; was im folgenden Paragraph geschehen soll.

§ 3.

Allgemeine Eigenschaften der Fundamentalfunctionen des Raumes \mathfrak{S} .

Es sei $U = U(x, y, z)$ irgend eine Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{S} . Man markire nun *innerhalb* \mathfrak{S} irgend einen Punkt p , und beschreibe um p (als Centrum) eine ebenfalls *innerhalb* \mathfrak{S} liegende Kugel, d. h. eine Kugel, deren sämtliche Punkte *inner-*

*) Vgl. C. Neumann: *Theorie des Logarithmischen und Newton'schen Potentials*, Leipzig, 1877, Seite 18, Nr. 40 β .

halb \mathfrak{S} sich befinden. Alsdann sind U selbst, sowie auch seine Ableitungen, in *ganzer Erstreckung* dieser Kugel stetig; sodass man also auf diese Kugel mit vollem Recht die Green'sche Formel*):

$$(1.) \quad \int \Delta U d\tau = \int \frac{\partial U}{\partial R} dO$$

anzuwenden vermag. Dabei sind die Integrationen über alle Volumenelemente $d\tau$ dieser Kugel, respective über alle Oberflächenelemente dO derselben ausgedehnt zu denken. Ueberdies repräsentirt R den Radius der Kugel, und zugleich auch die Richtung der *äussern* Normale des Elementes dO .

Nach (2.) Seite 254 ist $\Delta U = \alpha^2 U$. Ferner ergibt sich bei Anwendung der Polarcordinaten ϱ, ϑ, ψ , und falls man $\cos \vartheta = \mu$ setzt: $d\tau = \varrho^2 d\varrho d\mu d\psi$. Folglich kann man die Formel (1.) auch so schreiben:

$$\alpha^2 \int_0^R \int \int U \varrho^2 d\varrho d\mu d\psi = \int \frac{\partial U}{\partial R} dO,$$

oder, falls man $\varrho^2 d\mu d\psi = d\omega$ setzt, auch so:

$$(2.) \quad \alpha^2 \int_0^R (d\varrho \int U d\omega) = \int \frac{\partial U}{\partial R} dO.$$

Hier bezeichnet offenbar $d\omega$ das Element einer um den Punkt p mit dem Radius ϱ beschriebenen Kugelfläche ω ; während dO das Element einer concentrischen Kugelfläche O vom Radius R vorstellt. Um nun der Formel (2.) eine etwas einfachere Gestalt zu geben, wollen wir das *arithmetische Mittel* aller auf der Kugelfläche ω liegenden U 's, welches verschieden sein wird je nach dem Radius ϱ dieser Fläche ω , mit $f(\varrho)$ bezeichnen, also setzen:

$$(3.) \quad f(\varrho) = \frac{\int U d\omega}{\int d\omega} = \frac{\int \int U \varrho^2 d\mu d\psi}{4\pi \varrho^2} = \frac{\int \int U d\mu d\psi}{4\pi}.$$

Alsdann ist offenbar:

$$4\pi f(\varrho) = \int \int U d\mu d\psi, \quad \text{mithin:} \quad 4\pi \frac{df(\varrho)}{d\varrho} = \int \int \frac{\partial U}{\partial \varrho} d\mu d\psi,$$

oder, falls man mit ϱ^2 multiplicirt:

$$(4.) \quad 4\pi \varrho^2 f(\varrho) = \int U d\omega, \quad \text{und} \quad 4\pi \varrho^2 \frac{df(\varrho)}{d\varrho} = \int \frac{\partial U}{\partial \varrho} d\omega,$$

*) Vgl. C. Neumann: *Th. des Log. u. Newt. Potentials*, Leipzig 1877, Seite 18, Nro. 40 a.

oder, falls man diese Formeln auf die Kugelfläche O anwendet, mithin ϱ und $d\omega$ respective in R und dO übergehen lässt:

$$(5.) \quad 4\pi R^2 f(R) = \int U dO, \quad \text{und} \quad 4\pi R^2 \frac{df(R)}{dR} = \int \frac{\partial U}{\partial R} dO.$$

Mittelst dieser Formeln (4.), (5.) gewinnt nun die Gleichung (2.) folgende Gestalt:

$$\alpha^2 \int_0^R d\varrho \cdot 4\pi \varrho^2 f(\varrho) = 4\pi R^2 \frac{df(R)}{dR}.$$

Hieraus ergibt sich, falls man nach R differenzirt:

$$(6.) \quad \alpha^2 R^2 f(R) = R^2 \frac{d^2 f(R)}{dR^2} + 2R \frac{df(R)}{dR},$$

d. i.

$$\alpha^2 R f(R) = R \frac{d^2 f(R)}{dR^2} + 2 \frac{df(R)}{dR},$$

d. i.

$$\alpha^2 [Rf(R)] = \frac{d^2 [Rf(R)]}{dR^2}.$$

Nunmehr ergibt sich durch Integration:

$$(7.) \quad Rf(R) = Ge^{\alpha R} + He^{-\alpha R},$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$(8.) \quad f(R) = K \frac{e^{\alpha R} - e^{-\alpha R}}{R} + L \frac{e^{\alpha R} + e^{-\alpha R}}{R},$$

wo G , H und K , L *unbekannte Constanten* sind.

Ebenso wie diese Formel (8.) für die um den Punkt p mit dem Radius R beschriebene Kugelfläche O gilt, ebenso wird offenbar für die um jenen Punkt p mit dem Radius ϱ beschriebene Kugelfläche ω die analoge Formel gelten:

$$(9.) \quad f(\varrho) = K \frac{e^{\alpha \varrho} - e^{-\alpha \varrho}}{\varrho} + L \frac{e^{\alpha \varrho} + e^{-\alpha \varrho}}{\varrho}.$$

Nun sollte aber U eine Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{S} sein. Demgemäss ist U selbst, und ebenso auch das in (3.) mit $f(\varrho)$ bezeichnete arithmetische Mittel, im Innenraum der (innerhalb \mathfrak{S} liegenden) Kugel O überall *stetig*, mithin daselbst auch überall *endlich*. Folglich muss der in (9.) für $f(\varrho)$ erhaltene Werth *endlich* bleiben für $\varrho = 0$. Folglich muss die dortige Constante $L = 0$ sein. Man erhält daher:

$$(10.) \quad f(\varrho) = K \frac{e^{\alpha \varrho} - e^{-\alpha \varrho}}{\varrho}.$$

Hieraus ergibt sich z. B.: $f(0) = 2\alpha K$, d. i.

$$(11.) \quad U_p = 2\alpha K.$$

Dem $f(0)$ ist, zufolge der in (3.) für $f(\varrho)$ gegebenen Definition, nichts Anderes als derjenige Werth U_p , den die Function U im Centrum p der betrachteten Kugel besitzt. Aus (10.) und (11.) folgt durch Elimination von K sofort:

$$(12.) \quad f(\varrho) = U_p \frac{e^{\alpha\varrho} - e^{-\alpha\varrho}}{2\alpha\varrho};$$

so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Erster Satz. — *Es sei U irgend eine Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{S} , [vgl. die Definition Seite 254]. Markirt man alsdann irgendwo innerhalb \mathfrak{S} einen Punkt p , und beschreibt man um p (als Centrum) eine völlig innerhalb \mathfrak{S} liegende Kugel, deren Oberfläche ω heissen mag, so wird das arithmetische Mittel:*

$$(13.) \quad \frac{\int U d\omega}{\int d\omega}$$

aller auf ω liegenden U 's den Werth haben:

$$(14.) \quad \frac{\int U d\omega}{\int d\omega} = U_p \frac{e^{\alpha\varrho} - e^{-\alpha\varrho}}{2\alpha\varrho},$$

wo ϱ den Radius jener Kugelfläche, und U_p den Werth von U im Punkte p vorstellt.

Man kann die Gleichung (14.) offenbar auch so schreiben:

$$\left(1 + \frac{\alpha^2\varrho^2}{\pi 3} + \frac{\alpha^4\varrho^4}{\pi 5} + \dots\right) U_p = \frac{\int U d\omega}{\int d\omega};$$

und hieraus ergibt sich, was die absoluten Werthe der U 's betrifft, folgende Formel:

$$(15.) \quad \left(1 + \frac{\alpha^2\varrho^2}{\pi 3} + \frac{\alpha^4\varrho^4}{\pi 5} + \dots\right) \text{abs } U_p \leq \frac{\int (\text{abs } U) d\omega}{\int d\omega}.$$

Nach unserer Voraussetzung [vgl. (2.) Seite 254] ist α eine von 0 verschiedene Constante. Denkt man sich nun den Radius ϱ ebenfalls von 0 verschieden, so wird die linke Seite der Formel (15.) wirklich verkleinert werden, sobald man die dortige Reihe

$$1 + \frac{\alpha^2\varrho^2}{\pi 3} + \frac{\alpha^4\varrho^4}{\pi 5} + \dots$$

auf ihr erstes Glied, d. i. auf 1 reducirt, — vorausgesetzt, dass $\text{abs } U_p > 0$ ist*). Somit ergiebt sich also aus der Formel (12.):

$$(16.) \quad \text{abs } U_p < \frac{\int (\text{abs } U) d\omega}{\int d\omega}, \text{ vorausgesetzt, dass } \text{abs } U_p > 0 \text{ ist;}$$

die Zeichen $<$ und $>$ im strengen Sinne genommen.

Das $\text{abs } U_p$ wird also, wie die Formel (16.) zeigt, *wirklich kleiner* sein als das arithmetische Mittel aller auf der Fläche ω vorhandenen $\text{abs } U$. Folglich wird jenes $\text{abs } U_p$ an Grösse *wirklich übertroffen* werden von einem gewissen auf der Fläche ω liegenden $\text{abs } U$, d. i. von einem gewissen *innerhalb* \mathfrak{S} liegendem $\text{abs } U$. Doch gilt das immer nur unter der bei (16.) genannten Voraussetzung, dass $\text{abs } U_p > 0$ ist. — Wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

Zweiter Satz. — *Es sei U irgend eine Fundamentalfunctio des Raumes \mathfrak{S} . Markirt man alsdann irgendwo innerhalb \mathfrak{S} einen*
 (17.) *Punkt p , und setzt man voraus, das daselbst vorhandene $\text{abs } U_p$ sei > 0 , so wird dieses $\text{abs } U_p$ seiner Grösse nach stets übertroffen werden von einem gewissen andern ebenfalls innerhalb \mathfrak{S} liegenden $\text{abs } U$.*

Wahrscheinlich wird daher der *grösste Werth*, den das $\text{abs } U$ in ganzer Erstreckung von \mathfrak{S} besitzt, niemals *innerhalb* \mathfrak{S} , sondern immer nur *auf der Oberfläche* von \mathfrak{S} anzutreffen sein. Um auf derartige Vermuthungen näher einzugehen, wollen wir irgend eine beliebige Fundamentalfunctio U des Raumes \mathfrak{S} in Betracht ziehen, dabei aber *voraussetzen, dass dieselbe in Erstreckung von \mathfrak{S} nicht allenthalben $= 0$ sei.* Markiren wir nun irgendwo *innerhalb* \mathfrak{S} einen Punkt p , so sind, was den dort vorhandenen Werth U_p betrifft, zwei Fälle möglich:

I. Fall: Das $\text{abs } U_p$ ist $= 0$. Alsdann muss dieses $\text{abs } U_p$ nothwendiger Weise an Grösse übertroffen werden von einem gewissen andern in Erstreckung von \mathfrak{S} liegenden $\text{abs } U$. Denn andernfalls würde das $\text{abs } U$, mithin auch U selbst, in ganzer Erstreckung von \mathfrak{S} überall $= 0$ sein; was unserer Voraussetzung (f.) widerspricht.

II. Fall: Das $\text{abs } U_p$ ist > 0 . Alsdann wird dieses $\text{abs } U_p$, zufolge des Satzes (17.), an Grösse übertroffen werden von einem gewissen andern innerhalb \mathfrak{S} befindlichen $\text{abs } U$.

*) Wäre nämlich $\text{abs } U_p = 0$, so würde durch die in Rede stehende Reduction eine wirkliche Verkleinerung jener linken Seite *nicht* erfolgen. Vielmehr würde alsdann jene linke Seite, trotz der genannten Reduction, bei ihrem ursprünglichen Werthe, d. i. beim Werthe 0 *verharren*.

In beiden Fällen gelangen wir also zu demselben Resultat, nämlich zu der Einsicht, dass das in jenem *innern* Punkte p vorhandene $\text{abs } U_p$ an Grösse übertroffen wird von einem andern in Erstreckung des Raumes \mathfrak{S} liegenden $\text{abs } U$, dass mithin jenes $\text{abs } U_p$ niemals den *grössten* Werth repräsentiren kann, den das $\text{abs } U$ in Erstreckung von \mathfrak{S} anzunehmen im Stande ist. Und zwar wird (weil p *innerhalb* \mathfrak{S} beliebig gewählt war) solches stets gelten, welche Lage wir dem Punkte p *innerhalb* \mathfrak{S} auch zuertheilen mögen.

Der *grösste* Werth, den das $\text{abs } U$ in *Erstreckung* des Raumes \mathfrak{S} anzunehmen vermag, liegt also niemals *innerhalb* dieses Raumes. (g.) Folglich muss er sich befinden *auf der Oberfläche* desselben. Beachten wir, dass dieses Resultat auf Grund der Voraussetzung (f.) erhalten wurde, so gelangen wir zu folgendem Satz:

Dritter Satz. — *Es sei U irgend eine Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{S} , und es sei vorausgesetzt, dass diese Function nicht etwa in ganzer Erstreckung von \mathfrak{S} allenthalben $= 0$ sei. Alsdann wird*
 (18.) *der grösste Werth, den das $\text{abs } U$ in Erstreckung des Raumes \mathfrak{S} anzunehmen vermag, niemals innerhalb dieses Raumes, sondern immer nur an seiner Oberfläche o anzutreffen sein.*

Diesem Satz kann man, falls es beliebt, offenbar auch folgende Ausdrucksweise geben:

Andere Gestalt des dritten Satzes. — *Bezeichnet U irgend eine beliebige Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{S} , so wird der grösste*
 (19.) *Werth, den das $\text{abs } U$ in Erstreckung von \mathfrak{S} besitzt, unter allen Umständen auf der Oberfläche von \mathfrak{S} anzutreffen sein.*

Ist insbesondere U in Erstreckung von \mathfrak{S} nicht allenthalben $= 0$, so wird jener grösste Werth nur auf der Oberfläche (niemals im Innern von \mathfrak{S}) anzutreffen sein.

Ist also z. B. U auf der Oberfläche des Raumes \mathfrak{S} *constant*, etwa $= C$, so wird das $\text{abs } U$ im *Innern* dieses Raumes überall $\leq \text{abs } C$ sein. Ist mithin jene Constante $C = 0$, so wird das $\text{abs } U$ im *Innern* von \mathfrak{S} überall ≤ 0 , d. i. $= 0$ sein; sodass sich also folgender Satz ergibt:

Vierter Satz. — *Ist eine Fundamentalfunction U des Raumes \mathfrak{S} auf der Oberfläche von \mathfrak{S} überall $= 0$, so wird sie auch im Innern von \mathfrak{S} allenthalben $= 0$ sein.*

Sind mithin *zwei* Fundamentalfunctionen des Raumes \mathfrak{S} *untereinander gleichwerthig* für alle *Oberflächenpunkte* dieses Raumes,

so werden sie auch gleichwerthig sein in allen *innern* Punkten desselben. So ergibt sich folgender

Fünfter Satz. — *Eine Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{S} wird durch Angabe ihrer Oberflächenwerthe völlig bestimmt sein.*

Hiemit haben wir endlich den *strengen* Beweis desjenigen Satzes erlangt, der zu Ende des vorigen Paragraphs, auf Grund einer gewissen Green'schen Formel, nur sehr mangelhaft bewiesen war.

Bemerkung. — *Völlige Strenge* werden die Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphs besitzen, wenn man, was die auf Seite 254 gegebene Definition der Fundamentalfunctionen betrifft, daselbst unter den Ableitungen von U nicht nur die *ersten*, sondern die *ersten und zweiten* Ableitungen versteht. Denn alsdann muss jedes Bedenken gegen die an die Spitze dieses Paragraphs gestellte Formel (1.) Seite 256 verschwinden.

§ 4.

Das Analogon eines Gauss'schen Integrals.

Im Jahre 1813 hat Gauss in seiner *Theoria Attractionis Corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum* ein Theorem aufgestellt (das dortige *Theorema quartum*, Gauss' Ges. Werke Bd. 5, Seite 9), welches, unter Anwendung der im gegenwärtigen Capitel (auf Seite 253) adoptirten Vorstellungen und Bezeichnungen, folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Gauss'sches Theorem. — *Bezeichnet do ein Element der gegebenen Fläche σ , ferner n die innere Normale des Elementes do , und endlich r den Abstand dieses Elementes von einem beliebig gegebenen Raumpunkt p , so wird das über die ganze Fläche σ ausgedehnte Integral:*

$$(1.) \quad \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} do$$

= 0, oder = 2π , oder = 4π sein, je nachdem jener Punkt p innerhalb \mathfrak{A} , auf σ , oder innerhalb \mathfrak{S} liegt.

Uebrigens werden wir dieses Gauss'sche Integral (1.) in Zukunft mit $2\pi \cdot w_p$ bezeichnen, also setzen:

$$(2.) \quad w_p = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} do.$$

Auch wollen wir, wo es nöthig sein sollte, die Schreibweise des Integrals etwas genauer und umständlicher gestalten, nämlich folgendermassen:

$$(3.) \quad w_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d \frac{1}{r}}{dn} \right]_p do.$$

Dabei soll der Index p andeuten, dass unter r der Abstand des Elementes do von demjenigen Punkte p zu verstehen ist, mit Bezug auf welchen man diesen Ausdruck w_p sich gebildet denkt.

Alsdann wird das Theorem (1.) dargestellt sein durch die Formeln:

$$(4.) \quad w_a = 0, \quad w_s = 1, \quad w_j = 2,$$

wo a, s, j die auf Seite 253 festgesetzten Bedeutungen besitzen.

Bemerkung. — In der hier angegebenen Weise lautet das Theorem, falls man festhält an der früher (auf Seite 253) ein für allemal gemachten Voraussetzung, dass die gegebene Fläche o allenthalben von stetiger Biegung ist.

Wollte man diese Voraussetzung fallen lassen, also die Fläche o mit irgend welchen Ecken und Kanten behaftet sich denken, so würde das Gauss'sche Theorem einer gewissen Abänderung bedürfen. Es würde nämlich alsdann das Integral (1.) für einen auf o liegenden Punkt p nicht mehr $= 2\pi$, sondern $= K_p$ sein. Dabei ist unter K_p derjenige Werth zu verstehen, den die Oeffnung des von irgend einem äussern Punkt an die Fläche o gelegten Tangentenkegels in dem Augenblick annimmt, in welchem man diesen äussern Punkt (durch eine geeignete Verschiebung) in jenen auf o liegenden Punkt p hineinfallen lässt.

Wir wollen nun die in (1.) enthaltene Function $\frac{1}{r}$ durch

$$(5.) \quad \varphi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (\alpha > 0),$$

ersetzen, und für diese neue Function ein analoges Theorem aufzustellen suchen. Dabei ist zu beachten [vgl. Seite 99], dass diese Function $\varphi(r)$ der Differentialgleichung:

$$(5A.) \quad \Delta \varphi(r) = \alpha^2 \varphi(r) \text{ d. i. } \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial z^2} = \alpha^2 \varphi(r)$$

Genüge leistet, vorausgesetzt, dass man den einen Endpunkt der Linie r als fest betrachtet, und den andern Endpunkt derselben mit (x, y, z) bezeichnet. Um näher auf die Dinge einzugehen, unterscheiden wir, je nach der Lage jenes festen Punktes, drei Fälle:

Erster Fall: Der feste Endpunkt der Linie r — er mag p heissen — liegt innerhalb \mathcal{A} . Alsdann ist nach einem bekannten Green'schen Satz*):

*) Es ist dies dieselbe Green'sche Formel, die schon vorhin in (1.) Seite 256 benutzt wurde.

$$(6.) \quad \int_{\mathfrak{S}} \Delta \varphi(r) d\tau = - \int \frac{d\varphi(r)}{dn} do,$$

oder mit Rücksicht auf (5A):

$$(7.) \quad \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}} \varphi(r) d\tau = - \int \frac{d\varphi(r)}{dn} do.$$

Hier ist das Integral links ausgedehnt über alle Volumelemente $d\tau$ des Raumes \mathfrak{S} ; während das Integral rechts völlig analog ist mit dem Gauss'schen Integral (1.).

Zweiter Fall: *Der feste Punkt p liegt innerhalb \mathfrak{S} .* Man denke sich um diesen Punkt p (als Centrum) eine völlig *innerhalb* \mathfrak{S} liegende Kugel \mathfrak{K} construirt; so dass also der ganze Raum \mathfrak{S} jetzt in zwei Theile zerfallen wird, nämlich in den Kugelraum \mathfrak{K} , und in den schalenförmigen Raum $\mathfrak{S} - \mathfrak{K}$. Der vorhin benutzte Green'sche Satz ist alsdann allerdings nicht auf \mathfrak{S} selbst, wohl aber auf $\mathfrak{S} - \mathfrak{K}$ anwendbar. Man erhält in solcher Weise:

$$(8.) \quad \int_{\mathfrak{S}-\mathfrak{K}} \Delta \varphi(r) d\tau = - \int \frac{d\varphi(r)}{dn} do - \int \frac{d\varphi(r)}{dv} d\omega.$$

Die beiden Integrale rechts sind wiederum analog dem Gauss'schen Integrale (1.), unterscheiden sich aber dadurch von einander, dass das eine über die Oberfläche o des Raumes \mathfrak{S} , das andere aber über die Oberfläche ω der Kugel \mathfrak{K} ausgedehnt ist. Auch ist im einen unter n die *innere* Normale von do , im andern hingegen unter v die *äussere* Normale von $d\omega$ zu verstehen. Die Normale v ist daher identisch mit der Richtung der vom Kugelcentrum p nach $d\omega$ laufenden Linie r . Folglich ist

$$\frac{d\varphi(r)}{dv} = \frac{d\varphi(r)}{dr} = - \frac{1 + \alpha r}{r^2} e^{-\alpha r}, \text{ [vgl. (5).]}$$

Substituirt man dies in (8.), so erhält man, unter gleichzeitiger Rücksichtnahme auf (5A):

$$\alpha^2 \int_{\mathfrak{S}-\mathfrak{K}} \varphi(r) d\tau = - \int \frac{d\varphi(r)}{dn} do + \frac{1 + \alpha r}{r^2} e^{-\alpha r} \int d\omega,$$

oder, weil das letzte Integral gleich der Oberfläche der Kugel \mathfrak{K} , d. i. $= 4\pi r^2$ ist:

$$(9.) \quad \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}-\mathfrak{K}} \varphi(r) d\tau = - \int \frac{d\varphi(r)}{dn} do + 4\pi(1 + \alpha r)e^{-\alpha r}.$$

Nachträglich kann nun offenbar die um p beschriebene Kugel \mathfrak{K} beliebig verkleinert werden. Lässt man ihren Radius r bis zu 0 abnehmen, so geht $\mathfrak{S} - \mathfrak{K}$ über in \mathfrak{S} ; sodass man also erhält:

$$(10.) \quad \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}} \varphi(r) d\tau = - \int \frac{d\varphi(r)}{dn} do + 4\pi.$$

Dritter Fall: *Der Punkt p liegt auf der Fläche o .* Von Neuem denke man sich um p (als Centrum) eine kleine Kugel \mathfrak{K} construiert, und den den beiden Räumen \mathfrak{Z} und \mathfrak{K} gemeinschaftlichen Theil mit \mathfrak{G} bezeichnet. Alsdann wird der vorhin benutzte Green'sche Satz nicht auf \mathfrak{Z} selber, wohl aber auf $\mathfrak{Z} - \mathfrak{G}$ anwendbar sein, so dass man also, an Stelle von (8.), gegenwärtig folgende Formel erhält:

$$(11.) \quad \int_{\mathfrak{Z}-\mathfrak{G}} \Delta \varphi(r) d\tau = - \int \frac{d\varphi(r)}{dn} do - \int \frac{d\varphi(r)}{dr} d\omega,$$

wo die Integrale rechts dieselben Bedeutungen haben wie in (8.), nur mit dem Unterschiede, dass die Integrationen gegenwärtig beschränkt zu denken sind auf diejenigen *Theile* der Flächen o und ω , welche die Begrenzung des Raumes $\mathfrak{Z} - \mathfrak{G}$ ausmachen.

Man kann nun diese Formel (11.) Schritt für Schritt in genau derselben Weise behandeln, wie vorhin die Formel (8.), und gelangt in solcher Art, wie leicht zu übersehen ist, schliesslich zu folgendem Resultat:

$$(12.) \quad \alpha^2 \int_{\mathfrak{Z}} \varphi(r) d\tau = - \int \frac{d\varphi(r)}{dn} do + 2\pi.$$

Denn die gegebene Fläche o soll nach unserer ein für allemal getroffenen Festsetzung [vgl. den Anfang des § 1, Seite 253] allenthalben, also z. B. auch an der Stelle des Punktes p , von *stetiger Biegung* gedacht werden.

Bemerkung. — Wollte man diese Festsetzung fallen lassen, so würde die Formel (12.) ebenfalls noch richtig bleiben. Nur müsste man alsdann ihr letztes Glied 2π durch K_p ersetzen, wo K_p die früher (Bemerkung, Seite 262) genannte Bedeutung besitzt.

Die Resultate (7.), (10.), (12.) der soeben behandelten drei Fälle lassen sich leicht zusammenfassen. Eine solche Zusammenfassung führt zu folgendem Satz:

Neues Theorem. (Analogon des Gauss'schen Theorems). — *Irgendwo im Raume sei ein fester Punkt p gegeben. Mit Bezug auf diesen Punkt p bilde man unter Anwendung der Function:*

$$(13.) \quad \varphi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (\alpha > 0),$$

das dem Gauss'schen Integral [(1.) Seite 261] analoge Integral:

$$(14.) \quad \int \frac{d\varphi(r)}{dn} do \quad \text{oder} \quad \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p do,$$

sowie auch folgendes über alle Volumelemente $d\tau$ des Raumes \mathfrak{Z} sich ausdehnende Integral:

$$(15.) \quad \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}} \varphi(r) d\tau \quad \text{oder} \quad \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}} [\varphi(r)]_p d\tau.$$

Hier soll der Index p [ebenso wie in (3.) Seite 262] andeuten, dass der eine Endpunkt der Linie r in jenem festen Punkte p zu denken ist; so dass also diese Linie r den Abstand der Elemente do und $d\tau$ von jenem festen Punkt p vorstellt.

Alsdann wird die Summe der beiden Ausdrücke (14.) und (15.) entweder $= 0$, oder $= 2\pi$, oder $= 4\pi$ sein, je nachdem jener Punkt p innerhalb \mathfrak{A} , oder auf o , oder innerhalb \mathfrak{S} liegt. Bedient man sich also der Buchstaben a, s, j in dem früher (Seite 253) festgesetzten Sinne, so werden die Formeln stattfinden:

$$(16.) \quad \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_a do + \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}} [\varphi(r)]_a d\tau = 0,$$

$$(17.) \quad \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_s do + \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}} [\varphi(r)]_s d\tau = 2\pi,$$

$$(18.) \quad \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_j do + \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}} [\varphi(r)]_j d\tau = 4\pi.$$

§ 5.

Sich anschliessende Betrachtungen.

Irgendwo im Raume sei ein fester Punkt p markirt; und mit Bezug auf diesen Punkt p sei das Integral gebildet:

$$(19.) \quad \int_{\mathfrak{S}} [\varphi(r)]_p d\tau.$$

Der Werth dieses Integrals (19.) würde sich offenbar, weil die Function $\varphi(r)$, (13.), durchweg positiv ist, *verkleinern*, falls man den Raum \mathfrak{S} verkleinern, z. B. denselben auf *Null* reduciren wollte. Andererseits würde der Werth des Integrals (19.) sich *vergrössern*, sobald man den Raum \mathfrak{S} vergrössern, z. B. denselben übergehen lassen wollte in den *ganzen unendlichen Raum* \mathfrak{X} . Somit ergibt sich:

$$(20.) \quad 0 < \int_{\mathfrak{S}} [\varphi(r)]_p d\tau < \int_{\mathfrak{X}} [\varphi(r)]_p d\tau,$$

die Zeichen $< <$ im *strengen Sinne* gedacht.

Das letzte der beiden Integrale (20.) ist aber, auf Grund unserer früheren Untersuchungen [vgl. Seite 121 (15.)] leicht angebbar. Beachtet man nämlich, dass die Constante α im gegenwärtigen Capitel stets > 0 (niemals $= 0$) sein soll [vgl. Seite 254 (2.)], so ergibt sich aus jenen Untersuchungen, dass das in Rede stehende Integral

$$(20a.) \quad = \frac{4\pi}{\alpha^2}$$

ist. Somit gewinnt unsere Formel (20.), falls man sie noch mit α^2 multiplicirt, die Gestalt:

$$(21.) \quad 0 < \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}} [\varphi(r)]_p d\tau < 4\pi.$$

Und zwar wird diese Formel gültig sein, welche Lage man dem festen Punkt p auch immer geben mag.

Wir wollen nun für p einen auf der Fläche o [d. i. auf der Oberfläche des Raumes \mathfrak{S}] liegenden Punkt s nehmen. Alsdann ist nach (21.):

$$(22.) \quad 0 < \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}} [\varphi(r)]_s d\tau < 4\pi,$$

wo der Index s andeutet, dass unter r die Abstände der Elemente $d\tau$ von diesem Punkte s zu verstehen sind. Aus (22.) folgt sofort:

$$2\pi > 2\pi - \alpha^2 \int_{\mathfrak{S}} [\varphi(r)]_s d\tau > -2\pi,$$

also nach (17.):

$$2\pi > \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_s do > -2\pi,$$

oder einfacher geschrieben:

$$(23.) \quad \text{abs } \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_s do < 1.$$

Und zwar sind in all' diesen Formeln (21.), (22.), (23.), ebenso wie in (20.), die Zeichen $<$ und $>$ im *strengen Sinne* zu verstehen.

Welche Lage man also auch dem festen Punkte s auf der gegebenen Fläche o zuertheilen mag, stets wird der in (23.) angegebene Ausdruck *wirklich kleiner* als 1 sein. Es wird mithin dieser Ausdruck, falls man den Punkt s auf der Fläche o beliebig herumwandern lässt, *fortdauernd* wirklich kleiner als 1 bleiben. Und es wird daher solches z. B. auch gelten von dem *grössten Werth* λ , den dieser Ausdruck bei einer derartigen Wanderung anzunehmen im Stande ist. Somit ergibt sich:

$$(24.) \quad \lambda < 1;$$

sodass also jener grösste Werth λ zu bezeichnen ist als ein *positiver ächter Bruch*. Demgemäss gelangen wir zu folgendem

Satz. — *Unter Anwendung der Function:*

$$(25.) \quad \varphi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (\alpha > 0),$$

bilde man für irgend einen auf der Fläche o liegenden Punkt s den Ausdruck:

$$(26.) \quad \text{abs } \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_s d\sigma,$$

wo n die innere Normale des Elementes $d\sigma$ bezeichnet, und wo der Index s andeuten soll, dass unter r die Abstände der Elemente $d\sigma$ von jenem Punkte s zu verstehen sind.

Der Werth des Ausdrucks (26.) ist offenbar abhängig von der Beschaffenheit der Fläche o , ferner von der Grösse der in $\varphi(r)$ enthaltenen Constanten α , und endlich von der Lage des auf o markirten Punktes s . Es wird mithin der Werth dieses Ausdrucks (26.) sich ändern, sobald man den Punkt s auf der Fläche o herumwandern lässt. Und der grösste Werth λ , den der Ausdruck (26.) bei einer solchen Wanderung anzunehmen im Stande ist, wird daher nur noch abhängen von der Beschaffenheit der Fläche o und von der Grösse der Constante α ; sodass also dieser grösste Werth λ , falls α in bestimmter Weise gegeben ist, zu bezeichnen sein wird als eine der Fläche o zugehörige Constante.

Aus dieser Definition der Constante λ folgt sofort, dass für alle auf o gelegenen Punkte s die Formel stattfindet:

$$(27.) \quad \text{abs } \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_s d\sigma \leq \lambda.$$

Insbesondre aber ist zu bemerken [vgl. (24.)], dass diese Constante λ ein positiver ächter Bruch ist.

NB. Die Constante α soll, wie z. B. in (25.) von Neuem markirt ist, im gegenwärtigen Capitel stets > 0 (niemals $= 0$) sein. Vgl. Seite 254 (2.). Für $\alpha = 0$ würde der vorstehende Satz nicht mehr gelten; wie man leicht erkennt, falls man nur beachtet, dass die zur Ableitung dieses Satzes benutzten Formeln (20a.), (21.), (22.) etc. auf den Fall $\alpha = 0$ nicht ohne Weiteres anwendbar sind.

§ 6.

Ueber gewisse Oberflächenintegrale, die analog sind mit dem Gauss'schen Integral. (Theorem für den Raum \mathfrak{R}).

Irgendwo im Raume sei ein Punkt p markirt. Das demselben entsprechende Gauss'sche Integral [Seite 261 (1.), (2.), (3.)] lautet:

$$(1.) \quad w_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d \frac{1}{r}}{dn} \right]_p d\sigma.$$

Neben diesem Integral wollen wir gegenwärtig noch folgende Integrale in Betracht ziehen:

$$(2.) \quad w_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p d\sigma$$

und

$$(3.) \quad W_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f_0 d\sigma,$$

wo $\varphi(r)$ die Function vorstellen soll:

$$(4.) \quad \varphi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (\alpha > 0).$$

Das Integral w_p soll in genau derselben Weise gebildet sein, wie das Gauss'sche Integral w_p , (1.), nur mit dem Unterschiede, dass dabei, an Stelle von $\frac{1}{r}$, die Function $\varphi(r)$ benutzt wird.

Was ferner das Integral W_p betrifft, so denke man sich *auf der Fläche σ irgend eine bestimmt gegebene Function f ausgebreitet*. Alsdann soll dieses Integral W_p in genau derselben Weise gebildet sein wie das Integral w_p , nur mit dem Unterschiede, dass jedem Element $d\sigma$ noch derjenige Werth f_0 als Factor beigelegt wird, den jene Function f im Elemente $d\sigma$ besitzt.

Dabei sei bemerkt, dass die Function $\varphi(r)$ folgendermassen darstellbar ist [vgl. Seite 69, (8.)]:

$$(4a.) \quad \varphi(r) = \frac{1}{r} + \sigma(r),$$

wo alsdann $\sigma(r)$ eine *durchweg stetige* Function repräsentirt:

$$(4b.) \quad \sigma(r) = -\frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{\pi^2} r - \frac{\alpha^3}{\pi^3} r^2 + \frac{\alpha^4}{\pi^4} r^3 - + \dots$$

Lässt man den Punkt p durch die Fläche σ hindurchgehen, also etwa von einem Punkt a zu einem Punkt s , und dann weiter zu einem Punkt j übergehen, so ändert sich w_p in *unstetiger* Weise. Es ist nämlich nach dem Gauss'schen Theorem (Seite 261, 262):

$$(5.) \quad w_a = 0, \quad w_s = 1, \quad w_j = 2.$$

Und demgemäss steht zu erwarten, dass jene neuen Functionen w_p und W_p mit analogen Unstetigkeiten behaftet sein werden. Wir stellen uns die Aufgabe, diese Unstetigkeiten genauer zu untersuchen. *Dabei wollen wir voraussetzen, dass jene auf σ ausgebreiteten Werthe f auf der Fläche σ allenthalben stetig sind.*

Wir denken uns auf der Fläche σ irgend einen *festen Punkt x* markirt, bezeichnen den daselbst vorhandenen Functionswerth f mit f_x oder kürzer mit k , bilden aus W_p und w_p die Zusammensetzung:

$$(7.) \quad \Omega_p = W_p - kw_p,$$

und wollen nun zuvörderst das Verhalten dieser neuen Function Ω_p , und zwar in unmittelbarer Nähe jenes festen Punktes z , in Betracht ziehen.

Substituirt man in (7.) für W_p den aus (3.) und (4a.) sich ergebenden Werth:

$$W_p = \frac{1}{2\pi} \int \left\{ \left[\frac{d \frac{1}{r}}{dn} \right]_p + \left[\frac{d\sigma(r)}{dn} \right]_p \right\} f_o d\sigma$$

und zugleich für w_p den Werth (1.), so erhält man:

$$(8.) \quad \Omega_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d \frac{1}{r}}{dn} \right]_p (f_o - k) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\sigma(r)}{dn} \right]_p f_o d\sigma.$$

Die Function $\sigma(r)$, (4b.), ist, wie schon bemerkt wurde, eine *durchweg stetige*. Folglich wird das *zweite* Integral der Formel (8.) eine Function von p sein, welche (bei einer Bewegung dieses Punktes p) im ganzen unendlichen Raum allenthalben stetig bleibt, und welche daher z. B. auch stetig ist in unmittelbarer Nähe des festen Oberflächenpunktes z , d. i. innerhalb einer um z beschriebenen kleinen Kugel.

Genau dasselbe aber gilt mit Bezug auf eine solche um z beschriebene Kugel auch vom *ersten* Integral der Formel (8.). Denn die *innerhalb* einer solchen Kugel befindlichen Elemente $d\sigma$ liefern zu dem Integral Beiträge, die proportional sind mit $f_o - k = f_o - f_z$, und die also — in Anbetracht der vorausgesetzten Stetigkeit von f , (6.) — *verschwindend klein* sein werden, falls man den Radius der Kugel ganz ausserordentlich klein sich vorstellt. Andererseits aber unterliegt es keinem Zweifel, dass die *ausserhalb* der kleinen Kugel liegenden Elemente $d\sigma$ zu dem Integral einen Beitrag liefern, der für alle *innerhalb* der Kugel befindlichen Punkte p *stetig* ist.

Beide Integrale, das erste wie das zweite, sind daher stetig innerhalb einer solchen um z beschriebenen kleinen Kugel. Gleiches gilt somit nach (8.) auch von Ω_p .

Genauer ausgedrückt, wird zu sagen sein, dass Ω_p *innerhalb einer um z beschriebenen Kugel Werthe besitze, deren gegenseitige*

(9.) *Differenzen durch Verkleinerung des Kugelradius unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind. Oder kürzer: Die Function Ω_p sei stetig im Punkte z .* Diese Function Ω_p ist aber definiert durch die Formel (7.):

$$(10.) \quad \Omega_p = W_p - kw_p,$$

und wird also, wie aus (5.) ersichtlich ist, in den Punkten a, s, j folgende Werthe haben:

$$(11.) \quad \begin{cases} \Omega_a = W_a, \\ \Omega_s = W_s - k, \\ \Omega_j = W_j - 2k. \end{cases}$$

Um einen Schritt vorwärts zu kommen, ziehen wir jetzt zwei neue Functionen H_p und Z_p in Betracht, welche definirt sein sollen durch die Formeln:

$$(12.) \quad \begin{cases} H_a = 0, \\ H_s = k - f_s, \\ H_j = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Z_a = 2k, \\ Z_s = k + f_s, \\ Z_j = 2k. \end{cases}$$

Die Function H_p besitzt innerhalb einer um x beschriebenen kleinen Kugel Werthe, deren gegenseitige Differenzen durch Verkleinerung des Kugelradius unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind; wie sich solches leicht ergibt, falls man nur wiederum beachtet, dass $k - f_s = f_x - f_s$ ist, und dass die Function f , nach unserer Voraussetzung (6.), auf der gegebenen Fläche o allenthalben stetig sein soll. Die Function H_p ist daher, ebenso wie die Function Ω_p , im Punkte x als *stetig* zu bezeichnen. Und Gleiches gilt offenbar auch von der Function Z_p .

Gleiches gilt daher auch von den Functionen:

$$(13.) \quad \Phi_p = \Omega_p + H_p \quad \text{und} \quad \Psi_p = \Omega_p + Z_p.$$

Diese Functionen Φ_p und Ψ_p sind also (ebenso wie Ω_p, H_p, Z_p) im Punkte x stetig. D. h. jede derselben besitzt innerhalb einer kleinen um x beschriebenen Kugel Werthe, deren Differenzen durch Verkleinerung des Kugelradius unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind. Zugleich sei bemerkt, dass diese Functionen Φ_p, Ψ_p , [wie aus (11.), (12.) ersichtlich ist] in den Punkten a, s, j folgende Werthe haben:

$$(14.) \quad \begin{cases} \Phi_a = W_a, \\ \Phi_s = W_s - f_s, \\ \Phi_j = W_j - 2k, \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi_a = W_a + 2k, \\ \Psi_s = W_s + f_s, \\ \Psi_j = W_j. \end{cases}$$

Einigermassen störend ist, dass die Functionen Φ_p, Ψ_p speciell mit Bezug auf den Punkt x gebildet, nämlich mit dem Parameter $k = f_x$ behaftet sind. Markirt man z. B. auf der gegebenen Fläche o beliebig viele Punkte x, x_1, x_2, \dots , so werden die mit Bezug auf x gebildeten Functionen Φ_p, Ψ_p stetig sein in x . Ebenso

werden die mit Bezug auf α_1 gebildeten Functionen Φ_p, Ψ_p stetig sein in α_1 . U. s. w.

Diese Unterschiede verschwinden, wenn man, was z. B. Φ_p betrifft, statt der *ganzen* Function Φ_p nur einen *Theil* derselben, nämlich nur die Werthe:

$$(15.) \quad \begin{cases} \Phi_a = W_a, \\ \Phi_s = W_s - f_s \end{cases}$$

ins Auge fasst. Denn diese Werthe sind von α, k ganz unabhängig. Demgemäss repräsentiren diese Φ_a, Φ_s ein im Punkte α *stetiges* Werthsystem, welches zugleich die Eigenschaft hat, immer *ein und dasselbe* zu bleiben, welche Lage man jenem Punkte α auf der Fläche o auch zuertheilen mag. *Denkt man sich also dieses Werthsystem Φ_a, Φ_s , (15.), wirklich gebildet, so wird dasselbe in allen auf o liegenden Punkten α , oder (kürzer ausgedrückt) in allen Punkten s stetig sein.*

Andrerseits ergibt sich aber sofort, *das dieses Werthsystem Φ_a, Φ_s auch in allen Punkten a stetig ist.* Denn bei einem solchen Punkt a kommen nur allein die Werthe $\Phi_a = W_a$ in Betracht; und dass diese Werthe W_a in jedem Punkt a stetig sind, folgt sofort aus der in (3.) für W_p gegebenen Definition.

Die Werthe Φ_a, Φ_s repräsentiren somit ein Werthsystem, welches in jedem Punkt s , und ebenso auch in jedem Punkt a stetig ist. D. h. sie repräsentiren ein Werthsystem, welches stetig ist *in ganzer Erstreckung des Raumes* \mathfrak{R} . Lässt man also den Buchstaben Φ ganz fallen, indem man Φ_a und Φ_s durch ihre eigentlichen Bedeutungen (15.) ersetzt, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Man halte fest an den zu Anfang des § 1 (Seite 253) eingeführten Vorstellungen und Bezeichnungen, und denke sich auf der Fläche o irgend eine Function f ausgebreitet. Diese Function f sei in bestimmter Weise gegeben, und auf der Fläche o überall stetig.*

Auf Grund dieser Function f , und auf Grund der Exponentialfunction:

$$(16.) \quad \varphi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (\alpha > 0),$$

bilde man nun folgendes über die Fläche o sich ausdehnendes Integral:

$$(17.) \quad W_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f_o d_o,$$

wo f_o den Werth von f im Elemente d_o vorstellt, übrigens aber die Bezeichnungsweise genau dieselbe sein soll, wie im Gauss'schen Integral (3.) Seite 262.

Alsdann werden die Werthe:

$$(18.) \quad W_a, W_s - f_s$$

in ihrer Gesammtheit eine Function bilden, die in ganzer Erstreckung des Raumes \mathfrak{A} stetig ist. Auch wird die in solcher Weise definirte Function, wie unmittelbar aus (17.) hervorgeht, in den unendlich fernen Punkten verschwinden.

Da nun die Werthe (18.) ein stetiges Ganzes bilden, nämlich allenthalben stetig mit einander zusammenhängen, so wird offenbar Gleiches auch gelten von einem Theil dieser Werthe, also z. B. von den Werthen $W_s - f_s$. Es werden mithin die $W_s - f_s$ auf der gegebenen Fläche o allenthalben stetig sein. Genau dasselbe gilt, nach der gemachten Voraussetzung, aber auch von den f oder f_s . Folglich wird genau dasselbe auch gelten von den W_s . Somit ergibt sich folgender

Erster Zusatz. — Die Werthe W_s sind, ebenso wie die von
(19.) Hause aus gegebenen Werthe f oder f_s , auf der Fläche o allenthalben stetig.

Eine gewisse andere Folgerung aus dem Satze (18.) liegt so klar zu Tage, dass es kaum noch nothwendig ist, auf dieselbe besonders aufmerksam zu machen. Da nämlich jene Werthe (18.) ein stetiges Ganzes bilden, so folgt hieraus sofort, dass die Werthe

$$(20.) \quad W_a, W_s$$

in ihrer Gesammtheit kein stetiges Ganzes bilden. In der That werden diese Werthe (20.) in ihrer Gesammtheit eine Function repräsentiren, welche allerdings innerhalb \mathfrak{A} überall stetig ist, welche aber eine plötzliche sprungweise Aenderung (vom Betrage f_s) darbietet, sobald man von einem dicht an der Oberfläche o gelegenen Punkte zur Oberfläche selbst übergeht.

Die Exponentialfunction $\varphi(r)$ (16.), leistet bekanntlich, falls man den einen Endpunkt der Linie r als fest betrachtet, den andern Endpunkt derselben aber mit (x, y, z) bezeichnet, der Differentialgleichung Genüge [vgl. (5A.) Seite 262]:

$$(21.) \quad \Delta \varphi(r) = \alpha^2 \varphi(r), \quad \text{d. i.} \quad \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial z^2} = \alpha^2 \varphi(r).$$

Bezeichnet man daher in W_p (17.) die Coordinaten des variablen Raumpunktes p mit (x, y, z) , so wird, wie man sofort übersieht, dieser Ausdruck W_p oder $W_{(x, y, z)}$ ebenderselben Differentialgleichung Genüge leisten. Es wird also

$$(22.) \quad \Delta W_{(x, y, z)} = \alpha^2 W_{(x, y, z)}$$

sein. Ueberdies aber ergibt sich aus (17.), dass *sämmtliche* nach x, y, z genommenen Ableitungen dieses Ausdruckes W_p oder $W_{(x,y,z)}$, sowohl die *ersten*, wie auch die *zweiten*, die *dritten* u. s. w., in allen Punkten, die von der Fläche o durch irgend welche Entfernungen getrennt sind, *stetig* sein werden, dass sie also stetig sein werden *innerhalb* \mathfrak{S} , und ebenso auch *innerhalb* \mathfrak{A} .

Die durch die Werthe:

$$(23.) \quad W_a, \quad W_s - f_s$$

repräsentirte Function besitzt somit folgende Eigenschaften: Erstens ist sie nach (18.) *in ganzer Erstreckung* des Raumes \mathfrak{A} stetig. Zweitens sind, wie soeben constatirt wurde, all' ihre Ableitungen stetig *innerhalb* \mathfrak{A} ; auch ist *innerhalb* \mathfrak{A} überall die Differentialgleichung (22.) erfüllt. Drittens endlich verschwindet die Function, zufolge des bei (18.) ausgesprochenen Satzes, in den unendlich fernen Punkten des Raumes \mathfrak{A} . Auf Grund dieser drei Eigenschaften aber wird die Function zu bezeichnen sein als eine *Fundamentalfunctio*n des Raumes \mathfrak{A} . (Vgl. die Definition Seite 253). Somit ergibt sich folgender

Zweiter Zusatz. — Die in (18.) genannten Werthe

$$(24.) \quad W_a, \quad W_s - f_s$$

*bilden in ihrer Gesammtheit eine Fundamentalfunctio*n des Raumes \mathfrak{A} .

§ 7.

Fortsetzung. (Theorem für den Raum \mathfrak{S}).

Für den Raum \mathfrak{S} gilt ein Theorem, welches dem soeben für den Raum \mathfrak{A} aufgestellten Theorem (Seite 271) völlig analog ist. Um näher hierauf einzugehen, greifen wir zurück zu den Werthen (14.):

$$(25.) \quad \begin{cases} \Psi_j = W_j, \\ \Psi_s = W_s + f_s, \\ \Psi_a = W_a + 2k. \end{cases}$$

Diese Werthe Ψ_j, Ψ_s, Ψ_a bilden, wie damals constatirt wurde, in ihrer Gesammtheit eine Function, welche im Punkte z *stetig* ist. Gleiches gilt daher auch von einem *Theil* dieser Function, z. B. von den Werthen:

$$(26.) \quad \begin{cases} \Psi_j = W_j, \\ \Psi_s = W_s + f_s. \end{cases}$$

Diese Werthe Ψ_j, Ψ_s sind aber von z, k unabhängig. U. s. w.

Kurz man gelangt, auf Grund dieser Werthe (26.), [durch ganz ähnliche Ueberlegungen, wie im vorigen Paragraph], zu folgendem Resultat:

Theorem. *Man halte fest an den Vorstellungen des vorhergehenden Theorems (Seite 271). Ebenso wie dort, sollen also die gegebenen Werthe f auf der Fläche o allenthalben stetig gedacht werden. Und ebenso wie dort, soll W_p den Integralausdruck vorstellen:*

$$(27.) \quad W_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f_o do.$$

Alsdann werden die Werthe:

$$(28.) \quad W_j, \quad W_s + f_s$$

in ihrer Gesammtheit eine Function repräsentiren, welche in Erstreckung des Raumes \mathfrak{S} überall stetig ist.

Erster Zusatz. — *Hieraus folgt sofort [vgl. den Uebergang von (29.) (18.) zu (19.)], dass die W_s , ebenso wie die f oder f_s , auf der gegebenen Fläche o allenthalben stetig sind.*

Auch ergibt sich aus dem Satze (28.) sofort, dass die Werthe

$$(30.) \quad W_j, \quad W_s$$

in ihrer Gesammtheit kein stetiges Ganzes bilden, vielmehr eine Function repräsentiren, die allerdings innerhalb des Raumes \mathfrak{S} stetig ist, die aber beim Uebergang zur Oberfläche dieses Raumes einen plötzlichen Sprung (vom Betrage f_s) darbietet.

Endlich ergibt sich, auf Grund des Satzes (28.), [vgl. den Uebergang von (18.) zu (24.)], sofort noch folgender

Zweiter Zusatz. — *Die in (28.) aufgeführten Werthe:*

$$(31.) \quad W_j, \quad W_s + f_s$$

repräsentiren in ihrer Gesammtheit eine Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{S} .

§ 8.

Herstellung derjenigen Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{S} , welche auf der Oberfläche o dieses Raumes vorgeschriebene Werthe besitzt.

Man markire auf der gegebenen Fläche o irgend einen festen Punkt s , und bilde für diesen Punkt s und mit Bezug auf irgend ein Flächenelement do den Differentialausdruck:

$$(a.) \quad \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_s do,$$

wo n die *innere* Normale des Elementes do bezeichnet. Dabei soll der Index s (wie gewöhnlich) andeuten, dass unter r der Abstand des Elementes do von jenem festen Punkte s zu verstehen ist. Ueberdies soll $\varphi(r)$ die Exponentialfunction vorstellen:

$$(b.) \quad \varphi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (\alpha > 0).$$

Alsdann ist offenbar:

$$(c.) \quad \frac{d\varphi(r)}{dn} = \frac{d\varphi(r)}{dr} \frac{dr}{dn} = -\frac{d\varphi(r)}{dr} \cos \delta,$$

wo δ den Winkel vorstellt, unter welchem die Normale n geneigt ist gegen die von do nach s laufende Linie r . Ueberdies ist nach (b.):

$$(d.) \quad \frac{d\varphi(r)}{dr} = -\frac{1 + \alpha r}{r^2} e^{-\alpha r}.$$

Dies in (c.) substituirt, giebt:

$$(e.) \quad \frac{d\varphi(r)}{dn} = \frac{1 + \alpha r}{r^2} e^{-\alpha r} \cos \delta;$$

sodass also der Ausdruck (a.) die Gestalt erhält:

$$(f.) \quad \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_s do = \frac{1 + \alpha r}{r^2} e^{-\alpha r} \cos \delta \cdot do.$$

Folglich wird dieser Ausdruck (f.) stets positiv sein, so lange $\delta \leq 90^\circ$ ist. Und hieraus folgt weiter, dass der Ausdruck (f.) für alle Lagen, die man dem Punkte s auf der Fläche o zuertheilen kann, positiv bleiben wird, falls diese Fläche o (mit etwaiger Ausnahme irgend welcher ebenflächiger Theile) überall *convex* ist.

Solches vorangeschickt, wollen wir uns nun auf der Fläche o irgend welche Werthe f in bestimmter Weise *vorgeschrieben* denken, und auf Grund dieser Werthe f , mit Bezug auf einen beliebigen Raumpunkt p , folgenden Integralausdruck bilden:

$$(1.) \quad W_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f_o do, \quad [\text{vgl. (27.) Seite 274}].$$

Dementsprechend ist z. B. unter W_s derjenige Werth zu verstehen, den der Ausdruck W_p annimmt, sobald man für p irgend welchen auf o liegenden Punkt s eintreten lässt. Dieser Werth W_s mag (was allerdings ein Pleonasmus ist) mit f'_s bezeichnet werden:

$$(2.) \quad W_s = f'_s.$$

Diesen Werth W_s oder f'_s denken wir uns der Reihe nach gebildet für sämtliche auf der Fläche o überhaupt vorhandenen Punkte s . Und auf Grund all' dieser Werthe f'_s wollen wir nun,

wiederum mit Bezug auf einen ganz beliebigen Raumpunkt p , folgenden neuen Integralausdruck construiren:

$$(3.) \quad W_p' = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f_o' d\sigma,$$

wo f_o' den Werth von f_s' im Elemente $d\sigma$ bezeichnen soll. Auch wollen wir die aus (3.) für die Oberflächenpunkte s sich ergebenden Werthe W_s' mit f_s'' bezeichnen:

$$(4.) \quad W_s' = f_s''.$$

In solcher Weise weiter und weiter fortschreitend, gelangen wir zu folgendem Formelsystem:

$$(5.) \quad \begin{cases} W_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f_o d\sigma, & W_s = f_s', \\ W_p' = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f_o' d\sigma, & W_s' = f_s'', \\ W_p'' = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f_o'' d\sigma, & W_s'' = f_s''', \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{cases}$$

Dabei sei bemerkt, dass aus den beiden Formeln erster Zeile sich z. B. ergibt:

$$(6.) \quad f_s' = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_s f_o d\sigma.$$

Wir lassen jetzt die Voraussetzung eintreten, dass die gegebene Fläche o (mit etwaiger Ausnahme irgend welcher ebenflächiger Theile) überall convex ist. Alsdann werden die Werthe des Ausdrucks

$$\left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_s d\sigma$$

durchweg positiv sein, zufolge des Hilfssatzes (g.) Seite 275. Bezeichnet man also die absolut grössten Werthe, welche die Functionen f_s, f_s', f_s'', \dots auf der ganzen Fläche o besitzen, respective mit M, M', M'', \dots , so ergibt sich aus (6.) sofort:

$$\text{abs } f_s' \leq \frac{M}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_s d\sigma,$$

also nach dem Satz (27.) Seite 267:

$$\text{abs } f_s' \leq M\lambda.$$

Und zwar wird diese Formel gültig sein für alle auf o gelegenen Punkte s , also z. B. auch für denjenigen Punkt s , in welchem die Function f_s' ihren absolut grössten Werth M' hat. Somit folgt:

$$M' \leq M\lambda.$$

In analoger Art wird man offenbar finden:

$$* M'' \leq M' \lambda, \text{ u. s. w.};$$

sodass man also zu folgendem Formelsystem gelangt:

$$(8.) \quad \begin{cases} M' \leq M\lambda, \\ M'' \leq M\lambda^2, \\ M''' \leq M\lambda^3, \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

Dabei bezeichnet λ eine *Constante*, und zwar einen *positiven ächten Bruch*, dessen Werth lediglich abhängt von der Constante α und von der Grösse und Gestalt der Fläche o . [Vgl. den Satz Seite 266].

Nach der Definition der Constanten M, M', M'' ist für jedweden auf o liegenden Punkt s : $\text{abs } f_s \leq M$, ebenso: $\text{abs } f'_s \leq M'$, u. s. w.; so dass man also, auf Grund der Formeln (8.), z. B. auch zu folgenden Formeln gelangt:

$$(9.) \quad \begin{cases} \text{abs } f_s \leq M, \\ \text{abs } f'_s \leq M\lambda, \\ \text{abs } f''_s \leq M\lambda^2, \\ \text{abs } f'''_s \leq M\lambda^3, \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

Demgemäss wird man, weil λ ein positiver ächter Bruch ist, die Zahl n so gross machen können, dass sämtliche auf der Fläche o vorhandenen Werthe der Function $f_s^{(n)}$ beliebig wenig von Null verschieden sind. Mit andern Worten: Die Function $f_s^{(n)}$ wird mit wachsendem n gegen Null convergiren, mithin verschwinden für $n = \infty$.

Setzt man jetzt:

$$(10.) \quad \eta_s = f_s - f'_s + f''_s - f'''_s + \dots,$$

so ergibt sich, auf Grund der Formeln (9.), sofort, dass diese Reihe *convergirt*. Bezeichnet man nämlich das Restglied der Reihe mit $R_s^{(n)}$:

$$R_s^{(n)} = \pm (f_s^{(n)} - f_s^{(n+1)} + f_s^{(n+2)} - \dots),$$

so ist nach (9.):

$$\text{abs } R_s^{(n)} \leq M(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \lambda^{n+2} + \dots),$$

d. i.

$$(11.) \quad \text{abs } R_s^{(n)} \leq \frac{M\lambda^n}{1-\lambda} \cdot - Q. e. d.$$

Ebenso wie nun die Ausdrücke (5.): W_p, W'_p, W''_p, \dots auf Grund gewisser Oberflächenfunctionen f_s, f'_s, f''_s, \dots gebildet sind,

ebenso mag jetzt ein neuer Ausdruck Ψ_p gebildet werden auf Grund der durch (10.) definirten Oberflächenfunction η_s :

$$(12.) \quad \Psi_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p \eta_o d\sigma,$$

wo η_o den Werth von η_s im Elemente $d\sigma$ vorstellt.

Solches ausgeführt gedacht, wollen wir jetzt endlich zu unserer in (7.) gemachten Voraussetzung noch eine gewisse zweite Voraussetzung hinzutreten lassen, nämlich annehmen, dass die auf der

(13.) *Fläche o gegebenen Werthe f oder f_s daselbst überall stetig mit einander zusammenhängen.*

Alsdann ist auf den Ausdruck W_p (5.) ohne Weiteres das allgemeine Theorem Seite 274 anwendbar. Und zwar werden, zufolge jenes Theorems, die Werthe $W_j, W_s + f_s$ in ihrer Gesamtheit eine Function bilden, die in *Erstreckung des Raumes \mathfrak{S} überall stetig* ist. Auch werden, zufolge des jenem Theorem beigefügten ersten Zusatzes, die Werthe W_s auf der *Fläche o überall stetig* sein. Diese Werthe W_s sind aber nach (5.) identisch mit den f'_s ; sodass man also zu folgendem Resultat gelangt:

($W_j, W_s + f_s$) stetig in Erstreckung von \mathfrak{S} , f'_s stetig auf o.

Eine wesentliche Vervollständigung erhält dieses Resultat, wenn man auch den zweiten Zusatz jenes allgemeinen Theorems zur Anwendung bringt. Alsdann nämlich ergibt sich:

(14 α .) *($W_j, W_s + f_s$) Fundf. des Raumes \mathfrak{S} , f'_s stetig auf o.*

Aus der hier constatirten Stetigkeit der Werthe f'_s ergibt sich nun sofort, dass jenes allgemeine Theorem nebst seinen beiden Zusätzen auch auf den Ausdruck W_p' (5.) anwendbar ist; sodass man also zu folgendem mit (14 α .) analogem Resultat gelangt:

(14 β .) *($W_j', W_s' + f'_s$) Fundf. des Raumes \mathfrak{S} , f''_s stetig auf o.*

Sodann wird sich offenbar in analoger Weise ergeben:

(14 γ .) *($W_j'', W_s'' + f''_s$) Fundf. des Raumes \mathfrak{S} , f'''_s stetig auf o.*

U. s. w. U. s. w.

Da nun nach (13.) und (14 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$) die f_s, f'_s, f''_s, \dots auf o allenthalben stetig sind, so ergibt sich aus der Reihe (10.) — in Anbetracht ihrer durch (11.) constatirten Convergenz — sofort, dass Gleiches auch von η_s gilt:

(15.) *η_s stetig auf o.*

Hieraus aber ergibt sich die Anwendbarkeit jenes allgemeinen Theorems Seite 274 auf den Ausdruck Ψ_p (12.), sodass man also

zu folgendem mit (14 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$) analogem Resultat geführt wird:

$$(16.) \quad (\Psi_j, \Psi_s + \eta_s) \text{ Fundf. des Raumes } \mathfrak{S}.$$

Was die Werthe Ψ_j und Ψ_s betrifft, so ist nach (12.):

$$\Psi_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p \eta_o d\sigma.$$

Substituirt man aber hier für η_o die aus (10.) sich ergebende Reihe:

$$\eta_o = f_o - f'_o + f''_o - f'''_o + - \dots,$$

so erhält man mit Rücksicht auf (5.):

$$(17.) \quad \Psi_p = W_p - W'_p + W''_p - W'''_p + - \dots.$$

Unter p ist aber jeder beliebige Raumpunkt zu verstehen. Somit ergibt sich aus (17.):

$$(18.) \quad \begin{cases} \Psi_\alpha = W_\alpha - W'_\alpha + W''_\alpha - W'''_\alpha + - \dots, \\ \Psi_s = W_s - W'_s + W''_s - W'''_s + - \dots, \\ \Psi_j = W_j - W'_j + W''_j - W'''_j + - \dots. \end{cases}$$

Nun sind nach (5.) die W_s, W'_s, W''_s, \dots respective identisch mit den $f'_s, f''_s, f'''_s, \dots$. Folglich kann die *mittlere* der Formeln (18.) auch so geschrieben werden:

$$\Psi_s = f'_s - f''_s + f'''_s - f^{IV}_s + - \dots.$$

Hieraus ergibt sich, falls man die Formel (10.) hinzuaddirt, sofort:

$$(19.) \quad \Psi_s + \eta_s = f_s.$$

Hierdurch gewinnt die Formel (16.) folgende einfachere Gestalt:

$$(20.) \quad (\Psi_j, f_s) \text{ Fundf. des Raumes } \mathfrak{S}.$$

Und diese Fundamentalfunction (Ψ_j, f_s) besitzt offenbar, wie direct aus ihrer Schreibweise ersichtlich ist, an der Oberfläche o des Raumes \mathfrak{S} die *vorgeschriebenen* Werthe f_s . Somit gelangen wir, mit Rücksicht auf (18.), zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Man halte fest an den zu Anfang dieses Capitels (Seite 252, 253) eingeführten Vorstellungen, Bezeichnungen und Definitionen, und nehme überdies an, dass die gegebene Fläche o (abgesehen etwa von einzelnen ebenflächigen Theilen) überall convex sei.*

Auf dieser Fläche o seien nun irgend welche Werthe f oder f_s vorgeschrieben, die daselbst überall stetig sind. Bildet man alsdann, von diesen Werthen ausgehend, die in (5.) Seite 276 angegebenen, auf einander folgenden Integralausdrücke $W_p, W'_p, W''_p, W'''_p, \dots$, und setzt man ferner:

$$(21.) \quad \Psi_j = W_j - W'_j + W''_j - W'''_j + - \dots,$$

so wird das aus diesen Ψ_j und jenen f_s bestehende Werthsystem:

$$(22.) \quad (\Psi_j, f_s)$$

eine *Fundamentalfunction* des Raumes \mathfrak{Z} sein, und zwar diejenige, welche auf der Oberfläche o dieses Raumes jene vorgeschriebenen Werthe f_s besitzt.

§ 9.

Das Verhalten der *Fundamentalfunctionen* des Raumes \mathfrak{U} in den unendlich fernen Punkten.

Um irgend einen *festen* Punkt p (als Centrum) beschreibe man zwei Kugelflächen O_0 und O mit den Radien R_0 und R ,

$$(A.) \quad R_0 < R.$$

Und zwar mögen diese Radien so gross sein, dass der Raum \mathfrak{Z} völlig innerhalb O_0 liegt; so dass also der zwischen den beiden Kugelflächen O_0 und O befindliche *schaalenförmige Raum* mit all seinen Punkten dem Gebiete \mathfrak{U} angehört.

Ist nun $U = U(x, y, z)$ irgend eine *Fundamentalfunction* des Gebietes \mathfrak{U} [vgl. die Definition Seite 253], so wird nach einem schon mehrfach benutzten Green'schen Satz*) die Formel stattfinden:

$$(B.) \quad \int \Delta U d\tau = \int \frac{\partial U}{\partial R} dO - \int \frac{\partial U}{\partial R_0} dO_0,$$

die Integration links ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $d\tau$ jenes schaalenförmigen Raumes. Nach der Definition der *Fundamentalfunction* [vgl. (2.) Seite 253] ist aber $\Delta U = \alpha^2 U$. Somit folgt:

$$(C.) \quad \alpha^2 \int U d\tau = \int \frac{\partial U}{\partial R} dO - \int \frac{\partial U}{\partial R_0} dO_0.$$

Bedient man sich nun der Polarcoordinaten ϱ, ϑ, ψ , und setzt man zugleich $\cos \vartheta = \mu$, so ist: $d\tau = \varrho^2 d\varrho d\mu d\psi$, also $d\tau = d\varrho d\omega$, falls $\varrho^2 d\mu d\psi = d\omega$ gesetzt wird. Somit ergibt sich aus (C.):

$$(D.) \quad \alpha^2 \int_{R_0}^R (d\varrho \int U d\omega) = \int \frac{\partial U}{\partial R} dO - \int \frac{\partial U}{\partial R_0} dO_0.$$

Hier repräsentirt offenbar $d\omega$ das Element einer zu O_0 und O concentrischen Kugelfläche ω , deren Radius ϱ zwischen R_0 und R liegt:

$$(E.) \quad R_0 < \varrho < R.$$

*) Nämlich nach demjenigen Satz, der z. B. in (1.) Seite 256 benutzt wurde.

Es sei nun, ebenso wie früher [(3.) Seite 256], $f(\varrho)$ das *arithmetische Mittel* aller auf ω liegenden U 's:

$$(F.) \quad f(\varrho) = \frac{\int U d\omega}{\int d\omega}.$$

Alsdann ergeben sich, ebenso wie damals [vgl. (4.) Seite 256], die Gleichungen:

$$4\pi\varrho^2 f(\varrho) = \int U d\omega \quad \text{und} \quad 4\pi\varrho^2 \frac{df(\varrho)}{d\varrho} = \int \frac{\partial U}{\partial \varrho} d\omega;$$

wodurch die Formel (D.) folgende Gestalt erhält:

$$(G.) \quad \alpha^2 \int_{R_0}^R d\varrho \cdot 4\pi\varrho^2 f(\varrho) = 4\pi R^2 \frac{df(R)}{dR} - 4\pi R_0^2 \frac{df(R_0)}{dR_0}.$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation nach R sofort:

$$(H.) \quad \alpha^2 R^2 f(R) = R^2 \frac{d^2 f(R)}{dR^2} + 2R \frac{df(R)}{dR}.$$

Dies aber ist genau dieselbe Differentialgleichung wie früher in (6.) Seite 257. Aus derselben ergibt sich sofort die damals in (7.) erhaltene Formel:

$$(J.) \quad f(R) = G \frac{e^{\alpha R}}{R} + H \frac{e^{-\alpha R}}{R},$$

wo G und H *unbekannte Constanten* sind.

Es sei nun A jener *bestimmte endliche Werth*, den die Fundamentalfunctio U [vgl. (3.) Seite 254] in den unendlich fernen Punkten besitzt. Alsdann muss das arithmetische Mittel $f(R)$ der auf O liegenden U 's für $R = \infty$ in A übergehen. Folglich muss in (J.) die Constante $G = 0$ sein; sodass sich also ergibt:

$$(K.) \quad f(R) = H \frac{e^{-\alpha R}}{R}, \quad \text{und ebenso z. B.:} \quad f(R_1) = H \frac{e^{-\alpha R_1}}{R_1},$$

falls $R_1 > R$. — Lässt man jetzt R ins Unendliche wachsen, so wird, wie schon bemerkt wurde, $f(R)$ in A übergehen; sodass alsdann die Formel (K.) übergeht in:

$$(L.) \quad A = 0.$$

Somit gelangt man zu folgendem Satz:

Satz. — *Ist $U = U(x, y, z)$ irgend eine Fundamentalfunctio des Raumes \mathfrak{A} , so wird der Werth dieser Function U in den unendlich fernen Punkten des Raumes \mathfrak{A} stets $= 0$ sein.*

(M.)

- Oder *genauer ausgedrückt* *): Denkt man sich um irgend welchen festen Punkt (als Centrum) eine Kugel construirt, so werden alle
- (N.) Werthe, welche U ausserhalb dieser Kugel besitzt, durch Vergrösserung des Kugelradius unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sein.

Aus den beiden Formeln (K.) folgt durch Elimination von H sofort:

$$(O.) \quad Re^{\alpha R} f(R) = R_1 e^{\alpha R_1} f(R_1);$$

sodass man also folgenden zweiten Satz erhält:

Satz. — *Es sei U irgend eine Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{A} .*

Man construire nun irgend zwei concentrische Kugelflächen O und O_1 von solcher Lage und Grösse, dass die Oberfläche o des Raumes \mathfrak{A} innerhalb der einen, und ebenso auch innerhalb der andern liegt. Alsdann wird stets die Formel stattfinden:

$$(P.) \quad Re^{\alpha R} f = R_1 e^{\alpha R_1} f_1,$$

wo f das arithmetische Mittel aller auf O vorhandenen Werthe der Function U , und ebenso f_1 das arithmetische Mittel aller auf O_1 vorhandenen Werthe derselben bezeichnet.

§ 10.

Allgemeine Eigenschaften der Fundamentalfunctionen des Raumes \mathfrak{A} .

Ebenso wie für die Fundamentalfunctionen des Raumes \mathfrak{S} fünf Sätze angegeben sind, ebenso sollen hier fünf entsprechende Sätze aufgestellt werden für die Fundamentalfunctionen des Raumes \mathfrak{A} .

- Der erste und zweite Satz für den Raum \mathfrak{A} sind, sowohl ihrem
- (Q.) Inhalt wie auch ihrer Ableitung nach, völlig identisch mit denen für den Raum \mathfrak{S} , und bedürfen daher keiner weiteren Besprechung. [Vgl. Seite 258 und 259].

Bezeichnet ferner U irgend eine nicht überall verschwindende Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{A} , so lässt sich genau ebenso, wie damals [vgl. (g.) Seite 260] nachweisen, dass der grösste Werth des $\text{abs } U$ niemals innerhalb \mathfrak{A} liegen kann. Folglich wird [hier ist das Raisonement ein etwas anderes als damals] dieses grösste $\text{abs } U$ entweder auf der Oberfläche dieses Raumes \mathfrak{A} , d. i. auf der Fläche o , oder aber in unendlicher Ferne liegen. Letzteres ist in-

*) Diese genauere Ausdrucksweise ergibt sich sofort, falls man nur die für die Fundamentalfunctionen des Raumes \mathfrak{A} gegebene Definition (Seite 253, 254) im Auge behält.

dessen unmöglich. Denn sonst würde dieses grösste $abs U$ [weil U nach dem Satze (M.) Seite 281 in den unendlich fernen Punkten $= 0$ ist] ebenfalls $= 0$ sein; folglich würden alsdann alle Werthe des $abs U$ in ganzer Erstreckung von \mathfrak{A} identisch mit 0 sein; was unserer Voraussetzung, dass die Function U auf \mathfrak{A} nicht überall verschwinden solle, widerspricht.

Von jenen beiden Fällen bleibt mithin nur der erste übrig. Ist also irgend eine im Raume \mathfrak{A} nicht überall verschwindende Fundamentalfunction U gegeben, so wird der grösste Werth des $abs U$ nothwendig auf der Oberfläche des Raumes \mathfrak{A} , d. i. auf der Fläche o liegen. Und es ergibt sich also folgender Satz:

Dritter Satz. — *Es sei U irgend eine Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{A} , und es sei vorausgesetzt, dass diese Function nicht etwa (R.) in ganzer Erstreckung von \mathfrak{A} allenthalben $= 0$ ist. Alsdann wird der grösste Werth, den das $abs U$ in Erstreckung des Raumes \mathfrak{A} anzunehmen vermag, niemals innerhalb dieses Raumes, sondern immer nur an seiner Oberfläche o anzutreffen sein.*

Der Satz ist also ebenfalls völlig gleichlautend mit dem damaligen dritten Satz (Seite 260). Solches constatirt, übersieht man nun leicht, dass auch

Der vierte und fünfte Satz gleichlautend sein werden mit den (S.) entsprechenden damaligen Sätzen (Seite 260, 261); sodass man also z. B. sagen kann: Eine Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{A} sei durch Angabe ihrer Oberflächenwerthe völlig bestimmt.

Solches constatirt, werden wir nun im folgenden Paragraph solche Oberflächenwerthe in willkürlicher, aber bestimmter Weise vorgeschrieben uns denken, und die denselben entsprechende Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{A} zu construiren suchen.

§ 11.

Herstellung einer Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{A} , welche auf der Oberfläche o dieses Raumes vorgeschriebene Werthe besitzt.

Die entsprechende Aufgabe für den Raum \mathfrak{S} haben wir bereits im achten Paragraph behandelt. Und es wird zweckmässig sein, (1.) hier an sämtlichen Vorstellungen, Bezeichnungen und Voraussetzungen jenes achten Paragraphs festzuhalten. Nur wollen wir, an Stelle der damaligen beiden Ausdrücke η_s und Ψ_p , hier gewisse andere Ausdrücke ξ_s und Φ_p in unsere Betrachtung einführen.

Nach wie vor haben wir dann also die Formeln [vgl. (5.) Seite 276]:

$$(2.) \quad \begin{cases} W_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f_o do, & W_s = f'_s, \\ W_p' = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f'_o do, & W_s' = f''_s, \\ W_p'' = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p f''_o do, & W_s'' = f'''_s, \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{cases}$$

sowie auch folgende Formeln [vgl. (8.), (9.) Seite 277]:

$$(3.) \quad \begin{cases} M = M, & \text{abs } f_s \leq M, \\ M' \leq M\lambda, & \text{abs } f'_s \leq M\lambda, \\ M'' \leq M\lambda^2, & \text{abs } f''_s \leq M\lambda^2, \\ M''' \leq M\lambda^3, & \text{abs } f'''_s \leq M\lambda^3, \\ \text{etc. etc.} & \text{etc. etc.} \end{cases}$$

Statt des damaligen Ausdrucks η_s [(10.) Seite 277], führen wir nun aber einen etwas andern Ausdruck ξ_s ein, definirt durch folgende Reihe:

$$(4.) \quad \xi_s = -f_s - f'_s - f''_s - f'''_s - \dots$$

Die Convergenz dieser Reihe kann keinem Zweifel unterliegen. Denn für ihr Restglied:

$$R_s^{(n)} = -f_s^{(n)} - f_s^{(n+1)} - f_s^{(n+2)} - \dots$$

ergibt sich, mittelst der Relationen (3.), die Formel:

$$(5.) \quad \text{abs } R_s^{(n)} \leq \frac{M\lambda^n}{1-\lambda}. \quad - \quad Q. \quad e. \quad d.$$

Auf Grund der durch (4.) definirten Oberflächenwerthe ξ_s bilden wir nun endlich noch folgenden Ausdruck:

$$(6.) \quad \Phi_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p \xi_o do.$$

Noch sei daran erinnert, dass jene Voraussetzungen, von denen in (1.) die Rede war, folgende sind [vgl. (7.) Seite 276 und (13.) Seite 278]:

- (7.) *Erstens: Die gegebene Fläche o soll (abgesehen etwa von einzelnen ebenflächigen Theilen) überall convex sein.*
- (8.) *Zweitens: Die auf dieser Fläche o von Hause aus vorgeschriebenen Werthe f oder f_s sollen auf der Fläche o allenthalben stetig sein.*

In Anbetracht dieser letzten Voraussetzung ist unser allgemeines Theorem Seite 271, nebst seinen beiden Zusätzen, ohne Weiteres anwendbar auf den Ausdruck W_p (2.); wodurch sich ergibt [man vgl. die Ableitung der Formeln (14 α) Seite 278]:

$$(9\alpha.) \quad (W_a, W_s - f_s) \text{ Fundf. des Raumes } \mathfrak{A}, \quad f'_s \text{ stetig auf } o.$$

In Anbetracht der so constatirten Stetigkeit der Werthe f'_s , ist alsdann jenes allgemeine Theorem von Neuem anwendbar auf den Ausdruck W_p' (2.); wodurch sich ergibt:

$$(9\beta.) \quad (W_a', W_s' - f'_s) \text{ Fundf. des Raumes } \mathfrak{A}, \quad f''_s \text{ stetig auf } o.$$

Sodann ergibt sich in analoger Weise:

$$(9\gamma.) \quad (W_a'', W_s'' - f''_s) \text{ Fundf. des Raumes } \mathfrak{A}, \quad f'''_s \text{ stetig auf } o.$$

U. s. w. U. s. w.

Nunmehr ergibt sich aus der die Function ξ , definirenden Reihe (4.), in Anbetracht ihrer durch (5.) constatirten Convergenz und mit Rücksicht auf die in (8.) und in (9 α , β , γ , ...) erwähnte Stetigkeit der $f_s, f'_s, f''_s, f'''_s, \dots$, dass jene Function ξ , auf der gegebenen Fläche o überall *stetig* ist:

$$(10.) \quad \xi_s \text{ stetig auf } o.$$

Folglich wird das vorhin genannte allgemeine Theorem Seite 271 nebst seinen beiden Zusätzen auch anwendbar sein auf den in (6.) angegebenen Integralausdruck Φ_p . Und hierdurch ergibt sich sofort:

$$(11.) \quad (\Phi_a, \Phi_s - \xi_s) \text{ Fundf. des Raumes } \mathfrak{A}.$$

Was die Werthe Φ_a betrifft, so ist nach (6.):

$$\Phi_p = \frac{1}{2\pi} \int \left[\frac{d\varphi(r)}{dn} \right]_p \xi_o d\sigma.$$

Substituirt man hier für ξ_o die aus (4.) entspringende Reihe:

$$\xi_o = -f_o - f'_o - f''_o - f'''_o - \dots,$$

so erhält man mit Rücksicht auf (2.):

$$(12.) \quad \Phi_p = -W_p - W_p' - W_p'' - W_p''' - \dots$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(13.) \quad \begin{cases} \Phi_a = -W_a - W_a' - W_a'' - W_a''' - \dots, \\ \Phi_s = -W_s - W_s' - W_s'' - W_s''' - \dots, \\ \Phi_j = -W_j - W_j' - W_j'' - W_j''' - \dots. \end{cases}$$

Nun sind nach (2.) die W_s, W_s', W_s'', \dots respective identisch mit $f'_s, f''_s, f'''_s, \dots$. Folglich kann die *mittlere* der Formeln (13.) auch so geschrieben werden:

$$\Phi_s = -f'_s - f''_s - f'''_s - f^{IV}_s - \dots$$

Subtrahirt man von dieser Formel die Formel (4.), so folgt sofort:

$$(14.) \quad \Phi_s - \xi_s = f_s.$$

Hierdurch aber gewinnt die Formel (11.) die einfachere Gestalt:

$$(15.) \quad (\Phi_a, f_s) \text{ Fundf. des Raumes } \mathfrak{A}.$$

Diese Fundamentalfunction besitzt aber, wie direct aus ihrer Schreibweise ersichtlich ist, an der Oberfläche des Raumes \mathfrak{A} , d. i. auf der Fläche o , die vorgeschriebenen Werthe f_s . Demgemäss gelangen wir, mit Rücksicht auf (13.), zu folgendem

Theorem. — *Man halte fest an den zu Anfang dieses Capitels (auf Seite 252—254) eingeführten Vorstellungen, Bezeichnungen und Definitionen, und nehme überdies an, dass die gegebene Fläche o (abgesehen etwa von einzelnen ebenflächigen Theilen) überall convex sei.*

Auf dieser Fläche o seien nun irgend welche Werthe f oder f_s vorgeschrieben, die daselbst überall stetig sind. Bildet man alsdann, von diesen Werthen ausgehend, die in (2.) Seite 284 angegebenen Integralausdrücke: $W_p, W'_p, W''_p, W'''_p, \dots$, und setzt man ferner:

$$(16.) \quad \Phi_a = -W_a - W'_a - W''_a - W'''_a - \dots,$$

so wird das aus diesen Φ_a und jenen f_s zusammengesetzte Werthsystem:

$$(17.) \quad (\Phi_a, f_s)$$

eine Fundamentalfunction des Raumes \mathfrak{A} sein, und zwar diejenige, welche auf der Oberfläche o dieses Raumes jene vorgeschriebenen Werthe f_s besitzt.

§ 12.

Beiläufiges, namentlich auch über ein sehr merkwürdiges Kirchhoff'sches Theorem.

Es sei \mathfrak{S} ein beliebig gegebener Raum, der mit all' seinen Punkten im Endlichen liegt. Sind nun irgend zwei Functionen $f = f(x, y, z)$ und $\varphi = \varphi(x, y, z)$, sammt ihren Ableitungen, in ganzer Erstreckung von \mathfrak{S} stetig, so gilt bekanntlich die Green'sche Formel:

$$(1.) \quad \int_{\mathfrak{S}} (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f) d\tau = -\int (f\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial f}{\partial n}) do,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $d\tau$ und über alle Oberflächenelemente do des Raumes \mathfrak{S} . Dabei bezeichnet n die auf do errichtete innere Normale.

Man markire jetzt innerhalb \mathfrak{S} irgend einen Punkt p , bezeichne den Abstand des variablen Punktes (x, y, z) von diesem festen Punkte p mit r , und setze:

$$\varphi = \varphi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}.$$

Alsdann wird offenbar die Formel (1.), weil φ im Punkt p unstetig ist, für den Raum \mathfrak{S} nicht mehr gelten, wohl aber gültig sein für denjenigen *schaalenförmigen Raum* $\mathfrak{S} - \mathfrak{K}$, in welchen \mathfrak{S} sich verwandelt durch Absonderung einer kleinen um p beschriebenen Kugel \mathfrak{K} . Somit ergibt sich:

$$(2.) \int_{\mathfrak{S} - \mathfrak{K}} (f \Delta \varphi - \varphi \Delta f) d\tau = - \int (f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n}) d\sigma - \int (f \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial f}{\partial \nu}) d\omega,$$

das letzte Integral ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente $d\omega$ der Kugel \mathfrak{K} . Dabei bezeichnet ν die *äussere* Normale dieser Kugel, mithin eine in jenen schaaalenförmigen Raum hineinlaufende Richtung.

Bekanntlich ist [vgl. Seite 262 (5A.)]:

$$\Delta \varphi = \alpha^2 \varphi.$$

Nimmt man nun an, dass f in Erstreckung des Raumes \mathfrak{S} eben derselben Differentialgleichung, d. i. der Formel:

$$\Delta f = \alpha^2 f$$

Genüge leistet, so verschwindet in (2.) das Integral linker Hand, sodass man also erhält:

$$(3.) \int (f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n}) d\sigma + \int (f \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial f}{\partial \nu}) d\omega = 0.$$

Hier ist offenbar: $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial \nu} = \frac{d\varphi(r)}{dr}$. Auch sind $\varphi(r)$ und $\frac{d\varphi(r)}{dr}$ auf der Kugeloberfläche constant. Demgemäss ergibt sich:

$$(4.) \int (f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n}) d\sigma + \frac{d\varphi(r)}{dr} \int f d\omega - \varphi(r) \int \frac{\partial f}{\partial \nu} d\omega = 0,$$

wo r den *Radius der Kugel* vorstellt. Diese Formel (4.) kann offenbar auch so geschrieben werden:

$$(5.) \int (f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n}) d\sigma + \frac{d\varphi(r)}{dr} \cdot 4\pi r^2 M - \varphi(r) \cdot 4\pi r^2 M' = 0,$$

wo alsdann M und M' die arithmetischen Mittel derjenigen Werthe vorstellen, welche f und $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ auf der Kugeloberfläche besitzen. Beachtet man, dass

$$\varphi(r) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad \text{mithin} \quad \frac{d\varphi(r)}{dr} = -\frac{(1 + \alpha r)e^{-\alpha r}}{r^2}$$

ist, so geht die Formel (5.) über in:

$$(6.) \quad \int (f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n}) d\sigma - 4\pi(1 + \alpha r)e^{-\alpha r} M - 4\pi r e^{-\alpha r} M' = 0.$$

Lässt man jetzt den Radius r der um p beschriebenen Kugel \mathfrak{K} zu Null herabsinken, und beachtet man, dass hiebei M in denjenigen Werth U_p sich verwandelt, den die Function U im Punkte p besitzt, so erhält man sofort:

$$(7.) \quad \int (f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n}) d\sigma - 4\pi f_p = 0;$$

sodass man also zu folgendem Resultat gelangt:

Satz. — *Es sei \mathfrak{S} ein beliebig gegebener Raum, der mit all seinen Punkten im Endlichen liegt. Ferner sei $f = f(x, y, z)$ irgend eine Function, die sammt ihren Ableitungen in Erstreckung des Raumes \mathfrak{S} stetig ist, und die daselbst auch überall der Differentialgleichung:*

$$(8.) \quad \Delta f = \alpha^2 f$$

Genüge leistet. Dabei soll α eine beliebig gegebene (positive oder negative) Constante vorstellen.

Alsdann wird der Werth, den die Function f in irgend einem Punkte p innerhalb \mathfrak{S} besitzt, darstellbar sein durch folgendes über alle Oberflächenelemente $d\sigma$ des Raumes \mathfrak{S} ausgedehnte Integral:

$$(9.) \quad f_p = \frac{1}{4\pi} \int (f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n}) d\sigma,$$

wo

$$(10.) \quad \varphi = \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

ist. Dabei bezeichnet n die innere Normale des Elementes $d\sigma$, und r den Abstand dieses Elementes $d\sigma$ von jenem Punkte p .

Dass dieser Satz für $\alpha = 0$ in einen bekannten Green'schen Satz übergeht, bedarf kaum der Bemerkung. Beachtenswerth aber erscheint, dass dieser Satz (9.) als Specialfall enthalten ist in einem sehr merkwürdigen und sehr allgemeinen *Kirchhoff'schen Theorem**). Dieses letztere kann, wie man ohne sonderliche Mühe finden wird, folgendermassen ausgesprochen werden:

*) *Kirchhoff's Vorlesungen über mathematische Optik*, Leipzig, 1891. Daselbst Seite 27.

Das Kirchhoff'sche Theorem. — Es sei gegeben eine von den Coordinaten x, y, z und von der Zeit t abhängende Function:

$$(11.) \quad F = F(x, y, z, t),$$

welche an allen Stellen des Raumes und für jeden beliebigen Zeit-
augenblick der Differentialgleichung Genüge leistet:

$$(12.) \quad \Delta F = A^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

wo A eine gegebene Constante sein soll. Alsdann wird der Werth dieser Function F in irgend einem Punkte (x_p, y_p, z_p) zur Zeit t folgendermassen darstellbar sein:

$$(13.) \quad F(x_p, y_p, z_p, t) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial n_r} \frac{F(x, y, z, t - Ar)}{r} - \frac{\partial}{\partial n_{xyz}} \frac{F(x, y, z, t - Ar)}{r} \right\} d\omega,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Oberflächenelemente $d\omega$ irgend eines den Punkt (x_p, y_p, z_p) in sich enthaltenden Raumes \mathfrak{S} . Dabei bezeichnen (x, y, z) die Coordinaten eines auf $d\omega$ liegenden Punktes, r den Abstand dieses Punktes von dem festen Punkt (x_p, y_p, z_p) , und n die auf $d\omega$ errichtete innere Normale.

Die Differentiation $\frac{\partial}{\partial n}$ bezieht sich auf eine Verschiebung jenes Oberflächenpunktes (x, y, z) längs der Normale n . Was die dem ∂n beigefügten Indices r und xyz betrifft, so soll das Symbol ∂n_r andeuten, dass die Differentiation so auszuführen ist, als ob bei jener Verschiebung nur allein r sich änderte (nicht aber x, y, z). Und andererseits soll das Symbol ∂n_{xyz} andeuten, dass bei der betreffenden Differentiation so zu verfahren ist, als ob umgekehrt bei jener Verschiebung nur allein x, y, z sich änderten (nicht aber r).

Selbstverständlich sind zur Gültigkeit des Theorems noch gewisse Stetigkeitsbedingungen erforderlich, auf die ich aber (ebenso wie Kirchhoff) hier nicht näher eingehen möchte.

Giebt man nun der Function (11.) die speciellere Gestalt:

$$F(x, y, z, t) = f(x, y, z)e^{Bt},$$

wo B eine Constante sein soll, so verwandelt sich die Differentialgleichung (12.) in

$$(14.) \quad \Delta f(x, y, z) = A^2 B^2 f(x, y, z);$$

während gleichzeitig die Formel (13.) übergeht in:

$$f(x_p, y_p, z_p, t)e^{Bt} = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n_r} \frac{e^{B(t-Ar)}}{r} - \frac{e^{B(t-Ar)}}{r} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial n_{xyz}} \right\} d\omega.$$

Hier sind jetzt offenbar die Indices r und xyz nicht weiter noth-

wendig. Lässt man dieselben fort, und dividirt man zugleich durch e^{Bt} , so erhält man:

$$(15.) \quad f(x_p, y_p, z_p) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ f(x, y, z) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-ABr}}{r} - \frac{e^{-ABr}}{r} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial n} \right\} d\sigma.$$

Diese Formeln (14.), (15.) repräsentiren aber (abgesehen von den fehlenden Stetigkeitsvoraussetzungen) den vorhin aufgestellten Satz (8.), (9.), wobei AB für α steht. Somit ist dargethan, dass das Kirchhoff'sche Theorem jenen vorhin aufgestellten Satz als speciellen Fall in sich enthält.

Das Kirchhoff'sche Theorem repräsentirt also eine Erweiterung der Green'schen Untersuchungen, und zwar eine Erweiterung derselben nach einer ganz neuen Seite hin. Demgemäss habe ich mich im gegenwärtigen Paragraph bemüht, den eigentlichen Inhalt dieses Kirchhoff'schen Theorems zur deutlichen Anschauung zu bringen.