

www.e-rara.ch

Opuscula statico-mechanica principiis analyseos finitorum superstructa

Pasquich, Johann

Lipsiae, 1799

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 4678

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-20197>

Volumen II.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

OPUSCULA
STATICO-MECHANICA
PRINCIPIIS
ANALYSEOS FINITORUM
SUPERSTRUCTA

EDITORE

IOANNE PASQUICH

REGIAE SCIENTIARUM SOCIETATIS BOHEMICAE MEMBRO
EXTRAORDINARIO; REGIAE SOCIETAT. SCIENT. GOTTIN-
GENSIS A COMMERC. LITTERARUM SODALI; ET MATHE-
SEOS SUBLIMIORIS IN REG. SCIENT. UNIVERSIT.
HUNGAR. PROFESSORE EMERITO.

VOLUMEN II.

CUM FIGURIS.

LIPSIAE
IN LIBRARIA WEIDMANNIANA

1799.

OF THE
STATISTICAL-MECHANICAL

THEORY
AND
APPLICATIONS

BY
JOHN W. GIBBS
OF THE
YALE UNIVERSITY
NEW HAVEN, CONNECTICUT
1902

NEW YORK
THE SCIENCE PRESS
1902

170



INDEX CONTENTORUM.

Introductio.

Complectens brevem expositionem naturae et discriminis quantorum
commensurabilium et incommensurabilium.

Differtatio I.

De generalibus quibusdam corporum phylicorum, viriumque in illa
agentium proprietatibus.

Differtatio II.

De lege aequilibrîi virium in rectas inflexiles directe agentium.

Differtatio III.

De viribus in rectas inflexiles oblique agentibus, earumque compo-
sitione et resolutione.

Differtatio IV.

De Centro aequilibrîi virium directionibus parallelis in datum systēma
plurium punctorum agentium.

Differtatio V.

De centro gravitatis in genere.

I N D E X.

Dissertatio VI.

De investigatione centri gravitatis linearum et planorum gravium.

Dissertatio VII.

De investigatione centri gravitatis in corporibus, eorumque superficiebus.

Dissertatio VIII.

De motu punctorum aequabili uniformiterque accelerato et retardato.

Dissertatio IX.

De determinatione motus progressivi datarum massarum per datas vires.

Dissertatio X.

De lapsu corporum gravium per plana inclinata et lineas curvas.

Dissertatio XI.

De momento inertiae.

Dissertatio XII.

De motu massarum circa axes fixos.

Dissertatio XIII.

De motu pendulorum, centroque oscillationis.



INTRODUCTIO

COMPLECTENS BREVEM EXPOSITIONEM NATURAE ET DISCRIMINIS QUANTORUM COMMENSURABI- LIUM ET INCOMMENSURABILIIUM.

1. DEFINITIO.

Si quodcunque quantum g aliquoties, puta bis, ter, quater, aut pluries, sumtum exaequet aliud quantum G ; erit g pars *aliquota* quanti G , et G *multipulum* quanti G . Quantum e est *communis pars aliquota* duorum quantorum M , N , si e aequetur alicui parti aliquotae tam quanti M , quam quanti N , si e. gr. quantum e sit pars *5^{ta}* quanti M , et pars *7^{ma}* quanti N .

2. Corollarium.

Pars aliquota x partis aliquotae X quanti Z est pars aliquota quanti Z .
(1. §).

3. DEFINITIO.

Quanta M , N erunt *commensurabilia*, si ea communem habuerint aliquam partem aliquotam (1. §): quanta vero M , N dicentur *incommensurabilia*, si nullam habeant communem partem aliquotam.

Scholion.

Ut nimirum duo quanta M , N possint dici commensurabilia, sufficit, ut constet, dari certum quantum e , quod sit communis pars aliquota eorundem quantorum (1. §), dari idcirco aliquam partem aliquotam quanti M , quae aequetur certae parti aliquotae quanti N , licet fors non omnis pars aliquota quanti M sit simul aliqua pars aliquota quanti N . Sic si esset $M=7e$, et $N=5e$, adeoque e pars *7^{ma}* quanti M , et pars *5^{ta}* quanti N ; esset e communis pars aliquota quantorum M , N (1. §), quantaque haec essent commensurabilia, licet non omnis pars aliquota quanti M sit aliqua

pars aliquota quanti N, ut e. gr. pars 3^{ta} $\frac{M}{3} = \frac{7e}{3}$ nulla potest esse pars aliquota quanti N=5e; secus daretur numerus integer n, pro quo fieret $\frac{7e}{3} = \frac{5e}{n}$, hinc $n = \frac{15}{7}$, quod est impossibile. Verum, ut duo quanta M, N sint incommensurabilia, haud sufficit, ut *certa* pars aliquota quanti M nulli parti aliquotae quanti N aequetur, aut ut *certum* quantum e nulla sit communis pars aliquota quantorum M, N; ad id enim necessario requiritur, ut nullum absolute sit possibile quantum e aequale communi parti aliquotae quantorum M, N, ut idcirco nulla absoluta pars aliquota quanti M, utcumque parva illa sumatur, sit simul aliqua pars aliquota quanti N. Haec de discrimine quantorum commensurabilium et incommensurabilium in gratiam tyronum dicta sint, quorum multi doctrinam, quam hic paucis exponere constitui, aut penitus ignorabunt, aut minus, quam necessarium est, habebunt perfectam.

4. Corollarium 1.

Si alterutrum duorum quantorum M, N, puta N, fuerit pars quaecunque aliquota alterius quanti M; erit quaevis pars aliquota quanti N aequalis alicui parti aliquotae quanti M (2. §), quantaque M, N erunt commensurabilia (3. 1. §).

5. Corollarium 2.

Impossibile est, ut duo quanta M, N sint commensurabilia simul et incommensurabilia (3. §): duo autem quanta homogenea M, N (e. gr. duo tempora, vel duae lineae, aut duae superficies, etc.) semper erunt vel commensurabilia, vel incommensurabilia (3. §).

6. Corollarium 3.

Quoties duo quanta M, N fuerint commensurabilia, toties vel erit ipsum quantum N aliqua pars *mta* quanti M, vel certa pars *nta* quanti N aequabitur alicui *mtae* parti quanti M (4. 3. §): exabit igitur numerus integer m, vel fractus $\frac{m}{n}$ aequalis exponenti rationis quanti M ad N, pro quo fiet $M = Nm$ vel $M = N \frac{m}{n}$. E. gr. si dicas, partem *stam* quanti N aequari parti *guae* quanti M, aut totum quantum N esse partem *gvam* quanti M, erit $M = N \frac{8}{5}$ casu primo, et $M = N 8$ casu altero; consequenter erit $\frac{8}{5}$, casu primo, et 8, casu altero, exponens rationis quanti M ad N.

7. Corol-

7. Corollarium 4.

Et vicissim, si extet numerus integer m vel fractus $\frac{m}{n}$ aequalis exponenti rationis quanti M ad N , pro quo fiat $M = N^m$ vel $M = N^{\frac{m}{n}}$; erit N pars *mta* quanti M casu primo, et pars *nta* quanti N aequabitur parti *mtae* quanti M casu secundo (1. §): utroque casu erunt ergo M , N quanta commensurabilia (4. 3. §).

8. Corollarium 5.

Quamobrem, si certo constet, duo quanta M , N esse incommensurabilia, constabit eo ipso, nullum esse numerum integrum vel fractum assignabilem, qui aequetur exponenti rationis quanti M ad N : secus enim quanta M , N , ex hypothesi incommensurabilia, essent simul commensurabilia (7. §), contra (5. §)

9. Corollarium. 6.

Et vicissim, undecunque constiterit, nullum esse numerum, nec integrum, neque fractum, assignabilem, qui aequetur exponenti rationis quanti M ad quantum homogeneum N , constabit eo ipso, quanta M , N esse incommensurabilia; secus deberent ea esse commensurabilia (5. §), proinde assignabilis esset talis numerus (6. §), contra hypothesin.

10. Theorema.

Pro quibuscumque duobus quantis $E > e$ inaequalibus extat numerus integer m , pro quo esset $E = em$, vel $E > em$ et simul $E < e(m+1)$.

Demonstratio.

Cum minus quantum e instar unius partis quanti majoris E liceat spectare, poterit quantum E in partes aequales e , e , e , --- e mente resolvi, ita ut numerus m harum partium per magnitudinem quanti E ejusdemque partis e perfecte determinatus sit, utque aut hae partes simul sumtae exaequent quantum E , quo fiat $E = em$, aut eae omnes una cum quapiam parte x , quae minor sit parte e , totum E constituent, adeoque sit $E = em + x$, proinde $E > em$, sed simul $E < e(m+1)$.

11. Corollarium. 1.

Pro quovis quanto e utcumque parvo et alio homogeneo E utcumque magno extabit numerus integer r , pro quo *rtuplum* quanti e esset majus

quanto E , nimirum $e > E$ (10. §.): igitur pars *ita* quanti E minor quanto e , nimirum $\frac{1}{r} E < e$.

12. Corollarium. 2.

Si quanta M , N sunt incommensurabilia, dari debet pars aliqua *ita* quanti N minor quanto M (11. §.), et pro quavis ejusmodi parte, utcunque magni denominatoris n , cum illa nulli parti aliquotae quanti M possit aequari (3. §.), cum idcirco M nullum possit esse multipulum ejusdem partis (1. §.), debet extare numerus integer m , pro quo fiat $M > N \frac{m}{n}$ et simul $M > N \frac{m+1}{n}$ (10. §.).

13. Corollarium. 3.

Ex his *rationalium irrationaliumque* rationum natura elucet. Ratio inter duo quanta M , N commensurabilia est *rationalis*, ut et illius exponens, utpote aequalis determinato cuipiam numero integro vel fracto e , pro quo fit $M = Ne$ (6. §.). Ratio autem inter duo quanta, M , N incommensurabilia est *irrationalis*; exponens illius e est *furdus* numerus seu *irrationalis*, nulli determinato numero, integro aut fracto, aequalis (8. §.) sed unitati incommensurabilis, ita ut is pro iisdem numeris m , n fit $e > \frac{m}{n}$ et $e < \frac{m+1}{n}$, pro quibus est $M > N \frac{m}{n}$ et $M < N \frac{m+1}{n}$ (12. §.).

Scholion.

Exponens enim e supponitur per id ipsum, quod is ex unitate 1 complectitur, indicare, quantum in data ratione $M:N$ ex quanto N in M continetur, seu quoties aut totum quantum N , aut certa pars aliquota quanti N sumi debet, ut prodeat M : utprimum ergo est $M > N \frac{m}{n}$ et $M < N \frac{m+1}{n}$, quia id ipsum debet exponens e rationis $M:N$ indicare; erit quoque $e > \frac{m}{n}$ et $e < \frac{m+1}{n}$, nimirum $e > 1 \cdot \frac{m}{n}$ et $e < 1 \cdot \frac{m+1}{n}$.

14. DEFINITIO.

Mensuram alicujus quanti Q vocant quantum homogeneum q determinatae notaeque magnitudinis: quantum autem Q ope mensurae q *metiri* dicimur, dum rationem illius ad mensuram q investigamus.

15. Corol:

15. Corollarium, 1.

Dato exponente e rationis quanti Q ad ipsius mensuram q , cum eo ipso sit $Q = q^e$, poterit poni $Q = e$ posita mensura $q = 1$: nimirum omne quantum Q , spectata ejusdem magnitudine licebit per certum numerum e exprimere, qui videlicet aequetur exponenti rationis quanti Q ad quantum q pro ejusdem mensura assumptum (14. §.), modo hic numerus ad unitatem mensuram q denotantem relatus cogitetur.

Sic e. gr. in geometricis dimensionibus, denotante q certum pedem cubicum, si numerus integer 4 vel fractus $\frac{4}{2}$ sit exponens rationis dati Cylindri C ad eundem pedem cubicum q ; poterit poni $C = 4$ casu primo, et $C = \frac{4}{2}$ casu secundo, modo hi numeri ad pedem cubicum q pro unitate assumptum relati cogitentur, quo fiat, ut $C = 4$ vel $C = \frac{4}{2}$ tantundem denotet, ac cylindrum C aequari quatuor pedibus cubicis q , vel quatuor *5tis* unius pedis cubici q .

Scholion.

Hoc sensu omnis numerus concretus exprimit aliquod quantum, pro ejus mensura sumta est unitas, ad quam is numerus refertur; idemque numerus, instar abstracti spectatus, dat exponentem rationis quanti per illum numerum expressi ad quantum pro ejus mensura assumptum. Sic e. gr. 8 horae exprimunt certum tempus, pro cuius mensura una hora est sumta, ita ut 8 sit exponens rationis ejusdem temporis ad assumptam mensuram.

16. Corollarium. 2.

Hoc tamen modo (15. §.) tunc solum licebit datum quantum Q per certum numerum accurate exprimere, si illud sit assumptae mensurae q commensurabile: dum enim Q fuerit incommensurabile mensurae q ; nullus erit assignabilis numerus e , pro quo possit poni $Q = q^e$, adeoque $Q = e$ pro $q = 1$ (13. §.).

17. Corollarium. 3.

Semper autem, dum datum quantum Q incommensurabile fuerit assumptae mensurae q , poterit accipi aliqua *nta* pars mensurae q minor quanto Q , et pro illa determinari numerus integer m , qui det $Q > q^{\frac{m}{n}}$ et $Q < q^{\frac{m+1}{n}} = q^{\frac{m}{n}} + \frac{q}{n}$ (12. §.): hac ergo ratione poterimus adproximare ad quantum $q^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}$ pro $q = 1$, cujus differentia a dato quanto

erit minor parte $nta \frac{q}{n}$ mensurae q , quod idcirco in praxi, ubi minutiae solent negligi, quanto Q poterit substitui, si numerus n adeo magnus sit, ut pars nta mensurae q citra notabilem errorem possit negligi.

Scholion.

Ponamus dari triangulum rectangulum, quod habeat hypotenusam h , et cathetos aequales q , q ; erit $h^2 = q^2 + q^2 = 2q^2$, hinc $h = q\sqrt{2}$. Exponens rationis hypotenusae h ad cathetum q est $\sqrt{2}$, nulli idcirco numero assignabili, nec integro neque fracto, aequalis; hypotenusa h est incommensurabilis catheto q ; sumta catheto $q = 1$ pro mensura hypotenusae, poterit quidem poni $h = \sqrt{2}$, sed h nullo numero assignabili poterit exacte exprimi. Interea licebit adproximare ad rectam qe , cujus differentia ab hypotenusa h minor sit data quacunque parte decimali $q \cdot \frac{1}{100 \dots 0}$ ipsius catheti q , si nimirum extractione radice $\sqrt{2}$ adproximetur ad numerum e , cujus differentia a radice $\sqrt{2}$ minor sit parte decimali $\frac{1}{100 \dots 0}$ unitatis,

18. Corollarium 4.

Interea etiam eo casu, quo quantum Q fuerit incommensurabile assumtae mensurae q , quo casu idcirco pro quovis numero integro n alter mextiterit, qui det $Q > q \frac{m}{n}$ et $Q < q \frac{m+1}{n}$ (12. §.), licebit ponere $Q = qe$, hinc $Q = e$ pro $q = 1$, modo per e intelligatur numerus surdus semper major fractione $\frac{m}{n}$ et minor fractione $\frac{m+1}{n}$ (13. §.), ad quem per (17. §.) adproximare liceat.

Scholion.

Expressiones hae, utriusque generis, quantorum per numeros (15. 18. §.) amplissimum habent usum in universa mathesi applicata, ipsaeque adproximationes in (17. §.) expositae utilissime adhibentur, ubi summa accuratio nec possibilis est, neque necessaria. Verum ubi de demonstrandis quantorum relationibus agitur, ne certitudo evidentiaque mathematica patitur, summo rigore opus est, eoque ipso ab incommensurabilitate quantorum nunquam licet praescindere, et ea, quae de quantis pro commensurabilibus sumtis demonstrata habentur, ad quanta generatim sumta extendere: quoties idcirco relatio aliqua duorum aut plurium quantorum in sequentibus demon-

demonstranda fuerit, quanta ejusmodi in utroque statu considerabimus, quo evidenter appareat, utrum talis relatio de iis semper, seu illa sint commensurabilia, seu incommensurabilia, possit praedicari, atque in hunc finem subjungam criteria, tam aequalitatis duorum quantorum uni tertio incommensurabilium, quam proportionalitatis quatuor quantorum talis indolis.

19. DEFINITIO.

Quantum aliquod g bis, ter, quater, et generatim *ries contineri* dicitur in dato quanto G , si quantum g *ries* sumtum exaequet aut totum quantum G , aut unam partem quanti G , ita ut pars altera quanti G minor sit quanto g .

E. gr. Numerus 4 ter continetur tam in 12, quam in 15, quia numerus 4 ter sumtus exaequat totum numerum 12, et unam partem numeri 15, ita ut pars altera 3 hujus numeri minor sit numero 4.

20. Theorema.

Si dentur duo quanta inaequalia $U > u$, eandemque comparentur cum quanto tertio homogeneo V ; possibilis debet esse pars aliquota quanti V , quae in quanto majore U pluries contineatur, quam in minore u .

Demonstratio.

Quidquid sint quanta U, u, V , debet necessario extare pars aliquota quanti V , quae minor sit singulis quantis U, u , eorundemque differentia $U - u = D$ (11. §.), quae idcirco, si non pluries, semel tamen contineatur in u , et semel in D (19. §.), adeoque pluries in $U = u + D$ quam in u .

21. Theorema.

Duo quanta Z, X uni tertio z incommensurabilia erunt necessario inter se aequalia, si pro quovis utcumque magno numero integro n extet alter numerus integer m , quo fiat tam $Z > z \frac{m}{n}$ et $Z < z \frac{m+1}{n}$, quam $X > z \frac{m}{n}$ et $X < z \frac{m+1}{n}$.

Demonstratio.

Pro qualibet *nta* parte quanti z dari numerum integrum m , pro quo fit tam $Z > z \frac{m}{n}$ et $Z < z \frac{m+1}{n}$, quam $X > z \frac{m}{n}$ et $X < z \frac{m+1}{n}$ tantundem significat, ac quamlibet partem aliquotam quanti z in quovis quantorum Z, X toties contineri, quoties ea continetur in altero (19. §.): in assumpta hypo-

hypothesi est ergo impossibilis pars aliquota quanti z , quae in alterutro quantorum Z , X pluries quam in altero contineatur, unde necessario sequitur, quanta Z , X , cum nequeant esse inaequalia (20. §.), esse inter se aequalia.

22. Theorema.

Si, datis quatuor quantis M , N , P , Q , pro quolibet utcumque magno numero integro n alter numerus integer m fuerit possibilis, qui det tam $M > N \frac{m}{n}$ et $M < N \frac{m+1}{n}$, quam $P > Q \frac{m}{n}$ et $P < Q \frac{m+1}{n}$ (12. §.), erit ratio quanti M ad N aequalis rationi quanti P ad Q , seu erit $M:N=P:Q$.

Demonstratio.

Si enim quantum x sit homogeneous quantum Q et petatur ratio quanti x ad Q , aequalis rationi quanti M ad N , quo fiat $M:N=x:Q$; necesse est, ut tantundem contineat x ex Q , quantum continet M ex N : pro iisdem ergo numeris integris m , n , pro quibus fuerit $M > N \frac{m}{n}$ et $M < N \frac{m+1}{n}$, debeat etiam esse $x > Q \frac{m}{n}$ et $x < Q \frac{m+1}{n}$. Quare, cum per hypothesein sit $P > Q \frac{m}{n}$ et $P < Q \frac{m+1}{n}$; erit necessario $x=P$ (21. §.), consequenter $M:N=P:Q$.

DISSERTATIONES
AD
STATICAM CORPORUM SOLIDORUM
PERTINENTES.

STATIONARY
AND
STATIONARY
STATIONARY
STATIONARY

DISSERTATIO I.
DE
GENERALIBUS QUIBUSDAM CORPORUM PHYSICORUM,
VIRIUMQUE IN ILLA AGENTIUM
PROPRIETATIBUS.

23. DEFINITIO.

Tria in omni corpore physico merentur notari: *Volumen*, seu pars spatii, quam totum corpus occupat: *Massa*, seu quantitas materiae sub eodem volumine contentae: *Pori* denique, seu interstitia omni materia, ad massam corporis pertinente, vacua et per totum volumen, teste experientia, disseminata.

24. Corollarium 1.

Inventio voluminis dati cujuscunque corporis physici ab iisdem pendet principiis, quibus determinatio soliditatis corporum geometricorum nititur (23. §.).

E. gr. Volumen cylindri plumbei aequabitur producto ex area baseos in altitudinem cylindri; volumen conii lignei erit aequale uni tertiae producti ex area baseos in altitudinem conii, et sic porro.

25. Corollarium 2.

Utcunque autem dati alicujus corporis volumen notum fuerit, poterit ejusdem massa penitus ignorari (23. §.). Cum enim partem unam voluminis massa expleat, partem vero alteram pori occupent; nisi spatium innotescat, quod omnes pori dati corporis simul sumti occupant, impossibile erit spatium noscere, quod ejus massa explet.

26. Corollarium 3.

Interea facile ex (23. §.) elucet, massam cujuslibet corporis eo *densiorem* futuram, quo minor fuerit pars dati voluminis, quam omnes pori occupant, quo magis idcirco particulae materiales massam corporis constituentes stipatae, seu quo viciniore illae inter se fuerint, ita ut generatim, quaelibet massa eo densior futura sit, quo major fuerit illius quantitas sub determinato volumine.

27. DEFINITIO.

Quamobrem, si massa per certum volumen sic sit diffusa, ut quaevis partes aequales ejusdem voluminis, utcunque magnae aut parvae, eandem massae quantitatem complectantur, eadem erit in omnibus voluminis partibus massae densitas, ipsaque massa vocabitur *aequabiliter densa*: corpora autem aequabiliter densa vocabuntur, quorum massae (23. §.) aequabiliter densae fuerint. Generatim autem duo corpora, quorum massae ejusdem vel diversae speciei materia constiterint, ut e. gr. duo globi aurei, vel duo globi, quarum unus sit plumbeus, et alter aureus; erunt *homogenea* casu primo, et *heterogenea* casu secundo. Hinc intelligitur, quid significet, corpus aliquod C esse *homogeneum*: quoties nimirum omnes, magnae et parvae partes corporis C ejusdem speciei massa constiterint; dicetur C esse corpus *homogeneum*.

28. Corollarium 1.

Si corpus C voluminis V sit aequabiliter densum, sumaturque aliqua pars c ejusdem corporis, cujus volumen aequetur parti dimidia, aut 3^{tae}, vel 4^{tae}, aut generatim parti n^{tae} totius voluminis V; debeat quoque massa partis c aequari uni n^{tae} parti massae totius corporis C (27. §.)

29. Corollarium 2.

Quare, sumta alia parte q corporis aequabiliter densi C; cujus volumen sit *rtuplum* voluminis partis p; erit etiam massa partis q *rtupla* massae partis p (28. §.): quaevis idcirco pars q corporis aequabiliter densi C, cujus volumen fuerit *rtuplum* unius n^{tae} partis voluminis V totius corporis C, habebit quoque massam *rtuplam* unius n^{tae} partis massae totius corporis C (28. §.).

30. Corollarium 3.

Si duo corpora aequabiliter densa sub eodem volumine inaequales massas complectantur, ita ut massa unius corporis aut totam massam alterius
ries

ries sumtam, aut unam *ntam* partem hujus massae *ries* acceptam exaequet; debeat etiam densitas prioris corporis aut totam densitatem, aut unam *ntam* partem densitatis posterioris corporis *ries* sumtam exaequare (27. 26. §.).

31. Corollarium 4.

Quodsi autem duo corpora L, l aequabiliter densa sub inaequalibus voluminibus K, k eandem massae quantitatem complectantur; erit massa corporis l, cujus volumen k minus est, densior quam massa corporis L, cujus volumen K est majus. In hac videlicet hypothese continebit pars corporis L, cujus volumen exaequat volumen k corporis l, minus massae, quam corpus l sub volumine k complectitur (27. §.); consequenter erit densitas massae in illa parte corporis L minor densitate massae corporis l (26. §.), eoque ipso erit quoque densitas massae totius corporis L minor densitate massae corporis l (27. §.).

32. Corollarium 5.

Ponamus, corpora L, l aequabiliter densa sub inaequalibus voluminibus K, k eandem massae quantitatem μ complecti, esseque $k = K \frac{l}{n}$, vel $k = K \frac{r}{n}$, nimirum volumen minus corporis l aequale aut uni *ntae* parti majoris voluminis K corporis L, aut *rtuplo* unius *ntae* partis voluminis K; debeat reciproce densitas corporis L aequari aut uni *ntae* parti densitatis corporis l, aut *rtuplo* unius *ntae* partis hujus densitatis. Nam pars x corporis L, cujus volumen sit $= K \frac{x}{n}$ vel $= K \frac{r}{n}$, habebit massam pariter $= \mu \frac{x}{n}$ vel $= \mu \frac{r}{n}$ (28. 29. §.): igitur erit densitas partis x corporis L, eadem cum densitate totius corporis L (27. §.), vel $= \frac{x}{n}$ vel $= \frac{r}{n}$ densitatis corporis l (30. §.).

33. Corollarium 6.

Corpora homogenea et aequabiliter densa, omnesque illorum partes, utcunque magnae vel parvae, eandem habent massarum densitatem (27. §.).

34. Theorema.

Densitates D, d duorum corporum aequabiliter densorum, massas inaequales M, m sub eodem volumine continentium, sunt in ratione directa massarum, seu est $D:d = M:m$.

Demonstratio.

Massae M, m vel sunt commensurabiles, vel incommensurabiles (3. §.). Primo casu necessario extabit numerus integer r vel fractus $\frac{r}{n}$, pro quo fit $M = mr$ vel $M = m \frac{r}{n}$ (6. §.): igitur erit etiam $D = dr$, vel $D = d \frac{r}{n}$ (30. §.), hinc utroque casu $D:d = M:m$.

Sint jam massae M, m incommensurabiles; necesse est, ut pro quolibet utcumque magno numero integro n extet alter numerus integer r , pro quo fiat $M > m \frac{r}{n}$ et $M < m \frac{r+1}{n}$ (12. §.). Quare, cum pro $M = m \frac{r}{n}$ vel $M = m \frac{r+1}{n}$ necessario fieret $D = d \frac{r}{n}$ vel $D = d \frac{r+1}{n}$ (30. §.), debet esse pro iisdem numeris $D > d \frac{r}{n}$ et $D < d \frac{r+1}{n}$ (26. §.), hinc $D:d = M:m$ (22. §.).

35. Theorema.

Densitates D, d duorum corporum aequabiliter densorum, eandem massae quantitatem sub diversis voluminibus V, v continentium, sunt in ratione inversa voluminum, seu est $D:d = v:V$.

Demonstratio.

Volumina V, v commensurabilia possunt esse, vel incommensurabilia (3. §.). Casu primo dabitur certus numerus integer n vel fractus $\frac{n}{r}$, pro quo fit $V = vn$ vel $V = v \frac{n}{r}$ (6. §.), quo fiat $v = V \frac{r}{n}$ vel $v = V \frac{r}{n}$: consequenter erit reciproce $D = d \frac{r}{n}$ vel $D = d \frac{r}{n}$ (32. §.), et ideo utroque casu $D:d = v:V$.

Quodsi vero volumina V, v sint incommensurabilia debet, pro quolibet, utcumque magno, numero integro n extare alter numerus integer r , quo fiat $V > v \frac{r}{n}$ et $V < v \frac{r+1}{n}$ (12. §.): cum igitur pro $V = v \frac{r}{n}$ vel $V = v \frac{r+1}{n}$ deberet esse reciproce $d = D \frac{r}{n}$ vel $d = D \frac{r+1}{n}$ (32. §.), erit re ipsa $d > D \frac{r}{n}$ et $d < D \frac{r+1}{n}$ (31. §.), hinc $d:D = V:v$ per (22. §.).

36. Corollarium 1.

Densitates D, d duorum corporum aequabiliter densorum, inaequales massas M, m sub inaequalibus voluminibus V, v continentium, sunt inter se in ratione composita ex directa ratione massarum, et inversa voluminum, seu est $D:d=Mv:mV$. Si enim cogitetur tertium corpus aequabiliter densum, cujus densitas sit δ , massa M , et volumen y ; erit

$$D:\delta=v:V \text{ per (35. §.)};$$

$$\delta:d=M:m \text{ per (34. §.)};$$

igitur multiplicando

$$D\delta:\delta d=vM:Vm, \text{ seu } D:d=vM:Vm.$$

37. Corollarium 2.

Pro corporibus homogeneis aequabiliterque densis erit per (33. §.) in (36. §.) $D=d$, hinc $vM=Vm$, et $M:m=V:v$, nimirum: massae duorum corporum homogeneorum et aequabiliter densorum sunt inter se in ratione directa voluminum.

38. DEFINITIO.

Corpus, quod aut constanter in eodem loco manet, aut locum continuo mutat, dicitur *quiescere* casu primo, et *moveri* casu altero: quidquid autem aut actu aliquem motum producit, aut eum producere nititur, ita ut is sublatis impedimentis necessario debeat sequi, ei *Vim motricem* velut motus causam tribuimus.

39. DEFINITIO.

Omne corpus, teste experientia, ita est comparatum, ut illud perpetuo deorsum urgeatur, actuque labatur, nisi quid lapsum impediat: vis, quae omnia corpora circa terrae superficiem deorsum urget, vocatur *Gravitas* seu *Vis gravitatis*.

40. Corollarium 1.

Omne corpus, quantumlibet parvum id sit vel magnum, est grave (39. §.).

41. Corollarium 2.

Utrum minimae omnium corporum physicorum particulae aequae graves sint (40. §.), singulae nimirum pari efficacia a vi gravitatis deorsum urgeantur (39. §.), nondum hic potest definiri: assumemus id interea instar hypo-

hypotheseos, quae, prouti deinceps videbimus, cum experimentis summa diligentia institutis, calculisque legitime superstructis quam optime consentit.

Scholion.

Haec tamen de quavis terrae regione seorsim sumta debent intelligi. Sicut enim ex variis observationibus exprimentisque in certa regione, quaecunque ea sit, institutis clare videtur sequi, eandem esse efficaciam vis gravitatis in minimas omnium corporum ejus regionis particulas; sic ex aliis observationibus et experimentis aequae clare sequitur, efficaciam vis gravitatis in minimas corporum particulas diversam esse in diversis terrae regionibus.

42. DEFINITIO.

Perpetua experientia docet, minima omnium corporum libere (nimirum ob solam vim gravitatis, quin aliud aliquid in motum ab ejus actione pendentem quaque ratione influat) labentium percurrere rectas inter se ad sensum parallelas, atque ad superficiem aquae stagnantis perpendiculares: ob hanc causam vocari solent ejusmodi rectae jam *Lineae verticales*, jam *gravitatis Directiones*.

43. Corollarium.

Filum tenue, e cujus uno extremo globulus plumbeus, aut aliud aliud quod grave corpusculum libere pendeat, exhibebit, quiescente hoc corpusculo, directionem gravitatis (42. §.).

44. DEFINITIO.

Planum verticale est, quod talem habet situm, ut impossibile sit, ex aliquo ejus puncto lineam verticalem demittere (42. §.), quin illa tota in eodem plano, producto si opus est, jaceat. *Horizontalem* autem *lineam* vocant, ad quam linea verticalis (42. §.) est perpendicularis: et *planum horizontale* dicitur, ad quod linea verticalis est perpendicularis, ita ut illa cum plano, ex omni parte, angulos rectos comprehendat.

45. DEFINITIO.

Pondus absolutum cujuslibet corporis, seu simpliciter *Pondus* est tota pressio, quam vis gravitatis in illo producit (39. §.).

Scholion.

Pondus corporis distinguere debet a vi gravitatis in corpus agente, velut effectus a sua causa. Si e. gr. globum plumbeum G manu sustineas, manum
certa

certa efficacia deorsum premi experieris: nimirum globus G a vi gravitatis deorsum premitur, et istam pressionem, quam vis gravitatis ut causa effectum (38. 39. §.) in globo G producit, is necessario perentiscit, qui globum G manu sustinet; eandem vero pressionem nomine *ponderis* globi G solemus intelligere.

46. Corollarium 1.

Cum quaelibet particula dati corporis C a vi gravitatis deorsum urgeatur (39. 40. §.); debet pondus corporis C aequari summae pressionum, quas singulae particulae materiales ejusdem corporis ob vim gravitatis perentiscunt (45. §.).

47. Corollarium 2.

Quare, cum minimae particulae omnium corporum pari efficacia a vi gravitatis premantur (41. §.), sic pendebunt pondera P, p duorum corporum ab illorum massis M, m , ut pondus P debitum massae M futurum sit aequale ponderi p , vel majus aut minus pondere p debito massae m , prout fuerit massa M aequalis massae m , vel major aut minor massa m (46. §.).

48. Corollarium 3.

In specie vero, si massa alicujus corporis A fuerit *rtupla* massae alterius corporis B , vel *rtupla* unius *ntae* partis massae corporis B ; debet etiam pondus corporis A esse *rtuplum* ponderis corporis B casu primo, vel *rtuplum* unius *ntae* partis ponderis corporis B casu secundo (46. 47. §.).

49. Theorema.

Pondera P, p quorumvis duorum corporum massas M, m habentium sunt his massis proportionalia seu est $P:p=M:m$.

Demonstratio.

Massae M, m commensurabiles sunt, aut incommensurabiles (3. §.). Pro massis M, m commensurabilibus debet dari numerus integer r vel fractus $\frac{r}{n}$, pro quo sit $M=mr$ vel $M=m\frac{r}{n}$ (6. §.): igitur etiam $P=pr$ vel $P=p\frac{r}{n}$ (48. §.), adeoque utroque casu $P:p=M:m$.

Si vero massae M, m sint incommensurabiles, debet pro quolibet utcumque magno numero integro n extare alter numerus integer r , qui

det $M > m \frac{r}{n}$ et $M < m \frac{r+1}{n}$ (12. §.): quare, cum pro $M = m \frac{r}{n}$ vel $M = m \frac{r+1}{n}$ deberet fieri $P = p \frac{r}{n}$ vel $P = p \frac{r+1}{n}$ (48. §.); erit re ipsa $P > p \frac{r}{n}$ et $P < p \frac{r+1}{n}$ (47. §.), et ideo $P:p = M:m$ (22. §.).

50. Corollarium 1.

Si duo corpora aequabiliter densa habeant volumina V, v , massas M, m , pondera P, p , et densitates D, d ; erit $D:d = Mv:mV$ (36. §.), et $M:m = P:p$ (49. §.): igitur $D:d = Pv:pV$, nimirum: *densitates duorum corporum aequabiliter densorum sunt in ratione composita ex ratione directa ponderum et inversa voluminum.*

51. Corollarium 2.

Semper autem, dum duo corpora fuerint homogenea et aequabiliter densa (27. §.), erunt illorum pondera inter se in ratione directa voluminum, nimirum: $P:p = M:m$ (49. §.) et $V:v = M:m$ (37. §.), hinc $P:p = V:v$.

52. Corollarium 3.

Quodlibet corpus determinati ponderis p habet massam m perfecte determinatam, ita ut nullum aliud corpus ejusdem ponderis p plus vel minus, quam m , massae possit habere (47. §.): quamobrem, sumto certo pondere p pro mensura omnium ponderum, sumtaque massa m ei debita pro mensura omnium massarum (14. §.), facile omnes corporum massae per eorum pondera, et haec per illas aestimabuntur. Cum enim sit $\frac{P}{p} = \frac{M}{m}$ (49. §.); patet, exponentem rationis geometricae cujuslibet ponderis P ad assumptam illius mensuram p aequalem futurum exponenti rationis massae M debitaе illi ponderi ad ejusdem massae mensuram m : quodsi ergo per M intelligatur, non massa corporis pondus P habentis, sed exponens rationis hujus massae ad assumptam mensuram m , licebit ponere pondus $P = M$, exponente M relato ad unitatem $= p$; et si per P , non pondus corporis habentis massam m , sed exponens rationis hujus ponderis ad assumptam mensuram p intelligatur, poterit poni ipsa massa $M = P$, exponente P relato ad unitatem $= p$ (15. 18. §.).

Scholion.

Hoc sensu in sequentibus massae corporum determinabuntur per ipsorum pondera, et pondera per massas, ea nimirum ratione, qua in disquisitionibus geometricis arcus per angulos, et hi per illos solent determinari. Si e. gr. pondus p unius librae pro mensura omnium ponderum, et massa m corporis, cujus pondus uni librae aequatur, pro mensura omnium massarum sumatur, tum detur alicujus corporis C massa $M = 8$ id est $8pla$ massae m ; dicetur illius pondus esse $P = 8$, nimirum $8plum$ ponderis p unius librae, adeoque 8 librarum: dato vero pondere $P = \frac{3}{8}$ id est aequale 3 $8vis$ unius librae; erit ejus massa $M = \frac{3}{8}$, nimirum aequalis 3 $8vis$ massae m . Ceterum notent sibi tyrones, saepenumero ipsa corpora gravia nomine ponderum intelligi; sic e. gr. ubi in sequentibus de ponderibus quibusdam A, B, C e datis punctis pendentibus sermo fuerit, re ipsa nomine ponderum debebunt intelligi corpora, quorum pondera sint A, B, C .

53. DEFINITIO.

Quaevs massa aequabiliter densa sic est conformata, ut ea sub quibilibet voluminibus aequalibus det pondera aequalia (27. 47. §.), quo fit, ut si pondus talis massae sub certo volumine noscatur, eo ipso etiam illius pondus sub dato quovis alio volumine possit determinari (51. §.). Ob hanc causam quaevs massa aequabiliter densa sub determinato quopiam volumine v , e. gr. volumine unius digiti, vel pedis cubici, solet considerari: pondus vero massae sub tali volumine vocatur ejus *Gravitas respectiva*, aut *specifica*, seu *Pondus respectivum*, nimirum restrictum ad determinatum volumen v . Massa aequabiliter densa certae speciei (e. gr. aurum) determinatum habet pondus sub determinato volumine v , distinctum ab illo pondere, quod alterius speciei massa (e. gr. argentum) sub eodem habet volumine, unde ratio denominationis gravitatis *specificae* elucet.

54. Corollarium 1.

Si P sit pondus massae aequabiliter densae sub volumine V , et G illius gravitas specifica restricta ad volumen v ; erit $P : G = V : v$ (53. 51. §.)

55. Corollarium 2.

Ex (54. §.) sequitur $P = G \frac{V}{v}$, hinc $P = GV$ pro $v = 1$, quo fiat, ut V exprimat exponentem rationis voluminis, sub quo pondus P continetur,

C 2

ad

ad volumē v . Si ergo cognita gravitate specifica G massae alicujus corporis C petatur pondus P hujus corporis; sumatur volumen v , ad quod gravitas specifica sit restricta (53. §.) pro mensura voluminis V ejusdem corporis, tum, determinato exponente rationis ejusdem voluminis V ad mensuram v (14. 15. 18. §.), ducatur in illam gravitas specifica G .

E. gr. Petatur pondus P cylindri ferrei, cujus radius baseos sit $r=6$ digitis, et altitudo $a=2$ pedibus, data gravitate specifica ferri $G=558$ lb, quae pondus unius pedis cubici ferri exprimat. Si V denotet volumen cylindri, pro cujus mensura sumatur pes cubicus; erit; denotante π femiperipheriam circuli radio $=1$ descripti,

$$V = a \pi r^2 = 2.3, 141. \frac{1}{4} = 1,57 \text{ ped. cub.}$$

$$P = G V = 558. 1,57 = 876,06 \text{ lb.}$$

56. Corollarium 3.

Volumen autem erit $V = v \frac{P}{G}$ (54. §.), seu $V = \frac{P}{G}$ pro $v=1$. Dato itaque pondere P , dataque gravitate specifica G massae alicujus corporis C , invenietur volumen V ejusdem corporis, si pondus P dividatur per gravitatem specificam G , tum per quotum relatum ad unitatem $=v$ exprimatur volumen V (15. 18. §.).

E. gr. Si $P=876,06$ lb fit pondus cylindri ferrei, et $G=558$ lb gravitas specifica ferri aequalis ponderi ferri in uno pede cubico $=v$; erit volumen ejusdem cylindri

$$V = \frac{876,06 \text{ lb}}{558 \text{ lb}} = 1,57 \text{ ped. cub.}$$

57. Corollarium 4.

Et ipsa gravitas specifica erit $G = P \cdot \frac{v}{V}$ (54. §.), seu $G = P \cdot \frac{V}{v} = \frac{P}{V}$ pro $v=1$. Quare, dato pondere certi corporis invenietur gravitas specifica G illius massae, si volumen v , ad quod gravitas specifica G debet restringi (53. §.), sumatur pro mensura voluminis V , tum invento exponente rationis hujus voluminis ad mensuram v (14. 15. 18. §.), dividatur per illum pondus P .

E. gr. Si, dato pondere $P=876,06$ lb cylindri ferrei, quaeratur gravitas specifica G ferri, quae exprimat pondus ferri in uno pede cubico $=v$; quae-

quaeratur volumen $V=1,57$ ped. cub. ejusdem cylindri, tum per 1,57 dividatur P: erit enim

$$G = \frac{876,06 \text{ lb}}{1,57} = 558 \text{ lb.}$$

58. Corollarium 5.

Si gravitates specificae G, g duarum massarum aequabiliter densarum ad idem volumen v restringantur, adeoque denotent pondera talium massarum sub eodem determinato volumine v contentarum (53. §.), densitates vero earundem massarum sint D, d; erit $D, d = G; g$ (50. §.).

59. Corollarium 6.

Hac ratione, assumta densitate d certae massae aequabiliter densae pro unitate seu mensura densitatum omnium massarum aequabiliter densarum, cognitaque gravitate specifica g illius massae, facile innotescit densitas D cujuslibet alterius massae, data ejus gravitate specifica G ad idem volumen restricta, ad quod gravitas specifica g relata sit: erit nimirum $D = d \frac{G}{g}$ (58. §.), hinc $D = \frac{G}{g}$ pro $d=1$, aut etiam $D=G$ pro $g=1$, id est, exponens rationis gravitatis specificae G massae M ad gravitatem specificam g massae m, relatus ad unitatem aequalem densitati d hujus massae exprimet densitatem D massae M (15. 18. §.).

E. gr. Si densitas d aquae sumatur pro mensura densitatum reliquarum massarum, sciaturque exponens $=14$ gravitatis specificae mercurii ad gravitatem specificam aquae; erit densitas mercurii $D=14$, hoc numero ad unitatem $=d$ relato, quo fiat, ut $D=14$ tantundem denotet, ac $D=d 14$, adeoque significet, densitatem mercurii esse 14plam densitatis aquae.

Scholion.

Veri simillimum quidem est, nullas in natura massas extare, quae sint aequabiliter densae, unde sequi videtur, ea, quae haecenus de talibus massis sunt demonstrata, ad corpora, qualia in natura re ipsa occurrunt, non posse applicari. Verum constat quoque, dari massas, quae ad aequabiliter densas proxime accedunt, ita ut ad sensum pro talibus possint haberi. Si e. gr. pondera duorum aut plurium plumbeorum globorum ejusdem diametri ope exquisitissimae bilancis seorsim explores; nullum inter illa discrimen notabile deprehendes: unde necessario sequitur, quemvis

globum plumbeum ejusdem diametri eandem ad sensum quantitatem massae continere (47. §.), consequenter massam plumbi pro aequabiliter densa posse haberi. Ad tales ergo massas praecedentia principia semper licebit applicare, eo videlicet rigore, quem in omni praxi, ubi minutiae facile negliguntur, solemus observare.

60. DEFINITIO.

Divisio corporum in *solida*, *fluida*, *dura*, etc. repetenda est a diverso gradu cohaesionis inter particulas materiales ea corpora constituentes: quidquid illa sint, non est, cur hic illorum definitiones quaeramus; dabimus eas, ubi de talibus corporibus in specie actum fuerit. Supponemus enim in sequentibus, omne corpus esse *rigidum* seu *perfecte durum*, nimirum tale, cujus omnes partes, etiam minimae, tanta vi inter se cohaereant, ut respectivi illarum situs a nullis assignabilibus viribus possint turbari.

61. DEFINITIO.

Omnis vis motrix debet massam, in quam illa agit, ad motum sollicitare (38. §.): dum hanc ab illa *trahi*, *urgeri*, *premi*, etc. dicimus, eandem vis motricis actionem, nimirum sollicitationem ad motum, sed sub diverso respectu consideratam indicamus. *Aequales* dicentur vires, si quaevis illarum datam massam eadem efficacia ad motum sollicitet: quodsi autem aliqua vis majori, alia minori efficacia id praestet; erit illa *major*, et haec *minor*, simulque sumtae vires *inaequales* erunt.

62. Corollarium.

Fig. 1.

Quaecunque vis *V* agat in punctum *c* datae massae *mn* (i. Fig.) directione *cV*, semper licebit cogitare pondus unum *P*, quod, si e puncto *c* libere penderet, punctum *c* deorsum directione verticali *cP* tanta efficacia ad motum urgeret, quanta illud a vi *V* ad motum directione *cV* concipiendum urgetur, id est; quaevis vis *V* potest aequari certo ponderi *P* (61. §.), atque hoc sensu vires per pondera solent aestimari.

Scholion.

Fieri potest, ut, durante motu alicujus massae, vis *V* massam continuo movens continuo mutetur, crescat nimirum vel decreascit: hoc casu debet vis *V* quovis momento alteri ponderi aequari, majori vel minori, prout illa eodem momento major evaserit vel minor. Verum in sequentibus

tibus nifus duntaxat virium ad motus producendos in considerationem vocabimus, nullam mutationis rationem habituri, quam fors nifus illi subire deberent, si motus re ipsa sequeretur.

63. DEFINITIO.

Si duae aut plures vires datam massam ad motum sollicitent, sese tamen ita impendant, ut ideo solum nullus in eadem massa motus sequatur, licet haec a qualibet vi ad motum possit concitari; dicentur eae vires esse inter se in *Aequilibrio*.

64. Corollarium 1.

Quotcunque vires A, B, C, --- a, b, c, --- α , β , γ , etc. agant in datam massam, debebunt omnes inter se esse in aequilibrio, si vires A, B, C, etc. inter se, vires quoque a, b, c, etc. pariter inter se, et α , β , γ , etc. etiam inter se seorsim fuerint in aequilibrio (63. §.).

65. Corollarium 2.

Et si omnes vires P, Q, R, --- Z, m, n, --- x in certam massam agentes sint inter se, et aliquae illarum P, Q, R, --- Z inter se seorsim sint in aequilibrio; debebunt etiam reliquae vires m, n, --- x inter se seorsim esse in aequilibrio (63. §.).

66. Corollarium 3.

Vires aequales V, U (1. Fig.) in idem datae massae mn punctum c Fig. 1. secundum directiones cV, cU oppositas, in una recta VU fitas, agentes erunt necessario inter se in aequilibrio (61. 63. §.).

67. Corollarium 4.

Si autem vires $V > U$ in punctum c massae mn secundum oppositas directiones cV, cU agentes sint inaequales, non poterunt eae esse in aequilibrio, sed punctum c concipiet necessario motum aliquem secundum directionem cV vis majoris V (61. 63. §.).

68. Corollarium 5.

Vicissim ergo, si duae vires V, U agentes in punctum c massae mn secundum directiones oppositas cV, cU sint inter se in aequilibrio; debebunt eae inter se esse aequales (67. §.).

69. Corollarium 6.

Si autem duae vires V, U agentes in punctum c directionibus oppositis cV, cU non sint inter se in aequilibrio, sed re ipsa motum aliquem
in

in puncto c directione cU producant; erunt vires V, U inaequales, visque U erit major vi V : nam nec $V=U$ potest esse (66. §.), nec $V > U$ (67. §.).

70. Corollarium 7.

Quae in (66. 67. 68. 69. §.) de duabus viribus V, U in idem punctum c datae massae mn agentibus dicta sunt, ad vires etiam A, B in duo diversa massae mn puncta b, a agentes debent extendi, modo mn sit massa corporis rigidi (60. §.), et directiones virium bA, aB oppositae cum punctis b, a in una recta AB jaceant: eadem enim est in hac hypothese actio utriusque vis in quodvis punctum b, a , ac si vis utraque in punctum a , vel utraque in b immediate ageret.

71. Corollarium 8.

Fig. 2. 3. Si, sumpta quacunque linea mn (2. 3. Fig.) perfecte inflexili seu rigida (60. §.) et libere quaquaversus mobili, cogitentur in ejus puncta a, b, c, d, e , agere vires, A, B, C, D, E directionibus aA, bB, cC, dD, eE inter se parallelis, ita ut aut omnes ad eandem lineae mn partem jaceant (2. Fig.), aut aliquae aA, bB, cC , ad unam, aliae vero dD, eE ad partem ejus oppositam cadant (3. Fig.), sic tamen ut hae ipsae directiones dD, eE ad partem certi puncti γ in linea mn ei oppositam jaceant, ad quam priores aA, bB, cC jacent; impossibile erit aequilibrium inter vires A, B, C, D, E (63. §.).

72. Corollarium 9.

Fig. 11. Sit linea AB (11. Fig.) fulcro immobili b in C ita innixa, ut circa illud libere possit converti. Si ejus punctum B a vi quacunque Q directione BQ ad motum sollicitetur; debet necessario linea AB circa C moveri, punctumque ejus A progrediatur in arcu $A\alpha$ radii AC : verum si in A adsit fulcrum immobile a , nascetur ob actionem vis Q certa pressio in puncto A versus fulcrum a determinata quapiam directione Ay , atque hanc ipsam pressionem debet fulcrum a sustinere, ne ob illam punctum A motum aliquem in arcu $A\alpha$ concipiat: quare, cum pro omni pressione vis aliqua possit cogitari, quae in punctum, quod premitur, immediate agens, in illo eandem pressionem producat; possibilis erit quoque certa vis P , quae, si in punctum A directione opposita AP agat, illud hac directione eadem efficacia ad motum sollicitet, qua id directione Ay a vi Q sollicitatur, quae idcirco, sublato fulcro a , cum vi Q sit in aequilibrio (63. §.).

73. Co-

73. Corollarium 10.

Quodsi vero supponas, rectam AB circa fixum punctum C libere posse moveri, vires tamen P, Q directionibus AP, BQ in ejus puncta A, B agentes inter se esse in aequilibrio (72. §.); necesse est, ut punctum C ejus lineae versus fulcrum immobile b determinatam quampiam pressionem certa directione Cv persentiscat, ob quam, nisi illam sustineret fulcrum b, punctum C directione Cv motum conciperet: ea propter, quia pro qualibet pressione, quam datum punctum persentiscit, vis aliqua est cogitabilis, quae immediate in illud punctum agens, parem pressionem data directione producat; possibilis est vis Z, quae, sublato fulcro b, punctum C directione opposita CZ tanta efficacia ad motum urgeat, quanta id a viribus P, Q directione Cv urgetur, quae proinde cum his viribus sit in aequilibrio (63. §.).

74. Corollarium 11.

Hinc (72. 73. §.) perspicuum fit, semper, si in unum punctum B datae lineae AB libere quaquaversus mobilis directione BQ agat quaecunque vis Q, possibiles esse duas vires P, Z, quae in bina quaevis alia puncta A, C ejusdem lineae certis directionibus AP, CZ agentes cum vi Q in perfecto aequilibrio sint. Quamobrem nihil, quod sit impossibile adeoque absurdum, quaeremus, investigaturi, quaenam relationes inter datam vim Q, viresque quaesitas P, Z, directiones virium BQ, CZ, AP, et distantias punctorum A, B ab intermedio puncto C debeant intercedere, ut vires omnes Q, P, Z inter se sint in perfecto aequilibrio.

DISSERTATIO II.
DE
LEGE AEQUILIBRII VIRIUM IN RECTAS INFLEXILES
DIRECTE AGENTIUM.

75. Hypothesis.

Directiones virium in datas quascunque rectas agentium sint perpendiculares ad easdem rectas.

76. Theorema.

Fig. 4. 5. 6. *Si aut recta inflexilis AB (6. Fig.) in medio puncto C, aut angulus quiscunque invariabilis ACB (4. 5. Fig.) aequalium crurum AC, BC in vertice C ita figi cogitetur, ut tam illa recta, quam hic angulus libere circa punctum C converti, nullum tamen alium motum a viribus P, Q directionibus AP, BQ (75. §.) in puncta A, B agentibus possit recipere; erunt vires P, Q in aequilibrio, si eae fuerint inter se aequales.*

Demonstratio.

Cum enim puncta A, B ab aequalibus viribus P, Q pari efficacia secundum directiones AP, BQ debeant premi, cumque, per hypothesim, et puncta A, B aequaliter distent a puncto fixo C, et directiones virium AP, BQ sub aequalibus angulis ad rectas AC, BC sint inclinatae (75. §.); evidens est, tanta efficacia niti vim Prestam AC circa C convertere, quanta efficacia nititur vis Q rectam BC circa C movere: quare, cum ob inflexibilitatem rectarum AC, BC, AB, invariabilitatemque anguli ACB neutra rectarum AC, BC a vi in illam immediate agente circa C possit converti, quin tota recta AB (6. Fig.), totusque angulus ACB (4. 5. Fig.), in eandem partem circa C convertatur, cumque idcirco vires P, Q rectam AB (6. Fig.) et angulum ACB (4. 5. Fig.) in partes oppositas nitantur convertere; necesse est, ut sub assumtis conditionibus aut perfecte quiescat recta AB et angulus ACB, viresque P, Q sint in aequilibrio (63. §.), aut in partes oppositas eodem tempore moveatur, quod est absolute impossibile.

77. Corollarium 1.

Quod rectam AB (6. Fig.) in medio puncto C retinet, ne illa prae. Fig. 6. ter motum rotationis circa C alium aliquem motum possit concipere, debet sustinere pressionem, quam ambae vires P, Q in puncto C directione Cv (75. §.) produciunt; id ipsum ergo motum duntaxat puncti C, ad quem illud ea pressione secundum directionem Cv sollicitatur, impedit: quodsi ergo soluto vinculo in C, quo recta AB quaquaversus libere mobilis reddatur, in ejus puncto medio C directione opposita CV (75. §.) applicetur vis V aequalis summae virium aequalium P, Q, quae idcirco punctum C directione CV tanta efficacia premat, quanta illud a viribus P, Q directione Cv premitur; erit vis V cum viribus P, Q in aequilibrio (76. 66. §.).

78. Corollarium 2.

In quocunque puncta a et h, b et g, c et f, d et e, aequidistantia a Fig. 7. puncto medio C datae rectae ah (7. Fig.) in omnem partem libere mobilis agant vires aequales v, v, v, etc. directionibus av, bv, cv, dv, ev, fv, gv, hv (75. §.); erit cum omnibus vis unica X in aequilibrio, modo ea agat in C directione opposita CX (75. §.), aequeturque summae omnium virium v, v, v, etc. (77. 64. §.).

79. Theorema.

Quidquid sint duae vires P, Q (8. Fig.) in duo puncta A, B datae rectae Fig. 8. AB quaquaversus libere mobilis directionibus AP, BQ agentes, et ubicunque inter puncta A, B sumatur tertium punctum C, in quod directione opposita CZ (75. §.) agat vis tertia Z; necesse est, ut in statu aequilibril inter omnes tres vires P, Q, Z, (74. §.), vis media Z aequetur summae virium P, Q.

Demonstratio.

Producta recta AB fiat $CD=CB$, et $AC=EC$, cogitenturque in D, E applicari vires $s=Q$, $u=P$, in C vero supponatur adhuc una vis Z agere. Cum, per hypothesein, vis Z in aequilibrio sit cum viribus P, Q; erit, ob pares prorsus causas, etiam vis altera Z in aequilibrio cum viribus s, u: quare, si praeterea in C directionibus Cx, Cy agerent vires aequales x, y, quarum quaevis sit $=P+s+Q+u=2P+2Q$, cum hae inter se essent in aequilibrio (66. §.), deberent necessario omnes vires P, Q, Z, s, u, x, y inter se esse in aequilibrio (64. §.). Eset autem una pars $=2Q$ vis x cum viribus aequalibus s, Q, in D, et B et altera pars $=2P$ ejus-

dem vis x cum viribus aequalibus P, u in aequilibrio (77. §.): sublatis ergo viribus x, P, Q, s, u , maneret vis $= 2Z$ agens in C directione CZ cum vi $y = 2P + 2Q$ agente in C directione opposita Cy in aequilibrio (65. §.), eoque ipso deberet fieri $2Z = 2P + 2Q$ (68. §.), hinc $Z = P + Q$.

80. Theorema.

Si distantia AC puncti A rectae inflexilis AB ab ejus puncto C major sit quam distantia BC , et tres vires P, Q, Z agentes in puncta A, B, C directionibus AP, BQ, CZ (75. §.) sint inter se in aequilibrio; erit vis P in distantia majori AC minor vi Q agente in distantia minori BC .

Demonstratio.

Patebit id, si ostendatur, nec $P = Q$ posse esse, neque $P > Q$. Ea propter accipiat $AD = BD$, et in puncto D directionibus oppositis Dr, Ds applicentur vires aequales $r = 2Q, s = 2Q$: quia hae inter se debent esse in aequilibrio (66. §.); erunt omnes vires P, Q, Z, r, s inter se in aequilibrio (64. §.). Iam vero, si esset $P = Q$, adeoque vis r cum viribus P, Q in aequilibrio (77. §.); deberent, sublatis viribus P, Q, r , vires s, Z inter se esse in aequilibrio (65. §.), contra (71. §.): si autem esset $P > Q$, puta $P = Q + \omega$, adeoque vis r cum viribus Q, Q in A et B in aequilibrio (77. §.); manerent, remotis viribus r , et Q, Q ex D, A, B , vires Z, s, ω in C, D, A inter se in aequilibrio (65. §.), contra (71. §.).

81. Theorema.

Si, recta aB inaequaliter secta in b, C , ita ut sit $aC > bC > BC$, tres vires k, q, Q ejusmodi esse dicantur, ut, si, vi Q agente in B , in b applicetur vis q , et in C vis $Z = q + Q$, vel in a vis k , et in C vis $Z = k + Q$, casu primo vis $Z = q + Q$ cum viribus q, Q , et casu altero vis $Z = k + Q$ cum viribus k, Q debeat esse in aequilibrio; erit vis k agens in majori distantia aC minor vi q agente in minori distantia bC .

Demonstratio.

Producta recta aB sumatur $Ca = CE$, et in a, E applicentur vires aequales k, u , in C vero directione opposita Cx agat vis $x = k + u$; erunt vires k, u, x inter se in aequilibrio (77. §.): quodsi ergo vires q, Q et $Z = q + Q$ sint inter se in aequilibrio; erunt omnes vires $k, u, q, Q, x = k + u, Z = q + Q$ inter se in aequilibrio (64. §.). Quapropter,
cum

cum, per hypothesim, vires k, Q cum $vi = k + Q$ in C sint in aequilibrio, debebunt, sublatis his viribus, reliquae q, u cum $vi = q + u$ in C manere in aequilibrio (65. §.) quod non potest fieri, quin, ob $CE = aC > bC$, sit $u < q$ (80. §.), seu $k < q$.

82. Theorema.

Si, recta AB in C (9. Fig.) sic secta, ut pars major AC sit rtupla Fig. 9. partis minoris BC, adeoque $AC = BC.r$ pro quocunque numero integro r , in puncta A, B, C directionibus AP, BQ, CS agent vires P, Q, S, quarum secunda Q sit rtupla primae, nimirum $Q = Pr$, et tertia S aequalis summae reliquarum virium P, Q; erunt vires P, Q, S in aequilibrio.

Demonstratio.

1. Producta AB in utramque partem fiat $AE = BC = AD$, et $CF = CD$, hinc $BF = BE$.

2. Cum pars AC sit rtupla partis BC; potest AC in numero r partes aliquotas singulas $= AE = BC$ dividi, eruntque in CD numero $r + 1$, totidemque in CF, in BE autem erunt numero r , totidemque in BF partes aliquotae, singulae $= BC$, ob (1).

3. Quodsi ergo in puncta media $a, b, c, \dots n, o, r$, singularum partium aliquotarum totius rectae DF in (2) cogitentur agere vires aequales $p = \frac{1}{2}P$ directionibus ap, bp, cp , etc.; erit summa virium p in a et b agentium $p + p = P$, adeoque erunt eae vires cum $vi P$ in aequilibrio (77. §.) Summa porro omnium virium p per EF diffusarum erit $= \frac{1}{2}P. 2r$ ob (2), seu $= Pr = Q$ per hypothesim: quare erunt etiam vires p per EF diffusae cum $vi Q$ in aequilibrio (78. §.). Omnes ergo vires p per totam rectam DF diffusae erunt cum viribus P, Q in aequilibrio (64. §.).

4. Eapropter, si in C directionibus oppositis CS, CR applicentur vires aequales $S = P + Q, R = P + Q$, quia illae inter se debent esse in aequilibrio (66. §.); habebimus vires P, Q, R, S, et vires p per DF diffusae, omnes ob (3) per (64. §.) inter se in aequilibrio. Est autem summa omnium per DF diffusarum virium p ob (3) $= Pr + P = Q + P = R$; adeoque, ob $DC = CF$ per (1) est vis R cum omnibus per DF diffusis viribus p in aequilibrio (78. §.): sublatis igitur omnibus viribus p una cum $vi R$, manebit vis $S = P + Q$ sola cum viribus P, Q in aequilibrio (65. §.).

83. Corollarium.

Fig. 10. Recta ergo ae (10. Fig.) sic secta in C , ut pars major aC sit *rtupla* unius *ntae* partis partis minoris Ce , nimirum $aC = Ce \cdot \frac{r}{n}$; erit vis $x = u + v$ in aequilibrio cum viribus u, v , si fuerit reciproce vis $v = u \cdot \frac{r}{n}$ *rtupla* unius *ntae* partis vis u . Si enim capiatur $Cb = Cd = Ce \cdot \frac{1}{n}$ pars *nta* rectae Ce , et in b, d cogitentur applicari vires z, y , prior $z = vn$, et posterior $y = ur$, directione vero Cx concipiatur loco x agere vis $V = u + z + y + v$; cum in assumpta hypothefi debeat esse $aC = Cd \cdot r$, et $eC = bC \cdot n$, erunt vires u, y in C cum viribus u, y in a, d , et vires z, v in C cum viribus z, v in b, e seorsim in aequilibrio (82. §.); igitur erunt omnes vires, illae et hae, inter se in aequilibrio (64. §.). Quare, cum per hypothefim sit $v = u \cdot \frac{r}{n}$; hinc $vn = ur$, adeoque $z = y$, cumque idcirco vires z, y in C cum viribus z, y in b, d seorsim debeant esse in aequilibrio (77. §.); necesse est, ut sublatis his viribus maneat vis $= v + u$ in C cum viribus v, u in e, a in aequilibrio (65. §.).

84. Theorema.

Fig. 8. Quotiescunque tres vires P, Q, x (8. Fig.) directionibus AP, BQ, Cx egerint in tria puncta A, B, C rectae AB quaquaversus libere mobilis; erunt illae inter se in aequilibrio, si fuerit $P:Q = BC:AC$, et $x = P + Q$ (79. §.).

Demonstratio.

1. Partes AC, BC rectae AB erunt inter se commensurabiles vel incommensurabiles (5. §.). Primo casu extabit certus numerus integer r vel fractus $\frac{r}{n}$, pro quo sit $AC = BC \cdot r$ vel $AC = BC \cdot \frac{r}{n}$ (6. §.); hinc, ob $P:Q = BC:AC$ per hypothefim, etiam $Q = Pr$ vel $Q = P \cdot \frac{r}{n}$, quod nequit subsistere, quin vires P, Q, x sint inter se in aequilibrio (82. 83. §.).

2. Sint vero BC, AC duae rectae incommensurabiles: debet pro quovis quantumlibet magno numero integro n extare alter numerus integer r , qui det $AC > BC \cdot \frac{r}{n}$ et $AC < BC \cdot \frac{r+1}{n}$ (12 §.); et pro iisdem numeris, cum per hypothefim sit $P:Q = BC:AC$, erit $Q > P \cdot \frac{r}{n}$ et $Q < P \cdot \frac{r+1}{n}$.

3. Hoc praemisso supponamus in puncto A requiri vim ω , hinc in C vim $x = \omega + Q$, quo vires ω, x cum vi Q sint in aequilibrio (74. 79. §.); dico, debere esse $\omega = P$, hinc $x = P + Q$.

4. Si enim accipiat $bC = BC \cdot \frac{r}{n}$, et $aC = BC \cdot \frac{r+1}{n}$; jacebit ob (2) punctum A inter puncta a, b, et si in b applicetur vis $q = Q \cdot \frac{n}{r}$, in C autem vis $Z = q + Q$, vel in a vis $k = Q \cdot \frac{n}{r+1}$, et in C vis $Z = k + Q$; erunt vires q, Q cum vi $Z = q + Q$ casu primo, et vires k, Q cum vi $Z = k + Q$ casu altero in aequilibrio (83. §.); igitur erit ob (3) vis $\omega < q$ et $\omega > k$ (81. §.); adeoque semper $\omega < Q \cdot \frac{n}{r}$, et $\omega > Q \cdot \frac{n}{r+1}$, hinc $Q > \omega \cdot \frac{r}{n}$, et $Q < \omega \cdot \frac{r+1}{n}$, quod ob (2) est impossibile, quin sit $Q : P = Q : \omega$ (22. §.) proinde $\omega = P$.

85. Theorema.

Et vicissim, si vires P, Q cum vi $Z = P + Q$ in recta AB quaquaversus libere mobili sint in aequilibrio; debet esse $P : Q = BC : AC$.

Demonstratio.

Si stante aequilibrio inter vires P, Q, Z non esset $P : Q = BC : AC$; deberet in AB dari unum punctum a vel b, pro quo fieret $BC : aC = P : Q$, vel $BC : bC = P : Q$; et si, remota vi P ex puncto A, applicaretur in a vis $k = P$, vel in b vis $q = P$, essent vires k, Z, Q casu primo, et q, Z, Q casu secundo inter se in aequilibrio (84. §.), contra (81. §.).

86. DEFINITIO.

Omnem rectam AB (11. Fig.) AC (12. Fig.) inflexilem gravitatisque Fig. 11. 12. expertem, in cujus bina puncta A, B supponuntur agere duae vires P, Q , si ea in uno puncto C ita sit fixa, ut circa illud a viribus P, Q libere moveri, nullum tamen alium motum possit concipere, vocant *vectem mathematicum rectilineum*, et punctum fixum C *centrum motus*. Ipse vero vectis est *heterodromus*, si centrum motus C (11. Fig.) jacet intra puncta A, B, in quae vires P, Q agunt: *homodromus* autem appellatur vectis, in quo puncta A, B a viribus P, Q ad motum sollicitata (12. Fig.) ad eandem partem centri motus C cadunt.

87. Corollarium 1.

Fig. 11. Si directiones AP, Bq (11. Fig.) duarum virium P, q in puncta A, B vectis heterodromi AB (86. §.) agentium cadant ad diversas partes ejusdem vectis, nitentur vires P, q vectem AC ad eandem partem circa centrum motus C convertere, consequenter non poterunt esse in aequilibrio (63. §.): quare, ut duae vires P, Q in duo puncta A, B vectis heterodromi agentes possint esse in aequilibrio, debent illarum directiones AP, BQ ad eandem partem ejusdem vectis jacere.

88. Corollarium 2.

Fig. 12. In vecte autem homodromo AC (12. Fig.), ut duae vires P, Q agentes in ejus puncta A, B (86. §.) possint esse in aequilibrio, debent directiones AP, BQ earundem virium ad diversas vectis partes cadere. Vires enim P, q^u agentes in puncta A, B, quarum directiones AP, Bq^u cadunt ad eandem partem vectis AC, nituntur hunc circa centrum motus C ad eandem partem convertere, et ideo nequeunt illae esse in aequilibrio (63. §.).

89. Corollarium 3.

Fig. 11. Duae vires P, Q agentes in puncta A, B vectis heterodromi AB (11. Fig.) secundum directiones AP, BQ (75. 87. §.) debebunt esse in aequilibrio, si fuerit $P:Q = BC:AC$; pressio autem, quam vires P, Q in centro motus C directione Cv directionibus AP, BQ parallela producent, aequabitur pressioni, quam vis unica $v = P + Q$ in C produceret, si illa directione Cv in C immediate ageret. Si enim recta AB non esset in C fixa, sed quaquaversus libere mobilis, et in C directione CZ ad AB perpendiculari ageret vis $Z = P + Q$; esset Z cum viribus P, Q in aequilibrio (84. §.): cum igitur vis Z illum duntaxat motum impediat, quem punctum C rectae AB directione Cv potest concipere; aberit omnis motus, viresque P, Q servabunt rectam AB in aequilibrio, si remota vi Z recta AB in C ita figatur, ut circa C libere converti, sed nullum alium motum a viribus P, Q possit recipere.

90. Corollarium 4.

Et vicissim utprimum in vecte heterodromo AB duae vires P, Q directionibus AP, BQ in ejus puncta A, B agentes (75. 87. §.) fuerint inter
fe

se in aequilibrio; debeat esse $P:Q=BC:AC$. Secus enim daretur in recta AB aliud aliquod punctum D vel d, pro quo esset $P:Q=BD:AD$ vel $P:Q=Bd:Ad$, et si in D vel d directionibus Dr, Ds vel dr, ds (75. §.) applicarentur vires aequales r, s, ut sit $r=s=P+Q$; essent tam hae inter se per (66. §.), quam P, Q inter se per hypothefim, adeoque omnes quatuor r, s, P, Q inter se in aequilibrio (64. §.): quare, remotis viribus r, P, Q inter se in aequilibrio existentibus (84. §.); deberet sola vis s agens in D vel d rectam circa C libere mobilem servare in aequilibrio (65. §.), quod est impossibile.

91. DEFINITIO.

Praeterea memorabilis est vectis *inflexus* seu *angularis*, quem duae Fig. 13. rectae inflexiles AC, BC (13. Fig.) constituent, si illae sub certo angulo ACB jungantur, qui in vertice C ita fixus sit, ut circa hunc libere converti, nullum tamen alium motum possit recipere, nec ullam mutationem subire, quaecunque vires P, Q agant in ejus latera AC, BC. Omnis vero vectis, tam angularis (13. Fig.), quam rectilineus (11. 12. Fig.) duo *Brachia* habere censetur, quorum nomine ejus partes AC, BC inter centrum motus C punctaque A, B, in quae binae vires P, Q supponuntur agere, interceptae debent intelligi.

92. Theorema.

In omni vecte, tam rectilineo quam angulari (11. 12. 13. 14. Fig.), Fig. 11. 12. vires P, Q directionibus AP, BQ in puncta A, B agentes (75. §.) erunt 13. 14. in aequilibrio, si illae sint in ratione inversa brachiorum, seu si sit $P:Q=BC:AC$ (91. §.). Et vicissim erunt eae in hac ratione, si fuerint in aequilibrio.

Demonstratio.

Cum id pro quovis vecte heterodromo (11. Fig.) in (89. 90. §.) sit demonstratum, superest, ut idem adhuc pro vecte rectilineo homodromo (12. Fig.) et angulari (13. 14. Fig.), demonstretur.

1. Quamobrem cogitetur produci majus brachium AC ultra C, ut fiat $Cb=CB$ (12. 13. 14. Fig.), et in b concipiantur agere vires

aequales q, q' , quarum quaevis aequetur vi Q , directionibus bq, bq' (75. §.); erunt, non modo vires q, q' inter se (66. §.), sed etiam vires Q, q' pariter inter se in aequilibrio (76. §.).

2. Quodsi ergo sit $P:Q = BC:AC$, cum eo ipso sit quoque $P:q = bC:AC$ ob (1), adeoque vis P cum q in veste heterodromo Ab in aequilibrio (89. §.); erunt ob (1) omnes quatuor vires P, q, Q, q' inter se in aequilibrio (64. §.): remotis itaque viribus q, q' manebunt vires P, Q inter se in aequilibrio ob (1) per (65. §.).

3. Et si vires P, Q sint inter se in aequilibrio; erunt ob (1) per (64. §.) omnes quatuor P, Q, q, q' inter se in aequilibrio: igitur remotis viribus Q, q' manebunt vires P, q ob (1) per (65. §.) in veste heterodromo Ab inter se in aequilibrio; proinde debet esse $P:q = bC:AC$ (90. §.), hinc ob (1) $P:Q = BC:AC$.

DISSERTATIO III.

D E

VIRIBUS IN RECTAS INFLEXILES OBLIQUE AGENTIBUS, EARUMQUE COMPOSITIONE, ET RESOLUTIONE.

93. Theorema.

Si in punctum A rectae AC (15. 16. Fig.) circa fixum extremum C li- Fig. 15. 16. bere mobilis agant duae vires, una X directione AX ad AC perpendiculari, et altera Q directione AQ sub angulo acuto vel obtuso QAC ad AC inclinata, et CD sit perpendicularis ad directionem vis Q; erunt vires X, Q in aequilibrio, si fuerit $X:Q=CD:AC$; et vicissim, si vires X sint in aequilibrio, erit $X:Q=CD:AC$.

Demonstratio.

1. Si praeter vires Q, X agentes in punctum A applicetur in A vis $x=X$ directione Ax ad AC perpendiculari, et in D vis $q=Q$ directione Dq cum AQ jacente in una recta AD, recta vero AC supponatur esse unum latus plani ADC ad D rectanguli et circa punctum fixum C mobilis; erunt vires X, x inter se, et q, Q pariter inter se (66. 70. §.), consequenter omnes quatuor vires X, x, q, Q inter se in aequilibrio (64. §.).

2. Sit jam $X:Q=CD:AC$, adeoque ob (1) etiam $x:q=CD:AC$, debebunt vires q, x esse inter se in aequilibrio, cum illae planum ADC haud alia efficacia circa C convertere nitantur, quam qua eae vectem angularem ACD niterentur circa C convertere (92. §.): quodsi ergo absint vires q, x, manebunt vires X, Q ob (1) inter se in aequilibrio (65. §.).

3. Si vero dicas, vires X, Q esse in aequilibrio; debebunt, iis remotis, vires x, q inter se manere in aequilibrio; ob (1) per (65. §.): sed si vires x, q agentes in puncta A, D plani ADC circa C mobilis sunt in

aequilibrio, erunt illae eo quoque casu in aequilibrio, si eidem plano vectis angularis ACD circa C mobilis substituatur; consequenter debet esse $x:q = CD:AC$ (92. §.), hinc ob (1) $X:Q = CD:AC$.

94. Corollarium 1.

Vis Q agens in punctum A rectae AC circa fixum extremum C libere mobilis secundum directionem AQ sub angulo CAQ ad AC inclinatam, tanta efficacia nititur rectam AC circa C convertere, quanta efficacia id praestare niteretur vis $x = X = \frac{Q \cdot CD}{AC} = Q \sin CAQ$, si haec in idem punctum A directione Ax ad AC perpendiculari ageret (93. §.).

95. Corollarium 2.

Si in punctum A rectae AC circa fixum extremum C mobilis agent vires P, Q secundum directiones AP, AQ ; erunt hae vires in aequilibrio, si fuerit $P \sin PAC = Q \sin QAC$: et vicissim, si eae sint in aequilibrio, erit $P \sin PAC = Q \sin QAC$. Si enim in A directionibus AX, Ax ad AC perpendicularibus applicentur vires $X = P \sin PAC, x = Q \sin QAC$; erunt vires X, x (66. §.), proinde etiam P, Q inter se in aequilibrio (94. §.), si fuerit $X = x$; et vicissim, si vires X, x , adeoque etiam P, Q sint inter se in aequilibrio (94. §.), erit $X = x$ (68. §.).

96. DEFINITIO.

Fig. 17. Si in datum punctum A (17. Fig.) agent duae vires P, Q secundum directiones AP, AQ sub quocunque angulo PAQ concurrentes, quem deinceps nomine *Anguli virium* intelligemus; debet punctum A media quapiam directione AC ab iisdem viribus ad motum inchoandum sollicitari, ac si illud ab una vi C ea ipsa directione premeretur: idcirco vocatur directio ejusmodi AC *Directio media* virium P, Q ; et vis C , quae sola agens in punctum A istud directione media AC tanta efficacia premeret, quanta id a viribus P, Q ea directione premitur, appellatur *Vis media*, respectu cuius vires P, Q vocantur *laterales*.

97. Corollarium 1.

Inventio directionis mediae AC (96. §.) pendet ab inventione angulorum PAC, QAC inter illam et directiones datarum virium lateralium P, Q interceptorum.

98. Corollarium 2.

Debet autem directio media virium P, Q in punctum A agentium ejusmodi esse indolis, ut, si punctum A supponatur pertinere ad rectam inflexilem AC coincidentem cum directione media, rectaque AC cogitur in C ita figi, ut ea circa C libere converti, nullum tamen alium motum possit recipere, vires P, Q eo ipso debeant esse inter se in aequilibrio (96. §.).

99. Corollarium 3.

Et vicissim, si vires P, Q agentes in punctum A rectae AC circa punctum fixum C libere mobilis sint inter se in aequilibrio; debet recta AC coincidere cum media directione virium P, Q . Secus premeretur punctum A a viribus P, Q alia quapiam directione $A\gamma$, ac si, absentibus viribus P, Q , vis media γ sola secundum directionem $A\gamma$ in A ageret (96. §.); consequenter deberet recta AC converti circa C , contra hypothesis aequilibril.

100. Corollarium 4.

Quoties ergo fuerit $P \sin PAC = Q \sin QAC$, toties erit AC directio media virium P, Q (99. 95. §.); et vicissim quoties fuerit AC directio media virium P, Q , toties debet esse $P \sin PAC = Q \sin QAC$ (98. 95. §.).

101. Corollarium 5.

Quemcunque situm habeat directio media AC datarum virium P, Q , et quantacunque sit vis media C ex illis resultans, si haec innotesceret, directioneque opposita AM applicaretur vis M ei aequalis; deberet vis M in aequilibrio esse cum viribus P, Q (96. 66. §.). Et vicissim, inventa vi M , quae directione AM opposita directioni mediae AC virium P, Q agens in punctum A cum viribus P, Q sit in aequilibrio; erit eadem vis M aequalis vi mediae resultanti ex viribus lateralibus P, Q (68. 96. §.).

102. Corollarium 6.

Quoties demum tres vires M, P, Q directionibus AM, AP, AQ in datum punctum A agentes fuerint inter se in aequilibrio; debet directio media quarumvis binarum virium coincidere cum producta directione vis tertiae; e. gr. directio media virium P, Q coincidit cum producta di-

reſtione AM viſiſ tertiae M. Si enim AC ſit productio directionis AM, et punctum A ſupponatur ſpectare ad rectam AC coincidentem cum illa productione, atque circa punctum fixum C libere mobilem; erunt nunc quoque omnes tres vires M, P, Q inter ſe in aequilibrio: quare, cum viſiſ M directione CM agens in punctum C nullo pacto inſuat in converſionem rectae AC circa C, ſublata vi M, manebunt vires P, Q inter ſe in aequilibrio, eoque ipſo eſt AC directio, media harum virium (99. §.).

103. Problema.

Datis duabus viribus P, Q in unum punctum A ſecundum directiones AP, AQ agentibus, datoque earum angulo $PAQ = \phi$, invenire directionem mediam AC.

Solutio.

Directio media virium P, Q determinabitur, ſi definiantur anguli $PAC = p$, $QAC = q$, quos directio media AC cum directionibus AP, AQ illarum virium debet intercipere (97. §.): hi vero anguli poſſunt ſequenti modo inveniri. Debet eſſe

$$p = \phi - q; \quad q = \phi - p;$$

$$\text{et } P \sin p = Q \sin q \text{ per (100. §.):}$$

$$\text{per (Vol. I. §. 1. Schol.) erit ergo}$$

$$P \sin p = Q \sin \phi \cos p - Q \cos \phi \sin p;$$

$$Q \sin q = P \sin \phi \cos q - P \cos \phi \sin q.$$

Quare, ſi prior aequatio per $\cos p$, et poſterior per $\cos q$ dividatur, fiet

$$P \tan p = Q \sin \phi - Q \cos \phi \tan p;$$

$$Q \tan q = P \sin \phi - P \cos \phi \tan q.$$

Habebimus itaque

$$\tan p = \frac{Q \sin \phi}{P + Q \cos \phi}; \quad \tan q = \frac{P \sin \phi}{Q + P \cos \phi}.$$

104. Problema.

Inventa directione media AC duarum virium P, Q in punctum A ſecundum directiones AP, AQ agentium, invenire vim mediam M.

Solu.

Solutio.

Cum nota sit directio media AC, noti debent esse etiam anguli $p = CAP$, $q = CAQ$ (103. §.). Iam vero vis media aequabitur vi M, quae secundum mediam directionem CA, seu potius secundum illius productionem AM in punctum A agens cum viribus P, Q, esset in aequilibrio (101. §.): pro illa, si AP versus S, et AQ versus R producatur, erit ergo AS directio media virium M, Q, et AR directio media virium M, P (102. §.). Per (100. §.) habebimus itaque

$$M \sin MAS = Q \sin QAS; M \sin MAR = P \sin PAR.$$

$$\text{Sed est } PAC = MAS = p; QAC = MAR = q;$$

$$\text{et } QAS = PAR = 180^\circ - \phi: \text{ ergo erit}$$

$$M \sin p = Q \sin \phi; M \sin q = P \sin \phi;$$

$$M = \frac{Q \sin \phi}{\sin p}; \quad M = \frac{P \sin \phi}{\sin q}.$$

105. Corollarium 1.

Datis duabus viribus P, Q agentibus in datum punctum A, datoque virium angulo $\phi = PAQ$ (96. §.), licebit tam illarum directionem mediam AC per (103. §.), quam dependenter ab hac ipsam vim mediam M per (104. §.) determinare. Potest vero vis media M inveniri etiam independenter a directione media AC hoc modo.

$$\frac{Q \sin \phi \cos p}{\sin p} = P + Q \cos \phi \quad (103. \S.):$$

igitur elevando ad quadratum

$$\begin{aligned} \frac{Q^2 \sin^2 \phi \cos^2 p}{\sin^2 p} &= P^2 + 2PQ \cos \phi + Q^2 \cos^2 \phi \\ &= P^2 + 2PQ \cos \phi + Q^2 - Q^2 \sin^2 \phi. \end{aligned}$$

Hinc porro, facta translatione et reductione, ob $\sin^2 p + \cos^2 p = 1$, obtinebimus

$$\frac{Q^2 \sin^2 \phi}{\sin^2 p} = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \phi.$$

Et ideo per (104. §.) fiet

$$M = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \phi}.$$

106. Corollarium 2.

Si vires P, Q agentes in punctum A sint aequales, nimirum $P = Q$; erit vis media ex illis resultans $M = \sqrt{2P^2 + 2P^2 \cos \phi} = P\sqrt{2(1 + \cos \phi)}$

per

per (105. §.): directio autem media AC (96. §.) ita determinabitur, ut sit $\text{Tang } p = \text{Tang } q$, proinde angulus $p = \angle PAC = q = \angle QAC$ (103. §.), id est, dum aequales vires P, Q sub quocunque directionum angulo PAQ datum punctum A ad motum sollicitant, directio media AC debet angulum PAQ bissecare.

107. Corollarium 3.

Eo determinato casu, quo angulus virium $\phi = \angle PAQ$ rectus fuerit, erit $\text{Sin } \phi = 1$, et $\text{Cos } \phi = 0$: igitur erit vis media $M = \sqrt{P^2 + Q^2}$ per (105. §.); et pro directione media AC debeat fieri $\text{Tang } p = \frac{Q}{P}$, $\text{Tang } q = \frac{P}{Q}$ (103. §.). Quodsi porro in eadem hypothesi vires P, Q sint aequales; fiet vis media $M = P\sqrt{2}$, directione media AC bissecante angulum virium PAQ (106. §.).

108. Corollarium 4.

Pro quolibet angulo virium $\phi = \angle PAQ$ est $\text{Cos } \phi$ fractio genuina radii $= 1$, adeoque minor unitate, et quidem valoris negativi, dum angulus ϕ est obtusus: semper est ergo $2PQ \text{Cos } \phi < 2PQ$, hinc etiam $P^2 + Q^2 + 2PQ \text{Cos } \phi < P^2 + Q^2 + 2PQ = (P + Q)^2$, et ideo $M < P + Q$ (105. §.). Nimirum omni casu erit vis media minor quam summa virium lateralium (96. §.).

109. Corollarium 5.

Cum porro pro quolibet angulo ϕ obtuso sit ejus cosinus negativus, pro quovis vero acuto positivus; patet, vim mediam M respondentem duabus viribus lateralibus P, Q majorem futuram pro quolibet angulo $\phi = \angle PAC$ acuto, quam pro obtuso (105. §.).

110. Corollarium 6.

Ex (102. 104. §.) elucet, semper, dum tres vires M, P, Q in datum punctum A agentes sunt in aequilibrio, binas quasque vires esse inter se in ratione directa sinuum angularum, quos illarum directiones cum directione vis tertiae comprehendunt: est enim

$$M : Q = \text{Sin } \phi : \text{Sin } p;$$

$$M : P = \text{Sin } \phi : \text{Sin } q;$$

$$P : Q = \text{Sin } q : \text{Sin } p;$$

Scholion.

In quamplurimis disquisitionibus vires per lineas utilissime exprimuntur: sicut enim omnia quanta ad certas mensuras relata (14. §.) per numeros possunt exprimi (15. 18. §.); sic licebit eadem quanta per lineas determinatae longitudinis exprimere, modo communis aliqua linearum mensura praevis definiatur.

1. Sit v communis virium mensura, ut e. gr. pondus unius librae communis ponderum mensura (14. §.); pro mensura autem linearum sumatur lineola l , e. gr. unus pes. Quidquid sit vis V , semper erit cogitabilis linea recta L , cujus ratio ad assumptam mensuram l aequetur rationi vis V ad ejus mensuram v , quo fiat $L:l = V:v$, hinc $V = v \cdot \frac{L}{l}$, et ideo $V = \frac{L}{1}$ pro $v=1$, vel etiam $V=L$ pro $l=1$. Hoc sensu dicitur *recta* L *exprimere vim* V ; proprie autem aequatio $V=L$ nihil aliud potest denotare, quam exponentem rationis (qui sub V debet intelligi) vis V ad assumptam virium mensuram v aequari exponenti rationis (quem L in illa aequatione debet significare) lineae rectae L ad assumptam linearum mensuram l , quo fiat, ut idem numerus, tali exponenti aequalis, jam vim V , jam rectam L expressurus sit, si is ad mensuram v virium, vel mensuram l linearum pro unitate assumptam referatur (15. 18. §.).

2. Quotcunque ergo dentur vires U, X, Z , poterunt illae per totidem lineas rectas u, x, z exprimi. Assumpta nimirum communi virium mensura v et communi linearum mensura l , quaeratur recta u exprimens vim U per (1), tum determinantur reliquae rectae x, z ita, ut illae ad rectam u in eadem sint ratione, in qua sunt vires X, Z ad vim U : nam si sit $u=U$ in sensu (1), et $Z:U = z:u, X:U = x:u$; erit utique etiam $x=X$ et $z=Z$ in eodem significatu.

III. Problema.

Datis viribus P, Q in punctum A secundum directiones AP, AQ, sub dato angulo PAQ concurrentes agentibus, geometricè determinare tam directionem, quam vim mediam.

Solutio.

In rectis AP, AQ coincidentibus cum virium P, Q directionibus sumantur partes Ab, Aa, quae datas vires P, Q expriment, ita ut sit $P:Q =$

Solutio II.

F

Ab:

$Ab:Aa$, tum construatur parallelogrammum $Abda$; diagonalis Ad erit directio media virium P, Q , exprimetque sua longitudine vim mediam M , ita ut sit $M:P=A d:A b$, et $M:Q=A d:A a$ (110. §. Schol.)

Demonstratio.

In parallelogrammo enim $Abda$ est $Ab:Aa=\text{Sind } Aa:\text{Sind } Ab=\text{Sin } QAC:\text{Sin } PAC$; cum igitur sit $Ab:Aa=P:Q$; est quoque $P:Q=\text{Sin } QAC:\text{Sin } PAC$, et $P\text{Sin } PAC=Q\text{Sin } QAC$, eoque ipso coincidit diagonalis Ad cum media directione virium P, Q (100. §).

Porro est in eodem parallelogrammo $Ab:Ad=\text{Sina } Ad:\text{Sin } PAQ$, et $P:M=\text{Sina } Ad:\text{Sin } PAQ$ (104. §): igitur debet esse $Ab:Ad=P:M$; cumque fuerit $P:Q=Ab:Aa$, adeoque $Ab=\frac{P \cdot Aa}{Q}$, est etiam $\frac{P \cdot Aa}{Q}$; $Ad=P:M$, seu $Aa:Ad=Q:M$.

112. DEFINITIO.

Duas vires P, Q secundum directiones AP, AQ in unum punctum A agentes in unam vim *componere* tantundem significat, ac tam mediam directionem AC virium P, Q , quam vim mediam ex illis resultantem invenire (96. §); haec vis media vocatur idcirco *vis composita*, et respectu illius sunt P, Q vires *componentes*. Quodli autem detur una vis V agens in punctum A secundum datam directionem AC ; vim V in duas vires P, Q , quae in idem punctum A secundum certas directiones AP, AQ cum AC in eodem plano jacentes agant, *resolvere* tantundem significabit, ac ejusmodi vires P, Q invenire, ut et media illarum directio coincidat cum directione AC vis datae V , et vis media ex illis resultans aequetur datae vi V .

113. Corollarium I.

Pressio, quam punctum A secundum directionem mediam AC a datis viribus componentibus P, Q perferit, aequatur pressioni, quam vis composita V in puncto A produceret, si illa, remotis viribus P, Q , sola in punctum A secundum mediam directionem AC ageret (112. 96. §): hoc sensu *aequivaleret* vis composita V viribus componentibus P, Q simul sumtis, licet vis composita V semper sit minor quam summa virium componentium P, Q (112. 108 §).

114. Corollarium 2.

Compositio datarum virium P, Q , dato illarum angulo $PAQ = \phi$ (96. §.), perficietur trigonometrica, si directio media AC per (103. §.) et vis media (112. §.) per (104. §.), vel (105. §.) determinetur. Geometrica, vero poterit ea per (111. §.) perfici.

115. Corollarium 3.

Quodsi autem detur vis V agens in datum punctum A secundum datam directionem AC , quae in binas vires P, Q secundum determinatas directiones AP, AQ debeat resolvi; poterit haec resolutio, dato angulo $PAQ = \phi$, trigonometrica perfici, si vires P, Q per (104. §.), ob (112. §.) ita definiantur, ut sit

$$P = \frac{V \sin QAC}{\sin \phi}; \quad Q = \frac{V \sin PAC}{\sin \phi}.$$

116. Corollarium 4.

Geometrica datae vis V in punctum A directione AC agentis resolutio perficietur hoc modo. Abscindatur in recta AC pars Ad , quae vim V exprimat (110. §. Schol.), tum ex d ducantur parallelae da, db ad datas directiones AP, AQ virium, in quas V debet resolvi: latera enim Ab, Aa debebunt has ipsas vires exprimere (112. 111. §.).

117. Corollarium 5.

Hoc modo vis $V = Ad$ agens in punctum A datae rectae AB (18. Fig.) secundum directionem AC sub angulo acuto $BAC = \alpha$ ad AB inclinatam, constructo rectangulo $Abda$, resolvi solet in duas vires, quarum una $Aa = V \sin \alpha$ directione Aa ad AB perpendiculari, et altera $Ab = V \cos \alpha$ directione Ab in recta AB jacente agat in punctum A (116. §.).

DISSERTATIO IV.
DE
CENTRO AEQUILIBRII VIRIUM DIRECTIONIBUS
PARALLELIS IN DATUM SYSTEMA PLURIUM
PUNCTORUM AGENTIUM.

118. DEFINITIO.

Systema punctorum est quodvis aggregatum plurium punctorum determinata aliqua ratione per datum spatium distributorum, quae, ne illorum situs respectivi ab ullis viribus possint turbari, omnia per lineas inflexiles inter se connexa poterunt cogitari, ac si ea totidem puncta unius corporis rigidi exhiberent (60. §.). Si punctis massas quascunque, puta lineas, superficies, aut corpora, substituas; habebis *Systema plurium massarum*.

119. DEFINITIO.

Centrum aequilibræ dati systematis, cujus singula puncta (118. §.) a certis viribus secundum directiones inter se parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum sollicitentur, vocabitur punctum, quod respectu punctorum totius systematis talem situm habeat, ut, si in illud certa vis secundum determinatam directionem agere supponatur, ea in quovis situ totius systematis cum omnibus ejus viribus in aequilibrio esse debeat, seu directiones harum virium unam eandemque in omni situ systematis plagam respiciant, seu non, modo eae in quovis situ seorsim spectato omnes in eandem plagam tendant, et inter se sint parallelæ.

Scholion.

Casus hic directionum parallelarum est maxime memorabilis, tum quia is in corporibus physicis ad sensum habet locum, tum etiam quia ad hunc casum omnes reliqui casus possunt revocari, quod patebit, ubi generalissima staticarum disciplinarum principia recensuerimus. Gravitas quidem sic agit in quodlibet corpus physicum, ut omnia illius puncta, quemcunque situm totum corpus habeat, semper secundum directiones ad sensum

senfum parallelas deorsum premantur, quo fit, ut hae directiones in omni corporis situ unam eandemque plagam respiciant. Verum possibile est, ut puncta dati systematis ab aliis viribus ad motum urgeantur, quarum directiones sint inter se parallelae, et omnes in quovis situ systematis in eandem plagam tendant, licet haec mutato situ systematis mutetur.

120. Theorema.

Si recta bD (19. Fig.), in cujus puncta b, a agant duae vires Q, P Fig. 19. secundum directiones parallelas bQ, aP secetur in C , ita ut sit $P:Q = bC:aC$, et in C directione Cc parallela directionibus bQ, aP applicetur vis $c = P + Q$; erit haec in aequilibrio cum viribus P, Q .

Demonstratio.

1. Vires P, Q, c agentes directionibus aP, bQ, Cc in puncta a, b, C , si ponatur angulus $DaP = DbQ = cCb = \varphi$, possunt per (117. §.) in sequentes vires resolvi.

$$\text{Vis } P \text{ in } a\alpha = P \sin \varphi, \text{ et } a\alpha' = P \cos \varphi;$$

$$Q \text{ in } b\beta = Q \sin \varphi, \text{ et } b\beta' = Q \cos \varphi;$$

$$c \text{ in } C\gamma = c \sin \varphi, \text{ et } C\gamma' = c \cos \varphi.$$

2. Quamobrem erunt vires P, Q, c in aequilibrio, si vires $a\alpha, a\alpha', b\beta, b\beta', C\gamma, C\gamma'$ omnes inter se fuerint in aequilibrio. Est autem per hypothesim $c = P + Q$: igitur est vis $C\gamma'$ aequalis summae virium $a\alpha', b\beta'$ in (1), proinde cum his viribus in aequilibrio (66. 70. §.). Porro est per hypothesim $P:Q = bC:aC$: igitur $a\alpha:b\beta = bC:aC$ in (1); consequenter sunt quoque vires $a\alpha, b\beta$ cum vi $C\gamma = a\alpha + b\beta$ in aequilibrio (89. §.).

121. Corollarium 1.

Secundum quascunque directiones aP, bQ inter se parallelas egerint binæ vires P, Q in duo puncta a, b unius rectae bD ; jacebit illarum centrum aequilibræ in puncto C ejusdem rectae sic determinato, ut sit $Ca:Cb = Q:P$; idemque centrum ita premetur a viribus P, Q directione Cc parallela directionibus aP, bQ , ac si in illud una vis $e = P + Q$ immediate ageret (120. 119. §.).

122. Corollarium 2.

Pro viribus aequalibus P, Q erit $Ca = Cb$: centrum aequilibræ illarum coincidet ergo cum puncto medio C rectae ab (121. §.).

123. Corollarium 3.

Data distantia ab punctorum a, b rectae bD , in quae agent datae vires P, Q directionibus aP, bQ inter se parallelis, invenietur illarum centrum aequilibrum C , inventa hujus distantia ab alterutro puncto a, b ; determinabitur vero haec distantia ex aequatione $aC \cdot P = bC \cdot Q$ (121. §.). Est enim

$$bC = ab - aC; \quad aC = ab - bC;$$

igitur erit

$$(ab - bC)P = (ab - aC)Q;$$

$$bC = \frac{ab \cdot P}{P + Q}; \quad aC = \frac{ab \cdot Q}{P + Q}.$$

124. Corollarium 4.

Poterit porro centrum aequilibrum C duarum virium P, Q directionibus parallelis aP, bQ in puncta a, b datae rectae bD agentium determinari etiam per ejus distantiam dC a dato quocunque puncto d in eodem recta. Cum enim sit

$$aC = dC - da; \quad bC = db - dC;$$

habebimus per (121. §.)

$$P : Q = (db - dC) : (dC - da); \quad \text{hinc}$$

$$dC = \frac{da \cdot P + db \cdot Q}{P + Q}.$$

125. Corollarium 5.

Fig. 20. Si dicas, punctum α rectae aZ (20. Fig.) esse centrum aequilibrum virium $A, B, C, \dots P$ secundum directiones parallelas $aA, bB, cC, \dots pP$ agentium in puncta $a, b, c, \dots p$ ejusdem rectae, in quo vis unica $X = A + B + C + \dots + P$ applicata secundum directionem oppositam αX parallelam illis directionibus sit in aequilibrio cum omnibus viribus $A, B, C, \dots P$, in puncta vero q, α cogitentur agere vires $Q, S = A + B + C + \dots + P$ secundum directiones $qQ, \alpha S$ prioribus parallelas, quarum centrum aequilibrum β dabit

$$Z\beta = \frac{Z\alpha \cdot S + Zq \cdot Q}{S + Q} \quad (124. \S.),$$

ita ut una vis $U = S + Q$ in β secundum directionem βU directionibus $qQ, \alpha S$ parallelam applicata cum viribus Q, S sit in aequilibrio (121. §.); erit

erit eadem vis U etiam cum viribus A, B, C, - - - P, Q, absentibus S, X, in aequilibrio, punctumque β erit centrum aequilibrum virium A, B, C, - - - P, Q (119. §.). Cum enim in hac hypothefi omnes vires A, B, C, - - - P, Q, S, U, X sint inter fe in aequilibrio (64. §.), et vires S, X feorsim inter fe in aequilibrio (66. §.); necesse est, ut his remotis vis U cum viribus A, B, C, - - - P, Q maneat in aequilibrio (65. §.).

126. Problema.

Datis quocunque viribus A, B, C, etc. in data puncta a, b, c, etc. unius rectae aZ secundum directiones parallelas aA, bB, cC etc. agentibus; invenire illarum centrum aequilibrum, directionemque et quantitatem vis in eodem centro applicandae, quae cum omnibus illis viribus sit in aequilibrio.

Solutio.

Sumto quocunque puncto Z in data recta, multiplicentur distantiae singulorum punctorum a, b, c, etc. a puncto Z per vires in iis applicatas, et summa productorum dividatur per summam omnium virium; erit quotus distantia quaesiti centri aequilibrum, puta γ , a puncto Z. Quodsi jam in hac directione opposita γV parallela directionibus virium A, B, etc. cogitetur applicari vis V aequalis summae omnium virium A, B, etc.; debet illa esse in aequilibrio cum omnibus his viribus.

Demonstratio.

1. Ex (124. 121. §.) elucet, solutionem hanc pro duabus viribus re ipsa locum habere.

2. Porro, si numero n vires A, B, C, - - - P habeant in α centrum aequilibrum, pro quo sit

$$Z\alpha = \frac{A.aZ + B.bZ + \dots + P.pZ}{A+B + \dots + P},$$

et vis $X = A+B + \dots + P$ in α agens directione opposita cum viribus A, B, - - - P simul sumtis sit in aequilibrio; habebunt etiam una plures vires A, B, - - - P, Q unum centrum aequilibrum in β , pro quo fiet

$$Z\beta = \frac{Z\alpha(A+B + \dots + P) + Zq.Q}{A+B + \dots + P+Q},$$

et vis $U = A+B + \dots + P+Q$ in β secundum oppositam directionem βU agens erit cum omnibus viribus A, B, - - - P, Q in aequilibrio

librio (125. §.): utprimum ergo data solutio de certo numero n virium vera est, debet illa eo ipso etiam de numero $n+1$ talium virium vera esse, unde et ex (1) per (Vol. I. §. 31.) sequitur, datam solutionem problematis de quovis possibili virium numero veram debere esse.

127. Problema.

Fig. Si singula puncta $a, b, c, d, e, f, \dots p, q$ alicujus systematis a totidem viribus $A, B, C, D, E, F, \dots P, Q$ secundum directiones $aA, bB, \dots qQ$ inter se parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum sollicitentur, constetque, vires $A, B, C, \dots P$ habere centrum aequilibrum in α , in quo vis una $x = A + B + C + \dots + P$ agens directione opposita αx parallela virium A, B , etc. directionibus cum omnibus viribus $A, B, C, \dots P$ esset in aequilibrio; invenire tam centrum aequilibrum virium $A, B, C, \dots P, Q$ quam directionem quantitatemque vis in illo applicandae, ut ea cum omnibus viribus $A, B, C, \dots P, Q$ sit in aequilibrio.

Solutio.

Ducta e centro aequilibrum α virium $A, B, C, \dots P$ ad punctum q , in quod agit vis Q , recta αq , determinetur in eadem recta punctum β sic, ut sit

$$\alpha\beta = \frac{\alpha q \cdot Q}{A + B + C + \dots + P + Q};$$

erit β centrum aequilibrum virium $A, B, C, \dots P, Q$, in quo vis unica $v = A + B + C + \dots + P + Q$ secundum directionem βv oppositam et parallelam directionibus illarum virium applicata debet cum omnibus viribus $A, B, C, \dots P, Q$ esse in aequilibrio.

Demonstratio.

Si in centrum aequilibrum α virium $A, B, \dots P$ secundum oppositas directiones $\alpha x, \alpha y$ parallelas directionibus illarum virium agant vires aequales x, y , quarum quaevis aequetur summae virium $A, B, C, \dots P$, et praeterea in β agat vis $v = y + Q = A + B + C + \dots + P + Q$ directione βv parallela directionibus $\alpha y, qQ$; erit β centrum aequilibrum virium y, Q , et vis v in aequilibrio cum viribus y, Q (121. 123. §.): cum igitur per hypothesim sit vis x in aequilibrio cum viribus $A, B, C, \dots P$; erant omnes vires $A, B, C, \dots P, Q, v, x, y$ inter se in aequilibrio (64. §.). Quamobrem, quia vires x, y sunt inter se seorsim in aequilibrio

librio (66. §.), sublatis his viribus manebit vis v in aequilibrio cum viribus $A, B, C, - - - P, Q$ (65. §.), punctumque β erit centrum aequilibrum virium $A, B, C, - - - P, Q$ (119. §.).

128. Corollarium 1.

Pro quovis systemate punctorum, quae a totidem viribus secundum directiones inter se parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum urgeantur (118. §.), debet dari unum centrum aequilibrum, in quo vis unica secundum directionem oppositam applicata, in quovis situ systematis cum iisdem viribus esset in aequilibrio, si illa summae omnium virium aequaretur. Cum enim hoc pro systemate duorum punctorum in (121. §.) sit demonstratum, idque, si de systemate constante punctis quocunque numero n verum esse supponatur, eo ipso etiam pro systemate uno plurium punctorum debeat subsistere (127. §.); necessarium est, ut id generatim de quovis possibili systemate sit verum (Vol. I. §. 31.).

129. Corollarium 2.

Est autem absolute impossibile, ut unum idemque systema plura centra aequilibrum habeat. Ponamus enim datum systema (21. Fig.) habere unum centrum aequilibrum in puncto α , in quod agat vis $x = A + B + - - - + Q$ directione opposita et parallela directionibus virium $A, B, - - - Q$ in quovis situ systematis, quo illa sit in quovis systematis situ in aequilibrio cum omnibus viribus $A, B, - - - Q$ (128. §.); dico, praeter hoc nullum aliud centrum aequilibrum β in eodem systemate esse possibile. Secus enim posset systemati talis situs tribui, in quo directio αx vis x cum recta $\alpha \beta$, non coincidat, sed certum angulum $\alpha \alpha \beta$ formet; daretur porro aliqua vis v , quae in β certa directione βv agens cum omnibus viribus $A, B, - - - Q$ systematis esset in aequilibrio (119. §.): quare, si in α cogitetur agere vis y aequalis vi x secundum directionem αy directioni αx oppositam, quae cum x sit eo ipso in aequilibrio (66. §.); debebunt omnes vires $A, B, - - - Q, v, y, x$ esse inter se in aequilibrio (64. §.). Cum igitur vis x sit in aequilibrio cum viribus $A, B, - - - Q$; deberet, sublatis his omnibus viribus, vis y cum vi v manere in aequilibrio, quod est impossibile.

130. DEFINITIO.

Si systema plurium punctorum ad datum quodcunque planum referatur, productum ex qualibet vi in uno puncto systematis applicata (118. §.) in distantiam perpendicularem hujus puncti a dato plano vocabitur, improprie quidem, *Momentum vis respectu ejusdem plani*; summa vero momentorum omnium virium systematis respectu unius plani positione dati dabit *Momentum systematis respectu ejusdem plani*.

131. Corollarium.

In quocunque partes cogitetur datum systema plurium punctorum divisum, quae seorsim totidem systemata exhibebunt (118. §.); erit summa momentorum omnium partium respectu dati plani aequale momento totius systematis respectu ejusdem plani (130. §.).

132. Lemma.

Fig. 22. Si recta AB (22. Fig.) secetur in C in data ratione $r:s$, ut sit $AC:BC=r:s$, et ex punctis A, B, C ad planum MN positione datum ducantur perpendicularia $A\alpha, B\beta, C\gamma$; debeat esse $(r+s)C\gamma=r.B\beta+s.A\alpha$.

Demonstratio.

Cogitetur duci per C aliud planum mn parallelum plano MN; debent perpendicularia $A\alpha, B\beta$ ei in duobus punctis a, b occurrere; et si ex C ad haec puncta ducantur in plano mn rectae Ca, Cb, nascentur triacula similia AaC, BbC ad a, b rectangula: erit igitur

$$AC:BC=Aa:Bb:$$

quare, cum per hypothesim sit

$$AC:BC=r:s, \text{ erit}$$

$$r:s=Aa:Bb=(C\gamma-A\alpha):(B\beta-C\gamma).$$

Et hinc obtinebimus

$$r(B\beta-C\gamma)=s(C\gamma-A\alpha), \text{ adeoque}$$

$$(r+s)C\gamma=r.B\beta+s.A\alpha.$$

133. Corollarium 1.

In systemate duorum punctorum A, B, quae a duabus viribus P, Q secundum directiones parallelas AP, BQ ad motum sollicitentur, jacebit centrum aequilibrum in puncto C rectae AB, ita ut sit $P:Q=BC:AC$ (121. §.): erit ergo $(P+Q)C\gamma=P.A\alpha+Q.B\beta$ (132. §.), seu momentum

tum systematis duorum punctorum respectu dati plani MN aequabitur producto ex summa duarum virium in illa puncta agentium in distantiam centri aequilibrii systematis ab eodem plano (130. §.).

134. Corollarium 2.

Sit $n+1$ numerus punctorum $a, b, c, d, e, f, \dots p, q$ alicujus systematis, in quae totidem vires $A, B, C, D, E, F, \dots P, Q$ agant secundum directiones aA, bB, cC , etc. parallelas et in eandem plagam tendentes, punctum vero α sit centrum aequilibrii virium $A, B, C, \dots P$, quarum summam denotet K : si recta αq sic secetur in β , ut sit $\alpha\beta:\beta q = Q:K$, adeoque etiam $\alpha\beta:\alpha q = Q:(Q+K)$; erit β centrum aequilibrii omnium $n+1$ virium $A, B, C, \dots P, Q$ (127. §.), demissisque ex q, β, α ad datum quodcunque planum MN perpendicularis $qq', \beta\beta', \alpha\alpha'$, fiet $(Q+K)\beta\beta' = K.\alpha\alpha' + Q.qq'$ (133. §.). Quare, si $K.\alpha\alpha'$ aequetur summae productorum ex n viribus $A, B, C, \dots P$ in distantias punctorum $a, b, c, \dots p$ a plano MN, aequabitur $(Q+K)\beta\beta'$ summae productorum ex $n+1$ viribus $A, B, C, \dots P, Q$, quarum summam $Q+K$ exprimit, in distantias punctorum $a, b, c, \dots p, q$ ab eodem plano MN.

135. Theorema.

In quolibet systemate punctorum a totidem viribus secundum directiones inter se parallelas et in eandem plagam tendentes ad motum sollicitatorum erit productum ex summa omnium virium in distantiam communis centri aequilibrii (128. §.) a quovis plano positione dato aequale summae momentorum singularum virium, adeoque aequale momento totius systematis (130. §.) respectu ejusdem plani.

Demonstratio.

Verum est id de systemate duorum punctorum (133. §.); et si id supponatur esse verum de systemate n punctorum, verum erit id eo ipso etiam de systemate $n+1$ punctorum (134. §.): debet ergo propositum theorema generatim pro quovis possibili systemate punctorum (118. §.) subsistere (Vol. I. §. 31.).

136. Theorema.

Omne planum mn (23. Fig.) transiens per centrum aequilibrii γ dati cujuscunque systematis uvxy (118. 128. §.), dividet totum systema in duas partes uvx, uyx, quarum momenta respectu plani mn erunt inter se aequalia.

Demonstratio.

Centra aequilibrîi partium uvx , uyx systematis $uvxyu$ sint in a , b , et MN sit planum parallelum plano mn , ad quod ex a , b , γ ducta sint perpendiculara aA , γC , bB plano mn in α , γ , β occurrentia. Porro sint V , Y summae virium agentium in partes uvx , uyx systematis $uvxyu$; erit $V.aA$ momentum partis uvx , $Y.bB$ momentum partis uyx adeoque $V.aA + Y.bB$ momentum totius systematis $uvxyu$ respectu plani MN (135. 131. §.): cum igitur hoc ipsum momentum sit etiam $=(V + Y)\gamma C$ (135. §.); debet esse

$$(V + Y)\gamma C = V.aA + Y.bB.$$

Igitur fiet

$$(V + Y)\gamma C = V(\gamma C - a\alpha) + Y(\gamma C + b\beta);$$

$$\text{hinc } V.a\alpha = Y.b\beta,$$

quod ob (135. §.) erat demonstrandum.

137. Theorema.

Et vicissim omne planum mn , quod datum quodcunque systema (118. §.) $uvxyu$ in duas partes uvx , uyx ita dirimit, ut illarum momenta respectu ejusdem plani sint inter se aequalia, transit per centrum aequilibrîi systematis.

Demonstratio.

1. Secus jaceret centrum aequilibrîi systematis $uvxyu$ extra planum mn , possetque per illud duci aliud planum $m'n'$ parallelum plano mn , quod datum systema $uvxyu$ in partes rvs , rys dirimeret; inter utrumque autem planum jaceret una pars $ruxs$ systematis, quod est impossibile.

2. Nam partes uvx , $ruxs$, rys deberent habere propria centra aequilibrîi, puta in a , b , g , et si A , B , G denotent summas virium in easdem partes agentium (128. §.), ductis perpendicularis ad , $g\gamma$, $b\beta$, be ad plana $m'n'$, mn , essent $A.ad$, $B.be$, $G.gc$ momenta partium uvx , $ruxs$, rys respectu plani $m'n'$, et $A.a\alpha$, $B.b\beta$, $G.g\gamma$ momenta earundem partium respectu plani mn (135. §.); consequenter esset $A.ad + B.be$ momentum partis rvs respectu plani $m'n'$, et $G.g\gamma + B.b\beta$ momentum partis uyx respectu plani mn (131. §.): igitur per hypothesim in theoremate assumtam, et (1) ob (136. §.) deberet esse

$$G.g\gamma + B.b\beta = A.a\alpha;$$

$$A.ad + B.be = G.gc.$$

Quare

Quare fieret $G.g\gamma = A.a\alpha - B.b\beta$: ob $G.g\gamma > G.gc$ deberet ergo esse $A.a\alpha - B.b\beta > A.ad + B.be$, quod est impossibile.

138. Theorema.

Si planum $m'n'$ datum systema (118. §.) $uvxyu$ dividat in duas partes rvs , rys , centrum vero aequilibrii totius systematis jaceat extra planum $m'n'$ alicubi in γ ; erit differentia momenti partis rys a momento partis rvs , in qua jacet γ , respectu plani $m'n'$ aequalis producto ex summa virium totius systematis (119. §.) $uvxyu$ in distantiam illius centri aequilibrii γ ab eodem plano $m'n'$.

Demonstratio.

1. Transeat per γ planum mn parallelum plano $m'n'$, quo totum systema $uvxyu$ in tres partes uvx , $uxsr$, rsy dividatur. Centra aequilibrii harum partium sint a , b , g , et ad , be , $b\beta$, $g\gamma$ perpendicularia ad utrumque planum; A vero, B et G sint summae virium (119. §.) agentium in partes uvx , $uxsr$, rsy systematis.

2. Erit momentum partis $ruvxs$ respectu plani $m'n'$ aequale summae $A.ad + B.be$ ob (1) per (135. 131. §.), et $G.gc$ momentum partis rys respectu ejusdem plani $m'n'$ (135. §.): differentia horum momentorum erit ergo

$$\begin{aligned} & A.ad + B.be - G.gc = \\ & = A(\gamma c + a\alpha) + B(\gamma c - b\beta) - G(g\gamma - \gamma c) = \\ & = (A + B + G)\gamma c + A.a\alpha - (B.b\beta + G.g\gamma). \end{aligned}$$

Sed $A.a\alpha$ et $B.b\beta + G.g\gamma$ sunt momenta partium uvx , nyx respectu plani mn , ob (1) per (135. 131. §.), inter se aequalia (136. §.): igitur est etiam

$$(A.ad + B.be) - G.gc = (A + B + G)\gamma c.$$

139. Theorema.

Si in singula puncta a , b , c , d , e , etc. (24. Fig.) dati cujuscunque systematis uvx plurium punctorum (118. §.) agent vel determinatae vires A , B , C , D , E , etc. secundum directiones aA , bB , cC , dD , eE inter se parallelas et in eandem plagam tendentes, vel quaecunque aliae vires A' , B' , C' , D' , E' , quae ad priores sint in certa ratione $m:n$, et quidem vel secundum priores directiones vel secundum alias directiones aA' , bB' , cC' , dD' , eE' ,

inter se parallelas et in eandem plagam tendentes; idem erit semper centrum aequilibræ totius systematis.

Demonstratio.

Secus haberet datum systema uvx in hypothese virium A', B', C', D', E' unum centrum aequilibræ β distinctum a centro aequilibræ α , quod illud in hypothese virium A, B, C, D, E debet habere (128. §.), ductoque plano MN ad rectam $\beta\alpha$ sub angulo βMN inclinato esset distantia perpendicularis $\alpha\gamma$ centri aequilibræ α minor quam distantia $\beta\delta$ centri β a plano MN , quod in assumpta hypothese est impossibile.

Si enim a', b', c', d', e' sint distantiae perpendiculares punctorum a, b, c, d, e a plano MN ; deberet esse per (135. 130. §.)

$$(A+B+C+D+E)\alpha\gamma = A.a' + B.b' + C.c' + D.d' + E.e';$$

$$(A'+B'+C'+D'+E')\beta\delta = A'.a' + B'.b' + C'.c' + D'.d' + E'.e'.$$

Cum vero per hypothese sit $A':A = m:n$, consequenter $A' = A \frac{m}{n}$, et sic $B' = B \frac{m}{n}$, $C' = C \frac{m}{n}$, $D' = D \frac{m}{n}$, $E' = E \frac{m}{n}$; abibit, facta substitutione, secunda aequatio in sequentem

$$(A+B+C+D+E)\beta\delta = A.a' + B.b' + C.c' + D.d' + E.e'.$$

Ex hac vero et prima aequatione evidenter sequitur, debere esse $\alpha\gamma = \beta\delta$, adeoque impossibile esse, ut fiat $\alpha\gamma < \beta\delta$.

DISSERTATIO V.
DE
CENTRO GRAVITATIS IN GENERE.

140. DEFINITIO.

Dum vires singula puncta certi systematis (118. §.) directionibus inter se parallelis et in eandem plagam tendentibus ad motum sollicitantes a gravitate proveniunt (39. §.), centrum aequilibræ ejusdem systematis vocatur *centrum gravitatis*.

141. Corollarium 1.

Pondera e totidem punctis alicujus rectæ libere pendentia spectari debent instar virium in eadem puncta secundum directiones inter se parallelas agentium (42. 43. §.), sic, ut, quaecunque in præcedente dissertatione de ejusmodi virium centro aequilibræ generatim sunt demonstrata, etiam ad centrum gravitatis talium ponderum debeant extendi (140. §.).

142. Corollarium 2.

Quamobrem jacebit centrum gravitatis duorum ponderum aequalium Fig. 25. P, Q e punctis a, b (25. Fig.) datae rectæ bD libere pendentium in medio puncto C inter a et b (141. 122. §.).

143. Corollarium 3.

Quodsi autem pondera P, Q fuerint inaequalia; debet illorum centrum gravitatis coincidere cum puncto C rectæ ab, si hoc ita determinetur, ut sit $P:Q = bC:aC$ (141. 121. §.).

144. Corollarium 4.

Erit porro distantia centri gravitatis C duorum ponderum P, Q ab alterutro puncto suspensionis (a vel b) aequalis producto ex recta ab in pondus (Q vel P) pendens ex altero puncto suspensionis (b vel a) diviso per summam ponderum P, Q (141. 123. §.).

E. gr. Sit recta $ab = 7$ pedibus, quaeraturque centrum gravitatis C ponderum $P = 6$ lb, $Q = 15$ lb; erit

$$aC = \frac{7 \cdot 15}{6 + 15} = 5 \text{ pedibus;}$$

$$bC = \frac{7 \cdot 6}{6 + 15} = 2 \text{ pedibus.}$$

145. Corollarium 5.

Et distantia centri gravitatis C duorum ponderum P, Q a dato quocunque in recta bD puncto d aequabitur summae productorum ex distantiiis singulorum punctorum suspensionis a, b a puncto d in pondera ex illis pendencia divisae per summam ponderum (141. 124. §.).

E. gr. Detur punctum d in distantiiis da = 3 pedibus, db = 10 pedibus a punctis a, b, et quaeratur centrum gravitatis C ponderum P = 15 lb, Q = 5 lb; jacebit illud in distantia a puncto d

$$dC = \frac{3 \cdot 15 + 10 \cdot 5}{15 + 5} = 4\frac{3}{4} \text{ ped.}$$

146. Corollarium 6.

Fig. 26. Et generatim quocunque pondera A, B, C, - - - P, Q e totidem punctis, a, b, c, - - - p, q datae rectae aZ libere pendeant, habebunt illa commune centrum gravitatis in puncto β ejusdem rectae ita determinato, ut illius distantia Zβ a dato quocunque in eadem recta puncto Z aequetur summae productorum ex distantiiis Za, Zb, Zc, - - - Zp, Zq singulorum punctorum suspensionis a puncto Z in ipsa pondera ex illis pendencia divisae per summam omnium ponderum: pressio vero, quam centrum β directione verticali βy ab omnibus ponderibus persentiscet, aequabitur pressioni, quam in illo unicum pondus S summae omnium ponderum aequale ex β libere pendens produceret (141. 126. §.).

147. DEFINITIO.

Omnis massa gravis, linea, superficies, et corpus determinatae figurae, potest spectari instar unius systematis plurium punctorum materialium (118. §.): pressiones aequales, quae in singulis punctis secundum directiones verticales inter se parallelas in quovis massae situ deorsum tendentes a vi gravitatis producuntur (41. 42. §.), licebit instar totidem virium aequalium considerare: producta ex his viribus in distantias perpendicularares punctorum, in quae illae agunt, a dato plano erunt *Momenta* earundem virium respectu dati plani, et summa omnium momentorum dabit

dabit *Momentum* totius massae gravis respectu ejusdem plani (130. §.): summa demum omnium virium aequalium in puncta massae agentium erit pondus totius massae (45. §.).

148. Corollarium 1.

Omnis massa gravis uvx (27. Fig.) habebit aliquod idque unicum Fig. 27. centrum gravitatis C : si in hoc directione verticali opposita CV cogitur agere vis V aequalis ponderi totius massae uvx ; vel si, absente vi V , massa uvx in centro C ita cogitetur figi, ut illa, quin circa C convertatur, moveri nequeat; debet utroque casu tota massa uvx in aequilibrio servari: unde necessario sequitur, pressionem, quam gravitas in centro C directione verticali Cy producit, aequari pressionem, quam in illo vis una y ponderi massae uvx aequalis produceret (141. 128. 129. §.).

149. Corollarium 2.

Potest ergo omne systema plurium massarum gravium spectari instar unius systematis totidem punctorum, cum centrīs gravitatis illarum massarum coincidentium, quae a viribus per pondera earundem massarum determinatis secundum directiones verticales deorsum ad motum debent urgeri (148. 118. §.): omne itaque systema plurium massarum gravium habebit aliquod idque unicum centrum gravitatis (140. 128. 129. §.), quod tanta efficacia directione verticali deorsum premetur ac si ex illo unum pondus aequale summae ponderum omnium massarum totum systema constituentium libere penderet: momentum cujusvis talis massae respectu dati plani erit productum ex distantia centri gravitatis ejusdem massae in illius pondus, et summa momentorum omnium massarum dabit momentum totius systematis respectu dati plani (130. §.).

150. Corollarium 3.

Momentum cujuslibet massae gravis uvx respectu cujuscunque plani non erit aequale producto ex pondere ejusdem massae, seu ipsa massa ei proportionali (52. §.), in distantiam perpendicularem Cc ejus centri gravitatis C (148. §.) ab eodem plano (140. 147. 135. §.).

151. Corollarium 4.

Et momentum cujusvis systematis plurium massarum gravium (149. §.) respectu dati plani aequabitur producto ex summa ponderum omnium

massarum in distantiam perpendiculararem centri gravitatis totius systematis ab eodem plano (149. 140. 135. §.).

152. Corollarium 5.

Si in singula puncta datae massae gravis M cogitentur agere vires aequales independentes a gravitate secundum quascunque directiones in quovis massae M situ inter se parallelas et in eandem plagam tendentes; erit commune centrum aequilibrum omnium harum virium idem cum centro gravitatis massae gravis M (141. 147. 139. §.).

153. Corollarium 6.

Et si, dato quocunque systemate plurium massarum gravium $A, B, C, \dots P, Q$, in centra gravitatis singularum massarum (148. §.) agant quaecunque vires $A^r, B^r, C^r, \dots P^r, Q^r$, ponderibus illarum massarum proportionales, secundum directiones in quovis situ systematis inter se parallelas et in eandem plagam tendentes, seu illae verticales sint, seu a verticalibus utcumque declinent; erit centrum aequilibrum omnium virium $A^r, B^r, C^r, \dots P^r, Q^r$ idem cum centro gravitatis systematis massarum gravium $A, B, C, \dots P, Q$ (149. 140. 139. §.).

154. Corollarium 7.

Fig. 28. Centrum gravitatis systematis duarum massarum gravium A, B (28. Fig.), quarum centra gravitatis z, x aliunde sint nota, jacebit in rectae xz puncto a , quod, data mutua centrorum x, z distantia xz , determinabitur ob (149. §.), si recta xz secetur in a in ratione inversa ponderum, vel massarum A, B illis proportionalium (121. §.), vel per (123. §.) definiatur ejus distantia ab alterutro centro x, z , aut ab alio quocunque puncto u dato in recta xz per (124. §.), quo fiat

$$ax : az = Z : X;$$

$$az = \frac{xz \cdot X}{X + Z}; \quad ax = \frac{xz \cdot Z}{X + Z};$$

$$au = \frac{xu \cdot X + zu \cdot Z}{X + Z}.$$

155. Corollarium 8.

Ex (154. §.) nascemur sequentes formulae, ope quarum, dato centro gravitatis a unius systematis duarum massarum gravium A, B , datoque centro

tro gravitatis z vel x alterutrius massae, centrum gravitatis alterius massae in recta ux transeunte per data centra poterit determinari.

Si datis a, x quaeratur z .

$$az = \frac{ax \cdot X}{Z}; \quad xz = \frac{ax(X+Z)}{Z};$$

$$uz = \frac{ua \cdot Z - ax \cdot X}{Z} = \frac{ua(X+Z) - ux \cdot X}{Z}.$$

Si datis a, z quaeratur x .

$$ax = \frac{az \cdot Z}{X}; \quad zx = \frac{az(X+Z)}{X};$$

$$ux = \frac{ua \cdot X + az \cdot Z}{X} = \frac{ua(X+Z) - uz \cdot Z}{X}.$$

156. Corollarium 9.

Quodsi autem detur systema numero $n+1$ massarum gravium A, B , Fig. 21. $C, \dots P, Q$ (21. Fig) suis ponderibus proportionalium, quarum centra gravitatis $a, b, c, \dots p, q$ nota sint, noscaturque commune centrum gravitatis α n massarum $A, B, C, \dots P$; invenietur centrum gravitatis omnium $n+1$ massarum $A, B, C, \dots P, Q$ in puncto β rectae αq , si ob (149. 140. 127. §) fiat

$$\alpha\beta = \frac{\alpha q \cdot Q}{A+B+C+\dots+P+Q}.$$

157. Corollarium 10.

Hinc (154. 156. §.) per se manifestum fit, qua methodo centrum gravitatis cujuslibet systematis plurium massarum gravium investigare liceat, datis centris gravitatis et ponderibus singularum massarum (148. §.).

Sic, si e. gr. detur sistema quinque massarum gravium A, B, C, D, E Fig. 29. suis ponderibus proportionalium, quarum centra gravitatis in a, b, c, d, e sita sint, ducta recta ab , eademque in l ita secta, ut sit

$$al = \frac{ab \cdot B}{A+B};$$

erit l centrum gravitatis massarum A, B (154. §.). Si jam ex hoc ad c ducatur recta lc , tum determinetur

$$lm = \frac{lc \cdot C}{A+B+C};$$

erit m commune centrum gravitatis trium massarum A, B, C (156. §.).

Si porro ex m ad d ducatur recta md, deinde quaeratur

$$mn = \frac{md \cdot D}{A+B+C+D};$$

erit n commune centrum gravitatis quatuor massarum A, B, C, D (156. §.).

Si demum ex n ad e ducatur recta ne, et determinetur

$$no = \frac{ne \cdot E}{A+B+C+D+E};$$

erit o commune centrum gravitatis quinque massarum A, B, C, D, E (156. §.).

158. DEFINITIO.

Planum gravitatis datae massae gravis, vel *Diameter gravitatis*, est planum vel linea recta transiens per centrum gravitatis ejusdem massae (148. §.).

159. Corollarium 1.

Innumera possunt duci plana gravitatis, et innumerae diametri gravitatis in qualibet massa gravi (158. §.).

160. Corollarium 2.

Omnes diametri gravitatis cujuslibet massae gravis (159. §.) intersecant se in ejus centro gravitatis (158. 148. §.).

161. Corollarium 3.

Communis intersectio duorum planorum gravitatis datae cujuscunque massae gravis erit diameter gravitatis ejusdem massae (158. §.).

162. Corollarium 4.

Et si diameter gravitatis alicujus massae secetur a plano gravitatis ejusdem massae, erit intersectio illius centrum gravitatis (158. §.).

163. Corollarium 5.

Omne planum gravitatis vel unius massae gravis M, vel certi systematis S plurium massarum gravium, dividet totam massam M, vel totum systema S in duas partes, quarum momenta respectu ejusdem plani erunt inter se aequalia (158. 149. 147. 136. §.).

164. Corollarium 6.

Et vicissim omne planum datam massam gravem M, vel datum systema S plurium massarum gravium in duas partes dirimens, quarum momenta

menta respectu ejusdem plani sint inter se aequalia, erit unum planum gravitatis ejusdem massae M vel systematis S (149. 147. 137. 158. §.).

165. Corollarium 7.

Si vero planum mn (27. Fig.) datam massam gravem uvx in duas Fig. 27. partes rus, rvxs dirimat, quin id transeat per centrum gravitatis C massae uvx; erunt momenta partium rus, rvxs respectu plani mn inaequalia, et differentia momenti partis rus a momento partis rvxs, in qua jacet centrum gravitatis C massae uvx, aequabitur producto ex pondere totius massae uvx in distantiam Cc centri gravitatis C a plano mn (148. 147. 138. §.).

166. Corollarium 8.

Ex (164. §.) demum colliges, quod si omnia puncta alicujus massae gravis in uno plano jaceant, hoc ipsum planum debeat esse unum planum gravitatis talis massae: momenta enim partium, in quas massa ab ejusmodi plano dirimitur, aequantur nihilo (147. §.).

167. Hypothesis.

In investigatione centrorum gravitatis sumantur omnes massae, lineae, superficies, et corpora, pro aequabiliter densis et homogeneis, quo fiat, ut tam massae, quam pondera illis proportionalia, per volumina, sub quibus continentur, possint exprimi.

Scholion.

Si enim generatim sit P pondus massae M sub volumine V contentae, et p pondus talis massae contentae sub determinato quopiam volumine v, puta uno pede cubico; erit $P:p = V:v$ (51. §.), hinc $P = p \frac{V}{v}$. Quamobrem licebit ponere $P = V$, modo per V intelligatur exponens rationis voluminis V, sub quo pondus P continetur, ad volumen determinatum v, sub quo continetur pondus p pro mensura prioris assumptum, ita ut V in $P = V$ numerum concretum ad unitatem $= p$ relatum exprimat (15. 18 §.). Hoc sensu poterit massa et pondus cujuslibet lineae gravis per ejus longitudinem; massa vero et pondus cujusvis superficiei gravis per ipsam superficiem geometricae determinatam, et massa pondusque dati cujuscunque corporis per ejus volumen exprimi. Sic e. gr. in investigatione centri gravitatis coni, cujus altitudo a, et area baseos b data sit, licebit ipsius

massam et pondus ei proportionale per volumen $\frac{ab}{3}$ exprimere. Nullae quidem extant lineae graves aut superficies; nihil tamen obstat, quominus tales cogitari possint: sicut autem proprietates massarum homogenearum et aequabiliter densarum in prima dissertatione expositae insignem usum habent in practicis disquisitionibus, licet ejusmodi massae nusquam extent; sic etiam investigatio centri gravitatis talium massarum amplum habebit usum in disquisitionibus mechanicis.

168. Problema.

Dato momento μ datae cujuscunque massae gravis M respectu plani positione dati; invenire distantiam D centri gravitatis massae M ab eodem plano.

Solutio.

Cum sit $\mu = MD$ (150. §.); erit $D = \frac{\mu}{M}$, id est: momentum datae massae gravis respectu plani positione dati divisum per ipsam massam dabit distantiam ejus centri gravitatis ab eodem plano.

169. Problema.

Exponere methodum, qua momentum alicujus massae gravis respectu plani positione dati liceat investigare.

Solutio.

Fig. 30. 1. Imaginemur nobis in (30. Fig.) quamcunque lineam curvam, vel superficiem, aut corpus grave ABCDEA: MN vero sit datum planum, respectu cujus determinare oporteat momentum illius massae.

2. Sumta ad arbitrium linea abscissarum PQ perpendiculari ad planum MN, fixaque abscissarum origine in puncto P, capiatur abscissa $x = Pa$, et per punctum a cogitetur duci planum ap parallelum plano MN: abscindet ap ex tota massa ABCDEA partem pAq, cujus magnitudo pendebit a longitudine abscissae $x = Pa$. Supponamus itaque, possibiles esse duas functiones m, μ variabilis abscissae x , quarum prior m massam pAq, et posterior μ momentum ejusdem massae respectu plani MN exprimat.

3. Quodsi jam abscissa $x = Pa$ abeat in $Pb = x + \Delta x$ pro $ab = \Delta x$ et per punctum b transeat planum br parallelum plano MN; abit functio $m = pAq$ (1) in novam functionem $m' = pAq + pqsr$,

et

et functio μ exprimens momentum massae $m = pAq$ abibit in certam functionem μ^r expressuram momentum massae rAs aequale summae momentorum illius partium $pAq, pqs r$ respectu plani MN (147. §.).

4. In (3) erit itaque $\Delta m = m^r - m$ functio aequalis massae $pqs r$ inter plana pa, rb parallela interceptae, et $\Delta \mu = \mu^r - \mu$ functio aequalis momento massae $\Delta m = pqs r$ respectu plani MN (Vol. I. §. 18).

5. Ignoramus quidem, in quonam puncto centrum gravitatis massae $pqs r = \Delta m$ inter plana pq, rs interceptae jaceat: facile tamen quisque per se perspicier, cur illud cum certo puncto c sito inter plana pq, rs debeat coincidere, ita ut illius distantia cd a plano MN major sit quam bQ , et simul minor quam aQ . Cum ergo momentum $\Delta \mu$ massae $\Delta m = pqs r$ debeat esse $\Delta \mu = \Delta m \cdot cd$ (135. §.); erit semper

$$\Delta \mu > \Delta m \cdot bQ \text{ et } \Delta \mu < \Delta m \cdot aQ.$$

Hinc pro linea abscissarum $PQ = a$, proinde $aQ = a - x$, et $bQ = a - (x + \Delta x)$ fiet

$$\Delta \mu > \Delta m(a - x - \Delta x); \quad \Delta \mu < \Delta m(a - x).$$

6. Verum, si re ipsa est possibilis aliqua functio m variabilis x , quae massam pAq exprimat (2), debet pro ejus differentia dari expressio formae $\Delta m = \varepsilon m \Delta x + e \Delta x^2 + f \Delta x^3 + \text{etc.}$ (Vol. I. §. 84.): eapropter erit in (5)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mu}{\Delta x} &> (a - x) \varepsilon m - (\varepsilon m \cdot \Delta x + e \Delta x^2 + f \Delta x^3 + \text{etc.}) \\ \frac{\Delta \mu}{\Delta x} &< (a - x) \varepsilon m + (a - x)(e \Delta x + f \Delta x^2 + \text{etc.}) \end{aligned}$$

Et ideo erit exponens rationis differentialis functionis μ per (Vol. I. §. 131.)

$$\varepsilon \mu = (a - x) \varepsilon m.$$

7. Quod ergo possibile fuerit, εm per x et εx determinare, poterit quoque $\varepsilon \mu$ per x et εx definiri, tum ope calculi integralis determinari momentum μ massae $m = pAq$ respectu plani MN . Si porro notus fuerit valor abscissae $x = Pa$, pro quo massa $m = pAq$ abeat in massam ACD , puta valor $x = Pe$, substituto hoc valore loco x in functione μ , obtinebitur momentum totius massae $ABCDEA$ respectu dati plani MN .

Scholion:

Idem problema in systemate infinitesimalistarum potest hoc modo solvi. Si sectioni pq cogitetur infinite vicina sectio rs , ut $ab = dx$ sit infinite parvum incrementum variabilis $x = Pa$; erit $dm = pqs$ infinite parvum incrementum massae $m = pAq$, et illius momentum respectu plani MN aequabitur infinite parvo incremento $d\mu$ momenti μ massae pAq respectu ejusdem plani: cum ergo in hac hypothese centrum gravitatis massae pqs adeo vicinum debeat esse sectioni pq , ut differentia inter illius distantiam a plano MN et distantiam $aQ = a - x$ sit infinite parva, proinde nulla; erit momentum $d\mu$ aequale producto ex massa dm in distantiam $a - x$ (135. §.), id est, $d\mu = (a - x) dm$.

170. Corollarium 1.

Sumta origine abscissarum in Q , positaque abscissa $Qa = z$, ut fiat $a - x = z$; erit massa $m = pAq$ certa functio variabilis z , ejus autem momentum μ respectu plani MN dabit $\varepsilon\mu = z \varepsilon m$ (169. §.), ubi jam exponens differentialis εm sumendus erit cum signis contrariis, cum crescente variabili $z = Qa$ versus P decrescat massa $m = pAq$, ejusque momentum μ (Vol. I. §. 132.).

171. Corollarium 2.

Pars residua massae $ABCDEA$ fit $M = pqCDp$, adeoque $M = ABCDEA - m$; erit $\varepsilon M = -\varepsilon m$. Praeterea denotet K momentum massae $ABCDEA$ et k momentum massae $pqCDp = M$ respectu plani MN , quo fiat $k = K - \mu$; erit quoque $\varepsilon k = -\varepsilon\mu$. Quare ob (169. 170. §.) habebimus sequentes expressiones pro exponente rationis differentialis momenti statici k massae $M = pqCDp$ respectu plani MN , in quarum prima sumetur εM cum signis contrariis, cum crescente variabili $x = Pa$ decrescat massa $M = pqCDp$, ejusque momentum k .

$$\varepsilon k = (a - x) \varepsilon M; \quad \varepsilon k = z \varepsilon M.$$

172. Corollarium 3.

Haec principia offerunt methodum universalem investigandi centrum gravitatis datae cujusvis lineae curvae et superficiei, quae tota in uno plano jaceat. Sit enim $ABCD$ ejusmodi vel linea curva, vel superficies plana; necesse est, ut illius centrum gravitatis jaceat in plano ipsius curvae vel superficiei (166. 158. §.): quare cogitentur duo plana ad planum, in quo $ABCDEA$ jacet, perpendicularia, illud in MN , MR , et sese sub

sub angulo recto RMN interfecantia, quo fiat, ut distantiae centri gravitatis massae ABCDEA ab iisdem planis aequentur distantis illius a rectis MN, MR exhibentibus intersectiones eorundem planorum cum plano, in quo jacet ABCDEA. Quodsi jam per (169. 170. 171. §.) determines momenta curvae lineae, vel superficiei ABCDEA respectu planorum per MN, MR ductorum, eaque divides per massam ABCDEA vel datam, vel quacunque methodo inventam; invenies distantias centri gravitatis a rectis MN, MR (168. §.), atque per has erit situs centri gravitatis perfecte determinatus. Fac enim distantiam illius a recta MN esse $= S$, et distantiam a recta MR inventam esse $= s$; sumta $Mf = S$ et $Mc = s$, ductisque ex f , d ad MR, MN perpendicularibus fc , dc in c sese interfecantibus: erit c quaesitum centrum gravitatis.

173. Corollarium 4.

Ubi autem investigandum fuerit centrum gravitatis vel alicujus corporis, vel cujuspiam lineae curvae aut superficiei, quae non tota in uno plano jaceat; licebit totam ad tria plana sese sub angulis rectis interfecantia referre, tum momenta respectu singulorum planorum per (169. 170. 171. §.) quaerere: si enim haec per datam vel quacunque ratione determinatam massam dati corporis, aut datae lineae curvae vel superficiei dividantur, obtinebuntur distantiae illius centri gravitatis a singulis planis (168. §.), et per has erit idem centrum perfecte determinatum.

Scholion.

In multis tamen iisque maxime memorabilibus casibus facile una diameterum gravitatis datae massae cognoscitur, quo ipso investigatio centri gravitatis compendiosior redditur. Persaepe porro occurrunt tales massae, quarum centra gravitatis per data centra aliarum massarum secundum principia superius exposita (154. 155. 157. §.) possunt determinari, quin sit necessarium ad praecedentem methodum, aut aliam illi similem refugere. Utrumque in sequentibus dissertationibus pluribus exemplis illustrabitur: multa horum exemplorum exhibent casus, qui in practicis disquisitionibus frequenter possunt occurrere: reliqua id habent utilitatis, quod tyronibus uberrimum campum sese in adplicatione principiorum calculi differentio-integralis in primo horum opusculorum volumine expositis aperiant.

DISSERTATIO VI.
DE
INVESTIGATIONE CENTRI GRAVITATIS LINEARUM
ET PLANORUM GRAVIUM.

174. Problema.

Fig. 6. *Invenire centrum gravitatis datae lineae rectae AB (6. Fig.).*

Solutio.

Bissecetur data recta AB in puncto C; erit C illius centrum gravitatis.

Demonstratio.

Cum enim singula puncta rectae AB pari efficacia secundum directiones varicales inter se parallelas deorsum a vi gravitatis premantur; necesse est, ut, si vis una V aequalis ponderi totius rectae AB (167. §.) secundum directionem verticalem CV oppositam directioni gravitatis in punctum medium C ejusdem rectae agere cogitetur, ea rectam AB fervet in aequilibrio (120. §.): punctum ergo C est centrum gravitatis rectae AB (140. 119. §.).

175. Theorema.

Fig. 31. *Si recta QC sit axis datae curvae XQZ (31. Fig.), et XZ chorda ad axem perpendicularis; jacebit in QC centrum gravitatis arcus XQZ, seu QC erit diameter gravitatis hujus arcus (158. §.).*

Demonstratio.

Ex quocunque puncto a axeos QC ducatur chorda pq ad illum perpendicularis, debet haec bissecari in a (Vol. I. §. 438.); pro quovis idcirco puncto gravi alterutrius arcus QX, QZ dabitur unum punctum grave in altero arcu, cujus distantia perpendicularis ab axe QC aequetur distantiae perpendiculari prioris puncti ab eodem axe: quodsi ergo cogitetur planum LK per axem QC transiens et ad planum, in quo totus arcus XQZ jacere supponitur, perpendicularare; erit summa momentorum singulorum punctorum gravium arcus QX respectu plani LK, aequalis summae

summae momentorum singulorum punctorum gravium arcus QZ respectu plani LK, proinde etiam momentum totius arcus QX aequabitur momento arcus QZ (147. §.). Planum KL erit ergo planum gravitatis arcus XQZ (164. §.): quare, cum etiam planum, in quo totus arcus XQZ jacet, sit unum planum gravitatis ejusdem arcus (166. §.); erit eo ipso axis QC diameter gravitatis hujus arcus (161. §.).

176. Problema.

Data aequatione ad curvam quamcunque XQZ inter abscissas $z=Qa$ in curvae axe QC jacentes et ordinatas orthogonas $y=pa$; invenire centrum gravitatis arcus pQq subtenfi a chorda pq perpendiculari ad axem QC.

Solutio.

1. Centrum gravitatis arcus pQq debet coincidere cum uno puncto γ axeos QC (175. §.), quod idcirco determinabitur inventa ejus distantia Q γ a curvae vertice Q.

2. Quamobrem sit arcus pQ= ϕ , pQq=M=2 ϕ , et μ momentum arcus M respectu plani MN perpendicularis in Q ad planum curvae XQZ axemque QC; erit

$$\epsilon M = 2\epsilon\phi = 2\sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)} \text{ per (Vol. I. §. 469.);}$$

$$\epsilon\mu = z\epsilon M = 2z\sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)} \text{ per (171. §.).}$$

3. Porro clarum est, tam massam M=pQq, quam ejus momentum μ respectu plani MN debere aequari nihilo, si fiat $z=Qa=0$: formulae ergo differentiales in (2) debebunt dare integralia M, μ singula =0 pro $z=0$, unde constantium inventio pendet (Vol. I. §. 238.).

4. Quodsi autem integralia M, μ perfecte fuerint determinata, determinabitur per illa etiam distantia Q γ (1) centri gravitatis γ a puncto Q, nimirum $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ (168. §.), cujus generalis expressio erit hoc casu

$$Q\gamma = \frac{\int z\sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)}}{\int \sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)}}.$$

177. Corollarium 1.

Sit pQq arcus circuli ex centro C radio CQ=r descripti; debebit ejus centrum gravitatis γ jacere in radio CQ bissecante tam chordam pQ=2y, quam arcum pQq; illius autem distantia Q γ a puncto Q invenietur

venietur hoc modo. Pro momento μ arcus $pQq = M$ respectu plani MN , et $z = Qa$, adeoque $y^2 = 2rz - z^2$ fiet

$$sy = \frac{(r-z)\varepsilon z}{y}; \quad \text{hinc } \varepsilon z = rz - y\varepsilon y;$$

$$\sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon z^2)} = \frac{r\varepsilon z}{y};$$

igitur erit per (176. §. 3. n.)

$$\varepsilon M = \frac{2r\varepsilon z}{y}; \quad \varepsilon \mu = \frac{2rz\varepsilon z}{y} = r\varepsilon M - 2r\varepsilon y;$$

hinc $\mu = rM - 2ry$ pro $M = pQq$.

Per (176. §. 4. n.) habebimus

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = r - \frac{2ry}{M}.$$

178. Corollarium 2.

Distantia centri gravitatis γ arcus circularis pQq , ab hujus centro magnitudinis C erit $C\gamma = CQ - Q\gamma$: igitur per (177. §.) $C\gamma = \frac{2ry}{pQq}$, hinc $pQq : pq = CQ : C\gamma$, id est: Distantia centri gravitatis γ arcus circularis pQq est quarta geometricè proportionalis ad arcum, ejus chordam, et radium.

179. Corollarium 3.

Posita chorda $2y = pq = XZ = zr$, abibit arcus circularis pQq in femiperipheriam $XQZ = r\pi$, denotante $1:\pi$ rationem radii ad femiperipheriam (Vol. I. §. 5. Schol.), quem significatum pro π ubique in sequentibus retinebimus: distantia centri gravitatis γ femiperipheriae circularis XQZ ab hujus centro magnitudinis C debet ergo aequari duplo quadrato radii diviso per ipsam femiperipheriam, seu radio ducto in numerum $\frac{2}{\pi}$, nimirum erit (178. §.)

$$C\gamma = \frac{2r^2}{XQZ} = \frac{2r}{\pi}.$$

Et pro integra peripheria M circuli, quo casu fit chorda $2y = 0$, erit in (177. §.) $Q\gamma = r$, id est: centrum gravitatis peripheriae circularis coincidit cum ejus centro magnitudinis.

180. Corollarium 5.

Hac ratione poterit solutio praecedentis problematis ad alias quoque curvas adplicari. Sit pQq arcus parabolae, ad quam est aequatio $y^2 = pz$ (Vol. I. §. 508.); erit

$$2y\epsilon y = p\epsilon z; \epsilon y = \frac{p\epsilon z}{2y} = \frac{p^{\frac{1}{2}}\epsilon z}{2z^{\frac{1}{2}}};$$

$$\sqrt{(\epsilon y)^2 + \epsilon z^2} = \frac{\epsilon z}{2z^{\frac{1}{2}}} \sqrt{(p+4z)}.$$

Adeoque per (176. §. 2. n.) fiet

$$\epsilon M = \frac{\epsilon z}{2z^{\frac{1}{2}}} \sqrt{(p+4z)}; \epsilon \mu = \frac{z^{\frac{1}{2}}\epsilon z}{2} \sqrt{(p+4z)}.$$

Quamobrem, si capias integralia algebraico-logarithmica M, μ per (Vol. I. §. 303. 289), quantitatesque constantes juxta (176. §. 3. n.) determines; obtinebis distantiam $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ centri gravitatis γ arcus parabolici pQq ab ejus vertice Q .

181. Corollarium 6.

Sic quoque, si pQq sit arcus ellipseos vel hyperbolae, determinetur ϵy ex aequatione $y^2 = pz - \frac{pz^2}{a}$ vel $y^2 = pz + \frac{pz^2}{a}$ (Vol. I. §. 540. 564.), tum, substituto eo valore loco ϵy in (176. §. 2. n.), quaerantur integralia, μ, M per (176. §. 3. n.): erit enim $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ distantia centri gravitatis arcus pQq ellipseos vel hyperbolae ab ejusdem vertice Q (176. §. 4. n.).

182. Corollarium 7.

Pro arcu $M = pQq$ (32. Fig.) cycloidis erit $\epsilon y = \epsilon z \sqrt{\frac{2r-z}{z}}$ Fig. 32. (Vol. I. §. 609.): igitur fiet in (176. §. 2. n.)

$$\epsilon M = 2\epsilon z \sqrt{\frac{2r}{z}}; \quad \epsilon \mu = 2z\epsilon z \sqrt{\frac{2r}{z}}.$$

Quamobrem integrando per (176. §. 3. n.) inveniemus

$$M = 4\sqrt{2rz}; \quad \mu = \frac{4}{3}\sqrt{2rz^3}.$$

Distantia centri gravitatis γ arcus pQq cycloidis a vertice Q pro quavis abscissa $z = Qa$ erit ergo ob (176. §. 4. n.) $Q\gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{1}{3}z$; unde pro $z = Qc = 2r$ reperietur distantia centri gravitatis γ totius cycloidis XQZ , nimirum $Q\gamma = \frac{2}{3}r$, seu aequalis duabus tertiis partibus radii $r = Qc$ circuli genitoris.

183. Theorema.

Fig. 33. Si centra gravitatis $e, --- a, b, --- x$ (33. Fig.) omnia in dato plano vel corpore gravi $ApCqA$ cogitabilia et inter se parallelarum sectionum $df, --- pq, rs, --- uv$ in una recta AC jaceant; jacebit quoque in eadem recta centrum gravitatis totius plani vel corporis $ApCqA$, adeoque AC erit illius diameter gravitatis (158. §.).

1. Sit mn unum planum, in quo jaceat recta AC : erit mn commune planum gravitatis singularum sectionum gravium $df, --- pq, rs, --- uv$ inter se parallelarum, quae in dato plano vel corpore $ApCqA$ possunt cogitari (158. §.); singulaeque sectiones dividuntur ab eodem plano in partes de et $ef, --- pa$ et aq, rb et $bs, --- ux$ et xv , quarum quaevis binae inter se habebunt aequalia momenta respectu plani mn (163. §.): igitur erit summa momentorum ex parte AqC plani mn aequalis summae momentorum ex parte opposita ApC , seu planum mn dirimet datum planum vel corpus $ApCqA$ in duas partes, quarum momenta respectu ejusdem plani erunt inter se aequalia (147. §.).

2. Quotcunque igitur plana mn , quarum communis interseccio sit recta AC , cogitentur transire per datum planum vel corpus grave $ApCq$; erit quodvis illorum unum planum gravitatis massae $ApCqA$ ob (1) per (164. §.), eoque ipso est recta AC una diameter gravitatis ejusdem massae (161. §.).

184. Problema.

Fig. 34. Invenire centrum gravitatis dati cujuscunque trianguli rectilinei ABC (34. Fig.).

Solutio.

Bissecctis duobus lateribus AC, BC in b, a , ducantur ex verticibus B, A angulorum oppositorum rectae Bb, Aa ; debeat recta Bb quamlibet cogitabilem sectionem trianguli ABC lateri AC parallelam, et Aa quamvis ejus sectionem parallelam lateri BC bissecare: rectae Bb, Aa erunt

erunt ergo duae diametri gravitatis trianguli ABC (183. §.), cujus centrum gravitatis debeat idcirco esse punctum intersectionis g rectarum Bb, Aa (160. §.).

Ducatur jam ex b parallela bβ ad Aa; erunt triangula CAa, Cbβ inter se similia; hinc, ob $Cb = \frac{1}{2}CA$, etiam $b\beta = \frac{1}{2}Aa$, et $C\beta = \frac{1}{2}Ca = \frac{1}{4}BC$, $B\beta = \frac{3}{4}BC$: quomobrem in triangulis similibus Bga, Bbβ habebimus $E\beta:Ba = b\beta:ga$, seu $\frac{3}{4}BC:\frac{1}{4}BC = \frac{1}{2}Aa:ga = \frac{1}{2}Aa$.

185. Corollarium 1.

Centrum gravitatis cujuslibet trianguli rectilinei ABC jacet in puncto g rectae Aa ex vertice A cujuscunque anguli ad punctum medium a lateris oppositi BC ductae, ita ut ejus distantia ga a puncto a aequetur uni tertiae, distantia vero Ag a puncto A aequalis sit duabus tertiis totius rectae Aa, nimirum $ga = \frac{1}{3}Aa$, et $gA = \frac{2}{3}Aa$ (184. §.).

186. Corollarium 2.

Hinc pendet inventio centri gravitatis cujuslibet quadrilateri ABCD Fig. 35. (35. Fig.). Si enim ducta diagonali AC, ductisque ad ejus medium punctum c rectis Bc, Dc, hae ipsae rectae dividantur in tres partes aequales, quo fiat $Ba = \frac{2}{3}Bc$ et $Db = \frac{2}{3}Dc$; erunt puncta a, b centra gravitatis triangulorum ABC, ADC (185. §.): determinatis ergo eorundem areis, et ducta recta ab, inveniatur centrum gravitatis d quadrilateri ABCD, si recta ab ita fecetur in d, ut sit (167. 154. §.).

$$ad = \frac{ab \cdot ADC}{ABC + ADC}; \quad bd = \frac{ab \cdot ABC}{ABC + ADC}.$$

Secus poterunt in hac determinatione puncti d areis ABC, ADC substitui perpendiculara Bq, Dp ad diagonalem AC demissa: cum enim sit $ABC:ADC = Bq:Dp$, hinc $ABC = \frac{ADC \cdot Bq}{Dp}$; erit etiam

$$ad = \frac{ab \cdot ADC}{\frac{ADC \cdot Bq}{Dp} + ADC}; \quad bd = \frac{ab \cdot \frac{ADC \cdot Bq}{Dp}}{\frac{ADC \cdot Bq}{Dp} + ADC};$$

$$\text{seu } ad = \frac{ab \cdot Dp}{Bq + Dp}; \quad bd = \frac{ab \cdot Bq}{Bq + Dp}.$$

187. Corollarium 3.

Geometrice determinabis centrum gravitatis quadrilateri ABCD, si, determinatis centris gravitatis a, b triangulorum ABC, ADC per (185. §.) ductaque recta ab, et ductis ad diagonalem AC perpendicularis Bq, Dp, ducas rectam indefinitam bβ sub quocunque angulo abβ, tum in hac capias bn=Bq, mn=Dp: si enim ex m ducas ad a rectam ma, et huic ex n parallelam nd; debet nd rectam ab secare in centro gravitatis quadrilateri ABCD, ob $bm:bn=ab:bd$, adeoque

$$bd = \frac{ab \cdot bn}{bm} = \frac{ab \cdot Bq}{Bq + Dp} \quad (186. §.).$$

188. Corollarium 4.

In multis casibus habebit datum quadrilaterum ABCD duo latera parallela CB, AD, quae perpendicularis Bq, Dp in (186. 187. §.) poterunt substitui. Cum enim in hac hypothese sit $Bq:Dp=BC:AD$, hinc $Bq + Dp:Bq=BC+AD:BC$; poterit in (186. 187. §.) summi BC loco Bq, AD loco Dp, et $BC+AD$ loco $Bq+Dp$.

189. Corollarium 5.

Quodsi vero quaevis bina latera opposita BC et AD, DC et AB, fuerint inter se parallela; jacebunt rectae Bc, Dc, ab in una recta BcD, et centrum gravitatis d coincidit cum puncto medio rectae BcD in (186. §.): centrum gravitatis cujuslibet parallelogrammi ABCD (36. Fig.) est itaque punctum c, in quo ejus diagonales AC, BD sese interfecant.

190. Corollarium 6.

Fig. 37. Si quaeras centrum gravitatis dati cujusunque polygoni irregularis, ut ABCDEFA (37. Fig.), resolve illud in triacula per diagonales AE, AD, BD, tum, determinatis singulorum triangulorum centris gravitatis a, b, c, d per (185. §.), et areis, quaere per (167. 157. §.) commune centrum gravitatis omnium triangulorum.

191. Theorema.

Centrum gravitatis cujuslibet polygoni regularis coincidit cum illius centro magnitudinis.

Demon-

Demonstratio.

Si cogitetur unum planum perpendiculare ad planum dati polygoni regularis transire per illius centrum magnitudinis, et unum angulum perimetri ejusdem polygoni bissecare; dividetur polygonum in duas partes inter se similes et aequales, proinde perfecte congruentes, eundemque respectu plani secantis situm habentes; centra idcirco gravitatis harum partium in iisdem jacebunt distantis a plano secante: producta ergo ex areis aequalibus earundem partium dati polygoni in distantias centrorum gravitatis a plano secante, seu momenta partium polygoni respectu plani secantis erunt inter se aequalia (150. §.), proinde erit planum secans unum planum gravitatis dati polygoni regularis (163. §.). Quodsi vero omnia plana ad planum dati polygoni regularis perpendicularia, et quoscunque angulos illius perimetri bissecantia sint plana gravitatis ipsius polygoni, quia etiam planum in quo totum polygonum jacet, est illius planum gravitatis (166. §.); necesse est, ut omnes rectae quoscunque angulos perimetri bissecantes sint diametri gravitatis ejusdem polygoni (161. §.), quae omnes, sicut in illius centro magnitudinis, ita quoque in ejusdem centro gravitatis sese debent interfecare (160. §.).

192. Problema.

Data aequatione ad curvam XQZ (31. Fig.) inter abscissas $z = Qa$ Fig. 31. in ejus axe QC computatas, et ordinatas orthogonas $y = pa$, invenire centrum gravitatis spatii pQqap = M inter arcum pQq et chordam pq ad axem QC perpendicularem comprehensi.

Solutio.

1. Centrum gravitatis spatii pQqap erit certum punctum γ axeos QC (183. §.), cujus inventio pendet ab inventionem distantiae Q γ a curvae vertice Q.

2. Cum jam M denotet massam segmenti pQqap, si praeterea vocetur μ ejus momentum respectu plani MN in Q ad QC perpendicularis; debebit esse (168. §.) $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$.

3. Porro pro $S = Qpa$ est $M = 2S$, et $sS = y\epsilon z$ (Vol. I. §. 488.), $sM = 2sS$: ob (171. §.) debebit ergo poni

$$sM = 2y\epsilon z; \quad \epsilon\mu = 2yz\epsilon z.$$

K

4. Ab integratione horum exponentium differentialium pendet itaque inventio tam massae $M = p Q q a p$, quam ejus momenti μ respectu plani MN ; clarum vero est, pro abscissa $z = Q a = 0$, vel ordinata $y = p a = 0$, debere fieri tam $M = 0$, quam $\mu = 0$, unde sequitur, integralia eorundem exponentium sic esse determinanda, ut quodvis illorum aequetur nihilo, seu fiat $z = 0$, seu $y = 0$.

5. Inventis autem integralibus M , μ , inveniatur eo ipso etiam distantia $Q\gamma$ centri gravitatis γ (1) per (2), cujus generalis expressio erit ob (3)

$$Q\gamma = \frac{\int 2 y z \varepsilon z}{\int 2 y \varepsilon z} = \frac{\int y z \varepsilon z}{\int y \varepsilon z}.$$

193. Problema.

Fig. 38. *Invenire centrum gravitatis segmenti p Q q a p (38. Fig.) circuli radio CQ = r descripti.*

Solutio.

Centrum gravitatis segmenti $M = p Q q a p$ coincidit cum puncto γ radii $CQ = r$ perpendicularis ad chordam $p q$, et ejus distantia a puncto Q erit $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ (192. §. 2. n.). Verum pro $y = p a$, et $z = Q a$ est $y^2 = 2 r z - z^2$ aequatio ad circulum, ex qua obtinebimus

$$y = \sqrt{(2 r z - z^2)}; \quad \varepsilon y = \frac{(r - z) \varepsilon z}{y};$$

et $z \varepsilon z = r \varepsilon z - y \varepsilon y$.

In (192. §. 3. n.) debet ergo hoc casu poni

$$\varepsilon M = 2 y \varepsilon z; \quad \varepsilon \mu = 2 r y \varepsilon z - 2 y^2 \varepsilon y;$$

adeoque integrando per (192. §. 4. n.) inveniemus

$$\mu = r \int 2 y \varepsilon z - \frac{2}{3} y^3 = r M - \frac{2}{3} y^3.$$

Quare cum area segmenti $p Q q a p$ sit

$$M = \frac{1}{2} r \cdot p Q q - y \sqrt{(r^2 - y^2)};$$

erit distantia centri gravitatis γ a puncto Q

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = r - \frac{\frac{2}{3} y^3}{p Q q \cdot r - 2 y \sqrt{(r^2 - y^2)}},$$

ubi $p Q q$ est arcus segmenti $p Q q a p$.

194. Corollarium 1.

Distantia $C\gamma$ centri gravitatis γ segmenti circularis pQq a centro C circuli, ob $C\gamma = r - Q\gamma$, erit per (193. §.)

$$C\gamma = \frac{4}{3} \cdot \frac{y^3}{pQq \cdot r - 2y\sqrt{(r^2 - y^2)}}.$$

195. Corollarium 2.

Pro chorda $2y = 2r$ in (194. §.) obtinebitur distantia centri gravitatis γ semicirculi $XQZCX$ (39. Fig.) radio $CX = r$ descripti ab ejus centro C per semiperipheriam XQZ , nimirum

$$C\gamma = \frac{4}{3} \cdot \frac{r^2}{XQZ} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}.$$

Scholion.

Si super radio $XC = QC = r$ quadratrix dinoscatur describi, origine in X sumta; debet illa terminari in centro gravitatis γ semiperipheriae XQZ circuli radio r descripti, per (179. §.) et (Vol. I. 602. §.). Proprietatem hanc quadratricis *Guldinus* in sua *Centro-Baryca*. Cap. VI. primus notavit: verum hanc ipsam proprietatem habet etiam cyclois vulgaris, quae super diametro XZ potest describi. Semibasis enim XC hujus cycloidis debet aequari semiperipheriae circuli genitoris (Vol. I. 607. §.): diameter circuli genitoris ejusdem cycloidis debet ergo esse $= \frac{2 \cdot XC}{\pi}$, adeoque aequalis distantiae $C\gamma$ centri gravitatis γ semiperipheriae circularis XQZ ab ejusdem centro C (179. §.). Altera vero proprietas cycloidis super diametro XZ descriptae, et, ut vidimus, transeuntis per centrum gravitatis γ semiperipheriae circularis XQZ , in eo consistit, quod centrum gravitatis ejusdem cycloidis cum centro gravitatis areae semicircularis $XQZCX$ coincidat: cum enim, ut ostendimus, sit $\frac{2 \cdot XC}{\pi}$ diameter illius circuli genitoris; erit $\frac{4}{3} \cdot \frac{XC}{\pi}$ distantia centri gravitatis ejusdem cycloidis a puncto C (182. §.), aequalis distantiae centri gravitatis areae semicirculi XQZ ab eodem puncto C (195. §.).

196. Corollarium 3.

Et pro $z = 2r$, hinc $y = 0$ erit $Q\gamma = r$ et $C\gamma = 0$ (193. 194. §.), id est: centrum gravitatis integri circuli coincidit cum illius centro magnitudinis.

197. Corollarium 4.

Fig. 40. Datis chordis $rs=2c$, $pq=2C$ (40. Fig.) in circulo radii $CX=r$ jacebit centrum gravitatis α spatii $rsqp$ inter chordas parallelas rs , pq comprehensi in radio CQ easdem bissecante in b , a ; distantia vero illius a centro C determinabitur hoc modo. Si γ , δ sint centra gravitatis segmentorum $pQqap$, $rQsbr$; debet esse per (155. §.)

$$C\alpha = \frac{C\gamma \cdot pQqap - C\delta \cdot rQsbr}{pqsr}$$

Quare, si per datas chordas $2c$, $2C$, datumque radium r exprimantur tam areae segmentorum $pQqap$, $rQsbr$, $pqs r = pQqap - rQsbr$, quam distantiae $C\gamma$, $C\delta$ juxta (194. §.), prodibit, perfecta substitutione et reductione, sequens expressio

$$C\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{r^3 - c^3}{r \cdot qs + c\sqrt{(r^2 - c^2)} - C\sqrt{(r^2 - C^2)}}$$

Si autem distantiam centri gravitatis α areae $pqs r$ a puncto a consideres; invenies illam subtractione distantiae $Ca = \sqrt{(r^2 - C^2)}$ ab inventa distantia $C\alpha$.

198. Corollarium 5.

Fig. 41. Pro $2C=2r$ in (197. §.) invenietur distantia $C\alpha$ centri gravitatis α spatii $rsZX$ (41. Fig.) inter diametrum XZ circuli et chordam $rs=2c$ ei parallelam comprehensi a centro C magnitudinis ejusdem circuli, nimirum

$$C\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{r^3 - c^3}{r \cdot sZ + c\sqrt{(r^2 - c^2)}}$$

199. Corollarium 6.

Fig. 42. Datis centris gravitatis γ , β (42. Fig.) segmenti $pQqap$ et trianguli Cpq , invenietur in radio CQ bissecante chordam $pq=2y$ centrum gravitatis α sectoris $CpQqC$ circuli radio $CQ=r$ descripti, determinata per (167. 154. §.) ejus distantia a centro C , nimirum

$$C\alpha = \frac{C\gamma \cdot pQqap + C\beta \cdot Cp q}{pQqap + Cp q}$$

Cum enim sit $Ca = \sqrt{(r^2 - y^2)}$, et $C\beta = \frac{2}{3} Ca$ (185. §.), determinata area trianguli $Cpq = y\sqrt{(r^2 - y^2)}$, determinataque area segmenti $pQqap$,

pQqap, et distantia Cy illius centri gravitatis γ a centro C per (194. §.); debeat esse

$$C\alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{ry}{pQq}.$$

denotante pQq arcum sectoris.

200. Corollarium 7.

Si γ esset centrum gravitatis arcus pQq, fieret $C\gamma = \frac{2ry}{pQq}$ (178. §.), hinc $C\alpha = \frac{2}{3} C\gamma$ (199. §.), id est: distantia centri gravitatis α cujuslibet sectoris CpQqC ab ejus centro magnitudinis C aequatur duabus tertiis distantiae centri gravitatis γ arcus pQq ab eodem centro C.

201. Corollarium 8.

Si desideretur centrum gravitatis v spatii abed (43. Fig.) inter arcus Fig. 43. concentricos ab, de radiis Cd=Ce=r, Ca=Cb=R descriptos comprehensi; jacebit illud in puncto v radii Cm bissecantis arcus ab, de, ita, ut si x, u dicantur esse centra gravitatis sectorum Cab, Cde, illius distantia a centro C debeat esse per (167. 155. §.)

$$Cv = \frac{Cx \cdot aCb - Cu \cdot Cde}{aCb - Cde}.$$

Hinc, si 2c, 2C sint chordae subtendentes arcus de, ab, obtinebimus per (199. §.)

$$Cx = \frac{4RC}{3 \cdot ab}; \quad Cu = \frac{4rc}{3 \cdot de};$$

$$aCb = \frac{1}{2} R \cdot ab; \quad dCe = \frac{1}{2} r \cdot de;$$

$$Cv = \frac{4}{3} \cdot \frac{CR^2 - cr^2}{ab \cdot R - de \cdot r} = \frac{4C}{3 \cdot ab} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

202. Corollarium 9.

Centrum gravitatis v dimidii annuli AMBENDA (44 Fig.) radio. Fig. 44. rum CD=r, CA=R jacebit in radio Cm ipsum bissecante in distantia a centro C (201. §.).

$$Cv = \frac{4R}{3 \cdot AMB} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}.$$

203. Problema.

Fig. 31. *Invenire centrum gravitatis γ spatii pQq (31. Fig.) inter arcum pQq parabolae, et chordam pq illius axi QC perpendiculararem comprehensi.*

Solutio.

Sit $M = pQqap$ area dati spatii pro $z = Qa$, $y = pa$: cum debeat esse $y = p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$ (Vol. I. §. 508.); erit in (192. §. 3. n.)

$$\epsilon M = 2 p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} \epsilon z; \quad \epsilon \mu = 2 p^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{2}} \epsilon z.$$

Peracta igitur integratione per (192. §. 4. n.), invenietur distantia centri gravitatis γ segmenti pQqap ab ejus vertice Q per (192. §. 2. n.)

$$Q \gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{3}{2} z = \frac{3}{2} Qa.$$

204. Problema.

Invenire centrum gravitatis γ spatii pQqap inter arcum pQq ellipseos et chordam pq ejus axi transverso QC perpendiculararem comprehensi.

Solutio.

Pro $Qa = z$, $pa = y$ est in ellipfi (Vol. I. 540. §.) $y = \sqrt{(pz - \frac{p z^2}{a})}$; igitur debet poni in (192. §. 3. n.)

$$\epsilon M = \frac{2 p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot z^{\frac{1}{2}} \epsilon z \sqrt{(a - z)};$$

$$\epsilon \mu = \frac{2 p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot z^{\frac{3}{2}} \epsilon z \sqrt{(a - z)}.$$

Captis integralibus per (Vol. I. §. 289. 301.), et determinatis constantibus juxta (192. §. 4. n.) per (Vol. I. §. 238.), reperiemus

$$M = \frac{2 p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{4} (2z - a) \sqrt{(az - z^2)} + \frac{a^2}{8} \text{Arc Sin } \frac{2z - a}{a} + \frac{\pi a^2}{16} \right);$$

$$\mu = \frac{2p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{1}{3} \sqrt{(az - z^2)^3} + \frac{a(2z - a)}{8} \sqrt{(az - z^2)} \right. \\ \left. + \frac{a^3}{16} \text{Arc Sin } \frac{2z - a}{a} + \frac{\pi a^3}{32} \right).$$

Quamobrem, si μ dividamus per M , obtinebimus hinc distantiam $Q\gamma$ centri gravitatis γ spatii elliptici $pQqap$ pro quavis abscissa $z = Qa$ ob (192. §. 2. n.).

205. Corollarium 1.

Si abscissa $z = Qa = \frac{1}{2}a$ aequetur semiaxi transverso ellipseos; erit $pQqap$ dimidia area ellipseos, et distantia illius centri gravitatis γ a vertice Q erit $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ posita abscissa $z = \frac{1}{2}a$ in (204. §.); unde determinari potest etiam ejus distantia a centro a ellipseos, ob $a\gamma = Qa - Q\gamma = \frac{1}{2}a - Q\gamma$; nimirum erit

$$Q\gamma = \frac{a(3\pi - 4)}{6\pi}; \quad a\gamma = \frac{2a}{3\pi}.$$

Centrum ergo gravitatis γ femiellipseos $pQqap$ coincidit cum centro gravitatis semicirculi $rQsar$, qui super axe conjugato pq utrinque producto e centro ellipseos a radio aQ aequali semiaxi transverso potest describi (195. §.).

206. Corollarium 2.

Hoc modo licebit etiam quaerere distantiam $Q\gamma$ centri gravitatis γ spatii $pQqap$ inter arcum pQq hyperbolae, et chordam pq illius axi transverso QC perpendiculararem comprehensi. Cum enim, pro $z = Qa$, $y = pa$, in hyperbola sit $y = \sqrt{(pz + \frac{pz^2}{a})}$ ob (Vol. I. §. 564.); debet esse in (192. §. 3. n.)

$$\epsilon M = \frac{2p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} z^{\frac{1}{2}} \epsilon z \sqrt{(a + z)};$$

$$\epsilon \mu = \frac{2p^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} z^{\frac{3}{2}} \epsilon z \sqrt{(a + z)};$$

quodsi ergo determines integralia algebraico-logarithmica M , μ juxta (192.

(192. §. 4. n.) per (Vol. I. 301. 238. §.), tum dividas μ per M ; dabit quotiens distantiam $Q\gamma$ per (192. §. 2. n.).

207. Problema.

Fig. 45. *Invenire centrum gravitatis γ spatii pQqap (45. Fig.) inter arcus pQ, qQ cissoidis et chordam pq illius axi QC perpendiculararem comprehensi.*

Solutio.

Pro abscissa $z = Qa$, ordinata $y = pa$, et axe cissoidis $QC = a$ est

$y = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a-z)}}$ per (Vol. I. §. 584): in (192. §. 3. n.) debet ergo poni

$$\varepsilon M = \frac{2z^{\frac{3}{2}} \varepsilon z}{\sqrt{(a-z)}}; \quad \varepsilon \mu = \frac{2z^{\frac{5}{2}} \varepsilon z}{\sqrt{(a-z)}}.$$

Si jam hi exponentes differentiales juxta (192. §. 4. n.) per (Vol. I. §. 302. 287.) integrentur, fiet

$$\begin{aligned} M &= \frac{3a^2\pi}{8} + \frac{3a^2}{4} \text{Arc Sin } \frac{2z-a}{a} \\ &\quad - \frac{1}{2}(2z+3a)\sqrt{(az-z^2)}; \\ \mu &= \frac{5a^3\pi}{16} + \frac{5a^3}{8} \text{Arc Sin } \frac{2z-a}{a} \\ &\quad - \frac{1}{12}(8z^2+10az+15a^2)\sqrt{(az-z^2)}. \end{aligned}$$

Consequenter, diviso momento μ per massam M , invenietur distantia $Q\gamma$ juxta (192. §. 2. n.) centri gravitatis γ spatii pQqap a cuspidē Q cissoidis pro quavis abscissa $z = Qa$.

208. Corollarium.

Constat, rectam PR ad axem $QC = a$ cissoidis perpendiculararem esse asymptotum, cui rami QS, QT nusquam possunt occurrere, licet ii, quo magis producuntur, eo propius ad PR debeant accedere (Vol. I. §. 583.): quodsi igitur supponas, ramos QS, QT asymptoto PR in punctis P, R, quorum distantiae a puncto C sint indefinite magnae, occurrere; obtinebitur pro $z = QC = a$ distantia $Q\gamma = \frac{5}{8}a = \frac{5}{8}QC$ centri gravitatis γ totius spatii inter ramos QS, QT et asymptotum PR comprehensi a cuspidē Q cissoidis.

209. Problema.

Dato radio r circuli genitoris $QbCdQ$ (32. Fig.) cycloidis XQZ , in Fig. 32. venire centrum gravitatis γ spatii $pQqap$ inter arcum pQq et chordam pq axi QC perpendicularem comprehensi.

Solutio.

1. Sumta pro $z=Qa$, $y=pa$ aequatione ad cycloidem (Vol. I. §. 606.), debet esse in (192. §. 3. n.)

$$M = 2f \varepsilon z \sqrt{(2rz - z^2)} + 2rf \varepsilon z \operatorname{Arc Sin} v \frac{z}{r};$$

$$\mu = 2fz \varepsilon z \sqrt{(2rz - z^2)} + 2rfz \varepsilon z \operatorname{Arc Sin} v \frac{z}{r}.$$

2. Quodsi autem alteram partem utriusque integralis resolvas per (Vol. I. §. 257.); invenies in (1)

$$M = 2rz \operatorname{Arc Sin} v \frac{z}{r} + 2 \int z^{\frac{1}{2}} \varepsilon z \sqrt{(2r - z)}$$

$$- 2r \int \frac{z^{\frac{1}{2}} \varepsilon z}{\sqrt{(2r - z)}};$$

$$\mu = rz^2 \operatorname{Arc Sin} v \frac{z}{r} + 2 \int z^{\frac{3}{2}} \varepsilon z \sqrt{(2r - z)}$$

$$- r \int \frac{z^{\frac{3}{2}} \varepsilon z}{\sqrt{(2r - z)}}.$$

3. Si demum binas posteriores partes utriusque integralis in (2) juxta (192. §. 4. n.) per (Vol. I. 289. 302. 301. §.) determines, obtinebis

$$M = (z + r) \sqrt{(2rz - z^2)} + r(2z - r) \operatorname{Arc Sin} v \frac{z}{r}.$$

$$\mu = \frac{17rz - 4z^2 + 3r^2}{6} \sqrt{(2rz - z^2)} + \frac{1}{2} r(2z^2 - r^2) \operatorname{Arc Sin} v \frac{z}{r}.$$

Hinc, si μ dividatur per M , derivabitur distantia $Q\gamma$ centri gravitatis γ spatii $pQqap$ pro quavis abscissa $z=Qa$ (192. §. 2. n.).

210. Corollarium.

Pro integra cycloide XQZ debet in (209. §.) poni $z=QC=2r$, hinc $M=3r^2 \cdot \pi$, $\mu=\frac{7}{2} r^3 \cdot \pi$; distantia centri gravitatis γ spatii $XQZCX$ a vertice Q erit ergo

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{7}{6} r = \frac{7}{12} QC.$$

211. Theorema.

Fig. 46. Si ex centris gravitatis G, g (46. Fig.) duorum triangulorum similium ABC, abc ad puncta extrema B, C, b, c , laterum homologorum BC, bc ducantur rectae GB, GC, gb, gc ; erunt triangu- $lula GBC, gbc$ inter se similia.

Demonstratio.

Si rectae BG, CG, bg, cg producantur, debebunt illae bissecare latera AC, AB, ac, ab in E, D, e, d , (185. §.): erit ergo $AC:ac = EC:ec$, et $AB:ab = AD:ad$. Quare, cum in triangulis similibus Abc, abc , sit angulus $A=a, C=c$, et $AC:ac = AB:ab, BC:bc = AC:ac$; debeat etiam esse $AC:ac = AD:ad$, et $BC:bc = EC:ec$; sunt ergo etiam triangu- $lula ADC$ et adc, BEC et bec inter se similia; proinde est angulus $ACD=acd$, et $EBC=ebc$, et eo ipso etiam angulus $GCB=gcb$, et triangulum BGC est simile triangulo gbc .

212. Theorema.

Si rectae ex centris gravitatis quorumvis duorum polygonorum similium constantium n lateribus ad puncta extrema duorum laterum homologorum ductae comprehendant triangu- $lula$ inter se similia; necesse est, ut hac ipsa proprietate etiam polygona similia constantia uno pluribus lateribus gaudeant.

Demonstratio.

Fig. 47. 1. Imaginemur nobis in (47. Fig.) duo polygona similia $ABCDEFGA, abcdefga$, quorum quodvis habeat latera numero $n+1$, et centra gravitatis eorundem polygonorum sint Q, q , duo vero quaecunque latera homologa DE, de : demonstrandum est, quod, si ducantur rectae QD, QE, qd, qe , triangu- $lula QDE, qde$ in assumpta hypothesi debeant esse inter se similia.

2. Ductis rectis DF, df nascentur duo polygona similia $ABCDEFGA, abcd fga$ constantia ob (1) lateribus numero n , et triangu- $lula$ similia DfE, dfe .

3. Quamobrem, si P, p sint centra gravitatis polygonorum (2), et ducantur rectae PD, PF, pd, pf ; erunt per hypothese- m triangu- $lula PDF, pdf$ inter se similia.

4. Por-

4. Porro sint R, r centra gravitatis triangulorum $D\bar{F}E, d\bar{f}e$; erunt triangula $D\bar{R}E, d\bar{r}e$ per (211. §.) inter se similia.

5. Ductis autem inter centra gravitatis P, R, p, r (1) (4) rectis PR, pr , jacebunt centra gravitatis Q, q (1) in iisdem rectis, ita ut sit per (154. §.)

$$QR = \frac{PR \cdot ABCDFGA}{D\bar{F}E}; \quad qr = \frac{pr \cdot abcd\bar{f}ga}{d\bar{f}e}$$

igitur debet esse

$$QR:qr = PR \cdot ABCDFG \cdot d\bar{f}e : pr \cdot abcd\bar{f}g \cdot D\bar{F}E.$$

6. Cum autem generatim areae polygonorum similium sint inter se ut quadrata quarumvis dimensionum homologarum; necesse est, ut ob (1) (2) (3) (4) sit $ABCDEF : abcd\bar{f}g = D\bar{F}E : d\bar{f}e = DE^2 : d\bar{e}^2 = DR^2 : d\bar{r}^2$, unde et ex (5) obtinebimus

$$QR:qr = PR:pr$$

7. Deinde ob similitudinem triangulorum in (2) (3) (4) erit angulus $PDR = p\bar{d}r$, et $PD:pd = DF:df = DE:de = DR:dr$, unde necessario sequitur, etiam triangula $PDR, p\bar{d}r$ esse inter se similia, et ideo esse $DR:dr = PR:pr = QR:qr$ per (6): igitur sunt etiam triangula $DQR, d\bar{q}r$, inter se similia, anguli QDR et $q\bar{d}r$, DQR et $d\bar{q}r$, DRQ et $d\bar{r}q$ sunt inter se aequales, et $QR:qr = DR:dr = RE:re$ ob (4). Quamobrem, cum sit etiam angulus $DRE = d\bar{r}e$ (4), hinc $QRE = q\bar{r}e$, debent quoque triangula $QRE, q\bar{r}e$ esse similia.

8. Hinc demum, ob similitudinem triangulorum $DRE, d\bar{r}e$, et $DQR, d\bar{q}r$, item $QRE, q\bar{r}e$ in (4) (7), necessario sequitur similitudo triangulorum $DQE, d\bar{q}e$, quae erat demonstranda (1).

213. Corollarium I.

Si rectae QD, QE, qd, qe ex punctis Q, q , intra perimetros datorum polygonorum similium assumtis, ductae ad puncta extrema D, E, d, e duorum laterum homologorum DE, de comprehendant triangula QDE, qde ; debebunt haec triangula esse inter se similia, si puncta Q, q sint centra gravitatis polygonorum. Cum enim hoc de figuris trium laterum in (211. §.) sit demonstratum, et, utprimum id in figuris quocunque

laterum locum habet, eo ipso etiam in figuris uno plurium laterum subsistere debeat (212. §.); debet id necessario de quibuslibet cogitabilibus polygonis similibus verum esse (Vol. I. §. 31.).

214. Corollarium 2.

Si ex punctis Q, s duorum polygonorum similibus ad puncta extrema duorum laterum homologorum ducantur rectae QD, QE, sd, se , confectaque, illas comprehendere triangula similia DQE, dse , et Q esse centrum gravitatis polygoni $ABDFA$; erit eo ipso etiam punctum s centrum gravitatis polygoni $abdfa$. Secus jaceret illud in certo puncto q , essentque triangula qde, qse ob (213. §.) eidem tertio triangulo QDE , hinc etiam inter se similia, quod est impossibile.

215. Corollarium 3.

Dato itaque centro gravitatis Q certi polygoni ADF , invenies centrum gravitatis s polygoni adf priori similis, si, ductis ad extrema puncta D, E unius lateris DE rectis QD, QE , super latere homologo de construas triangulum sde simile triangulo QDE (214. §.).

DISSERTATIO VII.
DE
INVESTIGATIONE CENTRI GRAVITATIS IN COR-
PORIBUS, EORUMQUE SUPERFICIEBUS.

216. Theorema.

Si ABDC (48. Fig.) *sit corpus quodcumque, in quo singulae sectiones* mn *Fig. 48. basibus* AB, CD *inter se parallelis et aequalibus pariter parallelae et aequales sua centra gravitatis habeant in recta* PQ *intercepta inter centra gravitatis* P, Q *basium* AB, CD; *erit punctum medium a rectae* PQ *centrum gravitatis corporis* ABDC.

Demonstratio.

Si per punctum medium a rectae PQ transeat planum MN perpendiculare ad PQ; erit momentum cujusvis sectionis mn respectu plani MN aequale producto ex ipsa sectione mn in distantiam ba puncti b rectae PQ, per quod transit sectio mn, a puncto medio a rectae PQ (150. §.): cum ergo omnes ejusmodi sectiones sint inter se aequales, et pro qualibet sectione mn cadente ad unam partem plani MN detur una sectio mn jacens ad partem oppositam plani MN in pari distantia ba; necesse est, ut summa momentorum omnium sectionum ex una parte plani MN cogitabilium aequetur summae momentorum omnium sectionum cogitabilium ex parte opposita plani MN. Planum MN dividit itaque totum corpus ABDC in duas partes, quarum momenta respectu ejusdem plani sunt inter se aequalia (147. §.); et ideo est MN planum gravitatis corporis ABDC (163. §.): eapropter, quia PQ est diameter gravitatis ejusdem corporis (183. §.), debet punctum a esse illius centrum gravitatis (162. §.).

217. Corollarium 1.

Recta PQ intercepta inter centra gravitatis P, Q basium ABCDE, Fig. 49. abcde dati cujuscunque prismatis Bd per (190. §) determinabilia transit per centra gravitatis omnium sectionum prismatis illius basibus parallela-

rūm (214. §.): medium ejus punctum α est ergo centrum gravitatis prismatis Bd (216. §.).

218. Corollarium 2.

Bases prismatis regularis sunt polygona regularia, inter quorum centra jacet axis ejusdem prismatis: centrum gravitatis prismatis regularis coincidit ergo cum puncto medio illius axeos (191. 217. §.).

219. Corollarium 3.

Fig. 50. Et ob (196. §.) per (216. §.) erit medium punctum α axeos PQ dati cujuscunque cylindri ABCD (50. Fig.) centrum gravitatis ejusdem cylindri.

220. Corollarium 4.

Fig. 51. 52. Sic quoque, si datum corpus sit segmentum cylindricum ABCcab 53. 54. (51. Fig.) abscissum plano ABba axi cylindri parallelo, vel frustum cylindricum ABCDdabc (52. Fig.) inter plana Ad, Bc axi cylindri parallela interceptum, aut sector cylindricus ABCDdabc (53. Fig.), vel dimidius annulus cylindricus (54. Fig.); coincidit ob (216. §.) centrum gravitatis ejusmodi corporis cum medio puncto α rectae PQ interceptae inter centra gravitatis P, Q illius basium per (194. 195. 197. 198. 199. 202. §.) determinabilia.

221. Problema.

Fig. 55. 56. *Invenire centrum gravitatis datae pyramidis, datique coni ABD (55. 56. Fig.).*

Solutio.

1. In cono ABD jacet centrum gravitatis cujuslibet sectionis pq parallelae illius basi BD in axe AC (196. §.): in pyramide autem (55. Fig.), si ex centro gravitatis C baseos BD ducatur recta AC ad verticem A, transibit haec recta per unum punctum c cujuslibet sectionis pq parallelae basi BD, quod, quia rectae pc, ce, BC, CE ductae ad puncta extrema laterum homologorum pe, BE comprehendunt triangula pce, BCE similia, debet esse centrum gravitatis sectionis pq (214. §.); adeoque etiam centrum gravitatis cujuslibet sectionis pq parallelae basi BD pyramidis jacet in recta AC inter ejus verticem A et centrum gravitatis C baseos intercepta. In cono et pyramide (56. 55. Fig.) debet ergo ejus centrum gravitatis jacere in recta AC (216. §.).

2. Quam.

2. Quamobrem sumpta parte indeterminata $z=Ac$ in recta $AC=a$ cogitetur per punctum c transire sectio pq parallela basi BD , quae abscindat ex ABD partem $Apq=m$; erit, si ponatur tota massa $ABD=M$

$$m:M=z^3:a^3, \text{ hinc } m = \frac{M}{a^3} z^3.$$

3. Sit jam MN planum perpendiculare ad AC , et μ momentum massae $m=pAq$ respectu ejusdem plani; erit per (171. §.)

$$\varepsilon\mu = z\varepsilon m; \text{ et in (2) } \varepsilon m = \frac{3M}{a^3} z^2 \varepsilon z:$$

$$\text{igitur } \varepsilon\mu = \frac{3M}{a^3} z^3 \varepsilon z, \text{ hinc } \mu = \frac{3Mz^4}{4a^3}.$$

4. Pro $z=AC=a$ in (3) invenietur ergo $\mu = \frac{3}{4}Ma$ momentum totius pyramidis vel conii ABD respectu plani MN ; cum igitur illius centrum gravitatis debeat coincidere cum uno puncto γ rectae AC ob (1); erit ejus distantia perpendicularis ab eodem plano ob (168. §.)

$$A\gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{3}{4}Ma:M = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}AC.$$

222. Corollarium 1.

Data quacunque pyramide ABD (55. Fig.), cujus centrum gravitatis Fig. 55. desideretur, quaeratur centrum gravitatis C illius baseos BD (190. §.), et recta AC inter illud verticemque A intercepta dividatur in quatuor partes aequales, quo fiat $A\gamma = \frac{3}{4}AC$; erit γ centrum gravitatis pyramidis (221. §.).

223. Corollarium 2.

Cum basis pyramidis regularis sit polygonum regulare, inter cujus centrum et verticem pyramidis jacet axis pyramidis; patet, centrum gravitatis tam pyramidis regularis (55. Fig.) quam cujuslibet conii (56. Fig.) coincidere cum puncto γ illius axeos AC , cujus distantia $A\gamma$ a vertice A aequatur tribus quartis totius axeos AC (191. 221. §.).

224. Problema.

Invenire centrum gravitatis dati conii truncati (57. Fig.) vel datae Fig. 57. 58. pyramidis truncatae $mdnbBMDN$ (58. Fig.).

Solutio.

Solutio.

1. Determinatis centris gravitatis C, c basium $BMDN$ per (191. §.), ductaque recta Cc , jacebit in hac centrum gravitatis γ totius massae $mdnbBMDN$, quod idcirco perfecte determinabitur, si definia-
tur illius distantia $C\gamma$ vel $c\gamma$ ab alterutro centro C, c .

2. Quamobrem cogitetur compleri tam conus quam pyramis truncata, quo recta Cc producta occurrat vertici A , et sit in hac recta punctum a centrum gravitatis massae $Abndm$, et e centrum gravitatis massae $ABNDM$; adeoque per (221. §.)

$$Aa = \frac{3}{4} Ac; \quad Ae = \frac{3}{4} AC.$$

3. Massa $ABNDM$ composita est ex massis $Abndm, mdnbBNDM$: ob (1) (2) per (155. §.) debet ergo esse

$$A\gamma = \frac{Ae \cdot ABNDM - Aa \cdot Abndm}{ABNDM - Abndm};$$

seu ob (2)

$$A\gamma = \frac{3}{4} \cdot \frac{AC \cdot ABNDM - Ac \cdot Abndm}{ABNDM - Abndm}.$$

4. Sed massae $ABNDM, Abndm$ sunt inter se ut cubi dimensio-
num homologarum, adeoque

$$AC^3 : Ac^3 = ABNDM : abndm = \frac{ABNDM \cdot Ac^3}{AC^3};$$

quare fiet, facta substitutione et reductione in (3)

$$A\gamma = \frac{3}{4} \cdot \frac{AC^3 - Ac^3}{AC^3 - Ac^3}.$$

5. Ut autem formula complectatur dimensiones immediate in dato cono, vel data pyramide truncata determinabiles, ducantur ex centris gravitatis c, C basium $mbnd, MBND$ ad puncta homologa d, D rectae $cd=r, CD=R$ (in cono truncato radios basium exprimentes), et $d\delta = cC=a$ sit parallela rectae AC : erit enim $D\delta : DC = d\delta : AC$, et $D\delta : dc = d\delta : Ac$. Quare habebimus

$$R-r : R = a : AC = \frac{aR}{R-r};$$

$$R-r : r = a : Ac = \frac{ar}{R-r}.$$

In (4) debeat itaque esse

$$Ay = \frac{3}{4}a \cdot \frac{R^4 - r^4}{(R^3 - r^3)(R - r)}.$$

6. Hoc modo determinatur distantia centri gravitatis γ coni et pyramidis truncatae a vertice A coni et pyramidis integrae: cum autem non detur punctum A, et puncta C, c semper debeant determinari (1); derivetur ex (5) distantia ejusdem centri γ ab alterutro puncto C, c. Hinc, quia est $C\gamma = AC - Ay$, et $c\gamma = Ay - Ac$, sumtis pro AC, Ac, Ay valoribus ex (5), fiet

$$C\gamma = \frac{3}{4}a \cdot \frac{R^4 + 3r^4 - 4Rr^3}{(R^3 - r^3)(R - r)};$$

$$c\gamma = \frac{3}{4}a \cdot \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)}.$$

225. Theorema.

Si revolutione plani QXC (59. Fig.), ad C reſtangiuli inter duas Fig. 59. rectas QC, XC et quancunque lineam curvam QX intercepti, circa rectam QC generetur corpus rotundum XQZ; debebunt centra gravitatis cujuslibet ſegmenti pQq plano prqs ad QC perpendiculari abſciſſi, et cujuslibet fruſti ABqp intercepti inter ſeſiones ADBE, prqs ad QC perpendicularares jacere in axe QC.

Demonſtratio.

Omnes ſeſiones, ut e. gr. ADBE, ad QC perpendicularares, proinde baſi XRZS corporis XQZ parallelae ſunt totidem circuli, quorum centra jacent in axe rotationis QC, unde per (196. 216. §) neceſſario ſequitur, quod debebat demonſtrari.

226. Problema.

Data aequatione ad curvam QX inter coordinatas orthogonas $z = Qa$, $y = pa$, inveſtigare centra gravitatis partium pQq, ABqp corporis XQZ revolutione plani QXC ad C reſtangiuli circa axem abſciſſarum QC geniti, pro ſeſionibus ADBE, prqs baſi XRZS parallelis et ad QC perpendicularibus.

Solutio.

1. Centrum gravitatis partis pQq ſit punctum γ , et centrum gravitatis partis ABqp ſit punctum α in axe rotationis QC (225. §):

ostendendum est, qua ratione distantias centrorum gravitatis γ , α , a puncto Q liceat investigare.

2. Sit MN planum ad QC perpendiculare, M massa pQq, et μ ejus momentum respectu plani MN, adeoque $\varepsilon M = \pi y^2 \varepsilon z$ (Vol. I. §. 490.): habebimus per (171. 168. §.)

$$\varepsilon M = \pi y^2 \varepsilon z; \quad \varepsilon \mu = \pi y^2 z \varepsilon z; \quad Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Quamobrem, ut data aequatione ad curvam QX inter coordinatas $z = Qa$, $y = pa$ inveniatur distantia Q γ centri gravitatis γ massae pQq, integrari debent exponentes differentiales εM , $\varepsilon \mu$, sic ut illorum integralia pro $z = 0$ pariter aequentur nihilo, cum evanescente $z = Qa$ tam massa $M = pQq$, quam ejus momentum μ respectu plani MN debeat aequari nihilo.

3. Porro, quia sectio ADBE in determinata distantia Qb a vertice Q dari supponitur, sectione altera prqs jacente in distantia variabili $Qa = z$; habebit tam segmentum AQB quam illius momentum respectu plani MN valorem determinatum, pars vero ABqp segmenti pQq ejusdemque momentum respectu plani MN erit valoris variabilis: exponentes differentiales massae ABqp ejusque momenti aequabuntur ergo exponentibus differentialibus massae pQq = M, ejusque momenti μ (Vol. I. §. 91.). Ob (2) potest ergo poni

$$\varepsilon M = \pi y^2 \varepsilon z; \quad \varepsilon \mu = \pi y^2 z \varepsilon z;$$

intelligendo per M massam ABqp, et per μ illius momentum respectu plani MN. Verum, quia massa ABqp decresciente $Qa = z$ decrescit, et pro $z = Qb$ fit aequalis nihilo, ut ope harum formularum tam massa $M = ABqp$, quam ejus momentum μ rite determinetur, sic erunt integrandi exponentes differentiales εM , $\varepsilon \mu$, ut illorum integralia pro $z = Qb$ aequentur nihilo. Inventis vero completis valoribus pro M, μ , innotescet eo ipso distantia centri gravitatis α massae ABqp a puncto Q, nimirum

$$Q\alpha = \frac{\mu}{M} \text{ per (168. §.)}$$

227. Corollarium 1.

Aequatio ad curvam QX inter coordinatas $z = Qa$, $y = pa$ fit $y^2 = Az + Bz^2$, et $e = Qb$ data distantia sectionis ADBE a puncto Q; habebimus pro centro gravitatis α massae ABqp in (226. §. 3. n.)

εM

$$\varepsilon M = \pi (A z + B z^2) \varepsilon z; \quad \varepsilon \mu = \pi (A z^2 + B z^3) \varepsilon z;$$

$$M = \pi \left(\frac{1}{2} A z^2 + \frac{1}{3} B z^3 \right) + C; \quad \mu = \pi \left(\frac{1}{3} A z^3 + \frac{1}{4} B z^4 \right) + C;$$

$$\pi \left(\frac{1}{2} A e^2 + \frac{1}{3} B e^3 \right) + C = 0; \quad C = -\pi \left(\frac{1}{2} A e^2 + \frac{1}{3} B e^3 \right);$$

$$\pi \left(\frac{1}{3} A e^3 + \frac{1}{4} B e^4 \right) + C = 0; \quad C = -\pi \left(\frac{1}{3} A e^3 + \frac{1}{4} B e^4 \right);$$

$$Q\alpha = \frac{\mu}{M} = \frac{4A(z^3 - e^3) + 3B(z^4 - e^4)}{6A(z^2 - e^2) + 4B(z^3 - e^3)}.$$

228. Corollarium 2.

Si fiat $e = Qb = 0$, abibit massa ABqp in segmentum pQq; quodsi ergo sit γ centrum gravitatis segmenti pQq, obtinebitur illius distantia Q γ a puncto Q pro $e = 0$ ex (227. §.), nimirum

$$Q\gamma = \frac{4A + 3Bz}{6A + 4Bz} \cdot z.$$

229. Corollarium 3.

Si QXC sit quadrans circuli, cujus revolutione circa radium QC = r generetur dimidius globus XQZ, continebit aequatio generalis in (227. §.) valores $A = 2r$, $B = -1$, pro quibus per (227. 228. §.) invenientur frequentes expressiones distantiae Q α centri gravitatis α frusti sphaerici ABqp intercepti inter sectiones ADBE, prqs perpendiculares ad radium QC, et distantiae Q γ centri gravitatis γ segmenti sphaerici pQq a puncto Q.

$$Q\alpha = \frac{8r(z^3 - e^3) - 3(z^4 - e^4)}{12r(z^2 - e^2) - 4(z^3 - e^3)};$$

$$Q\gamma = \frac{8r - 3z}{12r - 4z} \cdot z.$$

230. Corollarium 4.

Erat $z = Qa$: si igitur ponas $z = QC = r$ in (229. §.) obtinebis distantiam Q α centri gravitatis α frusti sphaerici inter basim XZ dimidii globi XQZ et sectionem AB ei parallelam intercepti a puncto Q, nimirum

$$Q\alpha = \frac{8r(r^3 - e^3) - 3(r^4 - e^4)}{12r(r^2 - e^2) - 4(r^3 - e^3)}.$$

231. Corollarium 5.

Quodsi autem in (230. §.) fiat $e = Qb = 0$, obtinebitur distantia $Q\alpha$ centri gravitatis α dimidii globi XQZ a puncto Q , atque ex hac reperiatur ejus distantia $C\alpha = QC - Q\alpha = r - Q\alpha$ a centro C , nimirum

$$Q\alpha = \frac{5}{8}r; \quad C\alpha = \frac{3}{8}r.$$

Verum pro $z = 2r$ fiet in (229. §.) $Q\gamma = r$, id est: centrum gravitatis integri globi coincidit cum illius centro magnitudinis.

232. Corollarium 6.

Pari ratione applicari possunt praecedentes formulae (227. 228. §.) ad arcum QX parabolae, ellipseos, et hyperbolae, qui sua revolutione circa axem QC generet *paraboloidem*, *sphaeroidem ellipticum*, vel *conoidem hyperbolicum* XQZ : aequatio enim generalis $y^2 = Az + Bz^2$ in (227. §.) complectetur $A = p$ et $B = 0$ pro parabola; $A = p$ vero et $B = \frac{p}{a}$ vel $B = -\frac{p}{a}$ pro hyperbola vel ellipsi (Vol. I. §. 508. 540. 563.).

233. Corollarium 7.

In specie itaque distantia centri gravitatis γ cujuslibet segmenti pQq paraboloidis XQZ subtenfi a sectione pqs perpendiculari ad axem QC a vertice Q erit per (232. 228. §.) $Q\gamma = \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}Qa$.

234. Corollarium 8.

Distantia autem centri gravitatis γ segmenti pQq conoidis hyperbolici, revolutione arcus hyperbolae Qp circa axem transversum QC geniti, ab ejus vertice Q erit pro $z = Qa$ per (228. 232. §.).

$$Q\gamma = \frac{4az + 3z^2}{6a + 4z}.$$

235. Corollarium 9.

Et distantia centri gravitatis γ segmenti pQq sphaeroidis elliptici, revolutione arcus ellipseos Qp circa axem transversum geniti, ab ipsius vertice Q , erit per (228. 232. §.)

$$Q\gamma = \frac{4az - 3z^2}{6a - 4z}.$$

236. Corollarium 10.

Pro $z = QC = \frac{5}{2}a$ erit $Q\gamma = \frac{5}{16}a = \frac{5}{8}QC$ distantia centri gravitatis γ dimidii sphaeroidis elliptici XQZ ab ejus vertice Q (235. §.): et pro $z = a$ fiet $Q\gamma = \frac{1}{2}a$, id est, centrum gravitatis integri sphaeroidis elliptici coincidit cum ejus centro magnitudinis.

Scholion.

Paucas adhuc applicationes praecedentis problematis subjungam, prius quam ad investigationem centri gravitatis superficierum corporum rotundorum transeam: commendo autem tyronibus, ut ipsimet sibi plura his similia problemata proponant, eademque propria diligentia resolvere studeant, atque istud consilium, quoties opportuna occasio in aliis quoque disquisitionibus se obtulerit, sequantur: plurimum sane lucrabuntur, qui continua ejusmodi exercitatione usum calculi differentio-integralis in primo horum opusculorum volumine pertractati sibi familiarem reddiderint.

237. Problema.

Invenire tam massam quam centrum gravitatis corporis pQq geniti Fig. 60. revolutione arcus parabolae Qp (60. Fig.) circa tangentem QC in ejus vertice Q.

Solutio.

1. Pro coordinatis orthogonis $z = Qa$, $y = pa$, massa $M = pQq$, ejusque momento μ respectu plani in Q ad QC perpendicularis, debet esse per (226. §.)

$$\varepsilon M = \pi y^2 \varepsilon z; \quad \varepsilon \mu = \pi y^2 z \varepsilon z.$$

2. Centrum vero gravitatis γ corporis pQq jacebit in axe rotationis QC (225. §.) in distantia $Q\gamma = \frac{\mu}{M} a$ puncto Q (168. §.).

3. Sed, si QB fit axis parabolae Qp , ad quem tangens QC est perpendicularis (Vol. I. §. 513); erit $u^2 = pv$ pro ordinata orthogona $u = pb$, et abscissa $v = Qb$ (Vol. I. §. 508): igitur erit $v^2 = \frac{u^4}{p^2}$. Quamobrem, ob $pb = Qa$, $Qb = ap$, habebimus etiam $y^2 = \frac{z^4}{p^2}$, et ob (1)(2).

$$\varepsilon M = \frac{\pi}{p^2} z^4 \varepsilon z; \quad \varepsilon \mu = \frac{\pi}{p^2} z^5 \varepsilon z;$$

$$M = \frac{\pi}{5p^2} z^5; \quad \mu = \frac{\pi}{6p^2} z^6; \quad Q\gamma = \frac{5}{6}z = \frac{5}{6}Qa.$$

238. Problema.

Fig. 45. *Invenire massam et centrum gravitatis corporis pQq (45. Fig.) revolutione plani pQa ad a rectanguli circa axem QC cissoidis QS geniti.*

Solutio.

Aequatio ad cissoidem QS inter coordinatas $y=pa$, $z=Qa$ est $y^2 = \frac{z^3}{2r-z}$ (Vol. I. §. 582.) pro $2r=QC$; centrum vero gravitatis γ corporis pQq revolutione plani pQa circa axem cissoidis QC geniti jacet in ipso axe QC (225. §.): quodsi ergo M sit massa, et μ momentum ejusdem corporis respectu plani in Q ad QC perpendicularis, habebimus per (226. §)

$$\epsilon M = \frac{\pi z^3 \epsilon z}{2r-z}; \quad \epsilon \mu = \frac{\pi z^4 \epsilon z}{2r-z}; \quad Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Quamobrem erit

$$\epsilon M = -\pi z^2 \epsilon z - 2r\pi z \epsilon z - 4\pi r^2 \epsilon z + \frac{8\pi r^3 \epsilon z}{2r-z};$$

$$\epsilon \mu = -\pi z^3 \epsilon z - 2r\pi z^2 \epsilon z - 4r^2\pi z \epsilon z - 8r^3\pi \epsilon z + \frac{16\pi r^4 \epsilon z}{2r-z}.$$

Adeoque integrando per (226. §. 2. n.) juxta (Vol. I. §. 242. 249. 252. §.) obtinebimus.

$$M = 8\pi r^3 \log \frac{2r}{2r-z} - \frac{\pi z^3}{3} - r\pi z^2 - 4\pi r^2 z;$$

$$\mu = 16\pi r^4 \log \frac{2r}{2r-z} - \frac{\pi z^4}{4} - \frac{2r\pi z^3}{3} - 2\pi r^2 z^2 - 8\pi r^3 z.$$

Hoc modo determinatur tam massa M corporis pQq, quam distantia Q γ illius centri gravitatis γ a vertice Q, pro qualibet abscissa $z=Qa$.

239. Problema.

Fig. 60. *Invenire massam et centrum gravitatis corporis pQq geniti revolutione arcus Qp (60. Fig.) ellipsos ad axem transversum QB relatae circa tangentem QC in vertice Q.*

Solutio.

I. Centrum gravitatis γ debet jacere in axe rotationis QC, ita ut, pro $pa=y$, $Qa=z$, $M=pQq$, et momento μ ejusdem massae

fae respectu plani in Q ad QC perpendicularis debeat fieri (226. §. 1. 2. n.)

$$\varepsilon M = \pi y^2 \varepsilon z; \quad \varepsilon \mu = \pi y^2 z \varepsilon z; \quad Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

2. Cum vero $z = Qa = pb$, et $y = ap = Qb$ sint coordinatae orthogonae ellipseos relatae ad axem transversum QB sumtum pro linea abscissarum; debet esse per (Vol. I. §. 525.)

$$z^2 = \frac{b^2 y}{a} - \frac{b^2 y^2}{a^2}; \quad \text{igitur debet esse}$$

$$y^2 = \frac{1}{2} a^2 - \frac{a^2}{b^2} z^2 + \frac{a^2}{2b} \sqrt{(b^2 - 4z^2)}.$$

Hinc et ex (1) obtinebimus

$$\varepsilon M = \frac{1}{2} \pi a^2 \varepsilon z - \frac{\pi a^2}{b^2} z^2 \varepsilon z + \frac{\pi a^2}{2b} \varepsilon z \sqrt{(b^2 - 4z^2)};$$

$$\varepsilon \mu = \frac{1}{2} \pi a^2 z \varepsilon z - \frac{\pi a^2}{b^2} z^3 \varepsilon z + \frac{\pi a^2}{2b} z \varepsilon z \sqrt{(b^2 - 4z^2)}.$$

Quare integrando juxta (226. §. 2. n.) per (Vol. I. §. 242. 249. 248. 289. 238.) inveniemus

$$M = \frac{1}{2} \pi a^2 z - \frac{\pi a^2}{3b^2} z^3 + \frac{\pi a^2}{4b} z \sqrt{(b^2 - 4z^2)} \\ + \frac{\pi b a^2}{8} \text{Arc Sin } \frac{2z}{b};$$

$$\mu = \frac{1}{4} \pi a^2 z^2 - \frac{\pi a^2}{4b^2} z^4 - \frac{\pi a^2}{24b} \sqrt{(b^2 - 4z^2)^3} + \frac{\pi a^2 b^2}{24}.$$

Hinc itaque determinabitur tam massa $M = pQq$, quam distantia $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$ illius centri gravitatis γ a vertice Q pro data quacunque abscissa $z = Qa$.

240. Corollarium 1.

Si Qb sit semiaxis transversus $= \frac{1}{2}a$, hinc pb semiaxis conjugatus $= \frac{1}{2}b$ ellipseos; exhibebit pQq corpus revolutione quadrantis elliptici Qp circa illius tangentem QC in vertice Q geniti, cujus et massa M, et distantia Q γ centri gravitatis γ a vertice Q invenietur pro $z = \frac{1}{2}b$ ex (239. §.), ut sequitur.

$$M = \frac{(10+3\pi)}{48} \pi a^2 b; \quad Q\gamma = \frac{17b}{4(10+3\pi)} = \frac{17}{2(10+3\pi)} \cdot Qa.$$

241. Co-

241. Corollarium 2.

Ellipsis abit in circulum, si ejus axes a, b fiant aequales: si ergo in (239. §.) ponas $a=b$, obtinebis sequentes expressiones pro massa M corporis pQq revolutione arcus circularis Qp circa illius tangentem QC geniti, ejus momento μ respectu plani in Q ad QC perpendicularis, et distantia ipsius centri gravitatis γ a puncto contactus Q, pro diametro $=a$ circuli, et quavis abscissa $z=Qa$.

$$M = \frac{1}{2} \pi a^2 z - \frac{1}{3} \pi z^3 + \frac{\pi a}{4} z \sqrt{(a^2 - 4z^2)} \\ + \frac{\pi a^3}{8} \text{Arc Sin } \frac{2z}{a}; \\ \mu = \frac{1}{4} \pi a^2 z^2 - \frac{\pi z^4}{4} - \frac{\pi a}{24} \sqrt{(a^2 - 4z^2)^3} + \frac{\pi a^4}{24}; \\ Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

242. Corollarium 3.

Massa vero M corporis pQq revolutione quadrantis Qp circuli circa tangentem QC geniti, et distantia illius centri gravitatis γ a puncto contactus Q, erit pro semidiametro $z=Qa=\frac{1}{2}a$ (241. §.)

$$M = \frac{(10+3\pi)}{48} \pi a^3; \quad Q\gamma = \frac{17a}{4(10+3\pi)} = \frac{17}{2(10+3\pi)} \cdot Qa.$$

243. Corollarium 4.

Si ob (Vol. I. §. 550.) loco aequationis ad ellipsum $z^2 = \frac{b^2 y}{a} - \frac{b^2 y^2}{a^2}$ sumas aequationem $z^2 = \frac{b^2 y}{a} + \frac{b^2 y^2}{a^2}$ ad hyperbolam in (239. §. 1. 2. n.); obtinebis sequentes formulas pro massa M corporis pQq revolutione arcus pQ hyperbolae circa tangentem QC ad ejus verticem Q geniti, illius momento μ respectu plani in Q ad QC perpendicularis, et distantia $Q\gamma$ centri gravitatis γ a vertice Q.

$$\epsilon M = \frac{1}{2} \pi a^2 \epsilon z + \frac{\pi a^2}{b^2} z^2 \epsilon z - \frac{\pi a^2}{2b} \epsilon z \sqrt{(b^2 + 4z^2)}; \\ \epsilon \mu = \frac{1}{2} \pi a^2 z \epsilon z + \frac{\pi a^2}{b^2} z^3 \epsilon z - \frac{\pi a^2}{2b} z \epsilon z \sqrt{(b^2 + 4z^2)}; \\ Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Integrando autem exponentes differentiales εM , $\varepsilon \mu$ juxta (226. §. 2. n.) per (Vol. I. §. 242. 249. 248. 289. 238. §.) inveniēmus

$$M = \frac{1}{2} \pi a^2 z + \frac{\pi a^2}{3 b^2} z^3 - \frac{\pi a^2}{4 b} z \sqrt{(b^2 + 4 z^2)} \\ + \frac{\pi a^2 b}{8} \log \frac{b}{2 z + \sqrt{(b^2 + 4 z^2)}}; \\ \mu = \frac{1}{4} \pi a^2 z^2 + \frac{\pi a^2}{4 b^2} z^4 - \frac{\pi a^2}{24 b} \sqrt{(b^2 + 4 z^2)^3} + \frac{\pi a^2 b^2}{24}.$$

244. Problema.

Data aequatione ad lineam QX (59. Fig.) inter coordinatas ortho- Fig. 59.
nas $z = Qa$, $y = pa$, investigare centrum gravitatis superficiei rotundae
pQq revolutione lineae Qp circa axem abscissarum QC genitae.

Solutio.

1. Cum centrum gravitatis superficiei rotundae pQq in axe rotationis QC debeat jacere (179. 183. §.); sit illud in γ , et quaeratur ipsius distantia $Q\gamma$ a vertice Q: erit denotante M massam, et μ momentum superficiei pQq respectu plani MN in Q ad QC perpendicularis, per (168. §.)

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

2. Cum porro debeat esse $\varepsilon \mu = z \varepsilon M$ (171. §.), si valor pro εM determinetur per (Vol. I. §. 491.), habebimus

$$\varepsilon M = 2\pi y \sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon z^2)}; \quad \varepsilon \mu = 2\pi z y \sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon z^2)}.$$

3. Quare, data aequatione ad lineam QX inter coordinatas $z = Qa$, $y = pa$, quaerantur ope calculi integralis massa M et momentum μ ex (2), tum definiatur distantia $Q\gamma$ per (1), quae generatim hoc modo exprimi poterit

$$Q\gamma = \frac{\int y z \sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon z^2)}}{\int y \sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon z^2)}}.$$

4. De reliquo, quia evanescente abscissa $z = Qa$, et ordinata $y = pa$, tam superficies $M = pQq$, quam illius momentum μ respectu plani MN debet evanescere, perspicuum est, integralia M, μ in (2) (3) nihilo de-

bere aequari, tam pro $z=0$, quam $y=0$, unde constantium determinatio pendet (Vol. I. §. 238.).

245. Corollarium 1.

Sit QX linea recta, adeoque XQZ superficies conica, ejus axis QC=a, et radius baseos XC=r; erit $pa=y=\frac{r}{a}z$: quare erit in (244. §. 2. n.)

$$\epsilon y = \frac{r}{a} \epsilon z; \sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon z^2)} = \frac{\epsilon z}{a} \sqrt{(a^2 + r^2)};$$

$$\epsilon M = \frac{2\pi r}{a^2} z \epsilon z \sqrt{(a^2 + r^2)}; \epsilon \mu = \frac{2\pi r}{a^2} z^2 \epsilon z \sqrt{(a^2 + r^2)};$$

$$M = \frac{\pi r}{a^2} z^2 \sqrt{(a^2 + r^2)}; \mu = \frac{2\pi r}{3a^2} z^3 \sqrt{(a^2 + r^2)};$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M} = \frac{2}{3}z = \frac{2}{3}Qa.$$

Nimirum distantia centri gravitatis γ superficiei conicae pQq pro quavis abscissa $z = Qa$ ab ejus vertice Q aequatur duabus tertiis ejusdem abscissae: et sic distantia centri gravitatis γ superficiei convexae cujuslibet coni XQZ ab illius vertice QC aequalis est duabus tertiis axeos QC.

246. Corollarium 2.

Sit Qp arcus circuli $r=QC=XC$ descripti; erit aequatio ad QX

$$y^2 = 2rz - z^2: \text{ igitur } \epsilon y = \frac{(r-z)\epsilon z}{\sqrt{(2rz - z^2)}}.$$

Pro massa M superficiei convexae pQq segmenti sphaerici, ejus momento μ respectu plani MN, et distantia Q γ ipsius centri gravitatis γ a vertice Q habebimus itaque juxta (244. §.)

$$\epsilon M = 2r\pi \epsilon z; \epsilon \mu = 2r\pi z \epsilon z;$$

$$M = 2r\pi z; \mu = r\pi z^2; Q\gamma = \frac{1}{2}z.$$

Medium ergo punctum altitudinis Qa segmenti sphaerici pQq est centrum gravitatis illius superficiei convexae; et ideo etiam medium punctum

punctum radii QC perpendicularis ad basim XRZS dimidia sphaerae est centrum gravitatis illius superficiei convexae.

247. Corollarium 3.

Si Qp sit arcus parabolae, proinde $M = pQq$ superficies convexa segmenti conoidis XQZ parabolici revolutione parabolae QX circa illius axem QC geniti, et γ centrum gravitatis ejusdem superficiei; erit per (Vol. I. §. 508.) et (244. §.)

$$y^2 = pz; \quad \varepsilon y = \frac{p \varepsilon z}{2y};$$

$$\varepsilon M = \pi \varepsilon z \sqrt{(p^2 + 4pz)}; \quad \varepsilon \mu = \pi z \varepsilon z \sqrt{(p^2 + 4pz)};$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

Integralia vero M, μ determinabis per (Vol. I. §. 248. 282. 238.), sic ut singula pro $z = 0$ aequentur nihilo.

248. Corollarium 4.

Quodsi autem Qp sit arcus ellipseos, et QC ejus semiaxis transversus, hinc $M = pQq$ superficies convexa segmenti sphaeroidis elliptici revolutione ellipseos circa axem transversum geniti, γ vero centrum gravitatis ejusdem superficiei; erit per (Vol. I. §. 540.) et (244. §.)

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(az - z^2)}; \quad \varepsilon y = \frac{b}{2a} \cdot \frac{(a - 2z)\varepsilon z}{\sqrt{(az - z^2)}};$$

$$\varepsilon M = \frac{\pi b c}{a^2} \varepsilon z \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + az - z^2\right)};$$

$$\varepsilon \mu = \frac{\pi b c}{a^2} z \varepsilon z \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + az - z^2\right)}; \quad \text{pro } c = 2\sqrt{(a^2 - b^2)}.$$

Quamobrem, cum exponentes hi differentiales per (Vol. I. §. 288. 294.) facile integrentur, si singula integralia per (Vol. I. §. 238.) ita definiantur, ut ea pro $z = 0$ aequentur nihilo; determinabitur eo ipso distantia centri gravitatis γ a vertice Q, nimirum $Q\gamma = \frac{\mu}{M}$, pro qualibet altitudine $z = Qa$ segmenti pQq: et si fiat $z = \frac{1}{2}b = QC$, reperietur distantia centri gravitatis superficiei convexae dimidii sphaeroidis elliptici XQZ ab ejus vertice Q.

249. Corollarium 5.

Et si Qp sit arcus hyperbolae, cujus revolutione circa axem transversum QC generetur superficies convexa pQq conoidis hyperbolici; habebimus ob (Vol. I. §. 563.) per (244. §.) sequentes expressiones pro massa M superficiei pQq , ejus momento μ , et centro gravitatis γ : cum igitur exponentes differentiales εM , $\varepsilon \mu$ per (Vol. I. §. 288. 294.) sint perfecte integrabiles, si illorum integralia per (Vol. I. §. 238.) sic determinantur, ut singula pro $z=0$ aequentur nihilo, invenietur eo ipso distantia $Q\gamma$ centri gravitatis γ a vertice Q .

$$y = \frac{b}{2a} \sqrt{(az + z^2)}; \quad \varepsilon y = \frac{b}{2a} \cdot \frac{(a + 2z)\varepsilon z}{\sqrt{(az + z^2)}}$$

$$\varepsilon M = \frac{\pi b c}{a^2} \varepsilon z \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + az + z^2\right)}; \quad \text{pro } c = 2\sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

$$\varepsilon \mu = \frac{\pi b c}{a^2} z \varepsilon z \sqrt{\left(\frac{a^2 b^2}{c^2} + az + z^2\right)}$$

$$Q\gamma = \frac{\mu}{M}.$$

DISSERTATIONES
AD
MECHANICAM CORPORUM SOLIDORUM
PERTINENTES.

DISSERTATION
ON
MECHANICAL PROPERTIES OF SOLID
MATERIALS

DISSERTATIO VIII.
DE
MOTU PUNCTORUM AEQUABILI UNIFORMITERQUE
ACCELERATO ET RETARDATO.

250. DEFINITIO.

Quotiescunque aliquod corpus movetur, singula ejus puncta describunt totidem lineas, jam rectas, jam curvas (38. §.): quodvis ergo punctum corporis moti potest in motu constitutum cogitari, atque hic motus erit *rectilineus* vel *curvilineus*, prout punctum eodem motu lineam rectam vel curvam descripserit.

251. Corollarium 1.

Directio motus rectilinei manet perpetuo eadem per lineam rectam determinata, quam punctum mobile eodem motu describit: in motu autem curvilineo directio singulis momentis mutatur (250. §.).

252. Corollarium 2.

Spatium, quod datum punctum suo motu intra certum tempus percurrat, determinabitur per longitudinem lineae, rectae vel curvae, quam illud eodem tempore percurrerit (250. §.).

253. Corollarium 3.

Crescente ergo tempore, quo motus dati puncti daret, crescet quoque spatium intra idem tempus percursum (252. §.).

254. DEFINITIO.

Uterque motus, rectilineus et curvilineus (250. §.), erit *aequabilis* seu *uniformis*, si spatia, quae punctum mobile intra quaecunque tempuscula aequalia conficiat, fuerint inter se aequalia.

255. Corollarium 1.

Quodcunque spatium percurrat punctum motu aequabili progrediens intra determinatum tempusculum, debet illud *2plo*, *3plo*, *mplo* tempore conficere spatium pariter *2plum*, *3plum*, *mplum* (254. §.).

256. Co-

256. Corollarium 2.

Si ergo datum punctum progrediens motu aequabili tempore quocunque v conficiat spatium V ; debet illud tempore $u = v \frac{r}{n}$ *rplo* unius^s *ntae* partis temporis v conficere spatium $U = V \frac{r}{n}$ pariter *rpum* unius *ntae* partis spatii V . Si enim x sit spatiolum tempusculo $= v \frac{r}{n}$ percursum, quia tempus v est *nplum* et tempus u *rplum* tempusculi $v \frac{r}{n}$ debet esse $V = xn$ et $U = xr$ (255. §.), hinc $x = V \frac{r}{n}$ et $U = V \frac{r}{n}$.

257. DEFINITIO.

Omne punctum P in motu constitutum (250. §.) censetur quovis momento habere certam *Celeritatem* seu *Velocitatem*, quam recte defines, quod sit intensio motus punctum P ad spatium eo majus vel minus, quo ipsa est major vel minor, quovis tempore percurrendum determinans.

258. Corollarium 1.

Punctum incedens motu aequabili eadem perpetuo celeritate movebitur: et vicissim motus puncti eadem constanter celeritate incedentis erit aequabilis (257. 254. §.).

259. Corollarium 2.

Celeritas dati puncti et spatium ab illo intra quodcunque tempus confectum erunt duo quanta heterogenea (257. 252. §.): proprie igitur nulla celeritas poterit aequari alicui spatio.

260. Theorema.

Spatia S, s , quae a duobus punctis mobilibus P, p motu aequabili progredientibus intra datum quodcunque tempus percurrantur, erunt inter se ut celeritates C, c eorundem punctorum, seu erit $S:s = C:c$.

Demonstratio.

Cum mobile P perpetuo celeritate C , et p celeritate c incedat (258. §.), necesse est, ut quae ratio intercedit inter celeritates C, c , eadem intercedat etiam inter spatia S, s , quae a punctis P, p intra idem tempus percurrantur (257. §.), adeoque sit $S:s = C:c$.

261. Theorema.

Spatia vero S, s , vel ab uno puncto motu aequabili incedente, vel a duobus punctis motu aequabili parique celeritate progredientibus intra tempora

tempora inaequalia T, t confecta, erunt inter se ut tempora, seu erit $S:s=T:t$.

Demonstratio.

Duo puncta P, p eadem celeritate motu aequabili incedentia percurrent intra idem tempus t spatia aequalia s, s (260. §.): quamobrem, si punctum P alio aliquo tempore T conficiat spatium S , demonstrandum est, futurum $S:s=T:t$, quod sequenti ratiocinio potest evinci.

1. Tempora T, t sunt commensurabilia aut incommensurabilia (3. §.). Primo casu dabitur aliquis numerus integer m vel fractus $\frac{m}{n}$, pro quo fiat $T=tm$ vel $T=t\frac{m}{n}$ (6. §.); adeoque etiam $S=sm$ vel $S=s\frac{m}{n}$ (255. 256. §.): utroque casu erit itaque $S:s=T:t$.

2. Si autem tempora T, t sint incommensurabilia, dabitur pro quovis utcumque magno numero integro n alter numerus integer m , pro quo fit (12. §.)

$$T \geq t \frac{m}{n} \text{ et simul } T < t \frac{m+1}{n}.$$

3. Sint s', S' spatia, quorum primum tempore $=t\frac{m}{n}$, et secundum tempore $=t\frac{m+1}{n}$ percurrat punctum P : quia per hypothesim idem punctum conficit spatium s tempore t , et S tempore T ; debet esse

$$s'=s\frac{m}{n} \text{ et } S'=s\frac{m+1}{n} \text{ per (256. §.);}$$

$$S > s' \text{ et } S < S' \text{ ob (2) per (253. §.):}$$

$$\text{igitur } S > s\frac{m}{n} \text{ et simul } S > s\frac{m+1}{n}.$$

Hinc et ex (2) per (22. §.) obtinetur $S:s=T:t$.

262. Problema.

Spatia, Celeritates, et Tempora ad certas mensuras revocare, et per congruos numeros exprimere.

Solutio.

1. In constituendis mensuris datorum quantorum id perpetuo est observandum, ut quaevis mensura et quantum, pro quo illa desideratur, sint inter se duo quanta homogenea (14. §.).

2. Pro temporum ergo mensura tempusculum aliquod debet accipi (1): in sequentibus erit nobis *minutum secundum* communis omnium temporum mensura.

3. Mensuram spatiorum indeterminatam relinquimus: ob (1) et (252 §.) aequabitur illa generatim certae lineolae 1, puta uni pedi, vel pluribus pedibus.

4. Quia demum mensura celeritatum determinata quaequam celeritas debet esse (1); sumemus pro mensura celeritatis in quovis motu illam determinatam celeritatem Φ , qua mobile motu aequabili incedens quovis minuto secundo percurreret spatium 1 pro spatii mensura acceptum (3).

E. gr. Si spatium a puncto P percursum aequetur aliquot pedibus; erit unus pes mensura ejusdem spatii: pro mensura ergo celeritatis, qua punctum P progreditur, accipiemus illam determinatam celeritatem Φ , qua punctum P, aut aliud quodcunque punctum, motu aequabili incedens unum pedem quovis minuto secundo deberet conficere.

5. Stabilitis hoc modo mensuris spatiorum, celeritatum et temporum, investigentur exponentes rationum geometricarum eorundem quantorum ad assumtas mensuras: si enim hos exponentes ad easdem mensuras pro totidem unitatibus acceptas referas; obtinebis eo ipso numeros denominatos, qui data spatia, datasque celeritates, et data tempora expriment (15. 16. 17. 18. §.).

263. Corollarium 1.

Deinceps ergo ubique solos exponentes rationum geometricarum spatiorum, celeritatum, et temporum ad mensuras eorundem (262. §. 2. 3. 4. n.) investigabimus, quibus inventis ipsa spatia, celeritates, et tempora per (262. §. 5. n.) licebit determinare: atque hi exponentes ubique in sequentibus formulis prae oculis habeantur, ubi spatia, celeritates, et tempora certis literis, puta C, S, T, designata fuerint.

264. Corollarium 2.

Si punctum P progrediens motu aequabili celeritate C percurrat spatium s intra unum minutum secundum; aliud vero punctum pariter motu aequabili incedens celeritate Φ conficiat intra minutum secundum spatium 1 pro mensura spatii s assumtum; erit $C:\Phi = s:1$ (260. §.), hinc $\frac{C}{\Phi} = \frac{s}{1}$. Perspicuum ergo est, in omni motu aequabili exponentem

rationis

rationis celeritatis ad ejus mensuram ϕ aequari exponenti rationis spatii intra unum minutum secundum percursum ad ejusdem mensuram l (262. §. 3. 4. n.): quare, literis C, s hos exponentes deinceps indicantibus, erit $C=s$ (263. §.). Hoc, nulloque alio sensu dicetur *celeritas mobilis motu aequabili progredientis aequari spatioso, quod idem mobile quovis minuto secundo conficit.*

Scholion.

Si e. gr. dicatur celeritas C puncti P motu aequabili incedentis esse octo pedum, et ideo scribatur $C=8$ pedibus; expressio haec haud indicabit, celeritatem puncti P re ipsa aequari spatioso octo pedum, quod utique absurdum est (259. §.): celeritatem enim puncti P octo pedum esse tantundem significat, ac eam esse puncti P celeritatem, qua illud quovis minuto secundo spatiosum $s=8$ pedibus debet conficere; ita ut proprie nequeat poni $C=8$, nisi per 8 intelligatur numerus abstractus aequalis exponenti rationis geometricae celeritatis ad ipsius mensuram ϕ , nimirum ad celeritatem ϕ , qua motu aequabili unus pes quovis minuto secundo deberet confici (262. §. 4. n.); vel numerus denominatus relatus ad unitatem celeritati ϕ aequalem, quo casu exprimeret $C=8$ tantundem ac $C=8\phi$, nimirum celeritatem 8ϕ am celeritatis ϕ , sicut spatium s erat 8ϕ um unius pedis.

265. Corollarium 3.

Si punctum P incedens celeritate C motu aequabili conficiat uno minuto secundo spatiosum s , et tempore T spatium S ; erit $S:s=T:1$ (261. §.): igitur, sumpta lineola l pro mensura spatiorum, erit etiam $\frac{S}{l} : \frac{s}{l} = T : 1$, hinc $\frac{S}{l} = \frac{s}{l} \cdot \frac{T}{1}$, seu $\frac{S}{l} = \frac{C}{\phi} \cdot \frac{T}{1}$ (264. §.). Exponens itaque rationis spatii quovis tempore confecti ad ejus mensuram l aequatur producto ex exponente rationis celeritatis ad ipsius mensuram ϕ in exponentem rationis temporis ad ejusdem mensuram 1 (262. §. 3. 4. 2. n.): eapropter, si iidem exponentes designentur literis S, C, T , poni poterit $S=CT$, quae aequatio improprie indicabit, *spatium motu aequabili data celeritate quovis tempore percursum aequale esse producto ex celeritate in tempus.*

266. Corollarium 4.

Habebimus ergo $\frac{S}{C} = T$ (265. §.), id est: exponens rationis spatii motu aequabili quacunque celeritate et quocunque tempore percurfi ad ipsius mensuram divisus per exponentem rationis celeritatis ad ejus mensuram dabit pro quoto exponentem rationis temporis ad ejusdem mensuram (262. §. 2. 3. 4. n.); improprie vero dicetur *spatium divisum per celeritatem aequari tempori, quo illud percurritur.*

267. Corollarium 5.

Erit porro $\frac{S}{T} = C$ (265. §.), id est: si exponens rationis spatii, motu aequabili quacunque celeritate intra certum tempus percurfi, ad ejus mensuram dividatur per exponentem rationis temporis ad ipsius mensuram; erit quotus aequalis exponenti rationis celeritatis ad ejusdem mensuram (262. §. 2. 3. 4. n.); improprie autem dicetur *spatium divisum per tempus dare celeritatem pro quoto.*

Scholion.

Per haec pauca principia omnis motus aequabilis potest determinari, seu datis celeritate et tempore quaeratur spatium; seu datis celeritate et spatio desideretur tempus; seu datis spatio et tempore petatur celeritas.

Ponamus e. gr. punctum P incedere motu aequabili celeritate 8 pedum (264. §.), petique spatium S, quod illud intra 12 minuta secunda conficiat; erit per (265. 263. §.)

$$S = 8 \cdot 12 = 96 \text{ pedibus.}$$

Si autem constet, datum punctum progredi motu aequabili celeritate 6 pedum, et quaeratur tempus T, quo spatium 120 pedum possit ab illo confici; erit per (266. 263. §.)

$$T = \frac{120}{6} = 20 \text{ minutis secundis.}$$

Si denique dicas, punctum P progrediens motu aequabili spatium 104 pedum intra 13 minuta secunda percurrere, et quaeras ejus celeritatem; invenies per (267. 264. §.)

$$C = \frac{104}{13} = 8 \text{ pedibus.}$$

268. DEFINITIO.

Motum, in quo celeritas continuo mutatur, crescit videlicet vel decrescit, vocant *inaequabilem* seu *difformem*, et quidem *acceleratum* casu primo, *retardatum* vero casu altero.

269. Corollarium 1.

Omnis motus dati puncti erit necessario vel aequabilis vel inaequabilis (258. 268. §.).

270. Corollarium 2.

Species autem motuum inaequabilium, tam acceleratorum, quam retardatorum, sunt numero infinitae possibiles, pendentes a totidem legibus, quibus celeritates possunt crescere et decrescere (268. §.).

271. Corollarium 3.

Celeritas puncti P motu inaequali incedentis continuo mutatur; si ejus motus duret quocunque tempore T, habebit illud in fine temporis T determinatam aliquam celeritatem C, ita tamen, ut et aliam habuerit proxime praecedente momento, et aliam sit habiturum proxime sequente momento (268. §.). Hoc sensu vocabitur C *celeritas debita tempori* T, poteritque ea aestimari ex spatio, quod punctum mobile hac ipsa celeritate motu aequabili progrediens intra unum minutum secundum conficeret, juxta (264. §.).

Si e. gr. celeritas, quam punctum P motu inaequali progrediens in fine 12 minutorum secundorum ab initio ejusdem motus effluxorum habeat, dicatur esse 8 pedum; indicabit id talem esse puncti P celeritatem C, qua, si illud hac ipsa celeritate motu aequabili incederet, quovis minuto secundo spatium octo pedum deberet conficere.

272. Corollarium 4.

Si punctum P motu accelerato percurrat tempusculo t spatium x, celeritas vero ejus initio tempusculi t sit c, et in fine tempusculi t sit c'; necesse est, ut spatium x majus sit spatio c t et simul minus spatio c' t, quorum primum celeritate c, et secundum celeritate c' motu aequabili intra tempusculum t potest confici (265. 268. 257. §.).

273. Corollarium 5.

Si autem motus puncti P sit retardatus, punctumque P conficiat hoc motu spatiolum x intra tempusculum t, ejus vero celeritas initio tempusculi t sit c, et in fine tempusculi t sit c'; debet spatiolum x minus esse spatiolo ct, et simul majus spatiolo c't, quorum primum vel secundum a puncto P tempusculo t deberet confici, si illud celeritate c vel c' motu aequabili incederet (265. 268. 257. §.).

274. DEFINITIO.

Inter omnes motus inaequabiles (270. §.) maxime memorabilis est motus *uniformiter acceleratus* et *retardatus*: in primo sunt incrementa, et in secundo decrementa celeritatis duobus quibuscunque temporibus ab initio ejusdem motus genita inter se in ratione directa temporum. Potest autem motus uniformiter acceleratus vel de quiete, adeoque nulla celeritate, vel determinata quapiam celeritate γ inchoari: illum vocabimus *purum*, et hunc *affectum*.

275. Corollarium 1.

Quare, si punctum P progrediens motu uniformiter accelerato vel retardato temporibus T, t ab initio ejusdem motus computatis capiat incrementa, vel patiatur decrementa celeritatis C, c; erit $C:c = T:t$ (274. §.).

276. Corollarium 2.

Si ergo in specie K denotet incrementum vel decrementum celeritatis puncti P motu uniformiter accelerato progredientis debitum uni minuto secundo; erit $C:K = T:1''$, hinc $C = KT$ (263. §.) incrementum vel decrementum celeritatis debitum tempori T: punctum ergo P habebit in fine temporis T celeritatem $C = KT$, si ejus motus uniformiter acceleratus purus sit; celeritatem vero $\gamma + KT$ vel $\gamma - KT$, si illud celeritate γ motum uniformiter acceleratum affectum, vel uniformiter retardatum inchoet (274. §.).

277. Problema.

Punctum P progreditur motu uniformiter accelerato, vel uniformiter retardato; incrementum vel decrementum celeritatis primo minuto secundo genitum est K: invenire spatium S, quod illud dato quocunque tempore T ab initio ejusdem motus computato debet percurrere.

Solutio.

Solutio.

1. Si M, N sint duo quanta determinatae magnitudinis, pro quibus et tertio quanto S semper fit $S > M - N \frac{1}{m}$ et simul $S < M + N \frac{1}{m}$, quantumcunque magnum numerum integrum denotet m ; cum semper fit possibile ejusmodi numerus integer m , pro quo pars m ta $N \frac{1}{m}$ quanti N minor fieret quovis dato utcunque parvo quanto homogeneo (11. §.): erit necessario $S = M$ (Vol. I. §. 129.).

2. Totum jam tempus T , quo motus puncti P uniformiter acceleratus vel retardatus durare supponitur, cogitetur divisum in numero m tempuscula aequalia $t, t, t, \dots t$, quorum quodvis sit $t = \frac{T}{m}$ pars m ta temporis T .

3. Debebit punctum P singulis tempusculis $t, t, t, \dots t$ ordine naturali sibi succedentibus certa spatiola percurrere, quae omnia simul constituent spatium S toto tempore T ex iisdem tempusculis composito percursum.

4. Spatium S in (3) per (272. 273. §.) erit ergo, prout motus puncti P fuerit acceleratus vel retardatus, majus vel minus, quam summa spatiolorum, quae a puncto P singulis tempusculis $t, t, t, \dots t$ (2) deberent confici, si illud quovis tempusculo illa determinata celeritate, quam habet initio ejusdem tempusculi, motu aequabili incederet.

5. Idem porro spatium S in (3) per (272. 273. §.), prout motus puncti P fuerit acceleratus vel retardatus, debebit esse minus vel majus quam summa spatiolorum, quae a puncto P singulis tempusculis $t, t, t, \dots t$ (2) deberent percurri, si illud quovis tempusculo motu aequabili illa determinata celeritate progrediretur, quam habet in fine ejusdem tempusculi.

6. Celeritas, quam punctum P in fine cujuscunque temporis T debet habere, est generatim $\gamma \pm KT$, signo $+$ adhibito pro motu accelerato, et $-$ pro retardato, ita ut sit $\gamma = 0$ pro motu uniformiter accelerato puro, vel γ celeritas initialis, qua punctum P motum uniformiter acceleratum affectum, aut uniformiter retardatum inchoet (276. §.): quod si ergo in hac expressione loco T terminos seriei $t, 2t, 3t, 4t, \dots (m-1)t, mt$ successive substituas, obtinebis sequentes expressiones celeritatum, quas

quas punctum P. in fine singulorum m tempusculorum $t, t, t, \dots t$ ab initio motus ordine naturali sibi succedentium (2) debet habere.

$$\gamma \pm Kt; \gamma \pm K.2t; \gamma \pm K.3t; \dots \dots \dots \\ \dots \dots \gamma \pm K(m-1)t; \gamma \pm K.mt.$$

7. Quare, cum punctum P suum motum acceleratum vel retardatum celeritate γ inchoare supponatur, adeoque hanc ipsam celeritatem initio primi tempusculi t (2) habeat; cumque illud tantum celeritatem initio cujusvis subsequa tempusculi, quantam habet in fine proxime praecedentis tempusculi, debeat habere: habebit punctum P initio singulorum m tempusculorum $t, t, t, \dots t$ ab initio motus ordine naturali sibi succedentium (2) sequentes celeritates, ob (6).

$$\gamma; \gamma \pm Kt; \gamma \pm K.2t; \gamma \pm K.3t; \dots \dots \gamma \pm K(m-1)t.$$

8. Singulae celeritates in (6) ductae in t dabunt ergo per (265. §.) sequentem seriem spatiolorum, quae punctum P singulis tempusculis $t, t, t, \dots t$ ab initio motus ordine naturali sibi succedentibus percurreret, si id quovis tempusculo illa determinata celeritate, quam habet in fine ejusdem tempusculi, motu aequabili incederet.

$$\gamma t \pm Kt^2; \gamma t \pm K.2t^2; \gamma t \pm K.3t^2; \dots \dots \dots \\ \dots \dots \gamma t \pm K(m-1)t^2; \gamma t \pm K.mt^2.$$

9. Singulae vero celeritates in (7) ductae in t dabunt per (265. §.) sequentem seriem spatiolorum, quae a puncto P singulis tempusculis $t, t, t, \dots t$ ab initio motus ordine naturali sibi succedentibus deberent confici, si illud quovis tempusculo ea celeritate, quam habet initio ejusdem tempusculi, motu aequabili progredieretur.

$$\gamma t; \gamma t \pm Kt^2; \gamma t \pm K.2t^2; \gamma t \pm K.3t^2; \\ \dots \dots \dots \gamma t \pm K(m-1)t^2.$$

10. Quamobrem obtinebimus, ob (4) (5) per (8) (9) sequentes expressiones.

Pro motu accelerato:

$$S > \left(\begin{array}{l} (\gamma + \gamma + \gamma + \gamma + \dots + \gamma) t \\ + K(1 + 2 + 3 + \dots + (m-1)) t^2; \end{array} \right) \\ S < \left(\begin{array}{l} (\gamma + \gamma + \gamma + \dots + \gamma) t \\ + K(1 + 2 + 3 + \dots + m) t^2. \end{array} \right)$$

Pro

Pro motu retardato.

$$S < \left(\begin{array}{l} (\gamma + \gamma + \gamma + \gamma + \dots + \gamma) t \\ -K(1 + 2 + 3 + \dots + (m-1)) t^2; \end{array} \right.$$

$$S > \left(\begin{array}{l} (\gamma + \gamma + \gamma + \dots + \gamma) t \\ -K(1 + 2 + 3 + \dots + m) t^2. \end{array} \right.$$

Cumque sit $1 + 2 + 3 + \dots + (m-1) = \frac{1}{2}(m^2 - m)$; $1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{1}{2}(m^2 + m)$; et per hypothesim in (2) $t = \frac{T}{m}$: habebimus etiam

pro motu accelerato

$$S > \gamma T + \frac{1}{2} K T^2 - \frac{1}{2} K T^2 \cdot \frac{T}{m};$$

$$S < \gamma T + \frac{1}{2} K T^2 + \frac{1}{2} K T^2 \cdot \frac{T}{m};$$

et pro motu retardato

$$S < \gamma T - \frac{1}{2} K T^2 + \frac{1}{2} K T^2 \cdot \frac{T}{m};$$

$$S > \gamma T - \frac{1}{2} K T^2 - \frac{1}{2} K T^2 \cdot \frac{T}{m}.$$

Ex his autem expressionibus, cum illae pro quovis possibili numero integro m in (2) debeant subsistere, fluit per (1) sequens expressio generalis quaesiti spatii S , in qua signum $+$ vel $-$ debet adhiberi, prout motus puncti acceleratur vel retardatur.

$$S = \gamma T \pm \frac{1}{2} K T^2.$$

278. Corollarium 1.

Punctum P progrediens motu uniformiter accelerato puro (274. §.), si id primo minuto secundo acquirat celeritatem K , percurrat quovis tempore T ab initio motus computato per (277. §.) spatium $S = \frac{1}{2} K T^2$.

279. Corollarium 2.

Si punctum P incedens motu uniformiter accelerato puro intra tempus T acquirat celeritatem $C = K T$ (276. §.), quo sit $K = \frac{C}{T}$; debeat illud tempore T per (278. §.) conficere spatium $S = \frac{1}{2} C T$.

280. Corollarium 3.

Punctum P progrediens motu uniformiter accelerato puro per spatium S tempore T tantam habebit in fine ejusdem temporis celeritatem C, ut, si illud hac ipsa celeritate motu aequabili incederet, intra idem tempus T spatium duplum $2S = CT$ deberet percurrere (279. 265. §.).

281. Corollarium 4.

Spatia S, s motu uniformiter accelerato puro temporibus inaequalibus T, t ab initio ejusdem motus computatis percurfa erunt inter se ut quadrata temporum: erit enim per (278. §.)

$$S = \frac{1}{2} K T^2; \quad s = \frac{1}{2} K t^2:$$

$$\text{igitur } S : s = T^2 : t^2.$$

282. Corollarium 5.

Eadem spatia S, s motu uniformiter accelerato puro temporibus T, t ab initio motus computatis confecta erunt inter se ut quadrata celeritatum C, c iisdem temporibus genitarum: cum enim sit per (281. §.)

$$S : s = T^2 : t^2; \text{ et per (275. §.)}$$

$$T : t = C : c : \text{erit } S : s = C^2 : c^2.$$

283. Corollarium 6.

Totum tempus T, quo motus uniformiter acceleratus purus puncti P duret, cogitetur dividi in quaecunque tempuscula aequalia t, t, t, --- t; intra numero m tempuscula tempus = tm constituentia sit percursum spatium S, et s sit spatium confectum intra numero m—1 tempuscula constituentia tempus = t(m—1): erit S—s spatiolum solo mto tempusculo percursum, et per (278. §.) habebimus

$$S = \frac{1}{2} K \cdot m^2 t^2; \quad s = \frac{1}{2} K (m-1)^2 t^2:$$

$$S - s = \frac{1}{2} K (2m-1) t^2.$$

284. Corollarium 7.

Pro $m=1, m=2, m=3, m=4$, et sic porro, obtinebuntur ex $2m-1$ numeri impares 1, 3, 5, 7, etc. ordine naturali crescentes: spatiola ergo, quae datum punctum P motu uniformiter accelerato puro progrediens singulis tempusculis aequalibus t, t, t, --- t ab initio motus ordine naturali sibi succedentibus conficiat, erunt inter se ut numeri impares

pares 1, 3, 5, 7, etc. ordine naturali crescentes, seu ut termini seriei $\frac{1}{2}Kt^2.1$, $\frac{1}{2}Kt^2.3$, $\frac{1}{2}Kt^2.5$; $\frac{1}{2}Kt^2.7$, etc. (283. §.).

285. Corollarium 8.

Quodlibet punctum P progrediens motu uniformiter accelerato affecto, data celeritate γ inchoato, capiet intra primum minutum secundum certum incrementum K celeritatis γ , et percurrent quovis tempore T ab initio ejusdem motus computato spatium $S = \gamma T + \frac{1}{2}KT^2$ (274. 277. §.) aequale summae spatiorum, quorum unum γT motu aequabili celeritate initiali γ , et alterum $\frac{1}{2}KT^2$ motu uniformiter accelerato puro intra idem tempus T deberet confici (265. 278. §.).

286. Corollarium 9.

Pro celeritate initiali γ motus uniformiter retardati, et decremento K, quod illa primo minuto secundo patiat, percurrentur quovis tempore T ab initio ejusdem motus computato spatium $S = \gamma T - \frac{1}{2}KT^2$ (277. §.) aequale differentiae spatiorum, quorum unum γT motu aequabili celeritate initiali γ , et alterum $\frac{1}{2}KT^2$ motu uniformiter accelerato puro intra idem tempus T deberet confici (265. 278. §.), si in hoc iisdem gradibus cresceret celeritas, quibus gradibus illa in motu retardato decrescit, quo decrementum K genitum primo minuto secundo in motu retardato aequetur celeritati, quam punctum mobile motu accelerato intra primum minutum secundum acquirat.

287. Corollarium 10.

Celeritas, quam punctum mobile P progrediens motu uniformiter retardato, celeritateque γ inchoato, intra tempus T ab initio ejusdem motus computatum acquirat, si K sit decrementum celeritatis primo minuto secundo genitum, erit $C = \gamma - KT$ (276. §.): quare pro $T = \frac{\gamma}{K}$ evanescet celeritas C. Tempus ergo, quo motus uniformiter retardatus puncti P potest durare, est $T = \frac{\gamma}{K}$, quo in (286. §.) substituto obtinebitur spatium, quod punctum P intra totum tempus, quo ejus motus uniformiter retardatus duraverit, conficiet, nimirum

$$S = \gamma \frac{\gamma}{K} - \frac{1}{2}K \cdot \frac{\gamma^2}{K^2} = \frac{\gamma^2}{2K}.$$

288. Corollarium II.

Per (278. §.) fit $S = \frac{v^2}{2K}$ spatium, quod punctum mobile P motu uniformiter accelerato puro intra tempus $T = \frac{v}{K}$ conficeret; spatium ergo, quod punctum P progrediens motu uniformiter retardato celeritateque v inchoato intra totum tempus, quo idem motus duraverit, conficiet (287. §.), aequatur spatio, quod motu uniformiter accelerato puro intra idem tempus potest confici, si in hoc iisdem gradibus crescat celeritas, quibus illa in motu retardato decrevit.

289. DEFINITIO.

Punctum mobile, quod aut quiescit, aut eadem perpetuo celeritate et directione movetur, *in eodem statu quietis vel motus perseverare* dicitur: quodsi autem datum punctum de quiete ad motum concitetur, vel actu in motu constitutum certam mutationem in directione vel celeritate subeat; dicetur id *suum statum mutare*. Ubi autem de corpore mobili fermo fuerit, dicetur illud *in eodem statu perseverare*, vel *suum statum mutare*, prout vel omnia ejus puncta (250. §.) in eodem statu perseveraverint, vel omnia aut aliqua suum statum mutaverint.

290. Corollarium.

Mutationes status cujuslibet mobilis, puncti et corporis, sunt numero infinitae possibiles (289. 270. §.); nihil vero reperitur in ipsis mobilibus, quod videatur exigere, ut, dum illa suum statum mutant, hanc potius quam aliam quancunque mutationem subeant: ne igitur sine omni fundamento mobilibus, punctis vel corporibus, aliquid, quod iis non competat, adtribuamus; quotiescunque certum mobile suum statum mutaverit, causam hujus mutationis extra ipsum quaeremus, ac si illud se ipsum ad mutationem sui status nulla ratione posset determinare.

Scholion.

Argumentis quidem evidentibus destituimur, quibus evincere liceat, omnia mobilia sic esse comparata, ut illa nunquam possint se ipsa ad mutationem sui status determinare, causas proinde omnium mutationum, quas status mobilium subeant, extra illa necessario esse quaerendas. Non est tamen, cur metuamus, ne, si huic sententiae universa motus theoria superstruatur, eadem theoria naturae corporum adversetur, cum omnia

con-

confectaria indidem legitime fluentia cum perpetuis observationibus, quas circa naturam corporum adhuc facere licuit, quam optime consentiant, ita sane ut hoc ipso consensu ea sententia extra omne dubium poni videatur.

291. DEFINITIO.

Inertia mobilis, puncti et corporis, est ejus impotentia se ipsum determinandi ad mutationem sui status: mobile inertia praeditum, vocatur iners.

292. Corollarium 1.

Inertia est communis omnium mobilium proprietas, vi cujus illa in eodem perpetuo statu, in quem semel fuerint reposita, debebunt perseverare, nisi is ab externis causis turbetur (290. 291. §.).

293. Corollarium 2.

Quodlibet punctum mobile, si id quiescat, perpetuo quiescet, nisi ipsum externa aliqua causa ad motum determinet: si autem datum punctum mobile actu moveatur, debet illud secundum eandem directionem eademque celeritate motu aequabili progredi, nisi hanc vel illam, aut utramque externae causae mutant (292. 289. 258. §.).

294. DEFINITIO.

Causae externae omnis motus sunt vires motrices (38. §.), aliae *absolutae* seu *invariantes*, et *respectivae* aliae seu *variabiles*. *Vis absoluta* vocatur, quae eadem constanter efficacia datum mobile ad motum urget, seu illud quiescat, seu moveatur: vis autem *variabilis* est, quae quovis momento, durante motu, alia efficacia agit in mobile.

295. Corollarium.

Sicut vires agentes in puncta quiescentia per totidem pondera possunt exprimi; sic quoque quaelibet vis agens in datum punctum in motu constitutum poterit uni ponderi aequari, quod aut idem perpetuo maneat, aut durante motu continuo mutetur, prout vis agens fuerit invariabilis vel variabilis (294. 62. §.).

296. DEFINITIO.

Effectus genuinus cujuslibet vis motricis datum mobile ad motum continuo sollicitantis intra certum tempus productus est spatium, per quod

mobile hoc tempore ob solam vis illud urgentis actionem eodem tempore exertam propellitur.

297. Corollarium 1.

Si vis V punctum P ad motum continuo sollicitans certo momento cesset agere in punctum P ; punctum hoc haud quiescet, sed motum, ad quem id determinatum fuerit, vi suae inertiae continuabit, celeritatem, quam eo momento habuerit, perpetuo conservaturum, nisi ejus motui aliqua causa adversetur (292. 293. §.): dum ergo punctum P a vi V tempusculis $a, b, c, \dots p, q, r, \dots z$ ad motum continuo sollicitatur; debet id quovis tempusculo q et a vi V per certum spatium propelli, et ob celeritatem intra tempuscula $a, b, c, \dots p$ acquisitam, quam illud vi suae inertiae toto tempusculo q conservare cogitur, certum spatium conficere. Quare si punctum P a vi V ad motum continuo sollicitatum tempore quocunque T ex tempusculis $a, b, c, \dots z$ composito spatium S dicatur percurrere; necesse est, ut istud sit in duas partes resolvable, quarum una ob inertiam puncti P , altera vero ob solam actionem vis V eodem tempore exertam percurra sit, ita ut genuinus effectus vis V hoc tempore productus unam duntaxat partem totius spatii S exaequet (296. §.).

298. Corollarium 2.

Hinc evidenter elucet, qui possit fieri, ut utcumque cognito spatio S , quod datum punctum P a data vi V ad motum continuo sollicitatum intra certum tempus T conficiat, effectus genuinus vis V eodem tempore productus penitus ignoretur (297. §.).

299. Corollarium 3.

Quia vero omnis puncti P in motu constituti celeritas, independens ab ejus inertia (292. 293. §.), necessario ab aliqua vi debet generari; perspicuum est, nullos effectus genuinos a datis viribus totidem puncta ad motum continuo sollicitantibus intra determinatum tempus T posse produci, quin illae hac ipsa productione certas celeritates ab iisdem effectibus, quidquid ii sint (298. §.), ita dependentes generent, ut aequalibus effectibus celeritates pariter aequales, majoribus vero minoribusque effectibus celeritates quoque majores minoresque respondeant (296. 297. §.).

300. Corollarium 4.

Quamobrem, si quocunque puncta mobilia a totidem viribus invariabilibus et inter se aequalibus, vel variabilibus, quae tamen, utcunque crescentes vel decrecentes, quovis momento durante motu inter se aequales maneant, ad motum secundum datas directiones continuo sollicitentur; debebunt omnia puncta pari efficacia quovis momento ad motum urgeri (294. §.), singulae idcirco vires producent intra quodvis determinatum tempus et effectus aequales (296. §.), et celeritates aequales (299. §.).

301. Corollarium 5.

Quodsi vero duo puncta P, p a duabus viribus invariabilibus et inaequalibus U, u ad motum continuo sollicitentur; necesse est, ut efficacia, qua punctum P a vi majori U ad motum quovis momento urgetur, major sit quam efficacia, qua punctum p a vi minori u ad motum quovis momento impellitur (294. §.): vis major U producet ergo quovis tempore T et effectum et celeritatem majorem, quam vis minor u (296. 299. §.).

302. Theorema.

Si punctum P celeritate quacunque γ aliunde ad motum determinatum a data vi V tempore T ad motum continuo sollicitetur; debebit vis V hoc tempore certam celeritatem c producere, punctumque P habebit in fine temporis T celeritatem aequalem summae vel differentiae celeritatum γ, c , prout directio, secundum quam vis V agit in punctum P , eadem est cum directione, secundum quam punctum P celeritate γ ad motum aliunde est determinatum, vel illi opposita.

Demonstratio.

Punctum P cogitur vi suae inertiae quamvis celeritatem, ad quam illud a certa vi determinatur, et recipere, et perpetuo conservare (292. 293. §.): quaelibet autem vis, nisi ipsius actio penitus impediatur, debet singulis tempusculis constituentibus tempus T , quo punctum P ab illa ad motum continuo sollicitatur, et effectus aliquos, et certas celeritates producere (296. 299. §.); quae simul sumtae constituent celeritatem c toto tempore T productam. Eapropter, si punctum P initio temporis T habeat jam celeritatem aliquam γ , debebit haec cum celeritate c ita componi, ut punctum P in fine temporis T habeat celeritatem vel summae celeri-

celeritatum γ , c , vel differentiae earundem aequalem, prout nimirum directio, secundum quam punctum P celeritate γ aliunde est ad motum determinatum, eadem est cum directione vis V , vel ei opposita.

303. Corollarium 1.

Quaevis vis invariabilis, datum punctum mobile P ad motum continuo sollicitans, eundem intra idem tempus producet effectum, eandemque celeritatem, seu punctum P initio ejusdem temporis quiescat, seu aliunde sit ad motum determinatum (294. 296. 299. §.): punctum ergo P , celeritate γ aliunde ad motum determinatum, et a data vi invariabili V ad motum secundum eandem vel oppositam directionem tempore T continuo sollicitatum, habebit in fine temporis T celeritatem aequalem summae, casu primo, vel differentiae, casu secundo, celeritatum γ , c , quarum posteriorem c vis V intra tempus T produceret, si illa punctum P de quiete ad motum determinaret, temporeque T ad motum continuo urgeret (302. §.). Et generatim crescente tempore T , quo punctum P urgetur a vi invariabili V , crescet necessario etiam celeritas puncti P , si secundum eandem directionem punctum P et determinatum sit jam ad motum, et ad motum a vi V impellatur.

304. Corollarium 2.

Vis invariabilis V datum punctum P de quiete ad motum determinans, et ad motum numero m tempusculis aequalibus t , t , t , - - - t tempus T constituentibus continuo secundum determinatam directionem sollicitans, producet singulis tempusculis t aequales effectus (294. 296. §.), et aequales celeritates, puta g , g , g , - - - g (299. §.), quae celeritatem $=gm$ toto tempore T productam constituent: punctum ergo P habebit in fine primi tempusculi t celeritatem $=g$, et in fine *mpli* temporis $T = tm$ celeritatem $=gm$ pariter *mplam*: si autem punctum P initio temporis T ad motum celeritate γ secundum eandem directionem, aut oppositam, aliunde fuerit determinatum; erit ejus celeritas in fine temporis T aequalis summae casu primo, vel differentiae celeritatum γ , gm casu secundo (303. §.).

305. Corollarium 3.

Quare si punctum P a vi invariabili V ad motum secundum determinatam directionem continuo sollicitatum capiat intra quodcunque tempus x incrementum vel decrementum celeritatis y ; debbit illud intra tempus

$X =$

$X = x \frac{r}{n}$ *rplum* unius *ntae* partis temporis x capere incrementum vel decrementum celeritatis $Y = y \frac{r}{n}$ pariter *rplum* unius *ntae* partis incrementi vel decrementi y . Si enim v denotet incrementum vel decrementum genitum tempusculo $= x \frac{r}{n}$; erit $y = vn$ et $Y = vr$ (304. §.); hinc $v = y \frac{r}{n}$ et $Y = y \frac{r}{n}$.

306. Corollarium 4.

Ast si punctum P vel quiescat initio temporis T , vel celeritate γ aliunde sit ad motum determinatum, et a vi variabili V ad motum secundum eandem vel oppositam directionem tempore T continuo sollicitetur; necesse est, ut vis V singulis tempusculis aequalibus $t, t, t, \dots t$ tempus *mplum* $T = tm$ constituentibus inaequales effectus (294. 296. §.), et inaequales celeritates $\alpha, \beta, \dots \mu$ producat (299. §.), quae celeritatem c toto tempore T productam constituent: punctum P habebit ergo in fine tempusculi primi t celeritatem aequalem summae vel differentiae celeritatum γ, α , et in fine temporis T celeritatem aequalem summae vel differentiae celeritatum γ, c (302. §.), quin ideo incrementum aut decrementum c celeritatis initialis sit *mplum* incrementi vel decrementi α , sicut est tempus T *mplum* tempusculi t .

307. Theorema.

Omnis vis, quae datum punctum P secundum determinatam directionem ad motum continuo sollicitans motum ejusdem puncti uniformiter accelerat vel retardat, debet esse invariabilis: et vicissim vis invariabilis motum puncti P uniformiter accelerabit vel retardabit, prout nimirum punctum P eo momento, quo vis illa in id agere incipit, quiescit, aut certa celeritate γ ad motum secundum eandem vel oppositam directionem aliunde est determinatum.

Demonstratio.

Pars prima theorematis per se ex (306. §.) sequitur; in motu enim uniformiter accelerato vel retardato debet esse incrementum vel decrementum celeritatis tempore *mplo* $T = tm$ genitum pariter *mplum* incrementi vel decrementi quocunque simplo tempusculo t producti (274. §.), quod, si is motus a vi variabili pendeat, erit impossibile. Pars vero altera potest hoc modo evinci.

1. Vis invariabilis punctum P ad motum continuo sollicitans producet quibuslibet duobus temporibus t, T ab illo momento, quo ea agere incipit, computatis, incrementa vel decrementsa celeritatis g, G ipsis temporibus directe proportionalia; adeoque erit motus puncti P ab illa dependens uniformiter acceleratus vel retardatus (274. §.). Erunt enim tempora t, T commensurabilia vel incommensurabilia (3. §.). Primo casu extabit aliquis numerus integer m vel fractus $\frac{m}{n}$, pro quo fit $T = tm$ vel $T = t \frac{m}{n}$ (6. §.): igitur etiam $G = gm$ vel $G = g \frac{m}{n}$ (304. 305. §.); proinde semper $G:g = T:t$.

2. Quodsi autem tempora T, t sint incommensurabilia; extabit, sumto quantumcunque magno numero integro n , alter numerus integer m , pro quo fiet per (12. §.)

$$T > t \frac{m}{n} \quad \text{et simul} \quad T < t \frac{m+1}{n}.$$

3. Eadem vis producat tempore $= t \frac{m}{n}$ incrementum vel decrementum celeritatis e , et tempore $= t \frac{m+1}{n}$ incrementum vel decrementum E : cum temporibus T, t producantur, per hypothesim, incrementa vel decrementsa G, g ; erit

$$E = g \frac{m+1}{n}, \quad e = g \frac{m}{n} \quad \text{per (305. §.);}$$

$$G > e, \quad G < E \quad \text{ob (2) per (303. §.):}$$

$$\text{igitur } G > g \frac{m}{n} \quad \text{et simul} \quad G < g \frac{m+1}{n}.$$

4. Ob (2) (3) erit itaque etiam nunc $G:g = T:t$ per (22. §.).

308. Theorema.

Si punctum P a numero m viribus aequalibus et invariabilibus secundum datam directionem ad motum eodem momento determinetur, et tempore T continuo sollicitetur; acquirat punctum P intra tempus T celeritatem implam celeritatis, quam quaevis illarum virium, absentibus reliquis, seorsim eodem tempore generaret.

Demon-

Demonstratio.

Cum vis invariabilis punctum P ad motum continuo sollicitans eadem prorsus efficacia quovis momento agat, seu quiescat punctum P, seu moveatur, aut ob suam inertiam (292. 293. §.), aut ob actionem cujuscunque alterius vis actu in illud exertam; ipsum vero punctum P omnem celeritatem, ad quam id a certa vi determinatur, et recipere cogatur, et perpetuo conservare (293. §.): clarum est, quod, si punctum P a numero m viribus aequalibus et invariabilibus ad motum secundum determinatam directionem tempore T continuo sollicitetur, singulae vires easdem celeritates aequales tempore T debeant generare, quas eae seorsim in totidem puncta agentes producerent (300. §.); adeoque punctum P intra tempus T debeat acquirere celeritatem *mplam* celeritatis, quam una ejusmodi vis, absentibus omnibus reliquis viribus, eodem tempore produceret.

309. Corollarium 1.

Perspicuum est, punctum P eadem prorsus efficacia quovis momento ad motum secundum determinatam directionem sollicitatum iri, seu illud a numero m viribus aequalibus et invariabilibus $v, v, v, \dots v$, seu ab unica vi $U = v m$ *mpla* vis v , ad motum et determinetur et continuo urgeatur (294. §.): vis *mpla* $U = v m$ producet ergo quovis tempore T celeritatem $G = g m$ *mplam* celeritatis g , quam vis *simples* g intra idem tempus potest generare (308. §.).

310. Corollarium 2.

Vis ergo invariabilis $X = x \frac{r}{n}$ *rpla* unius *ntae* partis vis x , datum punctum P ad motum determinans et continuo sollicitans, producet quovis tempore T celeritatem $K = k \frac{r}{n}$ *rplam* unius *ntae* partis celeritatis k , quam vis x intra idem tempus generaret. Si enim vis $= x \frac{1}{n}$ tempore T generet celeritatem z ; erit $k = z n$ et $K = z r$ (309. §.): igitur $z = k \frac{1}{n}$ et $K = k \frac{r}{n}$.

311. Theorema.

Celeritates G, g , quas duae vires invariabiles V, v , puncta P, p , ad motum eodem momento determinantes, et continuo sollicitantes, intra idem

tempus T ab initio motus computatum produxerint, erunt inter se in ratione directa earundem virium, seu erit $C:c=V:v$.

Demonstratio.

1. Si vires V, v sint commensurabiles (3. §.); dabitur certus numerus integer m vel fractus $\frac{m}{n}$, pro quo debeat esse $V=vm$ vel $V=v\frac{m}{n}$ (6. §.): igitur etiam $C=cm$ vel $C=c\frac{m}{n}$ (309. 310. §.); adeoque utroque casu $C:c=V:v$.

2. Sint jam vires V, v incommensurabiles; necesse est, ut accepto quantumvis magno numero integro n alter numerus integer m sit possibilis, pro quo per (12. §.) fiat

$$V > v \frac{m}{n} \text{ et simul } V < v \frac{m+1}{n}.$$

3. Vis invariabilis $=v\frac{m}{n}$ producat tempore T celeritatem x , et vis $=v\frac{m+1}{n}$ celeritatem X : cum, per hypothesim, vires V, v eodem tempore celeritates C, c producant; erit

$$x=c\frac{m}{n}, X=c\frac{m+1}{n} \text{ per (310. §.);}$$

$$C > x, C < X \text{ ob (2) per (301. §.):}$$

$$\text{igitur } C > c\frac{m}{n} \text{ et simul } C < c\frac{m+1}{n}.$$

4. Quamobrem, ob (2) (3) per (22. §.), debet etiam nunc esse $C:c=V:v$.

312. Corollarium.

Motus punctorum P, p a viribus invariabilibus V, v ad illum et determinatorum, et continuo sollicitatorum debet esse uniformiter acceleratus purus (307. 274. §.): spatia ergo S, s , quae puncta P, p intra idem tempus T percurrerint, erunt in ratione directa virium V, v . Si enim tempore T generentur celeritates C, c , debeat esse

$$S=\frac{1}{2}CT; s=\frac{1}{2}cT; \text{ per (279. §.):}$$

$$\text{igitur } S:s=C:c=V:v \text{ per (311. §.).}$$

DISSERTATIO IX.

DE

DETERMINATIONE MOTUS PROGRESSIVI DATARUM
MASSARUM PER DATAS VIRES.

313. DEFINITIO.

Motus progressivus dati corporis, vel cujuscunque systematis plurium corporum aut punctorum, vocatur is determinatus motus, quo singula puncta corporis vel systematis secundum directiones inter se parallelas et celeritatibus quovis momento aequalibus promoventur.

314. Corollarium 1.

Omne corpus determinatae figurae exhibet unum systema plurium punctorum, quibus minimae particulae materiales, in quas illud est resolvable, possunt substitui (118. §.): quaecunque ergo de motu progressivo systematis plurium punctorum in genere fuerint dicta, ea etiam ad motum progressivum corporum pertinebunt (313. §.).

315. Corollarium 2.

Spatia, quae a singulis punctis dati systematis plurium punctorum motu progressivo incedentis intra eadem tempuscula percurruntur, debent esse inter se aequalia: et vicissim motus dati systematis erit progressivus, si singula ejus puncta secundum directiones parallelas moveantur, et quovis cogitabili tempusculo spatia aequalia conficiant (315. 257. §.).

316. Corollarium 3.

Determinato motu unici puncti cujuscunque systematis plurium punctorum motu progressivo incedentis, noscetur eo ipso motus totius systematis: singula enim ejus puncta eandem quovis momento celeritatem constantem aut variabilem habebunt, atque hanc ipsam celeritatem totum systema eodem momento habere censebitur; singula porro puncta per idem quovis tempusculo spatium promovebuntur, quod pro spatio a toto systemate intra idem tempusculum confecto habebitur (313. 315. §.).

317. Corollarium 4.

Quocunque motu progressivo feratur datum systema plurium punctorum, eadem manebunt distantiae mutuae duorum quorumvis punctorum ejusdem systematis, rectaque inter quaeque duo puncta intercepta perpetuo sibi manebit parallela (313. 315. §.).

318. Corollarium 5.

Si singula puncta alicujus systematis secundum directiones inter se parallelas in eandem plagam tendentes ab ejusmodi viribus ad motum continuo sollicitentur, quae sint invariabiles et inter se aequales, vel variabiles quovis tamen momento inter se aequales; erit motus totius systematis progressivus, modo singula puncta eo momento, quo illa a datis viribus urgeri incipiunt, vel omni celeritate destituta quiescant, vel omnia secundum directiones datarum virium, aut directiones illis oppositas pari celeritate γ ad motum jam sint determinata (313. 300. 302. §.).

319. Corollarium 6.

Eo determinato casu, quo singula puncta dati alicujus systematis, quiescentia vel ad motum secundum directiones inter se parallelas celeritate γ jam determinata, a totidem viribus quovis momento inter se aequalibus secundum easdem celeritatis γ , vel oppositas, directiones ad motum continuo sollicitata fuerint, constiteritque, motum progressivum indidem pendentem (318 §.) uniformiter accelerari vel retardari; debent illae vires esse invariabiles (313. 307. §.).

320. Corollarium 7.

Et vicissim, si singula puncta dati systematis, quiescentia vel ad motum celeritate γ secundum directiones inter se parallelas jam determinata, a totidem viribus aequalibus et invariabilibus secundum easdem celeritatis γ , vel oppositas, directiones ad motum continuo sollicitentur; debet motus progressivus totius systematis indidem pendens (318. §.) uniformiter accelerari vel retardari (313. 307. §.).

321. Corollarium 8.

Minimas omnium corporum gravium particulas in quavis altitudine ab aequalibus viribus secundum directiones inter se ad sensum parallelas deorsum sollicitari, ideo in (41. §.) supposuimus, quia id cum omnibus observationibus

tionibus experimentisque peculiari diligentia institutis quam optime consentit: cum ergo ob similes rationes motus corporum gravium libere labentium pro uniformiter accelerato possit haberi; licebit motum cujuslibet corporis gravis libere ex quacunque altitudine labentis instar motus progressivi (318. §.) uniformiter accelerati spectare, qui a viribus gravitatis aequalibus et invariabilibus minimas ejus particulas secundum directiones inter se parallelas deorsum ad motum continuo urgentibus dependeat (319. §.).

322. Corollarium 9.

Quapropter, ubi motus corporum gravium libere labentium determinari debuerit, licebit illa instar totidem punctorum secundum directiones verticales inter se parallelas motu uniformiter accelerato descendendum considerare, quae a viribus aequalibus et invariabilibus secundum easdem directiones deorsum ad motum continuo urgeantur, ideoque quovis tempore ab initio lapsus computato et per aequales altitudines decidant, et aequales celeritates acquirant (321. 316. 311. 312. §.).

Scholion.

Verum haec omnia de lapsu libero corporum gravium in spatio ab omni aere vacuo debent intelligi. Aer enim resistit descensui corporum gravium, evertitque principia, quibus universa doctrina de libero ipsorum lapsu solet superstrui. Sic e. gr. duo corpuscula, quae in libero aere diversis temporibus ab initio lapsus computatis per aequales altitudines decidunt, contra (322. §.), in spatio ab aere vacuo aequales altitudines eodem tempore, teste experientia, conficiunt. Quaecunque ergo in sequentibus de lapsu corporum gravium fuerint demonstrata, ad descensum ipsorum in spatio ab aere vacuo debebunt restringi.

323. Hypothesis.

Sumto pede Rhenano pro mensura altitudinum, per quas corpora gravia libere labentia descendant; exprimet $g = 15 \frac{5}{8} = 15,625$. ped. altitudinem, per quam quodlibet corpus grave de quiete libere labens primo minuto secundo sui lapsus decidet (322. §.).

Scholion.

Qua optima ratione altitudinem hanc investigare licuit, inferius in dissertatione de pendulis videbimus. Interea notent sibi tyrones, numerum 15625 aequari perfecto quadrato numeri 125, adeoque radicem ejus quadraticam

draticam esse hunc ipsum numerum, unde non parum commodi in calculos redundabit.

324. Corollarium 1.

Quia motus corporum gravium de quiete libere labentium est uniformiter acceleratus purus (322. 274. §.); necesse est, ut omne corpus grave de quiete libere labens tantam celeritatem k in fine primi minuti secundi sui lapsus habeat, quanta id motu aequabili per duplam altitudinem $2g$ decideret (323. 280. §.): omne corpus grave de quiete libere labens acquirat ergo intra primum minutum secundum sui lapsus celeritatem $k = 2g = 31\frac{1}{4} = 31,25$ ped. rhen. per (323. 271. §.).

325. Corollarium 2.

Ob (322. 275. 281. 282. §.) erunt celeritates C, c , quas corpus grave de quiete libere labens intra duo quaecunque tempora T, t ab initio lapsus computata acquisiverit, inter se in ratione directa temporum; altitudines vero A, a , per quas illud temporibus T, t descenderit, erunt inter se ut quadrata temporum T, t , et ut quadrata celeritatum C, c . Dato vero tempore T in minutis secundis (262. 263. §.), quo motus corporis gravis de quiete libere labentis daret, poterit ob (324. 322. §.) per (278. 276. §.) tam altitudo A lapsus intra tempus T , quam celeritas eodem lapsu genita, ut sequitur, perfecte determinari.

$$A = gT^2; C = 2gT.$$

E. gr. Ponamus globulum plumbeum tempore $T = 5$ minutis secundis de quiete libere labi; descendet is hoc tempore per altitudinem

$$S = gT^2 = 15,625.25 = 390,625 \text{ ped.}$$

Celeritas vero, quam is eodem tempore acquireret, debet esse

$$C = 2gT = 31,25.5 = 156,25 \text{ ped.}$$

adeoque tanta, quanta is motu aequabili progrediens quovis minuto secundo spatium 156,25 pedum rhenanorum deberet conficere (271. §.).

326. Corollarium 3.

Cognita vero altitudine A , per quam corpus grave certo tempore T de quiete libere labens decadat, vel celeritate C , quam illud intra idem tempus acquirat; poterit inveniri ipsum tempus T in minutis secundis per (325. §.), nimirum

$$T = \sqrt{\frac{A}{g}}; \quad T = \frac{C}{2g}.$$

327. Corollarium 4.

Cum debeat esse $g = \frac{A}{T^2}$ (325. §.), patet, qua methodo altitudinem g (323. §.) investigare liceret, si tempus T liberi lapsus alicujus corporis gravis per notam quampiam altitudinem A in minutis secundis posset determinari. At, quia descensus iste in vacuo deberet fieri (322. §. Schol.), in vacuo autem spatio, quale e. gr. in vitreo recipiente ope antliae pneumaticae obtinetur, tanta altitudo A , quanta ad accuratam temporis T observationem esset necessaria, non potest haberi; manifestum est, hanc methodum ad investigationem altitudinis g non esse idoneam.

328. Corollarium 5.

Si $T = \frac{C}{2g}$ substituas in $A = gT^2$ (325. §.); obtinebis binas sequentes formulas, quarum una dat altitudinem A , per quam corpus grave de quiete libere descendens debet labi, ut datam aliquam celeritatem C acquirat; altera vero celeritatem dat, quam corpus ejusmodi libero lapsu per determinatam altitudinem A deberet acquirere.

$$A = \frac{C^2}{4g}; \quad C = 2\sqrt{gA}.$$

329. Corollarium 6.

Data igitur quacunq; celeritate C semper poterit assignari altitudo A , per quam corpus grave de quiete libere labens eandem acquirat celeritatem (328. §.): altitudo ejusmodi A vocatur *altitudo debita celeritati* C , estque semper $A = \frac{C^2}{4g}$, et $C = 2\sqrt{gA}$ ipsa celeritas *debita altitudini* A .

E. gr. Celeritatem constantem C puncti P motu aequabili incedentis (258. §.), aut celeritatem C puncti P motu quocunq; inaequabili progredientis acquisitam tempore determinato (271. §.), aequari celeritati, quae altitudini A 1000 pedum rhenanorum sit debita, tantundem significabit, ac celeritatem C puncti P illi derterminatae celeritati esse aequalem, quam corpus grave per altitudinem 1000 pedum descendens acquireret, ita ut illa sit

$$C = 2\sqrt{g \cdot 1000} = 2\sqrt{15,625 \cdot 1000} = 250 \text{ ped.}$$

330. Corollarium 7.

Si corpus grave de quiete libere labens moveatur quotcunque tempusculis aequalibus $t, t, - - - t$ ab initio lapsus ordine naturali sibi succedentibus; debet illud quolibet mto tempusculo t ob (322. 324. 283 §.) percurrere altitudinem $= g(2m - 1)t^2$.

Quovis igitur mto minuto secundo descendet id per altitudinem $= g(2m - 1)$.

Quamobrem spatia singulis minutis secundis ab initio lapsus ordine naturali sibi succedentibus percurfa constituent seriem

$g, 3g, 5g, 7g, 9g, 11g, \text{etc.}$

331. Theorema.

Fig. 61. Si corpus PQR (61. Fig.) vel quiescens, vel ad motum progressivum secundum directionem gG per ejus centrum gravitatis g transeuntem, aut directionem gv ei oppositam, celeritate v jam determinatum, vis quaecunque V secundum directionem gG ad motum sollicitare incipiat, et tempore T continuo sollicitet; erit nunc quoque motus totius corporis progressivus, per vim V ita determinatus, ac si, illa absente, singulae minimae particulae ejusdem corporis a viribus aequalibus, quarum quaevis sit $= V \frac{m}{M}$, secundum directiones directioni gG parallelas ad motum continuo impellerentur, existente massa totius corporis $= M$, et massula cujusvis minimae ejus particulae $= m$.

Demonstratio.

Si quovis momento, quo centrum gravitatis g corporis PQR a vi V secundum directionem gG ad motum sollicitatur, in minimas quasque ejus particulas, ut $a, b, c, d, \text{etc.}$ cogitentur agere totidem vires aequales $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$, quarum quaevis sit $= V \frac{m}{M}$, secundum directiones oppositas $a\alpha, b\beta, c\gamma, d\delta, \text{etc.}$ parallelas directioni gG ; erit centrum gravitatis g corporis PQR idem cum centro aequilibril omnium virium $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$ (152. §.), summaque harum virium aequabitur vi V , sicut summa massularum $m, m, m, m, \text{etc.}$ minimarum particularum $a, b, c, d, \text{etc.}$, in quas illae agunt, aequatur massae M totius corporis; consequenter erunt omnes vires $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$ cum vi V in aequilibrio (128. §.): perspicuum est ergo, vim V minimas particulas $a, b, c, d, \text{etc.}$ corporis PQR eadem prorsus

prorsus efficacia ad motum secundum directiones a A, b B, c C, d D, etc. directioni g G parallelas quovis momento sollicitaturam, qua illae, absente vi V, eodem momento a viribus aequalibus A, B, C, D, etc., quarum quaelibet fit $= V \frac{m}{M}$, sollicitarentur, si hae in illas immediate agerent, unde necessario sequitur, quod erat demonstrandum (300. 302. 313. §.).

332. Corollarium 1.

Cum datum corpus PQR, vel quiescens, vel celeritate γ ad motum progressivum secundum directionem g G per ejus centrum gravitatis g transeuntem, aut directionem g v illi oppositam jam determinatum, a vi quacunque V ad motum secundum directionem g G continuo sollicitatum fuerit; motus progressivus totius corporis perfecte determinabitur, si unica ejus particula, quam ob parvitatem instar puncti considerare liceat, a vi $= V \frac{m}{M}$ per massulam m ejusdem particulae, massam M totius corporis, et ipsam vim V determinata, ad motum secundum directionem directioni g G parallelam continuo sollicitari, eoque momento, quo vis $V \frac{m}{M}$ in illam incipit agere, vel quiescere, vel celeritate γ ad motum secundum eandem, vel oppositam directionem aliunde determinata esse supponatur, tum quaeratur et spatium, quod illa intra datum tempus T debeat percurrere, et celeritas, quam intra idem tempus debeat acquirere (331. 316. §.).

333. Corollarium 2.

Vis invariabilis V, datum corpus PQR ad motum secundum directionem g G per ejus centrum gravitatis g transeuntem tempore T continuo impellens, producet motum uniformiter acceleratum vel uniformiter retardatum, si corpus PQR initio temporis T quiescat, aut ad motum progressivum celeritate γ secundum directionem g G vel directionem oppositam g v jam sit determinatum (332. 307. §.).

334. Corollarium 3.

Et vicissim, si vis V, datum corpus PQR ad motum secundum directionem g G per illius centrum gravitatis transeuntem tempore T continuo sollicitans, producat motum uniformiter acceleratum vel retardatum, prout corpus PQR initio temporis T quiescit, aut ad motum progressivum

celeritate γ secundum directionem gG , vel illi oppositam gV aliunde est determinatum; erit vis V invariabilis (332. 307. §.).

335. Theorema.

Si duo corpora A, B massarum aequalium M , M a duabus viribus invariabilibus et inaequalibus V , v ad motum secundum directiones per illorum centra gravitatis transeuntes determinentur, determinataque continuo sollicitentur; erunt spatia S , s ab illis intra quodlibet tempus ab initio motus computatum percurſa, et celeritates C , c intra idem tempus acquisitae, inter se in ratione directa earundem virium, seu erit $S:s=C:c=V:v$.

Demonstratio.

Sit m massula cujusvis minimae particulae utriusque corporis A, B; erit per (333. 332. 311. 312. §.)

$$C:c=V \frac{m}{M}:v \frac{m}{M} \text{ et } S:s=V \frac{m}{M}:v \frac{m}{M} :$$

igitur $C:c=S:s=V:v$.

336. Theorema.

Si autem duo corpora A, B massas inaequales M , μ habentia a viribus aequalibus et invariabilibus V , V ad motum secundum directiones per illorum centra gravitatis transeuntes determinentur, et determinata continuo sollicitentur; erunt tam spatia S , s ab illis intra quodcunque tempus T percurſa, quam celeritates C , c intra idem tempus acquisitae, inter se in ratione inversa massarum, seu erit $C:c=S:s=\mu:M$.

Demonstratio.

Si m denotet massulam cujusvis minimae particulae corporis tam A quam B; debet esse per (333. 332. 311. 312. §.)

$$C:c=V \frac{m}{M}:V \frac{m}{\mu} \text{ et } S:s=V \frac{m}{M}:V \frac{m}{\mu} :$$

igitur $C:c=S:s=\frac{m}{M}:\frac{m}{\mu}=\mu:M$.

337. Theorema.

Si duo corpora massarum inaequalium M , m a viribus inaequalibus et invariabilibus V , v ad motum secundum directiones per illorum centra gravitatis

vitatis transeuntes determinantur, determinataque continuo sollicitentur; erunt tam spatia S, s ab illis quovis tempore T confecta, quam celeritates C, c intra idem tempus acquisitae, inter se ut vires divisae per massas.

Demonstratio.

Tertium aliquod corpus habens massam M, a vi invariabili v ad motum secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem determinatum, continuoque sollicitatum conficiat tempore T spatium s', et acquirat celeritatem c'; debet esse per (335. 336. §.)

$$C:c' = V:v \text{ et } S:s' = V:v;$$

$$c':c = m:M \text{ et } s':s = m:M;$$

igitur debet esse

$$Cc':c'c = Vm:vM \text{ et } Ss':s's = Vm:vM;$$

$$\text{hinc } C:c = \frac{V}{M} : \frac{v}{m} \text{ et } S:s = \frac{V}{M} : \frac{v}{m}.$$

338. Problema.

Data massa M corporis Z quod a data vi invariabili V secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem de quiete ad motum determinetur, et dato tempore T continuo sollicitetur; invenire spatium S, quod idem corpus intra tempus T percurrat, et celeritatem C, quam eodem tempore acquirat.

Solutio.

1. Si corpus Z cogitetur ob solam suam gravitatem de quiete libere labi; descendet illud motu progressivo tempore T per altitudinem $= gT^2$, et acquirat hoc tempore celeritatem $= 2gT$ (325. §.): motus vero hic potest censerī ab una vi invariabili ponderi ejusdem corporis aequali productus, quae corpus Z omni gravitate destitutum secundum directionem verticalem per ejus centrum gravitatis transeuntem deorsum continuo urgeat (332. 321. 46. §.).

2. Cum igitur corpus Z a vi invariabili V ad motum secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem continuo sollicitatum spatium S tempore T percurrat, et celeritatem C acquirat; necesse est, ut sit S ad gT^2 , et C ad $2gT$, sicut vis V ad vim aequalem ponderi corporis Z, ob (1) per (335. §.).

3. Denotante ergo P pondus corporis Z ; habebimus per (2) sequentes proportionones:

$$S : gT^2 = V : P \quad \text{et} \quad C : 2gT = V : P.$$

Cum porro omnis vis V uni ponderi aequetur (295. §.); erunt V, P quanta homogenea, pro quorum communi mensura (14. §.) certum pondusculum p debeat accipi, eritque

$$S : gT^2 = \frac{V}{p} : \frac{P}{p} \quad \text{et} \quad C : 2gT = \frac{V}{p} : \frac{P}{p}.$$

4. Pro mensura massae M corporis Z sumi debet in hac hypothefi massula m , cujus pondus aequetur pondusculo p pro mensura ponderum V, P sumto, quo fiat $\frac{M}{m} = \frac{P}{p}$ (52. §.): igitur erit etiam

$$S : gT^2 = \frac{V}{p} : \frac{M}{m} \quad \text{et} \quad C : 2gT = \frac{V}{p} : \frac{M}{m}.$$

Quamobrem, quia $\frac{V}{p}, \frac{M}{m}$ sunt exponentes rationum geometricarum vis V ad illius mensuram p , et massae M ad ejusdem mensuram m , si deinceps literae V, M eosdem exponentes exprimant, sicut similes numeri per S, C, T debent intelligi (263. §.); habebimus

$$S : gT^2 = V : M \quad \text{et} \quad C : 2gT = V : M;$$

$$\text{hinc } S = g \frac{V}{M} T^2; \quad C = 2g \frac{V}{M} T.$$

339. Corollarium 1.

Cognita igitur altitudine g (323. §.), per quam quodvis corpus grave de quiete libere labens primo minuto secundo sui lapsus debet decidere, facile per (338. §.) determinabitur tam spatium S , quod datum corpus, a data vi V invariabili secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem de quiete ad motum determinatum et continuo sollicitatum, dato quocunque tempore T percurrat, quam celeritas C , quam illud eodem tempore acquirat.

340. Corollarium 2.

Ex (338. §.) fluunt binae sequentes formulae, quarum prior dabit spatium, quod corpus datae massae M , a data vi invariabili V ad motum
secun-

secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem continuo sollicitatum, debet conficere, ut id datam celeritatem C acquirat; altera vero dabit ipsam celeritatem C , quam illud eo tempore, quo datum spatium S percurritur, debet acquirere.

$$S = \frac{MC^2}{4gV}; \quad C = 2\sqrt{\frac{gVS}{M}}.$$

341. Corollarium 3.

Quodsi autem quaeratur tempus T , quo corpus datae massae M , a data vi invariabili V ad motum secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem continuo debet sollicitari, ut illud datum spatium S percurrat, vel determinatam celeritatem C acquirat; erit per (338. §.)

$$T = \sqrt{\frac{MS}{gV}}; \quad T = \frac{MC}{2gV}$$

342. Corollarium 4.

Quoties datum corpus motu progressivo ita debuerit incedere, ut illud quovis dato tempore T determinatum spatium S conficiat, determinatamque celeritatem C acquirat; toties poterit determinari vis una invariabilis V , a qua datum corpus eo fine secundum directionem per illius centrum gravitatis transeuntem ad motum continuo debebit sollicitari: erit enim per (338. 340. §.)

$$V = \frac{MS}{gT^2}; \quad V = \frac{MC}{2gT}; \quad V = \frac{MC^2}{4gS}.$$

343. Problema.

Data vi invariabili V , quae corpus Z massae M , ad motum progressivum celeritate γ secundum directionem per illius centrum gravitatis transeuntem aliunde determinatum, ad motum secundum eandem vel oppositam directionem tempore T continuo sollicitet: invenire tam spatium S , quod a corpore Z intra tempus T debebit confici, quam celeritatem C , quam illud in fine temporis T debebit habere.

Solutio.

1. Ob (332. 333. §.) quaerendum est spatium S , quod quaevis minima corporis Z particula, ob vim invariabilem $= V \frac{m}{M}$ illam ad motum
continuo

continuo sollicitantem motu uniformiter accelerato vel retardato celeritateque γ inchoato progrediens, intra tempus T percurreret, una cum celeritate C , quam illa in fine temporis T deberet habere.

2. Si corpus Z a vi invariabili V de quiete ad motum determinaretur, continuoque tempore T sollicitaretur; deberet quaevis minima ejus particula motu uniformiter accelerato puro incedens (333. 338. 316. §.) spatium $= g \frac{V}{M} T^2$ conficere, et celeritatem $= 2g \frac{V}{M} T$ acquirere.

3. Absente vero omni vi V percurreret quaevis particula corporis Z motu aequabili celeritate initiali γ spatium $= \gamma T$ intra tempus T (316. 265. §.).

4. Quare, si directio vis V corpus Z ad motum continuo sollicitantis, eadem sit cum directione celeritatis initialis γ , quo casu motus progressivus corporis Z debet uniformiter accelerari (333. §.); percurreret ob (1) corpus Z tempore T sequens spatium S per (285. §.) summae spatiorum (2) (3) aequale, et habebit in fine ejusdem temporis sequentem celeritatem C per (302. §.) aequalem summae celeritatis initialis γ , celeritatisque (2).

$$S = \gamma T + g \frac{V}{M} T^2; \quad C = \gamma + 2g \frac{V}{M} T.$$

5. Si autem directio vis invariabilis V corpus Z ad motum continuo sollicitantis opposita sit directioni celeritatis γ , adeoque motus progressivus corporis Z uniformiter retardetur (333. §.); debebit ob (1) corpus Z tempore T percurrere sequens spatium S per (286. §.) aequale differentiae spatiorum (2) (3), et sequentem celeritatem C in fine temporis T habere, utpote aequalem differentiae celeritatis initialis γ , celeritatisque (2) per (302. §.).

$$S = \gamma T - g \frac{V}{M} T^2; \quad C = \gamma - 2g \frac{V}{M} T.$$

344. Corollarium I.

Cum pro $T < \frac{M\gamma}{2gV}$ valor celeritatis C sit positivus, pro $T = \frac{M\gamma}{2gV}$ vero fiat celeritas $C = 0$, et pro $T > \frac{M\gamma}{2gV}$ induat C valorem negativum (343. §.); perspicuum est, motum corporis Z secundum directionem celerita-

celeritatis initialis γ uniformiter retardatum iri, quamdiu fuerit tempus, quo is duret, $T < \frac{M\gamma}{2gV}$; durabit porro hic motus retardatus tempore $T = \frac{M\gamma}{2gV}$, intra quod corpus Z percurrent spatium $S = \frac{M\gamma^2}{4gV}$ (343. §.); crescente vero tempore ultra $T = \frac{M\gamma}{2gV}$ progredietur corpus Z ob solam vim V secundum directionem hujus vis oppositam directioni celeritatis initialis γ motu jam uniformiter accelerato (333. §.).

345. Corollarium 2.

Si corpori gravi Z imprimatur determinata celeritas γ secundum directionem verticalem versus terrae superficiem, cum hoc casu vis V, ipsum ad motum secundum eandem directionem deorsum continuo sollicitatura debeat aequari ponderi ejusdem corporis; erit $V = M$ (338. §. 4. n.): altitudo ergo A, per quam corpus grave Z hoc casu intra datum tempus T labetur, et celeritas C, quam in fine ejusdem temporis habebit, erit per (343. §.)

$$A = \gamma T + gT^2; \quad C = \gamma + 2gT.$$

346. Corollarium 3.

Si vero corpori gravi Z imprimatur determinata celeritas γ secundum directionem verticalem oppositam directioni gravitatis (42. §.); erit nunc quoque $V = M$ (345. §.), corpusque Z ascendet quovis tempore T per altitudinem $A = \gamma T - gT^2$, et habebit in fine ejusdem temporis T celeritatem $\dot{C} = \gamma - 2gT$ (343. §.), quae pro $T = \frac{\gamma}{2g}$ fiet aequalis nihilo, quo ipso per $T = \frac{\gamma}{2g}$ determinatur totum tempus ascensus per altitudinem $A = \frac{\gamma^2}{4g}$: per hanc ergo altitudinem ascendet corpus Z motu uniformiter retardato (274. §.), tum labetur deorsum ob solam vim gravitatis motu uniformiter accelerato puro (321. 274. §.).

347. Problema.

Data massa M corporis Q, quod a data vi variabili secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem ad motum continuo urgeatur, eoque momento, quo eadem vis in illud agere incipit, quiescat, aut ad motum progressivum determinata celeritate secundum directionem vis impellentis, vel directionem ei oppositam jam sit determinatum; investigare celeritatem, quam corpus Q intra datum quodcunque tempus debebit acquirere.

Solutio.

1. Quidquid fit vis variabilis corpus Q ad motum continuo sollicitans; producet ea motum progressivum vel acceleratum, vel retardatum (331. 332. 302. 268. §.): quodsi ergo ab eo momento, quo illa in corpus Q agere incipiat, effluat tempus T, et celeritas corporis Q in fine hujus temporis fit C; necesse est, ut, si tempus T crescat quocunque tempusculo ΔT , celeritas C intra hoc tempusculum vel certum incrementum ΔC capiat, vel decrementum aliquod ΔC patiat.

2. Quacunque porro lege vis variabilis corpus Q impellens ad motum durante motu mutetur, quomodocunque ea ergo tempore T crescat vel decrescat, supponatur illa esse $= V$ in fine temporis T, crescenteque tempore T tempusculo ΔT , hoc ipso tempusculo incrementum aliquod ΔV capere, vel decrementum ΔV pati: quare erit V vis, quae initio tempusculi ΔT aget in corpus Q; ea deinde toto hoc tempusculo crescet vel decrescet, eritque $= V + \Delta V$ vel $= V - \Delta V$ in fine ejusdem tempusculi.

3. Si corpus Q toto tempusculo ΔT a vi invariabili V vel $V + \Delta V$ aut $V - \Delta V$ ad motum continuo sollicitaretur; incrementum vel decrementum celeritatis, quod illa hoc tempusculo produceret, esset aequale celeritati, quam eadem vis corpus Q de quiete ad motum determinans et tempusculo ΔT continuo sollicitans intra hoc tempusculum generaret (332. 303. §.): idem ergo incrementum vel decrementum esset per (338 §.) $2g \frac{V}{M} \Delta T$, vel $2g \frac{V + \Delta V}{M} \Delta T$, aut $2g \frac{V - \Delta V}{M} \Delta T$.

4. Quodsi jam vis corpus Q tempusculo ΔT ad motum continuo impellens continuo crescat; erit illa quovis momento durante motu tempusculo ΔT major quam V et minor quam $V + \Delta V$ per (2): incrementum ergo vel decrementum celeritatis ΔC , quod illa tempusculo ΔT producit (1), debet esse majus incremento vel decremento, quod vis invariabilis $= V$, et simul minus incremento vel decremento, quod vis invariabilis $= V + \Delta V$ eodem tempusculo produceret. Quamobrem habebimus hoc casu per (3)

$$\Delta C > \frac{2gV}{M} \Delta T \text{ et simul } \Delta C < \frac{2g(V + \Delta V)}{M} \Delta T.$$

5. Si

5. Si autem vis corpus Q tempusculo ΔT continuo urgens continuo decreseat; debet illa quovis momento durante motu tempusculo ΔT minor esse quam V , et major quam $V - \Delta V$ per (2): incrementum itaque vel decrementum celeritatis ΔC , quod illa intra tempusculum ΔT generat, erit minus incremento vel decremento, quod vis invariabilis $= V$, et majus incremento vel decremento, quod vis invariabilis $= V - \Delta V$ eodem tempusculo produceret. Quare ob (3) habebimus

$$\Delta C < \frac{2gV}{M} \Delta T \text{ et simul } \Delta C > \frac{2g(V - \Delta V)}{M} \Delta T.$$

6. Leges, quibus vires variabiles possunt crescere durante motu et decrecere, sunt numero infinitae possibiles (294. §.): est autem impossibile motum corporis Q ab ejusmodi vi pendentem perfecte determinare, nisi noscatur lex, qua illa durante motu mutatur. Cogimur ergo supponere, legem, qua vis variabilis V corpus Q ad motum continuo impellens, crescit vel decrecit crescente tempore T , quo motus ab illa dependens durat, eoque ipso etiam functionem temporis T eidem vi aequalem esse assignabilem, quo pro certis coefficientibus l, m, n , etc. independentibus a tempusculo ΔT differentia ΔV certae seriei $l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.}$ aequetur (Vol. I. §. 84.).

7. Hinc (4) (5) (6) fiet pro quovis cogitabili quantumlibet parvo tempusculo ΔT

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} > \frac{2gV}{M} \text{ et simul } \frac{\Delta C}{\Delta T} < \frac{2gV}{M} + \frac{2g}{M} (l\Delta T + m\Delta T^2 + \text{etc.});$$

vel

$$\frac{\Delta C}{\Delta T} < \frac{2gV}{M} \text{ et simul } \frac{\Delta C}{\Delta T} > \frac{2gV}{M} - \frac{2g}{M} (l\Delta T + m\Delta T^2 + \text{etc.});$$

8. Ex his denique expressionibus obtinebimus per (Vol. I. §. 131.) sequentem expressionem exponentis rationis differentialis celeritatis C consideratae instar unius functionis temporis variabilis T , qui, si crescente tempore decreseat celeritas, cum signis contrariis sumetur (Vol. I. §. 132.)

$$\varepsilon C = -\frac{2g}{M} V \varepsilon T.$$

9. Ab hujus exponentis differentialis integration. dependebit jam inventio celeritatis C debitae tempori T , quam facile perficies, si antea

vim V per certam functionem vel temporis T , vel ipsius celeritatis C exprimas: utroque enim casu obtinebitur in (8) aequatio differentialis intra binas tantum variables, nimirum C et T . Ut vero pars constans quaesiti integralis per (Vol. I. §. 238.) rite determinetur, attendendum est ad initium motus datae massae: ubi enim ista de quiete ad motum a data vi fuerit determinata; debet esse $C=0$ pro $T=0$: si vero ea eo momento, quo a data vi urgeri incipit, aliunde sit ad motum celeritate γ determinata; erit $C=\gamma$ pro $T=0$.

348. Problema.

Data functione exprimente celeritatem C , quam corpus motu progressivo inaequali incedens intra determinatum tempus T acquirat; invenire spatium S , quod illud hoc tempore conficiet.

Solutio.

1. Si tempus T , quo motus duret, crescat quocunque tempusculo ΔT ; debet etiam spatium S eo tempore percursum crescere aliquo spatiolo ΔS .

2. Celeritas vero C debita tempori T capiet tempusculo ΔT incrementum aliquod ΔC vel patietur decrementum ΔC , quo fiat, ut celeritas corporis initio tempusculi ΔT sit C , eaque toto tempusculo ΔC crescens vel decrescens in fine ejusdem tempusculi in $C+\Delta C$ vel $C-\Delta C$ abeat.

3. Quare, si datum corpus incedat celeritate continuo crescente; erit spatiolum ΔS , quod illud tempusculo ΔT conficit (1), majus spatiolo $C\Delta T$, quod celeritate invariabili $=C$, et simul minus spatiolo $(C+\Delta C)\Delta T$, quod celeritate invariabili $=C+\Delta C$ tempusculo ΔT percurreretur (265. §.), per (2) ob (257. §.), id est: erit semper

$$\Delta S > C\Delta T \text{ et simul } \Delta S < (C+\Delta C)\Delta T.$$

4. Si autem datum corpus progrediatur celeritate continuo decrescente; necesse est, ut spatiolum ΔS , quod illud tempusculo ΔT percurrat (1), sit minus spatiolo $C\Delta T$, quod celeritate invariabili C , et majus spatiolo $(C-\Delta C)\Delta T$, quod celeritate invariabili $=C-\Delta C$ intra tempusculum ΔT conficeretur (265. §.), ob (2) per (257. §.), id est: erit semper

$$\Delta S < C\Delta T \text{ et simul } \Delta S > (C-\Delta C)\Delta T.$$

5. Sed,

5. Sed, quia celeritas C aequatur certae functioni ipsius temporis T , dari debent coefficientes l, m, n , etc. independentes a ΔT , pro quibus sit $\Delta C = l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.}$ (Vol. I. §. 84.); habebimus ergo in (3) (4)

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} > C \quad \text{et} \quad \frac{\Delta S}{\Delta T} < C + l\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.};$$

vel

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} < C \quad \text{et} \quad \frac{\Delta S}{\Delta T} > C - l\Delta T - m\Delta T^2 - n\Delta T^3 - \text{etc.}$$

6. Utroque casu debet itaque per (Vol. I. §. 131.) exponens rationis differentialis spatii S spectati instar unius functionis temporis T esse

$$\epsilon S = C \epsilon T.$$

7. Expressa ergo celeritate C debita tempori T per certam functionem temporis T , aut spatii S , vel expresso tempore per unam functionem celeritatis C , aut spatii S , complectetur aequatio differentialis $\epsilon S = C \epsilon T$ duas tantum variables, ejusque integratio dabit spatium S per celeritatem C vel tempus T .

349. Corollarium 1.

In omni motu inaequabili progressivo, quo intra tempus T conficiatur spatium S et generetur celeritas C , accepto tempore T pro variabili absoluta (Vol. I. §. 4.), quo fiat $\epsilon T = 1$ (Vol. I. §. 124.), habebimus per (348. §.)

$$\frac{\epsilon S}{\epsilon T} = C; \quad \epsilon \frac{\epsilon S}{\epsilon T} = \frac{\epsilon^2 S}{\epsilon T} = \epsilon C.$$

350. Corollarium 2.

In (348. §.) est $\epsilon T = \frac{\epsilon S}{C}$: pro hoc valore in (347. §.) substituto inveniemus sequentes formulas, quarum ope subsidio calculi integralis relatio inter spatium S motu inaequabili dependente a vi variabili V intra quodcunque tempus confectum et celeritatem C , quam mobile in fine ejusdem temporis debet habere, poterit determinari, modo ipsa vis variabilis V per certam functionem celeritatis C vel spatii S possit exprimi.

$$C \epsilon C = \frac{2g}{M} V \epsilon S.$$

351. Corollarium 3.

Et considerato tempore T , quo vis variabilis V datam massam M secundum directionem per ejus centrum gravitatis transeuntem ad motum continuo sollicitet; instar variabilis absolutae (Vol. I. §. 4.), per cujus functiones spatium S , celeritas C , et ipsa vis V debeant determinari; obtinebimus ex (347. 349. §.) sequentem aequationem differentialem, ex qua, si antea vis variabilis V per congruam functionem temporis T exprimatur, ope primae integrationis quotiens $\frac{\epsilon S}{\epsilon T}$ seu exponens ϵS , et ope secundae integrationis ipsum spatium S poterit derivari.

$$\epsilon \left(\frac{\epsilon S}{\epsilon T} \right) = \frac{\epsilon^2 S}{\epsilon T} = \frac{2g}{M} V \epsilon T;$$

$$\text{vel } \epsilon^2 S = \frac{2g}{M} V \epsilon T^2.$$

352. Theorema.

Fig. 62. Datum quodcunque systema plurium massarum $A^i, B^i, C^i, \dots P^i$ (62. Fig.) incedet eodem motu progressivo, seu singulae massae $A^i, B^i, C^i, \dots P^i$ a totidem viribus $A, B, C, \dots P$, iisdem massis proportionalibus ad motum secundum directiones $aA, bB, cC, \dots pP$ inter se parallelas et per illarum centra gravitatis transeuntes continuo sollicitentur, seu, illis absentibus, totum systema ab unica V aequali summae virium $A, B, C, \dots P$ secundum directionem GV per centrum gravitatis systematis transeuntem et parallelam directionibus virium $A, B, C, \dots P$ ad motum continuo urgeatur.

Demonstratio.

1. Possibile est, ut eo momento, quo datum systema a datis viribus urgeri incipit, totum systema vel quiescat, vel ad motum progressivum certa celeritate γ secundum earundem virium directiones vel directiones illis oppositas jam sit determinatum (313. §.).

2. Quodsi ergo singulae massae $A^i, B^i, C^i, \dots P^i$ a totidem viribus $A, B, C, \dots P$ ad motum continuo sollicitentur; debent hae ejusmodi motus progressivos in massis $A^i, B^i, C^i, \dots P^i$ producere, quales producerentur, si, denotante m massulam cujuslibet minimae particulae cujusvis massae $A^i, B^i, C^i, \dots P^i$, quaevis minima particula massae A^i a

vi $A \frac{m}{A^1}$, quaevis massae B^1 a vi $B \frac{m}{B^1}$, quaevis massae C^1 a vi $C \frac{m}{C^1}$,
 --- quaevis massae P^1 a vi $P \frac{m}{P^1}$, ad motum continuo sollicitaretur
 (331. §.): cum igitur per hypothesim sit $A:B = A^1:B^1$, $A:C = A^1:C^1$,
 --- $A:P = A^1:P^1$, adeoque $B = A \frac{B^1}{A^1}$, $C = A \frac{C^1}{A^1}$, --- $P = A \frac{P^1}{A^1}$;
 perspicuum est, vires $A, B, C, \dots P$ ejusmodi motus in massis $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$ producturas, quales producerentur, si quaevis minima particula
 cujuslibet massae a vi $= A \frac{m}{A^1}$ ad motum continuo urgeretur. Hinc et
 ex (1) evidenter jam sequitur, motum totius systematis futurum progres-
 sivum, qualem vires aequales $A \frac{m}{A^1}$, $A \frac{m}{A^1}$, $A \frac{m}{A^1}$, etc. producerent, si
 ab his, absentibus viribus $A, B, C, \dots P$, singulae minimae particulae
 singularum massarum $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$ secundum directiones parallelas
 directionibus $aA, bB, cC, \dots pP$, ad motum continuo urgerentur
 (318. §.).

3. Si vero totum systema ab unica vi $V = A + B + C + \dots + P$
 ad motum secundum directionem GV per centrum gravitatis ejusdem sy-
 stematis transeuntem impellatur, quia totum systema instar unius corporis
 rigidi determinatae figurae, cujus massa aequetur summae $A^1 + B^1 + C^1 +$
 --- $+ P^1$ massarum illud constituentium, potest considerari (118. §.);
 producet vis V motum progressivum, qualem, absente illa, producerent
 vires aequales minimas quasque particulas massarum $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$
 ad motum secundum directiones parallelas directioni GV continuo solli-
 citantes, si, denotante m massulam cujusvis particulae, quaevis earundem
 virium aequalium esset $= V \frac{m}{A^1 + B^1 + C^1 + \dots + P^1}$ (331. §.), vel

$$= \frac{m(A + B + C + \dots + P)}{A^1 + B^1 + C^1 + \dots + P^1} = m \left(A + A \frac{B^1}{A^1} + A \frac{C^1}{A^1} + \dots + A \frac{P^1}{A^1} \right) \frac{1}{A^1 + B^1 + C^1 + \dots + P^1} = A \frac{m}{A^1},$$

ob $B = A \frac{B^1}{A^1}$, $C = A \frac{C^1}{A^1}$, --- $P = A \frac{P^1}{A^1}$, ut in (2).

4. Utroque ergo casu (2) (3), incedet totum systema tali motu pro-
 gressivo, qualis locum haberet, si singulae minimae particulae singularum
 massarum $A^1, B^1, C^1, \dots P^1$ idem systema constituentium a viribus aequa-
 libus,

libus, quarum quaevis sit $= A \frac{m}{A^i}$, secundum directiones parallelas ad motum continuo urgerentur, eoque momento, quo vires ejusmodi agere inciperent, illae particulae vel quiescerent, vel celeritate γ ad motum secundum easdem vel oppositas directiones ob (1) jam essent determinatae.

353. Corollarium.

Omne corpus, si illud in quascunque partes, quarum massae sint $A^i, B^i, C^i, \dots P^i$, mente resolvatur, potest considerari instar unius systematis plurium massarum (118. §.): quodsi ergo datum corpus, vel quiescens, vel ad motum progressivum celeritate γ jam determinatum, ad motum aut ab unica vi V aequali summae virium $A, B, C, \dots P$ secundum directionem parallelam directioni celeritatis γ et per centrum gravitatis totius corporis transeuntem, vel a pluribus viribus $A, B, C, \dots P$ continuo urgeatur, quae totidem corporis partes $A^i, B^i, C^i, \dots P^i$ secundum directiones per illarum centra gravitatis transeuntes et directioni celeritatis γ parallelas ad motum continuo impellant, atque inter se sint ut massae $A^i, B^i, C^i, \dots P^i$; debet totum corpus utroque casu eodem motu progressivo incedere (352. §.).

Scholion.

Inter omnes possibiles massarum motus simplicissimus est motus progressivus, cujus palmares proprietates in praecedentibus exposuimus: verum, quia ad illius principia determinatio omnium aliorum motuum potest revocari, plurimum interest, et vim illorum, et usum quam distinctissime habere perspectum. Eapropter subjungam exempla aliquot, usum praecedentis theoriae illustratura, quo melius tyrones ad adplicationes, quales per decursum horum opusculorum explanabuntur, possint praeparari.

354. Problema.

Fig. 63. *Data massa M (63. Fig.) determinatur de quiete ad motum a vi variabili V secundum directionem GA per ejus centrum gravitatis G transeuntem, ab eademque tempore T continuo urgetur; cognita functione celeritatis C tempori T debitae, per quam vim V exprimere liceat; determinare motum massae M.*

Solutio.

Solutio.

1. Clarum est, massam M motu progressivo secundum directionem GA incessuram (331. §.), cujus determinatio exigit, ut et celeritas C , quam illa intra datum quodcunque tempus T acquirat, et spatium S definiatur, quod intra idem tempus debeat conficere.

2. Vis massam M ad motum continuo sollicitans crescit continuo vel decrescit, ita ut in fine temporis T determinatae sit magnitudinis, quam, per hypothesim, determinata functio V celeritatis C intra idem tempus genitae debebit exprimere. Quodsi ergo hanc functionem loco V in (347. §.) substituas, complectetur aequatio differentialis $\varepsilon C = \frac{2gV}{M} \varepsilon T$ binas tantum variables C et T , quae separatae dabunt $\frac{\varepsilon C}{V} = \frac{2g}{M} \varepsilon T$: igitur integrando invenes aequationem $\int \frac{\varepsilon C}{V} = \frac{2g}{M} T$, per quam relatio inter celeritatem C et tempus T perfecte determinabitur.

3. Per (2) poterit investigari celeritas C tempori T debita: si illa determinetur per quamcunque functionem temporis T , substituta hac functione loco C in (348. §.), obtinebitur nova aequatio differentialis $\varepsilon S = C \varepsilon T$ inter variables S et T separatas, cujus integratio dabit spatium $S = \int C \varepsilon T$ intra tempus T percurrentum.

4. Et si spatium S per celeritatem C determinare cupias, independentem a tempore T ; functio V vim impellentem per C exprimens substituat in (350. §.): inveniatur enim aequatio differentialis $\frac{C \varepsilon C}{V} = \frac{2g}{M} \varepsilon S$ inter duas tantum variables C , S , cujus proinde integratio dabit S per C .

5. Dum vis impellens massam M secundum directionem GA continuo crescit, motus progressivus massae M continuo acceleratur: at, si vis illa continuo decrescat, fieri potest, ut ea aliquando penitus evanescat, quo casu motus massae M initio accelerabitur, tum convertetur in aequabilem, illa determinata celeritate C , quam massa M eo momento habuerit, quo vis impellens evanuerit (293. §.). Motus aequabilis massae M , cognita celeritate C , qua is perficiatur, per (265. 266. §.) facillime poterit determinari: quomobrem, quia per hypothesim datur functio celeritatis C vim impellentem V exprimens, ponatur haec functio aequalis nihilo,

et ex aequatione $V=0$ quaeratur valor pro C : hac enim ratione definietur celeritas constans C , qua data massa M post certum tempus aequabiliter progredietur. Si vero et tempus hoc, et spatium intra illud percursum nosse cupias; quaerantur aequationes indeterminatae inter C et T , S et T per (2) (3): si enim in prima aequatione loco C substituas celeritatem constantem derivatam ex aequatione $V=0$; obtinebis tempus T , intra quod illa generatur: et si hoc ipsum tempus substituas in secunda aequatione inter S et T ; inuenies spatium S eodem tempore percursum.

Exemplum.

Massa $M=1000$ lb determinatur de quiete ad motum a vi variabili $u=100$ lb, quae continuo decrescens eodem tempore et celeritatem $\gamma=6$ pedibus producat, et decrementum $d=10$ lb patiatur; decremента vero, quae ipsa intra quaevis duo tempora ab initio motus computata patiatur, sint inter se in ratione directa celeritatum iisdem temporibus genitarum.

I. Sit C celeritas quocunque tempore T producta, et D decrementum, quod vis initialis u intra hoc tempus patiatur; erit per hypothesein

$$\gamma:C=d:D, \text{ hinc } D=\frac{dC}{\gamma}.$$

Quamobrem vis, qua massa M in fine temporis T ad motum secundum directionem GA urgebitur, erit aequalis vi initiali u imminutae decremento D , nimirum

$$V=u-\frac{dC}{\gamma}=100-\frac{5C}{3} \text{ lb.}$$

II. Hoc jam valore substituto in (347. §.) obtinebimus aequationem differentialem hanc:

$$sC=\frac{2g}{M}\left(u-\frac{dC}{\gamma}\right)sT; \text{ seu } \frac{sC}{u\gamma-dC}=\frac{2g}{\gamma M}sT.$$

Integrando ergo per (Vol. I. 252. §.) inueniemus

$$\text{Const} - \frac{1}{d} \log(u\gamma - dC) = \frac{2g}{\gamma M} T.$$

Cum autem massa M de quiete ad motum determinata sit, adeoque pro $T=0$ etiam $C=0$ esse debeat; debet constans per (Vol. I. §. 238.) ex aequa-

æquatione $\text{Const} - \frac{1}{d} \log u \gamma = 0$ determinari, nimirum $\text{Const} = \frac{1}{d} \log u \gamma$: consequenter erit

$$\frac{1}{d} \log u \gamma - \frac{1}{d} \log (u \gamma - d C) = \frac{2g}{\gamma M} T;$$

$$\text{adeoque } \frac{\gamma M}{2gd} \log \frac{u \gamma}{u \gamma - d C} = T.$$

Porro fiet

$$\log \frac{u \gamma}{u \gamma - d C} = \frac{2gdT}{\gamma M} :$$

Igitur pro basi e logarithmorum naturalium obtinebimus

$$\frac{u \gamma}{u \gamma - d C} = e^{\frac{2gdT}{\gamma M}} ;$$

et hinc fit

$$C = \frac{u \gamma}{d e^{\frac{2gdT}{\gamma M}} - 1}.$$

Si vero M, γ, d per numeros datos exprimas, et loco g numerum juxta (323. §.) substituas, habebis

$$T = \frac{12}{0,625} \log \frac{60}{60 - C} ;$$

$$C = \frac{60}{e^{\frac{0,625}{12} T} - 1}.$$

Nimirum data celeritate C invenietur tempus T , quo illa fit producta, et dato tempore T definitur celeritas C , sumto pro e valore juxta (Vol. I. §. 42.).

III. Pro eadem functione celeritatis C vim V in (1) exprimente obtinebimus per (350. §.)

$$C \varepsilon C = \frac{2g}{M} \left(u - \frac{dC}{\gamma} \right) \varepsilon S; \text{ ergo erit}$$

$$\varepsilon S = \frac{M \gamma}{2g} \frac{C \varepsilon C}{u \gamma - d C}.$$

T 2

Integra-

Integratio autem dabit

$$S = \frac{M\gamma}{2gd^2} \left(-dC - u\gamma \log(u\gamma - dC) \right) + \text{Const.}$$

Cum vero initio motus pro $C=0$ debeat esse etiam $S=0$; invenietur valor constantis per (Vol. I. §. 238.), nimirum

$$0 = -\frac{M\gamma}{2gd^2} \cdot u\gamma \log u\gamma + \text{Const};$$

$$\text{et Const} = \frac{M\gamma}{2gd^2} \cdot u\gamma \log u\gamma.$$

Quamobrem debet esse

$$S = \frac{M\gamma}{2gd^2} \left(u\gamma \log \frac{u\gamma}{u\gamma - dC} - dC \right).$$

Et si pro M, γ, g, d , ut in (II) substituantur numeri, invenietur pro S sequens expressio:

$$S = \frac{12}{0,625} \left(60 \log \frac{60}{60 - C} - C \right).$$

IV. Verum vis variabilis $V = u - \frac{dC}{\gamma}$ fiet pro $C = \frac{u\gamma}{d} = 60$ ped. aequalis nihilo in (I); massa M incedet ergo motu accelerato, quamdiu fuerit $\frac{dC}{\gamma} < u$, hinc $C < \frac{u\gamma}{d}$ seu $C < 60$ ped.; pro quavis ejusmodi celeritate invenietur et tempus T , quo illa sit genita, per (II), et spatium S intra idem tempus percursum per (III). Ut primum autem massa M celeritatem $C = 60$ ped. acquisiverit; progredietur illa hac celeritate motu perpetuo aequabili, quovis tempore t confectura spatium $Ct = 60t$ ped. Si tempus T quaeras, intra quod celeritas haec constans $C = 60$ ped. acquiritur, et spatium S , quod intra idem tempus percurritur, cum pro hac celeritate fiat

$$\log \frac{60}{60 - C} = \log 60 - \log (60 - C) = \log 60;$$

debebit esse per (II) (III)

$$T = \frac{12}{0,625} \log 60; \quad S = \frac{144}{0,125} (\log 60 - 1).$$

Et pro $\log \text{nat } 60 = 4,094344$ etc. fiet

$$T = 78,6''; \quad S = 3564,6 \text{ ped.};$$

Quam-

Quamobrem, si petatur spatium S^r , quod massa M intra quodcunque tempus T^r ab initio motus computatum debeat percurrere, existente $T^r > 78,6^{ur}$, puta $T^r = 78,6^{ur} + t$; debebit poni

$$S^r = 3564,6 + 60t \text{ ped.}$$

355. Problema.

Data massa M (63. Fig.) quiescens a vi variabili V secundum directionem GA per ejus centrum gravitatis G transeuntem et determinatur ad motum, et continuo sollicitatur; est autem vis V ejusmodi, ut illa per certam functionem temporis, quo motus durat, perfecte possit exprimi: determinare motum massae M . Fig. 63.

Solutio.

1. Massa M incedet nunc quoque motu progressivo secundum directionem GA (331. §.), ad cujus completam determinationem sufficiet et celeritatem C , quam data massa M intra datum tempus T acquirat, et spatium S investigare, quod illa eodem tempore percurrat.

2. Cum jam vis V , qua massa M in fine dati cujuscunque temporis T ad motum urgetur, per certam functionem hujus temporis possit exprimi; substituatur haec functio loco V in (347. §.); complectetur aequatio differentialis $\epsilon C = \frac{2g}{M} V \epsilon T$ binas tantum variables C et T separatas, eoque ipso poterit ope calculi integralis determinari celeritas C intra tempus T producenda.

3. Si porro functionem temporis T exprimentem celeritatem C eodem tempore productam, quam juxta (2) determinare licuerit, in (348. §.) substituās; obtinebis novam aequationem differentialem $\epsilon S = C \epsilon T$ inter duas variables S , T , ex qua ope calculi integralis inveniatur spatium S tempore T percurrendum.

4. Si constet, vim massam M ad motum urgentem crescente tempore T continuo decrefcere; ponatur functio V temporis T vim, qua massa M in fine ejusdem temporis urgetur, per hypothesim exprimens aequalis nihilo, et ex aequatione $V = 0$ eruatur valor temporis T : valor enim iste determinabit tempus T , quo elapso vis massam M ad motum sollicitans penitus evanescet; consequenter progredietur post hoc tempus massa M motu perpetuo aequabili illa determinata celeritate C , quae intra idem

tempus fuerit genita, atque hanc constantem celeritatem derivabis ex aequatione integrali inter C et T in (2) inventa, si valorem ex aequatione $V=0$ erutum loco T in illa substituas; eodem autem valore loco T substituto in aequatione integrali inter S et T in (3) inventa, definietur spatium S , quod durante motu accelerato eodem tempore massa M debet conficere.

Exemplum.

Massa $M=1000$ ℔ impellatur ad motum a vi $u=100$ ℔ continuo crescente, ita ut illa primo minuto secundo patiatur decrementum $d=20$ ℔, et decremēta intra duo quaecunque tempora ab initio motus computata sint inter se ut radices quadratae temporum.

1. Pro decremento D , quod vis u intra tempus T patiatur, erit $\sqrt{1^{\text{st}}}: \sqrt{T}=d:D=dT^{\frac{1}{2}}$: vis, qua massa M in fine temporis T urgetur, erit ergo

$$V=u-dT^{\frac{1}{2}}=100-20T^{\frac{1}{2}}\text{℔}.$$

2. Hinc (1) per (347. §.) obtinebimus celeritatem C , quam massa M intra datum quodcunque tempus T acquireret, ut sequitur.

$$\varepsilon C=\frac{2g}{M}\left(u-dT^{\frac{1}{2}}\right)\varepsilon T;$$

$$C=\frac{2g}{M}\left(uT-\frac{2}{3}dT^{\frac{3}{2}}\right)=0,3125\left(10T-\frac{4}{3}T^{\frac{3}{2}}\right).$$

3. Et pro hac celeritatis expressione inveniēmus per (348. §.) spatium S , quod intra tempus T debet confici, nimirum hoc modo.

$$\varepsilon S=\frac{2g}{M}\left(uT-\frac{2}{3}dT^{\frac{3}{2}}\right)\varepsilon T;$$

$$S=\frac{2g}{M}\left(\frac{1}{2}uT^2-\frac{4d}{15}T^{\frac{5}{2}}\right)=0,0625\left(25T^2-\frac{8}{3}T^{\frac{5}{2}}\right).$$

4. Pro $V=0$ in (1) fit $T=\frac{u^2}{d^2}$: massa M debet ergo progredi motu perpetuo aequabili, ut primum ab initio motus effluxerit tempus

$$T=\frac{u^2}{d^2}=25^{\text{th}}.$$

Celeritas,

Celeritas, quam intra hoc tempus acquireret, et spatium, quod eodem tempore percurreret, fiet ergo ob (2) (3)

$$C = 0,3125 \left(10 \cdot 25 - \frac{4}{3} \cdot 25^{\frac{3}{2}} \right) = 26,042 \text{ ped.}$$

$$S = 0,0625 \left(25 \cdot 25^2 - \frac{8}{3} 25^{\frac{5}{2}} \right) = 4557,292 \text{ ped.}$$

5. Massa M incipiet itaque progredi secundum directionem GA motu accelerato, intra quodvis tempus T celeritatem C per (2) acquisitura, et spatium S per (3) determinabile percursura: verum motus hic non nisi 25 minutis secundis durabit, post quae erit motus massae M perpetuo aequalis, celeritate $C = 26,042$ ped. perficiendus (4). Spatium ergo, quod massa M, postquam ejus motus fuerit aequalis, quovis tempore t percurreret; est $Ct = 26,042 t$: si autem quaeratur spatium quocunque tempore $T = 25'' + t$ ab initio motus computato percurrendum: cum primis 25 minutis secundis motu accelerato conficiatur spatium $S = 4557,292$ ped.; erit illud spatium $= 4557,292 + 26,042 t$ ped.

DISSERTATIO X.
DE
LAPSU CORPORUM GRAVIUM PER PLANA INCLINATA
ET LINEAS CURVAS.

356. DEFINITIO.

Fig. 64. *Planum inclinatum* FGH (64. Fig.) vocatur, quod plano horizontali DE (44. §) sub angulo acuto occurrit. Tertium planum idque verticale, consequenter perpendicularare ad planum horizontale DE (44. §.), secet tam hoc planum in IK, quam planum inclinatum in AC, sic ut illud sit quoque perpendicularare ad communem intersectionem GH planorum inclinati FG et horizontalis DE; deinde demittatur ex A ad planum horizontale perpendicularis AB, quae intersectioni IK in puncto B debeat occurrere: hac ratione obtinebitur in eodem plano verticali triangulum rectangulum ABC, complectens *Angulum inclinationis* ACB, *Longitudinem* AC, *Altitudinem* AB, et *Basim* BC, plani inclinati FG.

357. Corollarium.

Pro angulo inclinationis $ACB = \alpha$, longitudine $AC = 1$, altitudine $AB = a$, et basi $BC = b$ dati plani inclinati FG, erit (356. §.)

$$a \operatorname{Cof} \alpha = b \operatorname{Sin} \alpha; a = 1 \operatorname{Sin} \alpha; b = 1 \operatorname{Cof} \alpha.$$

Scholion.

Praecipui casus, qui in descensu corporum gravium per plana inclinata possunt occurrere, in eo consistunt, quod corpus per planum, super quo jacet, aut motu lubricationis, aut motu rotationis descendat: priorem motum concipiet e. gr. corpus figurae cubicae, posteriorem autem corpus figurae sphaericae. In praesenti dissertatione solum motum lubricationis considerare, ejusque genefim et naturam exponere constituimus, ab omnibus hujus motus obstaculis, ut e. gr. est adfrictus et aeris resistentia, mentem abstracturi.

358. Problema.

Dato angulo inclinationis $=\alpha$, datoque pondere P corporis uxy super plano inclinato FG jacentis; invenire vim ipsum ad descensum sollicitantem.

Solutio.

1. Cogitetur per centrum gravitatis c corporis uxy duci planum verticale, a quo secetur planum horizontale DE in IK , et inclinatum FG in AC , sic ut illud sit simul perpendiculare ad communem intersectionem HG plani inclinati et horizontalis; necesse est, ut, si ex A demittatur perpendiculum AB ad planum horizontale, et ex centro gravitatis c corporis uxy ducatur cb perpendicularis ad planum inclinatum FG , linea item verticalis ca (42. §), lineae cb , ca , et triangulum ABC in eodem plano verticali jaceant, triangulumque ABC ad B rectangulum angulum inclinationis, longitudinem, altitudinem, et basim plani inclinati complectatur (356. §). Ducatur demum in eodem plano verticali recta cd parallela plano inclinato, adeoque perpendicularis ad cb ; erit angulus bca aequalis angulo inclinationis $\alpha = ACB$, et dca illius complementum ad rectum (356. §).

2. Corpus jam uxy urgetur a gravitate ad descensum secundum directionem verticalem (42. §) eadem prorsus ratione, qua illud omni gravitate destitutum a vi ejus ponderi P aequali urgeretur, si haec directione verticali ca immediate in centrum gravitatis c ageret (148. 331. §): quare, cum vis P in punctum c agens directione ca , ob angulum $bca = \alpha$ et illius complementum dca ad rectum (1), in duas vires possit resolvi, quarum una $= P \cos \alpha$ agat directione cb perpendiculari ad planum inclinatum FG (1) et altera $= P \sin \alpha$ directione cd parallela plano inclinato (1) per (115. §); clarum est, ab his solis viribus dependere descensum corporis uxy .

3. Verum, quia planum FG , et rigidum per hypothesim (60. §) et immobile, totam actionem vis $= P \cos \alpha$ directione perpendiculari cb centrum gravitatis c massae uxy versus illud prementis sustinet; perspicuum est, hanc vim nullum absolute motum posse producere: in determinatione motus massae uxy super plano inclinato FG sufficiet ergo supponere, praeter vim $= P \sin \alpha$ centrum gravitatis c directione cd parallela plano inclinato, et in eodem plano verticali jacente, in quo jacet

rectangulum ABC altitudinem, longitudinem, angulumque inclinationis plani inclinati complectens, urgentem, nihil esse, quod in motum massae uxy quaquaratione influat (2) (1).

359. Corollarium 1.

Motus corporis uxy vi suae gravitatis per planum inclinatum FG descendens erit progressivus, quo singula ejus puncta secundum directiones inter se et plano inclinato parallelas promovebuntur (358. 331. §.).

360. Corollarium 2.

Centrum gravitatis c corporis uxy, ubicunque hoc jaceat super plano inclinato FG, sollicitatur ad motum a vi invariabili $= P \sin \alpha$ per pondus P ejusdem corporis et angulum inclinationis α dati plani inclinati determinata (294. §.): motus progressivus, quo corpus uxy per planum FG descendere cogitur (359. §.), debet ergo uniformiter accelerari (333. §.).

361. Corollarium 3.

Si in plano verticali transeunte per centrum gravitatis c corporis uxy, in quo jacent rectae cb, ca, cd, et rectangulum ABC (358. §. 1. n.), recta cd utrinque produci cogitur; debet illa occurrere perpendiculari AB producto in A', erectoque ad BC perpendiculari CC' $= AA' = BB'$; erit rectangulum A'B'C' simile et aequale rectangulo ABC, in cujus hypotenusa A'C' centrum gravitatis c corporis uxy per planum FG descendens debet moveri (358. §. 3. n.).

362. Corollarium 4.

Spatium, quod centrum gravitatis c corporis uxy per planum inclinatum FG descendens tempore quocunque conficiat, dabit spatium, quod ipsum corpus uxy eodem tempore percurrat; et celeritas, quam centrum gravitatis c illo tempore acquisiverit, dabit celeritatem corporis uxy intra idem tempus genitam (359. 316. §.): in determinatione motus corporis gravis uxy per planum inclinatum FG descendens licebit ergo ipsum corpus instar unius puncti gravis c considerare, quod per hypotenusam rectanguli A'B'C' angulum inclinationis A'C'B' $= ACB$, longitudinem A'C' $= AC$, altitudinem A'B' $= AB$, et basim B'C' $= BC$ plani inclinati complectentis, cogatur descendere (361. 358. §. 1. n.).

363. Corollarium 5.

Ut vero omni casu motus corporis uxy super plano inclinato rite determinetur, supponatur id omnis gravitatis esse expers, et a vi $= P \sin \alpha$, per pondus P ejus massae proportionale et angulum inclinationis α dati plani determinata, ad motum secundum directionem per ipsius centrum gravitatis transeuntem atque longitudini plani inclinati parallelam continuo sollicitari (358. §. 3. n.).

364. Corollarium 6.

Ex (360. 275. 281. 282. §.) generatim sequitur, spatia, quae a corpore gravi per planum inclinatam de quiete descendente diversis temporibus ab initio descensus computatis percurruntur, esse inter se, ut quadrata eorundem temporum, celeritatumque intra haec tempora genitarum; ipsas vero celeritates esse inter se in ratione simplici directa temporum.

365. Problema.

Si corpus grave in puncto f plani inclinati ABC existens (362. §.) Fig. 65. descensum versus C celeritate γ inchoet; invenire spatium s, quod illud dato tempore t percurrat, et celeritatem c, quam in fine temporis t habeat.

Solutio.

Sit P pondus corporis et massa ei proportionalis (52. §.), angulus autem inclinationis sit $\alpha = ACB$; erit ob (363. §.) per (343. §. 4. n.).

$$s = \gamma t + g \frac{P \sin \alpha}{P} t^2; \quad c = \gamma + 2g \frac{P \sin \alpha}{P} t;$$

debet ergo esse

$$s = \gamma t + gt^2 \sin \alpha; \quad c = \gamma + 2gt \sin \alpha.$$

366. Corollarium 1.

Si quaeratur tempus t, intra quod corpus in puncto f plani inclinati existens, descensumque celeritate γ inchoans datum spatium $s = fC$ percurrat, et celeritas c, quam illud in puncto C habeat; erit per (365. §.)

$$t = \frac{\sqrt{(4gs \sin \alpha + \gamma^2)} - \gamma}{2g \sin \alpha}; \quad c = \sqrt{(4gs \sin \alpha + \gamma^2)}.$$

367. Corollarium 2.

Ponamus autem corpus grave existens in puncto f plani inclinati descensum per spatium $fC = s$ inchoare celeritate γ debita altitudini Ak determinatae per parallelam fk basi BC , et quaeri tam tempus t descensus per spatium fC , quam celeritatem corporis in puncto C : cum hoc casu sit $\gamma = 2\sqrt{g \cdot Ak}$ per (329. §.), et $\sin \alpha = \sin ACB = \sin Afk = \frac{Ak}{Af} = \frac{Bk}{fC}$; habebimus ob (366. §.)

$$t = \frac{\sqrt{(4g \cdot fC \cdot \frac{Bk}{fC} + 4g \cdot Ak) - 2\sqrt{g \cdot Ak}}}{2g \sin \alpha};$$

$$c = \sqrt{(4g \cdot fC \cdot \frac{Bk}{fC} + 4g \cdot Ak)};$$

adeoque erit

$$t = \frac{\sqrt{AC} - \sqrt{Ak}}{\sin \alpha \cdot \sqrt{g}}; \text{ et } c = 2\sqrt{g \cdot AC}.$$

368. Corollarium 3.

Si corpus grave suum descensum per planum inclinatam de quiete inchoet, erit $\gamma = 0$ in (365. §.), et $\sin \alpha = \frac{a}{l}$ (357. §.): datis ergo angulo inclinationis $\alpha = ACB$, longitudine $l = AC$, et altitudine $a = AB$ plani inclinati, poterit determinari tam spatium s , quod corpus grave de quiete descendens per planum inclinatam quovis dato tempore t ab initio descensus computato conficiet, et celeritas c , quam eodem tempore acquirat, nimirum per (365. §.).

$$s = g t^2 \sin \alpha = \frac{g a t^2}{l}; \quad c = 2gt \sin \alpha = \frac{2ga t}{l}.$$

369. Corollarium 4.

Tempus t , intra quod corpus grave per planum inclinatam de quiete descendens datum spatium s conficiet, celeritatemque c acquirat, erit per (368. §.).

$$t = \sqrt{\frac{s}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{ls}{ga}};$$

$$t = \frac{c}{2g \sin \alpha} = \frac{lc}{2ga}.$$

370. Corollarium 5.

Ex (369. 368. §) nascentur porro sequentes formulae, quarum prior dabit spatium s a corpore gravi per planum inclinatum de quiete descendente conficiendum, ut illud datam celeritatem c acquirat; posterior autem dabit celeritatem c , quam idem corpus descendens per datum spatium s acquireret.

$$s = \frac{c^2}{4g \sin \alpha} = \frac{1}{4} \frac{c^2}{ga};$$

$$c = 2\sqrt{gs \sin \alpha} = 2\sqrt{\frac{gas}{1}}.$$

371. Corollarium 6.

Si duo corpora gravia de quiete descendant per duo plana inclinata, quorum anguli inclinationis sint α, α' ; erunt spatia s, s' eodem tempore T percurfa, et celeritates c, c' intra idem tempus acquisitae inter se ut sinus angulorum inclinationis: erit enim per (368. §.)

$$s = gT^2 \sin \alpha; \quad s' = gT^2 \sin \alpha';$$

$$c = 2gT \sin \alpha; \quad c' = 2gT \sin \alpha';$$

$$\text{igitur } s:s' = \sin \alpha : \sin \alpha' = c:c'.$$

372. Corollarium 7.

Tempora t, t , intra quae duo corpora gravia per integras longitudines l, L duorum planorum inclinatorum, altitudines a, A habentium, de quiete descendant; erunt inter se, ut longitudines divisaе per radices quadratas altitudinum, nimirum per (369. §.)

$$t = \sqrt{\frac{l^2}{ga}}; \quad T = \sqrt{\frac{L^2}{gA}};$$

$$\text{igitur } t:T = \frac{l}{\sqrt{a}} : \frac{L}{\sqrt{A}}.$$

373. Corollarium 8.

Tempora t, T descensus duorum corporum gravium per integras longitudines duorum planorum inclinatorum ejusdem altitudinis $a=A$, vel ejusdem longitudinis $l=L$, erunt inter se ut ipsae longitudines casu primo, vel in ratione inversa radicum quadraticarum ipsarum altitudinum casu altero, seu erit (372. §.)

$$t:T = l:L \text{ pro } a=A;$$

$$t:T = \sqrt{A}:\sqrt{a} \text{ pro } l=L,$$

374. Corollarium 9.

Theoria motus corporum gravium per plana inclinata descendentium potest servire ad investigandam altitudinem g , per quam corpora gravia de quiete libere labentia primo minuto secundo decidant (325. §). Tempus enim descensus corporis gravis per totam longitudinem $s=l$ dati plani inclinati est $t = \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}}$ (369. §): hoc ergo erit eo majus, proinde eo facilius accuratiusque poterit illud observari, quo major fuerit longitudo l plani inclinati, quove minor fuerit angulus inclinationis α . Quamobrem, si construatur planum inclinatum notabilis longitudinis l et parvae altitudinis, ut eo minor sit angulus inclinationis, tum observetur tempus t , intra quod grave aliquod corpusculum per totam longitudinem l descendat; inveniatur $g = \frac{l}{t^2 \sin \alpha}$.

Scholion.

Indubium est, facilius observari tempus t descensus corpusculi gravis per longitudinem plani inclinati, quam tempus liberi lapsus per certam altitudinem (327. §): certum porro est, quod, si superficies plani inclinati probe laevigata sit, et corpusculum grave super illo descendens figuram sphaericam habeat, adeo exigua sit futura resistentia ab adfritu pendens, ut illa penitus contemni queat: verum semper aderunt alia motus obstacula (e. gr. aeris resistentia), ob quae alia, hac accuratior, methodus investigandi altitudinem g merito desiderabitur.

375. Theorema.

Tempus descensus corporis gravis per totam longitudinem l dati plani inclinati est ad tempus liberi lapsus per altitudinem a ejusdem plani, sicut longitudo l ad altitudinem a .

Demonstratio.

Si corpus tempore T descendat per totam longitudinem $s=l$ plani inclinati, vel tempore t per illius altitudinem a libere labatur; erit

$$T = \sqrt{\frac{l^2}{ag}} \text{ per (369. §);}$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ per (326. §):}$$

$$\text{adeoque erit } T:t = \sqrt{\frac{l^2}{ag}} : \sqrt{\frac{a}{g}} = l:a.$$

376. Theo-

376. Theorema.

Celeritas, quam corpus grave per totam longitudinem l plani inclinati de quiete descendens potest acquirere, aequatur celeritati debitas altitudinis a ejusdem plani (329. §.).

Demonstratio.

Celeritas in descensu per totam longitudinem $l = s$ dati plani inclinati acquisita erit $c = 2\sqrt{ga}$ (370. §.): haec ipsa vero celeritas debetur altitudini a ejusdem plani inclinati (329. §.).

377. Theorema.

Si fe ad longitudinem AC perpendicularis occurrat altitudini AB plani inclinati productae in e; debet corpus grave in A existens eodem tempore per partem Af plani inclinati descendere, quo tempore illud libero lapsu altitudinem Ae percurreret.

Demonstratio.

1. Tempus per Af est $t = \sqrt{\frac{AC \cdot Af}{AB \cdot g}}$ (369. §.): tempus vero liberi lapsus per altitudinem Ae debet esse $T = \sqrt{\frac{Ae}{g}}$ (326. §.).

2. Sed in triangulis, ad B, f rectangulis et inter se similibus, ACB, Afe est $AB : AC = Af : Ae$: debet ergo esse $Ae = \frac{AC \cdot Af}{AB}$, hinc $t = T$ in (1).

378. Corollarium 1.

Ducta ad punctum infimum C perpendiculari hC ad longitudinem plani inclinati AC, quae ejus altitudini AB productae in h occurrat; erit tempus descensus corporis gravis per totam longitudinem AC plani inclinati aequale tempori liberi lapsus per altitudinem Ah (377. §.).

379. Corollarium 2.

Cum chordae AC, Ch (66. Fig.) insistentes diametro Ah dati circuli Fig. 66. sint ad invicem perpendiculares; patet, cur corpus grave eodem tempore per datam quaecunque chordam AC circuli situm verticalem habentis debeat descendere, quo illud libere labens per diametrum verticalem Ah ejusdem circuli decideret (378. §.): diameter verticalis Ah, et omnes chordae Aa, Ab, Ac, si per illas totidem corpora gravia descendant, percurrentur eodem tempore, id est, erunt *spatia isochrona*.

380. Pro-

380. Problema.

Fig. 65. Corpori gravi in puncto infimo C plani inclinati ABC (65. Fig.) existenti impressa sit celeritas γ , qua illud secundum directionem parallelam plano inclinato AC per idem planum motu progressivo versus A cogatur ascendere: invenire spatium $s = Cf$ dato tempore t conficiendum, et celeritatem c , quam idem corpus in fine temporis t in puncto f plani inclinati habebit.

Solutio.

Si P fit et pondus et ei proportionalis massa corporis gravis (52. §.); debeat esse ob (363. §.) per (343. §.)

$$s = \gamma t - g \frac{P \sin \alpha}{P} t^2; c = \gamma - 2g \frac{P \sin \alpha}{P} t;$$

$$\text{ergo } s = \gamma t - gt^2 \sin \alpha; c = \gamma - 2gt \sin \alpha.$$

381. Corollarium 1.

Tempus t , quo corpus grave motu celeritate γ in C inchoato per partem $s = Cf$ plani inclinati AC ascendet, et celeritas c , quam in f habebit, invenietur ex (380. §.), ut sequitur:

$$t = \frac{\gamma - \sqrt{(\gamma^2 - 4gs \sin \alpha)}}{2g \sin \alpha}; c = \sqrt{(\gamma^2 - 4gs \sin \alpha)}.$$

382. Corollarium 2.

Ascensus corporis gravis per planum inclinatum CA in C celeritate γ inchoatus fiet celeritate c continuo decrescente (380. §.); ubi haec evanuerit, corpus vi suae gravitatis descendere incipiet. Fiet vero celeritas

$$c = 0 \text{ pro } t = \frac{\gamma}{2g \sin \alpha} \text{ (380. §.)}, \text{ et pro hoc valore temporis } t \text{ erit } s = \frac{\gamma^2}{4g \sin \alpha} \text{ (380. §.): ascensus ergo in C celeritate } \gamma \text{ inchoatus durabit tempore } t = \frac{\gamma}{2g \sin \alpha}, \text{ seu per spatium } s = Cf = \frac{\gamma^2}{4g \sin \alpha}.$$

383. Problema.

Fig. 67. Punctum mobile P progrediens in recta DA (67. Fig.) in A celeritate C praeditum cogitur motum in recta AB ad priorem sub dato angulo BAE $= \alpha$ inclinata continuare; invenire celeritatem, qua illud in A hunc motum inchoabit.

Solutio.

Solutio.

1. Punctum P existens in A talem habet per hypothesim celeritatem C, qua illud, absente omni causa ejus motum turbante, proximo minuto secundo vi solius inertiae certum spatium Ab motu aequabili percurreret (271. 292. §.), adeoque, ducto ba ad AB perpendiculari, ad distantiam ab a recta AB, et ad distantiam Aa a puncto A promoveretur: quare cum primum recta immobilis AB, in qua punctum P in A existens motum continuare cogitur, penitus impediat; manifestum est, punctum mobile P per celeritatem C in A sic esse ad motum determinatum, ut illud vi solius inertiae spatium Aa proximo minuto secundo motu aequabili super recta AB deberet conficere.

2. Quamobrem, dum punctum P eam celeritatem C secundum directionem AE habet, qua illud motu aequabili spatium Ab proximo minuto secundo percurreret; censendum est punctum P talem habere celeritatem secundum novam directionem AB, qua illud motu aequabili spatium $Aa = Ab \cos BAE = Ab \cos \alpha$ proximo minuto secundo conficeret (1), id est: pro celeritate $C = Ab$ secundum directionem AE habebit punctum P in A celeritatem $c = Aa = C \cos \alpha$, qua illud motum directione AB debeat inchoare (264. 271. §.).

384. Corollarium 1.

Si punctum mobile P celeritate C incedat in recta DA motu aequabili, et in A cogatur super recta AB sub dato angulo $\alpha = BAE$ ad DA inclinata motum continuare; progredietur illud secundum directionem AB motu pariter aequabili celeritate $c = C \cos \alpha$ eo majore, quo minor fuerit angulus inclinationis $\alpha = BAE$ (383. §.): erit autem haec celeritas, ob $\cos \alpha = 1$, semper minor celeritate C, decrementumque celeritatis ob curvedinem viae DAB in puncto A erit $= C - C \cos \alpha = C \sin \alpha$.

385. Corollarium 2.

Punctum mobile P in A ad motum aequabilem secundum directionem Aa celeritate γ determinatum (68. Fig.) cogatur moveri in linea ABCDEFGH ex rectis AB, BC, - - - GH numero quocunque n composita, quarum quaevis ad proxime praecedentem sub determinato angulo $\alpha = aAB = bBC = cCD = dDE = eEF = fFG = gGH$ sit inclinata: progredietur punctum P per AB celeritate $= \gamma \cos \alpha$, et decrementum

celeritatis ob angulum in A erit $= \gamma \sin \alpha$; adeoque incedet idem punctum per BC celeritate $= \gamma \cos \alpha^2$, et decrementum celeritatis ob angulos in A, B erit $= \gamma \sin \alpha^2$; hinc fiet celeritas puncti P per CD incedentis $= \gamma \cos \alpha^3$, et decrementum celeritatis ob angulos in A, B, C erit $= \gamma \sin \alpha^3$; et sic generatim erit $\gamma \cos \alpha^n$ celeritas, qua punctum P per GH incedet, et decrementum celeritatis initialis γ ob omnes angulos A, B, C, - - - G erit $\gamma \sin \alpha^n$ (384. §.).

386. Corollarium 3.

Sit AEH curva quaecunque nullibi per cuspides aut puncta regressus (Vol. I. §. 441.) interrupta; possibile erit, ducta ad A tangente Aa chordas AB, BC, CD, - - - GH ita ducere, ut quaevis illarum ad proxime praecedentem sub angulo $\alpha = aAB$ inclinetur. Quidquid sit numerus n harum chordarum, debet punctum mobile P, si id in A, ad motum aequabilem celeritate γ secundum directionem tangentis Aa determinatum, cogatur moveri in linea ABCDEFGH ex iisdem chordis composita, in H habere celeritatem $= \gamma \cos \alpha^n$, et per totam viam pati decrementum celeritatis $= \gamma \sin \alpha^n$ (385. §.): quo minor fuerit angulus $\alpha = aAB$, eo minores, eoque plures erunt chordae AB, BC, - - - GH in curva AEH; celeritas $\gamma \cos \alpha^n$ puncti mobilis P in H erit eo major, et decrementum celeritatis $\gamma \sin \alpha^n$ ob viae in A, B, C, - - - G curvedinem eo minus; pro $\alpha = 0$ fieret decrementum celeritatis $\gamma \sin \alpha^n = 0$, et celeritas puncti P in H puncto $\gamma \cos \alpha^n = \gamma$. Quare, cum curva AEH sit limes, ad quem linea ex chordis AB, BC, - - - GH composita eo propius debet accedere, quo magis decrescit angulus $\alpha = aAB$, quemve illa eoduntaxat determinato casu attingeret, si fieret $\alpha = 0$; clarum est, punctum mobile P, in A secundum directionem tangentis Aa ad motum aequabilem celeritate γ determinatum, si illud in curva AEH moveri cogatur, eandem celeritatem γ , confecta via AEH in puncto H, proinde in quovis puncto ejusdem curvae habiturum.

387. Corollarium 4.

Si ergo punctum mobile P in data curva AEH progrediens a vi quacunque x in quovis puncto curvae secundum directionem tangentis eidem puncto debitae ad motum urgeatur; debet celeritas puncti P ob continuam vis x actionem eadem prorsus lege mutari, qua mutaretur, si punctum

punctum P a vi x perpetuo secundum eandem directionem in una recta ad motum sollicitaretur: secus enim deberet ob solam viae curvedinem certa mutatio in celeritatem redundare, contra (386. §.).

388. Problema.

Data aequatione ad curvam BD (69. Fig.) inter ejus coordinatas orthogonas $x = Ea$, $y = Pa$, in qua massa M instar unius puncti considerata moveri cogatur, dataque vi invariabili, quae illam in quovis curvae puncto P secundum directionem Pb parallelam axi abscissarum ED ad motum sollicitet; invenire tempus T motus per arcum BP = s, et celeritatem C eidem tempori in puncto P debitam.

Solutio.

1. Sit V vis, quae massam M in P existentem secundum directionem Pb parallelam axi abscissarum ED, adeoque perpendicularem ad ordinatam Pa ad continuationem motus per arcum PD urgeat; poterit, ducta ad P tangente Pf, et ad hanc perpendiculari Pd, vis V in duas vires resolvi, quarum una = V Coss Pb in punctum P agat directione Pf, et altera = V Sin f Pb directione Pd (115. §.). Massa M premetur ergo a vi = V Sin f Pb versus curvam BD in P secundum directionem Pd perpendicularem ad tangentem fP; curva BD utpote rigida et immobilis sustinebit ergo totam actionem vis V Sin f Pb directione Pd agentis. Quare debet massa M sic considerari, ac si illa in quovis puncto P curvae ab una vi = V Coss Pb secundum directionem tangentis Pf in eodem puncto ad motum urgeretur, unde necessario sequitur, ob (386. §.) per (350. §.) debere esse

$$C \varepsilon C = 2g \frac{\sqrt{\text{Coss Pb}}}{M} \varepsilon s.$$

2. Sed ob angulum rectum aPb est Coss Pb = Sina Pf = $\frac{\varepsilon x}{\varepsilon s}$ (Vol. I. §. 455. 469.): hoc itaque valore substituto in (1) habebimus

$$C \varepsilon C = 2g \frac{V}{M} \varepsilon x.$$

Quodsi jam aequatio haec ita integretur, ut pro $x = EF = e$ fiat celeritas massae $C = 0$ in puncto B; debet esse

$$\frac{1}{2} C^2 = \frac{2gV}{M} x + \text{Const}, \text{ et } 0 = \frac{2gV}{M} e + \text{Const};$$

X 2

hinc

$$\text{hinc Const} = -\frac{2gV}{M}e; \frac{1}{2}C^2 = \frac{2gV}{M}x - \frac{2gV}{M}e;$$

$$\text{adeoque } C = 2\sqrt{\frac{gV}{M}(x-e)}.$$

3. Inventa celeritate C debita tempori T motus per arcum $s = BP$, habebimus ob $\epsilon s = \sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon x^2)}$ (Vol. I. §. 469.) et $\epsilon s = C \epsilon T$ (348. §.), hinc $\epsilon T = \frac{\epsilon s}{C}$, sequentem expressionem pro ϵT , ex qua, data aequatione inter y et x , derivabitur T , si ϵT sic integretur, ut pro $x = EF = e$ fiat $T = 0$.

$$\epsilon T = \frac{\sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon x^2)}}{2\sqrt{\frac{gV}{M}(x-e)}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon x^2)}}{\sqrt{(x-e)}}.$$

389. Corollarium 1.

Curva BD jaceat in plano verticali, in eodemque plano situs sit axis abscissarum ED , quo ordinatae orthogonae Pa fiant horizontales; debet hoc quoque casu massa M instar puncti spectata, si illa per curvam BD , a vi invariabili V perpetuo secundum directionem verticalem ad motum deorsum sollicitata, descendere cogatur, confecto arcu $s = BP$ intra tempus per aequationem differentialem

$$\epsilon T = \frac{1}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\sqrt{(\epsilon y^2 + \epsilon x^2)}}{\sqrt{(x-e)}}$$

determinatum, in puncto P habere celeritatem

$$C = 2\sqrt{\frac{gV}{M}(x-e)},$$

pro $x = Ea$, $e = EF$, et $y = Pa$ (388. §.).

390. Corollarium 2.

Quodsi ergo corpusculum grave, cujus pondus et massa illi proportionalis sit M (52. §.), per curvam BD in plano verticali jacentem vi solius gravitatis cogatur descendere: cum vis, qua illud quovis momento secundum directionem verticalem deorsum urgetur, ejus ponderi M debeat aequari; acquirat idem corpusculum in descensu per arcum BP celeritatem

$$C = 2\sqrt{g(x-e)} = 2\sqrt{g \cdot Fa};$$

tempus

tempus autem descensus per eundem arcum licebit ope calculi integralis ex aequatione differentiali

$$\varepsilon T = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{\sqrt{(\varepsilon y^2 + \varepsilon x^2)}}{\sqrt{(x-e)}}$$

elicere, modo noscatur aequatio ad curvam BD inter ejus coordinatas $x = Ea$ et $y = Pa$ (389. §.).

391. Corollarium 3.

Proprietas generalis omnium curvarum BD per nullas cuspides, nullaque puncta regressus interruptarum erit haec: celeritas, quam corpusculum grave in descensu per quemcunque arcum BP ejusmodi curvae jacentis in plano verticali potest acquirere, aequatur celeritati, quam illud libero lapsu per altitudinem Fa acquireret (390. 329. §.)

392. Problema.

Data diametro $ED = 2r$ circuli genitoris cycloidis GDH jacentis in plano verticali; invenire tempus T , quo corpusculum grave de quiete per arcum BP decadat.

Solutio.

1. Pro $x = Ea$, $y = Pa$, $e = EF$, et $z = aD$, erit $z = 2r - x$, $\varepsilon z = -\varepsilon x$: igitur per (Vol. I. §. 609) $\varepsilon y = -\varepsilon x \sqrt{\frac{x}{2r-x}}$.

2. Quare substituatur iste valor loco εy in (390. §.); obtinebimus aequationem differentialem

$$\varepsilon T = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{x\varepsilon x^2}{2r-x} + \varepsilon x^2\right)}}{\sqrt{(x-e)}} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{\varepsilon x \sqrt{2r}}{\sqrt{(2r-x)(x-e)}},$$

$$\text{feu } \varepsilon T = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{\varepsilon x}{\sqrt{(-2re + (2r+e)x - x^2)}}.$$

Hinc integrando per (Vol. I. §. 286.) inveniemus

$$T = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin } \frac{2x - (2r+e)}{2r-e} + C.$$

Verum pro $x = EF = e$ habetur initium descensus in puncto B, proinde $T = 0$: igitur debet esse

$$0 = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin } \frac{2e - (2r+e)}{2r-e} + C.$$

$$\text{et } C = -\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin } \frac{2e-2r-e}{2r-e} = -\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin } -1, \\ \text{feu Const} = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Arc Sin } 1 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

Consequenter debet esse

$$T = (\text{Arc Sin } \frac{2x-(2r+e)}{2r-e} + \frac{1}{2}\pi) \sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

393. Corollarium 1.

Si $x = Ea$ abeat in $x = ED$, abibit arcus cycloidis BP in BD: pro $x = ED = 2r$ erit ergo ob (392. §.) tempus descensus per arcum cycloidis BD

$$T = (\text{Arc Sin } \frac{2r-e}{2r-e} + \frac{1}{2}\pi) \sqrt{\frac{r}{2g}} = (\text{Arc Sin } 1 + \frac{1}{2}\pi) \sqrt{\frac{r}{2g}};$$

$$\text{feu } T = (\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi) \sqrt{\frac{r}{2g}} = \pi \sqrt{\frac{r}{2g}}.$$

394. Corollarium 2.

Tempus ergo descensus corpusculi gravis per quemvis arcum BD cycloidis jacentis in plano verticali, ita ut diameter ED circuli genitoris axem cycloidis exhibens sit verticalis, est constans $= \pi \sqrt{\frac{r}{2g}}$ (395. §.): quocunque idcirco arcus DP, DB, DH ex vertice D abscindantur; debet corpusculum grave per quemvis arcum ex P, B, H eodem tempore ad D decidere, id est: cyclois est linea tautochrone.

395. Problema.

Sit GDH semicirculus radio $r = ED$ descriptus jacentis in plano verticali, ita ut diameter GH sit horizontalis, et radius ED verticalis: invenire tempus T, quo data massa M instar puncti spectata per arcum BP debet descendere, si illa a data vi invariabili V perpetuo secundum directionem verticalem radio ED parallelam ad motum deorsum urgeatur.

Solutio.

1. Pro abscissis a centro E computatis $x = Ea$, et ordinatis orthogonis $y = Pa$, existente $EF = e$, debet esse per (389. §.)

$$sT = \frac{1}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\sqrt{(ey^2 + ex^2)}}{\sqrt{(x-e)}}.$$

Fiat

Fiat vero $z = Da$, et $b = FD$; erit $x = r - z$; $\varepsilon x = -\varepsilon z$, et $e = r - b$: cum ergo sit

$$y = \sqrt{(2rz - z^2)}; \varepsilon y = \frac{(r-z)\varepsilon z}{\sqrt{(2rz - z^2)}}; \text{erit}$$

$$\varepsilon T = \frac{1}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{(r-z)^2 \varepsilon z^2}{2rz - z^2} + \varepsilon z^2\right)}}{\sqrt{(r-z) - (r-b)}};$$

$$\text{feu } \varepsilon T = \frac{r}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\varepsilon z}{(2rz - z^2)^{\frac{1}{2}} (b-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sed decreſcente variabili $z = Da$ creſcit arcus BP, et tempus T deſcenſus per eundem arcum: debet ergo poni

$$\varepsilon T = - \frac{r}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\varepsilon z}{z^{\frac{1}{2}} (2r-z)^{\frac{1}{2}} (b-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Ut jam exponens hic differentialis juxta (Vol. I. §. 361. Schol. 2.) poſſit integrari, reſolvatur functio $(2r-z)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(2r-z)^{\frac{1}{2}}}$ in ſeriem

inſinitam per (Vol. I. §. 53.), et ſinguli ejus termini ducantur in $-\frac{r}{2\sqrt{\frac{gV}{M}}} \cdot \frac{\varepsilon x}{z^{\frac{1}{2}} (b-z)^{\frac{1}{2}}}$; debeat eſſe in (1)

$$\varepsilon T = -\frac{1}{2} \left(\frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\varepsilon z}{z^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b-z)}} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n (2r)^n} \cdot \frac{z^{\frac{2n-1}{2}} \varepsilon z}{\sqrt{(b-z)}} \right).$$

Factor ſub vinculo continet ſeriem, cujus ſinguli termini poſt primum ordine naturali ſequentes ex parte indeterminata ejusdem factoris derivabuntur, ſi ſucceſſive fiat $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, et ſic porro.

3. Captis itaque ſingulorum terminorum integralibus in (2), debeat fieri

$$T =$$

$$T = -\frac{1}{2} \left(\frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \frac{\varepsilon z}{z^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b-z)}} + \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2r)^n} \int \frac{z^{\frac{2n-1}{2}} \varepsilon z}{\sqrt{(b-z)}} \right).$$

4. Sed per (Vol. I. §. 287. 302.) erit primum et secundum integrale

$$\int \frac{\varepsilon z}{z^{\frac{1}{2}} \sqrt{(b-z)}} = \text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b};$$

$$\int \frac{z^{\frac{2n-1}{2}} \varepsilon z}{\sqrt{(b-z)}} = \left(-\frac{z^{\frac{2n-1}{2}}}{2n} - \frac{(2n-1)bz^{\frac{2n-3}{2}}}{2n(2n-2)} \right. \\ \left. - \frac{(2n-1)(2n-3)b^2 z^{\frac{2n-5}{2}}}{2n(2n-2)(2n-4)} \right. \\ \left. - \dots \dots \dots - \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot b^{n-1} z^{\frac{1}{2}}}{2n(2n-2) \dots \dots \dots 4 \cdot 2} \right) 2\sqrt{(b-z)} \\ + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot b^n}{2n(2n-2) \dots \dots \dots 4 \cdot 2} \text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b}.$$

5. Quare, substitutis his integralibus (4) in (3), inueniemus pro tempore T sequentem expressionem:

$$T = -\frac{1}{2} \left(\frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b} + \dots \dots \dots \right. \right. \\ \left. + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2 \cdot b^n}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2 (2r)^n} \cdot \text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b} \right) \\ - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n(2r)^n} \left(\frac{z^{\frac{2n-1}{2}}}{2n} + \frac{(2n-1)bz^{\frac{2n-3}{2}}}{2n(2n-2)} \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3)b^2 z^{\frac{2n-5}{2}}}{2n(2n-2)(2n-4)} + \dots \dots \dots \right. \\ \left. + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot b^{n-1} z^{\frac{1}{2}}}{2n(2n-2) \dots \dots \dots 4 \cdot 2} \right) 2\sqrt{(b-z)} \Big] + C.$$

6. Hoc modo determinatur tempus T per duas series, unam trigonometricam complectentem $\text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b}$, et alteram algebraicam: invenientur autem singuli termini utriusque seriei post terminum primum trigonometricum $\text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b}$ ordine naturali sequentes, si successive ponatur $n=1, n=2, n=3, n=4$, et sic porro. Ut vero etiam constans quantitas per (Vol. I. §. 238.) rite determinetur, animadvertendum est, tempus T descensus per arcum BP pro $z=FD=b$ fieri aequale nihilo: cum igitur pro $z=b$ tota pars algebraica in (5) fiat aequalis nihilo, et $\text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b} = \text{Arc Sin } \frac{2b-b}{b} = \text{Arc Sin } 1 = \frac{1}{2}\pi$; erit in (5)

$$0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\pi + \dots + \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2 \cdot b^n}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2 (2r)^n} \cdot \frac{1}{2}\pi \right) + C,$$

$$\text{hinc } C = \frac{\pi}{4} \left(\frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \dots + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2 (2r)^n} \right).$$

7. Quapropter tempus descensus per arcum BP erit pro quavis variabili $z=Da$, et altitudine $b=DF$ in (5) (6)

$$T = \left[\left(1 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2r} \right)^n \right) \left(\frac{\pi}{2} - \text{Arc Sin } \frac{2zt}{b} \right) \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n (2r)^n} \left(\frac{z^{\frac{2n-1}{2}}}{2n} + \frac{(2n-1)b z^{\frac{2n-3}{2}}}{2n(2n-2)} \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot b^{n-1} \cdot z^{\frac{1}{2}}}{4 \cdot 2} \right) 2\sqrt{(b-z)} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

396. Corollarium 1.

Pro $z=0$ fiet pars algebraica integralis in (395. §. 7. n.) aequalis nihilo; in parte vero trigonometrica erit pro $z=0$

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arc Sin } \frac{2z-b}{b} = \frac{\pi}{2} - \text{Arc Sin } -1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Quare, cum pro $z=0$ arcus BP in BD abeat; obtinebimus ex (395. §. 7. n.) sequentem expressionem temporis, quo massa M instar puncti spectata, si ea a vi invariabili V perpetuo secundum directionem verticalem deorsum urgeatur, per arcum BD circuli e centro E radio $r=ED$ descripti, et in plano verticali jacentis debeat descendere.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \dots + \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2r} \right)^n \right) = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{rM}{2gV} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{b}{2r} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} \cdot \left(\frac{b}{2r} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \left(\frac{b}{2r} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2r} \right)^n \right).
 \end{aligned}$$

397. Corollarium 2.

Si corpusculum grave, cujus massam pondusque ei proportionale denotet M , vi suae gravitatis per arcum BD circuli in plano verticali jacentis descendere cogatur; vis ipsum ad descensum secundum directionem verticalem deorsum continuo sollicitatura aequabitur ejus ponderi M : tempus descensus per arcum BD erit ergo ob (396. §.)

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{2g} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{2g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{b}{2r} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \right)^2 \cdot \frac{b^n}{(2r)^n} \right).
 \end{aligned}$$

Scholion.

Usum ultimi problematis inferius in theoria motus pendulorum videbimus. Transibimus jam ad aliam motus speciem, qualis fere perpetuo occurrit in machinis. Haec enim plerumque motum rectilineum et progressivum massarum, pendentem a quibuscunque viribus, variabilibus aut invariabilibus, prae oculis habuimus: sequitur, ut de motu massarum circa axes fixos tractemus. Cum autem universa hujus motus theoria doctrinae de *momento inertiae* innitatur, haec autem, absolute spectata, fit pure geometrica, ab omni motus notione independens; praemittemus in sequenti dissertatione tractatum de momento inertiae, in quo et palmares illius proprietates evolvemus, et ejusdem quantitatem pro corporibus datae figurae determinare docebimus.

DISSERTATIO XI.
DE
M O M E N T O I N E R T I A E.

398. DEFINITIO.

Doctrina de momento inertiae, de cujus investigatione tractare constituimus, postulat, ut data corpora ad rectas positione datas relata cogitentur, quae nomine *Axium* solent intelligi: quodsi enim corpus aliquod in minimas particulas mente resolvatur, et quaevis particula per quadratum suae distantiae a dato axe multiplicari cogitetur; aggregatum omnium productorum erit *Momentum inertiae totius corporis respectu dati axeos*. Alia momenta inertiae inusitata sunt in disquisitionibus mechanicis: ut vero eo clarius et ordinatius nonnullas proprietates momenti inertiae respectu datorum axium exponere, investigationemque ipsius pro certis casibus eo commodiorem reddere liceat; momenta quoque inertiae respectu datorum planorum in considerationem vocabimus. Nimirum, si quaevis minima particula alicujus corporis cogitetur multiplicari per quadratum illius distantiae a plano positione dato; erit aggregatum omnium productorum *Momentum inertiae totius corporis respectu ejusdem plani*.

399. Corollarium 1.

Momentum inertiae summae plurium massarum respectu dati axeos vel plani aequale est summae momentorum singularum massarum respectu ejusdem axeos vel plani (398. §.).

400. Corollarium 2.

Adeoque momentum inertiae p massae P aequalis differentiae $S - Q$ duarum massarum S, Q respectu dati axeos vel plani aequabitur differentiae $s - q$ momentorum s, q harum massarum respectu ejusdem axeos vel plani: nimirum ob $S = P + Q$ hinc $s = p + q$ (399. §.), erit $p = s - q$.

401. Corollarium 3.

Si data massa variabilis K , cujus momentum inertiae respectu dati axeos vel plani sit k , vel incrementum aliquod X capiat, vel decrementum X patiat; debeat necessario etiam illius momentum inertiae k capere certum incrementum x , vel pati decrementum x , aequale momento inertiae massae X respectu ejusdem plani vel axeos (399. 400. §.).

402. Corollarium 4.

Sit μ momentum inertiae datae massae M relatae ad axem vel planum A . Si tota massa M in unico puncto in distantia $=k$ ab axe vel plano A collecta concipiatur; erit Mk^2 illius momentum inertiae respectu ejusdem axeos vel plani (398. §.): igitur erit $\mu = Mk^2$, modo distantia k sic determinetur, ut sit $k = \sqrt{\frac{\mu}{M}}$. Licebit itaque momentum inertiae cujuslibet massae M respectu dati axeos vel plani A aequare producto Mk^2 ex eadem massa in quadratum rectae k determinantis distantiam puncti, in quo tota massa M collecta idem haberet momentum inertiae μ respectu ejusdem axeos vel plani A .

403. Corollarium 5.

Fig. 70. Datus axis BC (70. Fig.) consideretur instar communis intersectionis duorum planorum $ABCD$, $EFBC$ angulum rectum DCE comprehendentium, p vero sit minima particula datae cujuscunque massae. Si ad plana AC , FC ducantur perpendiculara pa , pc , et pb sit perpendicularis ad axem BC ; erunt pab , pcb rectangula similia, et aequalia: igitur fiet $p \cdot pb^2 = p(pa^2 + ab^2) = p \cdot pa^2 + p \cdot pc^2$. Quare, si massa quaecunque M in minimas particulas mente resolvatur, et cum dato axe BC conjungantur bina quaecunque plana ad invicem perpendicularia, quorum communis intersectio sit ipse axis BC ; erit productum ex qualibet particula p massae M in quadratum distantiae pb ab axe BC aequale summae productorum ex eadem particula in quadrata illius distantiarum pa , pc a planis AC , FC : igitur momentum inertiae cujuslibet massae M respectu dati axeos BC aequatur summae momentorum inertiae ejusdem massae respectu duorum planorum AC , FC sese in dato axe interfecantium (398. §.).

404. Corollarium 6.

Si minimae particulae datae massae inaequaliter distent ab axe vel plano positione dato; erit illius momentum inertiae respectu dati axeos vel plani majus producto ex tota massa in quadratum distantiae minimae, et simul minus producto ex tota massa in quadratum distantiae maximae (398. §.)

405. Problema.

Dato momento inertiae corporis cujuscunque *Z* respectu axeos *IK* trans- Fig. 71.
euntis per illius centrum gravitatis *G*; invenire ejus momentum inertiae respectu alterius axeos *CD* priori paralleli (71. Fig.).

Solutio.

1. Sit *AB* planum, in quo jacent axes *IK*, *CD*, et *LH*, *EF* sint plana inter se parallela ad planum *AB* in *IK*, *CD* perpendicularia; erit distantia planorum *LH*, *EF* aequalis distantiae $D = Gg$ centri gravitatis *G* dati corporis *Z* ab axe *CD*.

2. Si porro, denotante *M* massam corporis *Z*, denotet MG^2 illius momentum inertiae respectu axeos *IK*, Mg^2 vero momentum inertiae respectu novi axeos *CD*, et *A*, *H*, *F* sint ejus momenta inertiae respectu planorum *AB*, *LH*, *EF*; debet esse per (403. §.)

$$MG^2 = A + H; \quad Mg^2 = A + F;$$

$$\text{igitur} \quad Mg^2 = MG^2 + F - H,$$

3. Cum planum *LH* transeat per centrum gravitatis *G* dati corporis *Z*; dividet illud hoc corpus in duas partes ad diversas ejusdem plani partes jacentes, ita ut quaevis particula unius partis corporis *Z* extra plana *LH*, *EF* alicubi in *q*, et quaevis alterius partis alicubi intra eadem plana in *p* vel extra in *r* debeat jacere.

4. Si ex quavis particula *p* vel *r* ducatur ad planum *LH* perpendicularis *pa* vel *ra*, quae plano *EF* occurrat in *b*; erit

$$p.p b^2 = p(ab - pa)^2 = p(Gg - pa)^2;$$

$$r.r b^2 = r(ar - ab)^2 = r(ar - Gg)^2;$$

$$\text{igitur} \quad p.p b^2 = p(D - pa)^2 = p.D^2 + p.pa^2 - 2p.pa.D;$$

$$r.r b^2 = r(ar - D)^2 = r.D^2 + r.ar^2 - 2r.ar.D.$$

Et si ex qualibet particula q ducatur ad planum LH perpendicularis qa , quae plano EF in b occurrat; erit

$$q \cdot qb^2 = q(ab + qa)^2 = q(Gg + qa)^2:$$

$$\text{igitur } q \cdot qb^2 = q(D + qa)^2 = q \cdot D^2 + q \cdot qa^2 + 2q \cdot qa \cdot D.$$

5. Hinc (4) generatim sequitur, productum ex quavis minima particula z dati corporis Z in quadratum illius distantiae a plano EF obtentum iri, si producto ex particula z in quadratum ejus distantiae a plano LH addatur productum ex eadem particula in quadratum distantiae $D = Gg$, tum duplum productum ex particula z in illius distantiam a plano LH multiplicatum per D vel addatur summae illorum productorum, vel indidem subtrahatur, prout particula z alicubi in q , vel alicubi in p aut r jacet.

6. Cum ergo omnes minimae particulae dati corporis Z ita sint distributae respectu plani LH , ut aliquae illarum, ut p , r , necessario ad partem $IOBK$, aliae vero, ut q , ad partem oppositam $IANK$ debeant cadere (3); debeat aggregatum productorum ex singulis particulis corporis Z in quadrata distantiarum a plano EF (seu F in (2) per §. 398.) ita dependere a summa productorum ex iisdem particulis in quadrata respectivarum distantiarum a plano LH (seu ab H in (2) per §. 398.), ut illud sit proditurum, si huic addatur summa productorum ex singulis minimis particulis massam M corporis Z constituentibus in D^2 (adeoque productum $M \cdot D^2$ ex tota massa M in D^2), et dupla summa productorum ex singulis particulis ad partem $IANK$ cadentibus in illarum distantias a plano LH multiplicata per $D = Gg$, tum a summa subtrahatur dupla summa productorum ex singulis particulis cadentibus ad partem $IOBK$ in distantias illarum a plano LH multiplicata per D , ob (5). Quamobrem, quia summa productorum ex singulis particulis corporis Z jacentibus ad partem $IANK$ plani LH exaequat momentum staticum partis corporis Z ad eandem partem cadentis (3), et summa productorum ex singulis particulis corporis Z jacentibus ad partem $IOBK$ plani LH dat momentum staticum partis corporis Z ad eandem partem cadentis (3) respectu plani LH (147. 52. §.); si illud momentum vocetur m , et istud m' , habebimus $F = H + M \cdot D^2 + 2mD - 2m'D = H + M \cdot D^2 + 2D(m - m')$. Sed momenta statica m , m' partium corporis Z , in quas istud a plano LH per ejus centrum gravitatis G transe-

transeunte dirimitur, respectu ejusdem plani sunt inter se aequalia (163. §.): debet ergo esse $m - m' = 0$, et $F = H + M.D^2$.

7. Hinc vero (6) et ex (2) fit $Mg^2 = MG^2 + M.D^2$.

406. Corollarium 1.

Dato momento inertiae massae $uvxy$ (72. 73. Fig.) respectu axeos Fig. 72. 73. mn transeuntis per illius centrum gravitatis γ invenietur momentum inertiae ejusdem massae respectu alterius axeos MN priori paralleli, si dato momento addatur productum ex massa $uvxy$ in quadratum distantiae γC illius centri gravitatis γ a novo axe MN (405. §.).

407. Corollarium 2.

Et vicissim, cognito momento inertiae datae massae $uvxy$ respectu alicujus axeos MN , invenietur illius momentum inertiae respectu axeos mn transeuntis per centrum gravitatis γ et paralleli axi MN ; si a dato momento subtrahatur productum ex massa $uvxy$ in quadratum distantiae γC centri gravitatis γ ab axe MN (406. §.).

408. Corollarium 3.

Sit massa quaecunque M relata ad tres axes A, B, C , quorum primus A transeat per centrum gravitatis ejusdem massae, et quivis axium B, C sit axi A parallelus, seu planum, in quo jacent axes A, B idem sit cum plano, in quod cadunt axes A, C , seu ab illo diversum. Si A', B', C' sint momenta inertiae massae M respectu axium A, B, C , axesque B, C jaceant in distantis d, D a centro gravitatis massae M ; debet esse per (407. §.)

$$A' = B' - M.d^2; \quad A' = C' - M.D^2;$$

$$\text{igitur } B' - M.d^2 = C' - M.D^2;$$

$$\text{hinc } C' = B' + M(D^2 - d^2), \text{ et } B' = C' - M(D^2 - d^2).$$

409. Corollarium 4.

Cognito ergo momento inertiae massae M respectu certi axeos invenietur momentum inertiae ejusdem massae respectu cujuscunque alterius axeos priori paralleli, si productum ex massa M in differentiam quadratorum distantiarum illius centri gravitatis ab utroque axe cognito momento addatur, vel ab illo subtrahatur, prout distantia centri a novo axe, respectu
cujus

cujus momentum quaeritur, est major vel minor quam illius distantia a priori axe, respectu cujus momentum noscitur (408. §.).

410. Corollarium 5.

Hinc (408. §.) porro sequitur, pro $D=d$ debere esse $B'=C'$, id est: momenta inertiae cujuslibet massae M respectu omnium axium inter se parallelorum in diversis planis jacentium et a centro gravitatis massae M aequidistantium sunt inter se aequalia.

411. Corollarium 6.

Fig. 74. Datis momentis inertiae P, R duarum partium $u y x = p, u v x = r$ constituentium massam $u v x y$ (74. Fig.) respectu axium PQ, RS parallelorum per centra gravitatis G, g illarum partium transeuntium, invenietur momentum inertiae A totius massae $u v x y$ respectu cujusvis tertii axeos AB prioribus paralleli et intra vel extra illos cadentis, si summae momentorum P, R addatur summa productorum ex massis $p = u y x, r = u v x$ in quadrata distantiarum Ge, gE centrorum gravitatis G, g a novo axe AB . Cum enim in hac hypothesi sit $P + p \cdot Ge^2$ momentum inertiae massae $p = u y x$ respectu axeos AB , et $R + r \cdot gE^2$ momentum inertiae massae $r = u v x$ respectu axeos AB per (406. §.), et momentum inertiae massae $u v x r = p + r$ respectu axeos AB debeat aequari summae momentorum inertiae massarum p, r respectu ejusdem axeos (399. §.); necessarium est, ut illud momentum sit =

$$P + R + p \cdot Ge^2 + r \cdot gE^2.$$

Scholion.

Adplicabimus jam haec ad praecipuas corporum figuras, quales in disquisitionibus mechanicis solent occurrere. Notent vero sibi tyrones, in hac quoque disquisitione ubique nos massas tantum homogeneas et aequaliter densas prae oculis habituros, ut per corporum volumina tam illorum massas, quam pondera iis proportionalia liceat exprimere, prout id in investigatione centri gravitatis observavimus (167. §. Schol.).

412. Problema.

Fig. 75. Invenire momentum inertiae dati cujuscunque cylindri recti $ABDC$ (75. Fig.) respectu illius axeos ab .

Solutio.

Solutio.

1. In radio $aB=R$ bafeos capiatur $x=ae$ pro radio cylindri variabilis de qp; erit, pofito axe $ab=a$, maffa cylindri $ABDC=M=\pi aR^2$, et maffa cylindri de qp $=m=\pi ax^2$.

2. Si jam variabilis $x=ae$ augeatur quacunque differentia $\Delta x=eg$, abibit cylinder de qp in cylindrum $hg nm=\pi a(x+\Delta x)^2$; quodfi ergo μ denotet momentum inertiae cylindri variabilis de qp $=m$, crescente variabili $x=ae$ differentia $\Delta x=eg$ crefcet maffa $m=deqp$ differentia $\Delta m=hg nm - deqp = \pi a(x+\Delta x)^2 - \pi ax^2 = \pi a(2x\Delta x + \Delta x^2)$, et illius momentum μ crefcet differentia $\Delta \mu$ aequali momento inertiae maffae Δm (401. §.).

3. Minima distantia particularum maffam $\Delta m=hg nm - deqp$ inter superficies convexas cylindrorum de qp, $hg nm$ interceptam constituentium ab axe ab est radius $ae=x$, et distantia maxima radius $ag=x+\Delta x$: momentum inertiae $\Delta \mu$ maffae Δm refpectu axeos ab est ergo majus producto $\Delta m \cdot x^2$ et minus producto $\Delta m(x+\Delta x)^2$ per (404. §.). Ob (2) habebimus ergo pro quavis utcunque exigua differentia $\Delta x=eg$

$$\Delta \mu > \pi a(2x\Delta x + \Delta x^2) \cdot x^2;$$

$$\text{et } \Delta \mu < \pi a(2x\Delta x + \Delta x^2)(x+\Delta x)^2;$$

adeoque fiet

$$\frac{\Delta \mu}{\Delta x} > 2\pi ax^3 + \pi ax^2 \Delta x;$$

$$\text{et } \frac{\Delta \mu}{\Delta x} < 2\pi ax^3 + \pi a(5x^2\Delta x + \Delta x\Delta x^2 + \Delta x^3).$$

4. Exponens rationis differentialis functionis μ aequalis momento inertiae cylindri de qp debet ergo ob (3) per (Vol. I. §. 131.) effe

$$\epsilon \mu = 2\pi ax^3 \epsilon x; \text{ hinc } \mu = \frac{1}{2}\pi ax^4.$$

5. Quodfi jam fiat $x=aB=R$; obtinebitur momentum inertiae totius cylindri $ABDC$ per (1) (4)

$$\mu = \frac{1}{2}\pi aR^4 = \frac{1}{2}M \cdot R^2.$$

413. Corollarium 1.

Momentum inertiae cylindri excavati (75. Fig.), cujus cavitas de qp Fig. 75. fit cylindrica ejusdem axeos $ab=a$, refpectu axeos ab erit aequale differentiae momenti inertiae $\frac{1}{2}\pi ar^4$ maffae cavitatem explentis a momento

inertiae $\frac{1}{2}\pi aR^4$ totius cylindri ABDC pro perfecte pleno accepti (412. §.), denotante $r = ae$ radium cavitatis et $R = aB$ radium totius cylindri (400. §.): si ergo μ denotat momentum inertiae cylindri excavati, et M illius massam seu pondus (411. §. Schol.), erit

$$\mu = \frac{1}{2}\pi aR^4 - \frac{1}{2}\pi ar^4 = \frac{1}{2}\pi a(R^2 - r^2)(R^2 + r^2);$$

$$\text{seu } \mu = \frac{1}{2}\pi a(R^4 - r^4) = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2).$$

414. Corollarium 2.

Momentum inertiae cylindri ABDC respectu axeos AC paralleli axi ab et jacentis in ejus convexa superficie, cum centrum gravitatis cylindri in ab sit situm (219. §.) erit $= \frac{1}{2}\pi aR^4 + \pi aR^2 \cdot R^2 = \frac{3}{2}\pi aR^4 = \frac{3}{2}M \cdot R^2$ (412. 406. §.). Si vero desideretur momentum inertiae cylindri ABDC respectu cujuscunque alterius axeos EF axi ab paralleli; invenietur id $= \frac{1}{2}\pi aR^4 + \pi aR^2 \cdot aG^2 = \frac{1}{2}M \cdot R^2 + M \cdot aG^2$ pro distantia mutua aG axium ab , EF (412. 406. §.).

415. Problema.

Fig. 59. *Data aequatione ad lineam QX (59. Fig.) inter coordinatas orthogonas $x = Qb$, $y = Ab$, cujus revolutione circa axem QC generetur corpus QXSZRX; invenire momentum inertiae segmenti QADBE respectu axeos QC.*

Solutio.

1. Si variabilis $x = Qb$ crescat quacunq[ue] differentia $\Delta x = ba$; debet massa $m = AQB$ capere incrementum $\Delta m = ABqp$, et illius momentum inertiae μ respectu axeos QC capiet incrementum $\Delta \mu$ aequale momento inertiae massae $\Delta m = ABqp$ respectu axeos QC per (401. §.); ordinata vero $y = Ab$ aequalis radio sectionis ADBEA crescet certa differentia Δy , per quam determinabitur radius $pa = y + \Delta y$ sectionis $p r q s p$.

2. Iam vero evidens est, massam $\Delta m = ABqp$ aequari uni parti cylindri baseos $prqs$ et altitudinis $ba = \Delta x$, cylindrum vero baseos ADBEA et altitudinis $ba = \Delta x$ aequalem esse uni parti massae $\Delta m = ABqp$: momentum ergo inertiae $\Delta \mu$ massae Δm (1) erit majus momento inertiae cylindri posterioris, et minus momento cylindri prioris respectu axeos QC (399. §.). Quamobrem, cum ob (1) per (412. §.) sit $\frac{1}{2}\pi y^4 \Delta x$ momentum inertiae cylindri posterioris; et $\frac{1}{2}\pi (y + \Delta y)^4 \Delta x$ momentum inertiae cylindri prioris, debet esse

$$\Delta \mu > \frac{1}{2}\pi y^4 \Delta x: \Delta \mu < \frac{1}{2}\pi (y + \Delta y)^4 \Delta x.$$

3. Quid-

3. Quidquid sit functio y variabilis x determinata per datam aequationem inter y, x ; extare debebunt certi coefficientes f, g, h , etc. independentes a Δx , pro quibus fieret $\Delta y = f \Delta x + g \Delta x^2 + h \Delta x^3 + \text{etc}$ (Vol. I. §. 84.), eoque ipso erunt alii ejusmodi coefficientes A, B, C , etc. possibiles, pro quibus fieret $(y + \Delta y)^4 = y^4 + A \Delta x + B \Delta x^2 + C \Delta x^3 + \text{etc}$. (Vol. I. §. 32.): in (2) debet igitur esse

$$\frac{\Delta \mu}{\Delta x} > \frac{1}{2} \pi y^4;$$

$$\frac{\Delta \mu}{\Delta x} < \frac{1}{2} \pi y^4 + \frac{1}{2} \pi (A \Delta x + B \Delta x^2 + C \Delta x^3 + \text{etc}).$$

4. Ob (3) per (Vol. I. §. 131.) erit itaque exponens rationis differentialis functionis μ aequalis momento inertiae segmenti $AQB = m$ respectu axeos QC

$$\varepsilon \mu = \frac{1}{2} \pi y^4 \varepsilon x = \frac{1}{2} y^2 \varepsilon m;$$

$$\text{pro } \varepsilon m = \pi y^2 \varepsilon x \text{ per (Vol. I. §. 490.)}$$

Quare, si ex data aequatione inter y, x exprimatur y per x , vel εx per y et εy , licebit ope calculi integralis tam massam m segmenti $QADBEA$, quam illius momentum inertiae μ respectu axeos QC determinare.

416. Corollarium 1.

Sit QX linea recta, proinde QXZ conus rectus axeos $QC = a$, et radii baseos $XC = R$; habebimus pro $x = Qb, y = Ab$

$$y : x = R : a; \text{ hinc } y^2 = \frac{R^2}{a^2} x^2;$$

$$\varepsilon m = \frac{\pi R^2}{a^2} x^2 \varepsilon x; \quad \varepsilon \mu = \frac{\pi R^4}{2 a^4} x^4 \varepsilon x \quad (415. \S.).$$

Consequenter integrando inueniemus

$$m = \frac{\pi R^2}{3 a^2} x^3; \quad \mu = \frac{\pi R^4}{10 a^4} x^5 = \frac{3}{10} m \cdot \frac{R^2 x^2}{a^2}.$$

Hinc pro $x = QC = a$ prodibit massa $M = \frac{\pi R^2}{3} a$, et momentum inertiae $\mu = \frac{\pi R^4 a}{10} = \frac{3}{10} M \cdot R^2$ totius coni recti XQZ respectu illius axeos QC .

417. Corollarium 2.

Fig. 57. Momentum inertiae μ conii truncati et recti $bdDB$ (57. Fig.) respectu illius axeos cC , si M fit illius massa, $dc=r$ radius minoris, $DC=R$ vero radius majoris baseos, et $Cc=\alpha$ axis, erit aequale differentiae momenti inertiae conii Abd a momento conii ABD (400. §.), adeoque per (416. §.)

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{10} \pi R^4 \cdot AC - \frac{1}{10} \pi r^4 \cdot Ac \\ &= \frac{1}{10} \frac{\pi \alpha R^5}{R-r} - \frac{1}{10} \frac{\pi \alpha r^5}{R-r};\end{aligned}$$

id est

$$\mu = \frac{1}{10} \alpha \pi \frac{R^5 - r^5}{R - r} = \frac{1}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

418. Corollarium 3.

Fig. 59. Sit QX quadrans circuli, et XQZ dimidius globus radii $XC=QC=R$; erit $y^2=2Rx-x^2$: igitur in (415. §.) fiet

$$\varepsilon m = \pi (2Rx - x^2) \varepsilon x; \quad \varepsilon \mu = \frac{\pi}{2} (2Rx - x^2)^2 \varepsilon x.$$

Hinc integrando reperiemus massam m segmenti sphaerici AQB pro quavis abscissa $x=Qb$, et illius momentum inertiae μ respectu axeos QC , nimirum

$$\begin{aligned}m &= \frac{1}{3} \pi x^2 (3R - x); \\ \mu &= \frac{1}{30} \pi x^3 (20R^2 - 15Rx + 3x^2). \\ \text{feu } \mu &= \frac{1}{10} m \cdot \frac{20R^2x - 15Rx^2 + 3x^3}{3R - x} \dots\end{aligned}$$

419. Corollarium 4.

Pro $x=QC=R$ in (418. §.) inuenietur massa m et momentum inertiae μ dimidii globi XQZ respectu axeos QC ad basim $XRZSX$ perpendicularis, nimirum

$$m = \frac{2}{3} \pi R^3; \quad \mu = \frac{4}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} m R^2.$$

Si autem bis sumas tam massam, quam momentum inertiae dimidii globi, inuenies massam M et momentum inertiae μ totius globi respectu illius axeos (399. §.), nimirum

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \mu = \frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} M R^2.$$

420. Corollarium 5.

Determinatis momentis inertiae segmentorum sphaericorum AQB, pQq respectu axeos QC per (418. §.); invenies momentum inertiae massae ABqp, interceptae inter sectiones sphaerae ADBE, prqsp inter se parallelas et axi QC per illarum centra b, a transeunti perpendiculares, respectu ejusdem axeos, si momentum segmenti AQB subtrahas a momento segmenti pQq per (400. §.).

421. Corollarium 6.

Momentum inertiae globi excavati, ita ut illius cavitas sit sphaera concentrica, respectu axeos ejusdem reperietur aequalis differentiae momenti massae cavitatem explentis a momento totius globi pro perfecte solido accepti (400. §.): quodli ergo radius totius globi vocetur R, radius cavitatis r, massa vero seu pondus globi excavati M, et illius momentum inertiae μ ; erit per (419.)

$$\mu = \frac{8}{15} \pi R^5 - \frac{8}{15} \pi r^5; \quad M = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Adeoque etiam

$$\mu = \frac{8}{15} \pi (R^5 - r^5) = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

422. Corollarium 7.

Sit QX arcus parabolae, pro quo erit $y^2 = px$ (Vol. I. §. 508.); debeat esse in (415. §.)

$$\varepsilon m = \pi p x \varepsilon x; \quad \varepsilon \mu = \frac{1}{2} \pi p^2 x^2 \varepsilon x:$$

consequenter fiet

$$m = \frac{1}{2} \pi p x^2; \quad \mu = \frac{1}{6} \pi p^2 x^3 = \frac{1}{3} m \cdot y^2,$$

ubi m denotat pondus seu massam segmenti AQB conoidis parabolici XQZ, et μ illius momentum inertiae respectu axeos QC.

423. Corollarium 8.

Pro arcu QA hyperbolae, cujus revolutione circa axem transversum QC generetur conois QADBEA; erit per (Vol. I. §. 550.) $y^2 = \frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2$: pro massa m conoidis QAB, et momento inertiae μ respectu axeos QC habebimus ergo per (415. §.)

$$\varepsilon m = \pi \left(\frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2 \right) \varepsilon x; \quad \varepsilon \mu = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2 \right)^2 \varepsilon x;$$

et integrando inveniemus

$$m = \frac{\pi b^2}{6 a^2} (3 a x^2 + 2 x^3);$$

$$\mu = \frac{\pi b^4}{60 a^4} (10 a^2 x^3 + 15 a x^4 + 6 x^5).$$

$$\text{feu } \mu = \frac{b^2}{10 a^2} m \frac{10 a^2 x + 15 a x^2 + 6 x^3}{3 a + 2 x}.$$

424. Corollarium 9.

Quodsi autem QA sit arcus ellipseos, cujus revolutione circa axem transversum QC generetur segmentum AQB = m sphaeroidis elliptici; erit $y^2 = \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$ (Vol. I. §. 525): pro momento inertiae μ segmenti m = AQB respectu axeos QC debeat ergo per (415. §.) esse

$$\varepsilon m = \pi \left(\frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right) \varepsilon x; \quad \varepsilon \mu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right)^2 \varepsilon x;$$

$$m = \frac{\pi b^2}{6 a^2} (3 a x^2 - 2 x^3);$$

$$\mu = \frac{\pi b^4}{60 a^4} (10 a^2 x^3 - 15 a x^4 + 6 x^5).$$

$$\text{feu } \mu = \frac{b^2}{10 a^2} m \frac{10 a^2 x - 15 a x^2 + 6 x^3}{3 a - 2 x}.$$

425. Corollarium 10.

Et pro $x = QC = \frac{1}{2} a$ in (424. §.) prodibit massa m, et momentum inertiae μ dimidii sphaeroidis elliptici XQZ respectu axeos transversi QC, nimirum

$$m = \frac{\pi b^2 a}{12}; \quad \mu = \frac{\pi b^4 a}{120} = \frac{1}{10} m b^2.$$

Hujus duplum dabit massam M integri sphaeroidis et illius momentum inertiae μ respectu axeos transversi, nimirum

$$M = \frac{\pi b^2 a}{6}; \quad \mu = \frac{\pi b^4 a}{60} = \frac{1}{10} M b^2.$$

426. Corollarium 11.

Eodem prorsus modo invenietur momentum inertiae μ segmenti $m = AQB$ sphaeroidis elliptici revolutione arcus QA ellipseos circa axem conjugatum QC geniti. Hoc enim casu, pro $x = Qb$, $y = Ab$, erit aequatio ad ellipsim $y^2 = \frac{a^2}{b} x - \frac{a^2}{b^2} x^2$: igitur per (415. §.)

$$m = \pi \left(\frac{a^2}{b} x - \frac{a^2}{b^2} x^2 \right) \varepsilon x; \quad \varepsilon \mu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a^2}{b} x - \frac{a^2}{b^2} x^2 \right)^2 \varepsilon x;$$

$$m = \frac{\pi a^2}{6 b^2} (3 b x^2 - 2 x^3);$$

$$\mu = \frac{\pi a^4}{60 b^4} (10 b^2 x^3 - 15 b x^4 + 6 x^5).$$

$$\text{feu } \mu = \frac{a^2}{10 b^2} m \frac{10 b^2 x - 15 b x^2 + 6 x^3}{3 b - 2 x} \dots$$

427. Corollarium 12.

Et pro femiaxe conjugato $x = QC = \frac{1}{2}b$ obtinebis ex (426. §.) massam m et momentum inertiae μ dimidii sphaeroidis elliptici XQZ revolutione quadrantis QX ellipseos circa femiarem conjugatum QC geniti, cujus duplum dabit massam M et momentum inertiae μ integri sphaeroidis revolutione ellipseos circa axem conjugatum geniti respectu ejusdem axeos, nimirum

$$M = \frac{\pi a^2 b}{6}; \quad \mu = \frac{\pi a^4 b}{60} = \frac{1}{15} M a^2.$$

428. Corollarium 13.

Centrum gravitatis globi $BPDQ$ (76. Fig.) coincidit cum illius centro magnitudinis C (231. §.): quare, si axis mn detur in distantia $AC = AB + BC = d + R$ a centro C , pro radio globi $BC = R$, et $BA = d$, cum momentum inertiae globi $BPDQ = M$ respectu diametri PQ axi mn parallelae sit $\frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{2}{5} M R^2$ (419. §.); erit illius momentum inertiae μ respectu axeos mn per (406. §.)

$$\mu = \frac{8}{15} \pi R^5 + \frac{4}{3} \pi R^3 (d + R)^2 =$$

$$= \frac{28}{15} \pi R^5 + \frac{4}{3} \pi R^3 (d + 2R) d;$$

$$\text{feu } \mu = \frac{1}{5} M (7R^2 + 10Rd + 5d^2).$$

Et pro $d=BA=0$ erit momentum inertiae globi $M=BPDQ$ respectu axeos pq illum in B tangentis

$$\mu = \frac{28}{15} \pi R^5 = \frac{7}{5} MR^2.$$

429. Problema.

Fig. 77. *Invenire momentum inertiae lentis BPDQ (77. Fig.) ex duobus segmentis sphaericis BPD, BQD compositae respectu illius axeos minoris PQ.*

Solutio.

1. Sint axes lentis $PQ=2b$, $BD=2a$, adeoque semiaxes $PC=b$, $BC=a$: cum semiaxis BC sit ordinata circuli maximi sphaerae, ad quam segmenta BPD, BQD pertinent, respondens abscissae PC , si radius ejusdem sphaerae vocetur R ; erit

$$a^2 = 2Rb - b^2; \text{ hinc } R = \frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

2. Pro hoc ergo valore radii R , si ponas $x=PC=b$ in (418. §.), invenies et massam m segmenti BPD, et illius momentum inertiae respectu axeos PQ , cujus duplum dabit massam M totius lentis BPDQ, ejusque momentum inertiae μ respectu axeos PQ .

$$M = \frac{2}{3} \pi b^2 (3R - b);$$

$$\mu = \frac{1}{105} \pi b^3 (20R^2 - 15Rb + 3b^2);$$

consequenter

$$M = \frac{1}{3} \pi (3a^2b + b^3);$$

$$\mu = \frac{1}{30} \pi (10a^4b + 5a^2b^3 + b^5) = \frac{1}{10} M \cdot \frac{10a^4 + 5a^2b^2 + b^4}{3a^2 + b^2}.$$

430. Corollarium.

Centrum gravitatis lentis BPDQ ex segmentis sphaericis aequalibus BPD, BQD compositae coincidit cum medio puncto C , in quo illius axes $PQ=2b$, $BD=2a$ sese bissecant (229. 154. §.): momentum inertiae ejusdem lentis respectu axeos mn paralleli ejus axi minori PQ , et perpendicularis ad axem majorem BD in A productum, erit ergo $= \mu + M \cdot AC^2$, denotante M massam lentis, et μ illius momentum inertia respectu axeos PQ (406. §.). Quamobrem, sumto valore pro μ et M ex (429. §.), positaque distantia $AB=d$, ut sit $AC=d+a$; erit momentum inertiae lentis respectu axeos mn

$$= \frac{1}{10} \pi (10 a^4 b + 5 a^2 b^3 + b^5) + \frac{1}{3} \pi (3 a^2 b + b^3) (d+a)^2 =$$

$$= \frac{1}{10} M \left(10 (d+a)^2 + \frac{10 a^4 + 5 a^2 b^2 + b^4}{3 a^2 + b^2} \right).$$

Hinc, si fiat $d=AB=0$, obtinebitur momentum inertiae lentis BPDQ respectu axeos pq in vertice ejus B paralleli axi minori PQ et perpendicularis ad axem majorem BD, nimirum =

$$\frac{1}{30} \pi (40 a^4 b + 15 a^2 b^2 + b^5) =$$

$$= \frac{1}{30} M. \frac{40 a^4 + 15 a^2 b^2 + b^4}{3 a^2 + b^2}.$$

431. Problema.

Investigare momentum inertiae dati corporis ADC (30. Fig.) respectu Fig. 30. plani MN positique dati.

Solutio.

1. Sit PQ perpendicularis ad planum MN, sumtaque ejus parte variabili $x=Qb$ cogitetur per b transire planum br parallelum plano MN, quod ex toto corpore ADC abscindat partem rsCD=m, cujus momentum inertiae respectu plani MN vocetur mk^2 .

2. Si variabilis $x=Qb$ crescat differentia $\Delta x=ba$, crescet functio m aequalis massae rsCD differentia Δm aequali massae rsqp inter plana br, ap parallela interceptae, et momentum inertiae mk^2 massae m crescet differentia Δmk^2 aequali momento inertiae massae $\Delta m=pqsr$ respectu plani MN per (401. §.). Cum jam $x=Qb$ sit minima, et $x+\Delta x=Qa$ maxima inter distantias omnium minimarum particularum massam $\Delta m=pqsr$ constituentium a plano MN; erit per (404. §.)

$$\Delta mk^2 > \Delta m \cdot x^2 \text{ et } \Delta mk^2 < \Delta m (x + \Delta x)^2;$$

$$\text{feu } \Delta mk^2 > \Delta m \cdot x^2 \text{ et } \Delta mk^2 < \Delta m \cdot x^2 + \Delta m (2x\Delta x + \Delta x^2).$$

3. Quidquid vero est functio m variabilis x, dari debent certi coefficientes f, g, h, etc. independentes a Δx , pro quibus fieret $\Delta m = \frac{\varepsilon m}{\varepsilon x} \Delta x + f \Delta x^2 + g \Delta x^3 + \text{etc.}$ (Vol. I. §. 84): in (2) erit ergo pro qualibet cogitabili differentia $\Delta x=ba$

$$\frac{\Delta m k^2}{\Delta x} > \frac{x^2 \varepsilon m}{\varepsilon x} + f x^2 \Delta x + g x^2 \Delta x^2 + \text{etc.};$$

$$\frac{\Delta m k^2}{\Delta x} < \frac{x^2 \varepsilon m}{\varepsilon x} + f x^2 \Delta x + g x^2 \Delta x^2 + \text{etc.} \\ + \left(\frac{\varepsilon m}{\varepsilon x} + f \Delta x + g \Delta x^2 + \text{etc.} \right) (2x \Delta x + \Delta x^2).$$

4. Hinc (3) per (Vol. I. §. 131.) invenietur exponens rationis differentialis momenti inertiae mk^2 massae $m = rsCD$ respectu plani MN , nimirum $\varepsilon mk^2 = x^2 \varepsilon m$.

5. Quamobrem, si exponens εm rationis differentialis massae $m = rsCD$ pendentis a variabili $x = Qb$ fuerit per x et εx determinabilis; poterit quoque ope calculi integralis determinari momentum inertiae mk^2 ejusdem massae respectu plani MN ; et hinc invenietur porro momentum inertiae totius massae ADC pro illo valore variabilis x , pro quo massa indeterminata $m = rsCD$ in ADC abiverit.

432. Corollarium 1.

Investigatio haec momenti inertiae dati corporis respectu plani positione dati serviet in multis casibus ad eo facilius inveniendum momentum inertiae ejusdem corporis respectu dati axeos: si enim concipiantur duo plana sese sub angulo recto interfecantia, ita ut communis illorum intersectio coincidat cum dato axe, tum quaerantur per (431. §.) momenta inertiae corporis respectu utriusque plani; erit summa momentorum aequalis momento inertiae ejusdem corporis respectu dati axeos (403. §.).

433. Corollarium 2.

Fig. 78. Exemplo fit cylinder rectus (78. Fig.) axeos $ch = a$ et radii $cd = R$. Sit enim $ABDC$ planum transiens per centra c, h basium, in quo axis ch jaceat, et radius cd sit ad AB perpendicularis: si in hoc capiatur $cg = x$ et per g ducatur planum $abfe$ parallelum plano $ABDC$; erit massa $ABbaeCDf = m$ certa functio variabilis x , pro cujus momento inertiae μ respectu plani $ABDC$ debet esse $\varepsilon \mu = x^2 \varepsilon m$ (431. §.). Cum autem sit $m = 2a \cdot A cga$, hinc $\varepsilon m = 2a \varepsilon A cga = 2a \cdot y \varepsilon x$ pro $ag = y$ (Vol. I. §. 488.); habebimus

$$\varepsilon \mu = 2ax^2 y \varepsilon x = 2ax^2 \varepsilon x \sqrt{(R^2 - x^2)},$$

Hinc

Hinc integrando per (Vol. I. §. 289. 308.) prodibit

$$\mu = -\frac{a x}{2} \sqrt{(R^2 - x^2)^3} + \frac{a x R^2}{4} \sqrt{(R^2 - x^2)} + \frac{a R^4}{4} \text{Arc Sin } \frac{x}{R}.$$

Pro $x = cd = R$ erit ergo $\mu = \frac{a R^4}{4} \text{Arc Sin } 1 = \frac{1}{4} a \pi R^4$ momentum inertiae dimidii cylindri respectu plani ABDC, et $2\mu = \frac{1}{2} a \pi R^4$ momentum integri cylindri respectu cujusvis plani ABDC traeseuntis per centra basium c, h: momentum inertiae integri cylindri respectu illius axeos ch aequale summae momentorum ejusdem cylindri respectu duorum planorum ad invicem perpendicularium per centra c, h transeuntium (432. §.) erit itaque $= \frac{1}{4} a \pi R^4 + \frac{1}{4} a \pi R^4 = \frac{1}{2} a \pi R^4$ ut in (412. §.).

434. Corollarium 3.

Petatur momentum inertiae μ corporis ABZX (59. Fig.) revolutione Fig. 59. plani AbCX ad b, C rectanguli circa axem QC geniti respectu axeos MN jacentis in plano ad QC in Q perpendiculari, dato illius momento inertiae Z respectu axeos QC. Si per (431. §.) quaeratur momentum inertiae X corporis XABZ respectu plani in Q ad QC perpendicularis; erit $\mu = X + \frac{1}{2} Z$.

Quodlibet enim planum, in quo axis QC jaceat, dividet corpus ABZX in duas partes similes et aequales, ita ut momenta inertiae respectu omnium ejusmodi planorum inter se aequalia sint futura (398. §.): quodsi ergo cogitentur duo plana sese in QC sub angulo recto interfecantia, et Y sit momentum inertiae corporis ABZX respectu unius talis plani; erit $Z = Y + Y = 2Y$ momentum inertiae ejusdem corporis respectu axeos QC (403. §.); adeoque $Y = \frac{1}{2} Z$. Sed si unum planum, in quo QC jacet, concipiatur esse perpendiculare plano, in quo jacet axis MN, ita ut MN sit communis intersectio horum planorum; erit eo ipso $\mu = X + Y$ (403. §.), consequenter $\mu = X + \frac{1}{2} Z$.

435. Corollarium 4.

Sit inveniendum momentum inertiae μ cylindri recti (78. Fig.) Fig. 78. ARSEDC respectu axeos AB cum diametro baseos coincidentis. Pro radio $cA = R$, axe $ch = a$, $cu = x$, si per u transeat sectio sr parallela basi ARS, fiat massa ARSrs = m, et illius momentum inertiae respectu plani ARS sit X; erit

$$Aa \ 2$$

$$m =$$

$$m = \pi R^2 x; \quad \varepsilon m = \pi R^2 \varepsilon x; \quad \text{igitur (431. §.)}$$

$$\varepsilon X = x^2 \varepsilon m = \pi R^2 x^2 \varepsilon x; \quad X = \frac{1}{3} \pi R^2 x^3.$$

Quamobrem pro $x = ch = a$ invenietur $X = \frac{1}{3} \pi R^2 a^3$ momentum inertiae totius cylindri RSEDC respectu plani ARS: cum ergo $Z = \frac{1}{2} \pi a R^4$ sit illius momentum respectu axeos ch (412. §.); erit momentum inertiae respectu axeos AB per (434. §.) $\mu = X + \frac{1}{2} Z = \frac{1}{3} \pi R^2 a^3 + \frac{1}{4} \pi a R^4 = \frac{1}{12} M(4a^2 + 3R^2)$, denotante M massam cylindri.

436. Corollarium 5.

Fig. 56. Quaeratur momentum inertiae μ coni recti ABD (56. Fig.) respectu axeos MN jacentis in plano ad axem coni AC = a perpendiculari, dato tam hoc axe, quam radio baseos BC = R. Pro $x = Ac$, ducta per c sectione cq parallela basi, sit X momentum inertiae massae $m = Apq$ respectu plani MN, adeoque $\varepsilon X = x^2 \varepsilon m$ (431. §.). Cum area baseos sit $= \pi R^2$, hinc area sectionis pq: $\pi R^2 = x^2 : a^2$; erit $pq = \frac{\pi R^2}{a^2} x^2$; $m = \frac{\pi R^2}{3 a^2} x^2$, hinc $\varepsilon m = \frac{\pi R^2}{a^2} x^2 \varepsilon x$. Quare habebimus

$$\varepsilon X = \frac{\pi R^2}{a^2} x^4 \varepsilon x; \quad X = \frac{\pi R^2}{5 a^2} x^5.$$

Pro $x = AC = a$ fiet itaque $X = \frac{1}{5} \pi R^2 a^5$ momentum inertiae totius coni ABD respectu plani MN. Est autem $Z = \frac{\pi R^4 a}{10}$ illius momentum respectu axeos AC (416. §.): momentum respectu axeos MN debet ergo per (434. §.) esse $\mu = X + \frac{1}{2} Z = \frac{1}{5} \pi R^2 a^3 + \frac{1}{20} \pi R^4 a = \frac{3}{20} M(4a^2 + R^2)$, exprimente M massam coni.

437. Corollarium 6.

Fig. 59. Quidquid demum sit corpus QADBEA (59. Fig.) revolutione plani QAb ad b rectanguli circa axem Qb = x geniti, si $y = Ab$ sit ordinata curvae QA respondens abscissae $x = Qb$, et X designet momentum inertiae corporis QAB = m respectu plani in Q ad Qb perpendicularis, μ vero exprimat illius momentum respectu axeos MN per Q in eodem plano excurrentis, et Z denotet illius momentum respectu axeos Qb; erit

$$\varepsilon X = x^2 \varepsilon m \text{ (431. §.)} = \pi x^2 y^2 \varepsilon x \text{ (Vol. I. §. 490.)};$$

$$\varepsilon Z = \frac{1}{2} \pi y^4 \varepsilon x \text{ (415. §.)}; \quad \varepsilon \mu = \varepsilon X + \frac{1}{2} \varepsilon Z \text{ (434. §.)};$$

igitur

igitur habebimus

$$\varepsilon \mu = \pi x^2 y^2 \varepsilon x + \frac{1}{4} \pi y^4 \varepsilon x = \frac{\pi}{4} (4x^2 y^2 + y^4) \varepsilon x.$$

Data itaque aequatione ad curvam QA inter ejus coordinatas orthogonas y, x , licebit ope calculi integralis ex hac expressione momentum inertiae μ corporis AQB respectu axeos MN ad Qb perpendicularis immediate elicere.

438. Corollarium 7.

Sit QA arcus circuli, qui circa axem Qb revolutus generet segmentum sphaericum AQB = M; erit $y^2 = 2Rx - x^2$: pro momento inertiae μ segmenti sphaerici M = AQB respectu axeos MN illud in vertice Q tangentis erit ergo per (437. §.)

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu &= \frac{\pi}{4} (4x^2 (2Rx - x^2) + (2Rx - x^2)^2) \varepsilon x \\ &= \frac{\pi}{4} (4Rx^3 - 3x^4 + 4R^2 x^2) \varepsilon x. \end{aligned}$$

igitur erit

$$\mu = \frac{\pi}{4} (Rx^4 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{4}{3}R^2 x^3) = \frac{\pi}{60} x^3 (15Rx - 9x^2 + 20R^2);$$

feu pro massa AQB = M,

$$\mu = \frac{\pi}{60} x^3 (15Rx + 20R^2 - 9x^2) = \frac{\pi}{60} M \frac{15Rx^2 + 20R^2 x - 9x^3}{3R - x}.$$

Ex hac porro expressione momenti inertiae segmenti sphaerici AQB respectu axeos MN invenies pro $x = R$ vel $x = 2R$ momentum inertiae dimidii vel integri globi respectu axeos MN illum in vertice Q tangentis: nimirum momentum inertiae dimidii globi, denotante M illius massam, erit

$$= \frac{1}{10} \pi R^5 = \frac{1}{20} M R^2;$$

et momentum inertiae integri globi, denotante M ejus massam, fiet, ut in (428. §.)

$$= \frac{2}{15} \pi R^5 = \frac{7}{5} M R^2.$$

439. Corollarium 8.

Pro segmento $m = QAE BDA$ conoidis parabolici revolutione arcus parabolae QA circa ejus axem QC genito, et illius momento inertiae μ respectu axeos MN illud in vertice Q tangentis, debet esse $y^2 = px$:

Aa 3

igitur

$$\text{igitur } \epsilon \mu = \frac{\pi}{4} (4 p x^3 + p^2 x^2) \epsilon x;$$

$$\text{hinc } \mu = \frac{\pi}{4} (p x^4 + \frac{1}{3} p^2 x^2); \text{ feu ob } m = \frac{1}{2} \pi p x^2,$$

$$\mu = \frac{\pi p x^2}{12} (3 x^2 + p^2) = \frac{1}{6} m (3 x^2 + p^2).$$

440. Corollarium 9.

Pro segmento $m = AQB$ sphaeroidis elliptici revolutione arcus ellipticos QA circa axem transversum QC genito, cujus momentum inertiae respectu axeos MN illud in vertice Q tangentis fit μ , erit

$$y^2 = \frac{b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2; \text{ igitur per (437. §.)}$$

$$\epsilon \mu = \frac{\pi b^2}{4 a^4} \epsilon x ((4 a^3 - 2 a b^2) x^3 - (4 a^2 - b^2) x^4 + a^2 b^2 x^5).$$

Adeoque debet esse

$$\mu = \frac{\pi b^2}{120 a^4} ((30 a^3 - 15 a b^2) x^4 - (24 a^2 - 6 b^2) x^5 + 10 a^2 b^2 x^6);$$

$$\text{feu ob } m = \frac{\pi b^2}{6 a^2} (3 a x^2 - 2 x^3)$$

$$\mu = \frac{1}{20} m \cdot \frac{(30 a^3 - 15 a b^2) x^2 - (24 a^2 - 6 b^2) x^3 + 10 a^2 b^2 x}{a^2 (3 a - 2 x)}.$$

Hinc pro $x = \frac{1}{2} a$ invenies momentum inertiae dimidii sphaeroidis elliptici revolutione quadrantis ellipticos circa semiaxem transversum geniti respectu axeos MN sphaeroidem in vertice Q tangentis, si M sit massa dimidii sphaeroidis,

$$\mu = \frac{\pi a b^2}{8 \cdot 120} (9 a^2 + 4 b^2) = \frac{1}{80} M (9 a^2 + 4 b^2).$$

Et pro $x = a$ reperies momentum inertiae integri sphaeroidis elliptici revolutione ellipticos circa axem transversum geniti respectu axeos sphaeroidem in vertice axeos transversi tangentis, denotante M illius massam

$$\mu = \frac{\pi a b^2}{120} (6 a^2 + b^2) = \frac{1}{20} M (6 a^2 + b^2).$$

441. Problema.

Fig. 79. Invenire momentum inertiae prismatis triangularis recti $ABCFED$ (79. Fig.) basium ad C, F rectangulorum respectu lateris AD .

Solutio.

Solutio.

1. Sit latus prismatis $AD=l$, et latera basium angulos rectos comprehendentia sint $AC=DF=a$, $CB=FE=b$; erit massa prismatis (411. §. Schol.) $M=\frac{1}{2}abl$.

2. Ducto plano $aADd$ perpendiculari ad $ACFD$; erit communis intersectio horum planorum ipse axis AD respectu cuius debet determinari momentum inertiae totius prismatis: aequabitur ergo illud summae momentorum inertiae dati prismatis respectu planorum $aADd$, $ACFD$ (404. §.).

3. Quare sumatur $Ce=x$, et per e ducatur sectio $eohi$ parallela plano $ACFD$: pro massa $m=ACFDhieo$, et illius momento inertiae μ respectu plani $ACFD$ habebimus $\epsilon\mu=x^2\epsilon m$ (431. §.).

$$\text{Sed } oe = \frac{AC \cdot Be}{BC} = a - \frac{a}{b}x;$$

consequenter

$$ACeo = \frac{1}{2}(AC + oe)Ce = ax - \frac{a}{2b}x^2;$$

$$m = ACeo \cdot AD = axl - \frac{al}{2b}x^2;$$

Debet itaque poni

$$\epsilon m = \frac{al}{b}(b-x)\epsilon x; \quad \epsilon m = \frac{al}{b}(bx^2 - x^3)\epsilon x.$$

Quamobrem erit

$$\mu = \frac{al}{b}(\frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{4}x^4) = \frac{alx^3}{12b}(4b - 3x).$$

4. Pro $x=BC=b$ in (3) obtinebimus ergo momentum inertiae totius prismatis respectu plani AF , $=\frac{1}{12}alb^3$.

5. Porro capiatur $Af=x$, ductoque per f plano $fohg$ parallelo ad $aADd$, ponatur massa $AfohgD=m$, et μ sit illius momentum inertiae respectu plani $aADd$; erit per (431. §.) $\epsilon\mu=x^2\epsilon m$.

$$\text{Sed est } fo = \frac{b}{a}x, \text{ hinc } Afo = \frac{b}{2a}x^2;$$

$$m = Afo \cdot AD = \frac{bl}{2a}x^2: \text{ igitur fiet}$$

$$\varepsilon m = \frac{bl}{a} x \varepsilon x; \text{ hinc } \varepsilon \mu = \frac{bl}{a} x^3 \varepsilon x.$$

$$\text{Quare debebit esse } \mu = \frac{bl}{4a} x^4.$$

6. Posita variabili $x = AC = a$ in (5) inuenimus ergo momentum inertiae totius prismatis ABCFED respectu plani aADd, $= \frac{1}{4} bla^3$.

7. Ex his (4) (6) per se jam ob (2) fluit momentum inertiae μ dati prismatis respectu lateris AD, nimirum

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{12} alb^3 + \frac{1}{4} bla^3 = \frac{1}{12} abl(3a^2 + b^2) \\ &= \frac{1}{12} M(3a^2 + b^2) \text{ ob (1).} \end{aligned}$$

442. Corollarium 1.

Fig. 80. Momentum inertiae μ prismatis triangularis recti ABCDEF (80. Fig.) respectu axeos AF, si uterque angulus baseos ad B, C sit acutus, aequabitur summae momentorum prismatum ACpqDF, ABpqEF basium ad p, q rectangularium, in quae illud plano ApqF ad CBED perpendiculari potest dividi (399. §.): quare, cum pro $Ap = a$, $Bp = b$, $Cp = c$, $AF = l$ per (441. §.) debeat esse

$$\text{Mom. ABpqEF} = \frac{1}{12} abl(3a^2 + b^2);$$

$$\text{Mom. ACpqDF} = \frac{1}{12} acl(3a^2 + c^2);$$

Fiet eo ipso

$$\mu = \frac{1}{12} abl(3a^2 + b^2) + \frac{1}{12} acl(3a^2 + c^2);$$

hinc, ob prismatis massam $M = \frac{1}{2} al(b+c)$, erit

$$\mu = \frac{1}{12} al(b^3 + c^3 + 3a^2(b+c)) = \frac{1}{6} M(3a^2 + b^2 + c^2 - bc).$$

443. Corollarium 2.

Fig. 81. Si autem unus angulus baseos ABC prismatis triangularis recti ABCDEF, puta angulus ad C (81. Fig.) sit obtusus, et planum ApqF ad BCDE perpendiculare; erit momentum inertiae prismatis ABCDEF respectu axeos AF aequale differentiae momentorum prismatum ABpqEF, ACpqDF (400. §.): cum ergo sit pro $Ap = a$, $Bp = b$, $Cp = c$, et $AF = l$ per (441. §.)

$$\text{Mom. ApqEF} = \frac{1}{12} abl(3a^2 + b^2);$$

$$\text{Mom. ACpqDF} = \frac{1}{12} acl(3a^2 + c^2);$$

erit momentum μ prismatis ABCDEF respectu axeos AF

$$\mu = \frac{1}{12} abl(3a^2 + b^2) - \frac{1}{12} acl(3a^2 + c^2);$$

adeo-

$$\text{adeoque ob illius massam } \frac{1}{2}al(b-c)=M \\ \mu = \frac{1}{12}al(b^3-c^3+3a^2(b-c)) = \frac{1}{6}M(3a^2+b^2+c^2+bc).$$

444. Corollarium 3.

Si basis ABC (80. Fig.) prismatis sit aequicrura angulorum ad C, B Fig. 80. aequalium; erit $b=c=\frac{1}{2}BC$, et $a=\frac{1}{2}\sqrt{(4AB^2-BC^2)}$ in (442. §.): pro $AB=AC=\alpha$ et $BC=\beta$, $AF=l$ erit ergo momentum inertiae μ prismatis ABCDEF respectu axeos AF

$$\mu = \frac{1}{12} \left(\frac{\beta^3}{8} + \frac{\beta^3}{8} + \beta \cdot \frac{3}{4}(4\alpha^2-\beta^2) \right) \frac{1}{2}\sqrt{(4\alpha^2-\beta^2)}; \\ \text{feu } \mu = \frac{\beta l}{48} (6\alpha^2-\beta^2)\sqrt{(4\alpha^2-\beta^2)} = \frac{1}{12}M(6\alpha^2-\beta^2).$$

445. Corollarium 4.

Momentum autem inertiae prismatis triangularis recti regularis baseos aequilaterae respectu axeos AF erit pro $\alpha=\beta=AB=BC=CA$, et $AF=l$ per (444. §.)

$$\mu = \frac{5}{48}\alpha^4 l \sqrt{3} = \frac{5}{12}M\alpha^2.$$

446. Corollarium 5.

Momentum inertiae cujuslibet prismatis recti regularis (49. Fig.) re- Fig. 49. spectu illius axeos PQ, datis latere baseos $AB=\beta$, radio $PA=\alpha$, axe $PQ=l$, et numero n laterum AB, BC, CD, etc., invenietur, si capiatur momentum inertiae prismatis triangularis APBbaQ per (444. §.), illudque multiplicetur per numerum n talium prismatum datum prisma constituentium (399. §.): ea propter, si M denotet massam totius prismatis ABCDEedcba, erit illius momentum inertiae respectu axeos PQ

$$\mu = \frac{n}{48}\beta l (6\alpha^2-\beta^2)\sqrt{(4\alpha^2-\beta^2)} = \frac{1}{12}M(6\alpha^2-\beta^2).$$

447. Corollarium 6.

Momentum inertiae cujuslibet parallelepipedum ABCFGHDE (82. Fig.) Fig. 82. respectu axeos MN coincidentis cum ejus latere ED invenies, si illud in duo prismata triangularia FGEDHA, FCEDBA mente resolvas; horum momenta inertiae respectu axeos MN per (441. 442. 443. §.) quaeras; tum in unam summam colligas (399. §.).

448. Corollarium 7.

In specie ergo, si $ABCFGHDE = M$ sit parallelepipedum rectangulum, et $GE = l$, $CE = a$, $ED = b$; erit illius massa $M = abl$, et momentum inertiae respectu axeos MN per (447. 441. §.)

$$\mu = \frac{1}{12} GE \cdot GF \cdot ED (3GE^2 + GF^2) + \frac{1}{12} EC \cdot FC \cdot ED (3EC^2 + FC^2),$$

feu $\mu = \frac{1}{12} abl(a^2 + l^2) = \frac{1}{12} M(a^2 + l^2).$

449. Corollarium 8.

Si $a = CE$, et $b = ED$ continuo decrescat, tum prope evanescat; abibit parallelepipedum in virgam tenuissimam $GE = l$, cujus momentum inertiae respectu axeos MN ad illam perpendicularis poterit poni $= \frac{1}{12} Ml^2 = \frac{1}{12} l^3$ (448. §.).

450. Corollarium 9.

Si vero tantum $a = CE$ decrescat et prope evanescat; debet parallelepipedum rectangulum abire in laminam tenuissimam pariter rectangulam $GHDE$, cujus momentum inertiae respectu axeos MN , pro $EG = l$, $ED = b$, poterit poni $= \frac{1}{12} Ml^2 = \frac{1}{12} bl^3$ (448. §.).

451. Corollarium 10.

Si denique $b = ED$ adeo parvi valoris sit, ut prope evanescat; parallelepipedum rectangulum abibit in laminam tenuissimam rectangulam $FCEG$, cujus momentum inertiae respectu axeos MN ad illam perpendicularis poterit poni $= \frac{1}{12} M(a^2 + l^2) = \frac{1}{12} al(a^2 + l^2)$ pro $a = CE$, $l = GE$ (448. §.).

452. Corollarium 11.

In cubo $AFED$ erit $GE = CE = ED = l = a = b$; momentum inertiae cubi $AFED$ respectu axeos MN erit ergo $\frac{1}{12} a^3(a^2 + a^2) = \frac{2}{12} a^5 = \frac{1}{6} Ma^2$ (448. §.).

DISSERTATIO XII.
DE
MOTU MASSARUM CIRCA AXES FIXOS.

453. DEFINITIO.

Si corpus rigidum Z (60. §.) circa lineam rectam R positione datam sic moveatur, ut haec durante motu eundem perpetuo situm respectu omnium punctorum corporis Z retineat; erit ejus motus *gyratorius*, et recta R *Axis gyrationis*, et quidem *fixus* (qualis in sequentibus disquisitionibus ubique subintelligetur), si is perfecte quiescat, nullisque viribus cedat.

454. Corollarium 1.

Singula puncta a, A (83. Fig.) corporis in motu gyratorio circa datum axem MN constituti easdem perpetuo servant distantias af, AF ab axe gyrationis MN (453. §.).

455. Corollarium 2.

In motu igitur gyratorio debent singula puncta a, A corporis describere peripherias circularum abc, ABC ad axem gyrationis MN perpendicularium, centraque f, F in illo habentium, quorum radii af, AF aequantur perpendicularibus ex punctis a, A ad eundem axem demissis (454. §.).

456. Corollarium 3.

Cum autem durante motu gyratorio corporis circa datum axem MN singula ejus puncta tam ab axe MN (454. §.), quam inter se easdem perpetuo distantias servant (453. 60. §.); evidens est, singula puncta a, A quovis tempore t per arcus similes ad, AD promoveri, interceptos inter crura af, df et AF, DF angulorum aequalium afd, AFD , quos perpendicularia af, AF ex iisdem punctis ad axem MN ducta intra idem tempus debent percurrere.

457. DEFINITIO.

Si recta af perpendicularis ad axem gyrationis MN circa hunc axem in circulo acb moveatur, debeat illa quovis tempusculo t per certum angulum afd promoveri independentem a longitudine ejusdem rectae: quamobrem licebit rectae af et cuivis ejus puncto a , α ejusmodi celeritatem tribuere, per quam ea ad certum angulum afd certo tempore percurrendum determinetur (257. §.); atque haec deinceps nomine *Celeritatis angularis* rectae af et cujuslibet ejus puncti debeat intelligi.

458. Corollarium 1.

Spatia, quae celeritatibus angularibus percurri supponuntur, sunt totidem anguli, non autem lineae ut in (252. §.): semper vero illae et hi anguli debent instar quantorum heterogeneous concipi, quorum unum alteri aequari nequeat (456. §.).

Scholion.

Contra rei naturam loquuntur idcirco, qui celeritatem angularem in ipsa illius definitione certo angulo ponunt aequalem: in (264. §.) exposui, quo sensu celeritas puncti in linea recta vel curva incedentis per certum spatium possit exprimi; mox vero declarabo, quo sensu celeritatem quoque angularem certo angulo vel arcui aequare liceat. *Eulerus*, in *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, celeritatem angularem in motu gyatorio vocat celeritatem puncti, cujus distantia ab axe gyrationis unitate exprimitur: is ergo dat definitionem celeritatis angularis obscuriorem suo definito, assumens in ipsa definitione, quod ex genuina notione celeritatis angularis demonstrandum esset.

459. Corollarium 2.

Motus rectae af circa datum axem MN erit *uniformis* seu aequalis, si illa singulis tempusculis aequalibus per aequales angulos promoveatur, proinde eadem perpetuo celeritate angulari circa MN volvatur (458. 457. 254. §.).

460. Corollarium 3.

Fig. 83. 84. Quodsi ergo duae rectae af , su (83. 84. Fig.) ad axes fixos MN , mn perpendiculares motu uniformi incedant in circulis acb , pqr ; erunt anguli afd , sur , quos illae intra idem tempus percurrerint, inter se ut celeritates angulares earundem rectarum (459. 458. 260. §.).

461. Co-

461. Corollarium 4.

Anguli vero afd , afe , quos recta af , determinata celeritate angulari motu uniformi circa axem MN in circulo acb incedens, intra diversa tempora percurrerit, et anguli afd , sur , quos duae rectae af , su , aequalibus celeritatibus angularibus in circulis acb , pqr circa diversos axes MN , mn motu uniformi incedentes, diversis temporibus confecerint, erunt inter se in ratione directa respectivorum temporum (259. 258. 261. §).

462. Corollarium 5.

Quo motus ejusmodi ad calculum possit revocari, congruae mensurae celeritatum angularium, spatiorum (458. §), et temporum constituentur oportet. Retento minuto secundo pro mensura temporum (262. §. 2. n.), fumatur, ob (458. et 262. §. 1. n.), pro mensura spatiorum angulus aequali angulo δ , inter cujus latera intercipiatur arcus ex ejus vertice radio $= 1$ descriptus et eidem radio aequalis (Vol. I. §. 5. Schol. 3. n. 2.).

463. Corollarium 6.

Hinc licebit pro mensura cujuslibet celeritatis angularis γ , qua in motu uniformi (459. §) angulus A quovis minuto secundo percurratur, eam determinatam celeritatem angularem α accipere, qua motu pariter uniformi quovis minuto secundo angulus δ sumtus pro mensura angulorum A (462. §) debeat percurri (262. §. n. 1. 4.).

464. Corollarium 7.

In (463. §) erit ergo $A : \delta = \gamma : \alpha$ per (461. §): igitur $\frac{A}{\delta} = \frac{\gamma}{\alpha}$, id est: exponens rationis anguli A quovis minuto secundo celeritate angulari γ percurri ad angulum δ pro ejus mensura acceptum aequatur exponenti rationis ipsius celeritatis angularis γ ad celeritatem angularem α pro illius mensura acceptam (463. §). Quodsi ergo ejusmodi exponentes per A et γ deinceps exprimantur; poterit poni $\gamma = A$, atque hoc unico sensu, improprio ut patet, licebit celeritatem angularem γ in motu uniformi (459. §) aequare angulo A , qui eadem celeritate quovis minuto secundo percurritur (264. §).

465. Corollarium 8.

Verum, si ϕ denotet arcum radio $= 1$ ex vertice anguli A inter ejus crura descriptum, aequabitur ϕ exponenti rationis anguli A ad angulum δ pro illius mensura acceptum (462. §.) et (Vol. I. §. 5. Schol. 3. n. 2.): hoc ergo exponente expressio per A poterit poni $A = \phi$, hinc etiam $\gamma = \phi$ (464. §.). Eodem itaque sensu, quo celeritatem angularem γ in quovis motu uniformi (459. §.) angulo A aequare licuit, qui eadem celeritate quovis minuto secundo percurritur (464. §.), poterit illa aequari etiam arcui ϕ , qui ex vertice ejusdem anguli radio $= 1$ inter ipsius crura descriptus potest cogitari.

466. Corollarium 9.

Fig. 83. Per haec jam poterit motus uniformis rectorum circa datos axes (459. §.) eadem prorsus ratione, qua motus uniformis punctorum in lineis incedentium (265. 266. 267. §.), determinari. Si enim recta af motu ejusmodi in circulo abc circa axem MN volvatur celeritate angulari C , angulumque $S = afd$ quocumque tempore T percurrat; debet illa quovis minuto secundo percurrere angulum $A : S = 1'' : T$ (461. §.); erit ergo $\frac{A}{\delta} : \frac{S}{\delta} = 1 : \frac{T}{1''}$ denotante δ mensuram angulorum A, S (462. §.), seu $\frac{C}{\alpha} : \frac{S}{\delta} = 1 : \frac{T}{1''}$ (464. §.), unde, si per C, S, T intelligentur exponentes rationum celeritatis C , spatii S , et temporis T ad mensuras $\alpha, \delta, 1''$ (462. 463. §.), necessario sequitur $C : S = 1 : T$, hinc $S = CT, C = \frac{S}{T}, T = \frac{S}{C}$.

467. Corollarium 10.

Haecenus motum gyrationem uniformem rectorum circa datos axes consideravimus (459. §.). *Difformis* seu *inaequabilis* erit ejusmodi motus cujusvis rectorum, si celeritas angularis illo durante non maneat perpetuo eadem (457. §.), sed continuo mutetur (268. §.). In tali motu habebit ergo recta af quovis momento aliam celeritatem: celeritas angularis, quam illa in fine certi temporis T ab initio motus computati habuerit, erit ejus celeritas tempori T debita aestimanda ex angulo, quem eadem recta quovis minuto secundo tali celeritate percurreret, si ejus motus esset uniformis,

mis, vel ex arcu radio $= 1$ ex vertice ejusdem anguli inter ejus crura descripto (271. 464. 465. §.).

468. Corollarium 11.

Quocunque autem tempore duret motus gyratorius dati corporis circa datum axem MN; necesse est, ut omnia illius puncta eadem celeritate angulari circa axem MN volvantur (456. 457. §.): censebitur ergo totum corpus quovis momento determinatam habere celeritatem angularem, nimirum illam, quam singula ejus puncta eodem momento habuerint; motus autem ipsius gyratorius uniformis erit vel difformis, prout perpendiculara ex singulis ejus punctis ad axem gyrationis demissa motu uniformi vel difformi (459. 467. §.) circa eundem axem fuerint mota.

469. DEFINITIO.

Eodem tempore, quo in motu gyratorio dati corporis circa datum axem MN (453. §.) perpendicularum afix quocunque ejus puncto a ad axem MN demissum per certum angulum afd promovetur, percurritur ab ipso puncto a arcus ad circuli acb: celeritas puncti a, qua ejusmodi arcus percurritur (257. §.) vocabitur deinceps *Celeritas linearis* seu *vera* puncti a, quo illa ab ejus perpendicularique af celeritate angulari (457. §.) distinguatur.

470. Corollarium 1.

Vera seu linearis celeritas cujuslibet puncti a corporis in motu gyratorio circa datum axem MN constituti aestimabitur ex arcu circulari, quem illud eadem celeritate motu uniformi circa axem MN percurreret (469. 264. 271. §.).

471. Corollarium 2.

Sunt autem arcus ad, AD a quibuslibet duobus punctis a, A corporis circa axem MN motu gyratorio incedentis quovis tempore percurfi inter se similes (456. §.), adeoque inter se in ratione distantiarum perpendicularium af, AF eorundem punctorum ab axe MN: in motu gyratorio corporis circa datum axem MN sunt ergo verae seu lineares celeritates singulorum ejus punctorum quovis momento inter se ut perpendiculara ex iisdem punctis ad axem MN demissa (470. §.).

472. Corollarium 3.

Quamobrem debebunt esse celeritates lineares omnium punctorum corporis in motu gyratorio circa axem MN constituti inter se aequales, si illa aequaliter distant ab axe MN; puncta vero inaequaliter distantia ab axe MN inaequales habebunt celeritates, majores magis, et minores minus distantia (471. §.).

473. Corollarium 4.

Cognita unici puncti a corporis circa axem MN moti celeritate vera seu lineari c, datisque distantis singulorum punctorum ab axe MN, poterit eo ipso determinari celeritas vera x cujusvis alterius puncti A: erit enim $x:c = AF:af$ (471. §.); consequenter $x = c \frac{AF}{af}$.

474. Corollarium 5.

Si punctum a corporis in motu gyratorio circa axem MN tantam per arcum a d acquirat celeritatem linearem seu veram c, et angularem γ , ut illud eadem celeritate motu uniformi circa MN quovis minuto secundo arcum = de, recta vero af ex a ad MN perpendicularis angulum = dfe deberet percurrere; erit $c = de$, $\gamma = \phi$ pro arcu ϕ ex f radio = 1 inter crura anguli dfe descripto (470. 465. §.), et $de:\phi = af:1$: debebit ergo esse

$$c = \gamma.af, \text{ et } \gamma = \frac{c}{af}.$$

475. Corollarium 6.

Adeoque, si noscatur celeritas angularis γ in motu gyratorio dati corporis circa datum axem (468. §.) constans (459. §.), vel certo tempore t ab initio motus computati debita (467. §.), eaque multiplicetur per distantiam af dati puncti a ab axe MN, determinabitur eo ipso vera seu linearis celeritas c puncti a (474. §.), a qua inventio celeritatum linearium omnium reliquorum punctorum ejusdem corporis dependebit (473. §.).

476. Corollarium 7.

Data autem celeritate vera seu lineari c unici puncti a corporis in motu gyratorio circa datum axem MN constituti, si illa dividatur per distantiam af ejusdem puncti ab eodem axe, inveniatur eo ipso celeritas angularis γ puncti a (474. §.) totiusque corporis (468. §.).

477. Theo-

477. Theorema.

Si in puncta b et a (85. Fig.) vel a et d plani ABCD, circa axem Fig. 85. MN fixum cum illo firmissime connexum libere mobilis, aequidistantia ab axe MN agant vires aequales P et Q vel Q et R directionibus bP et aQ vel aQ et dR ad idem planum perpendicularibus; erunt eae vires inter se in aequilibrio.

Demonstratio.

1. Si puncta b, a aequaliter distent ab axe MN, quo perpendiculara $b\beta$, $a\alpha$ ex illis ad MN ducta sint inter se aequalia; debet recta ab in axe MN bissecari: cum igitur vires aequales P, Q agentes in puncta b, a plani AC circa axem fixum MN volubilis necessario in aequilibrio esse debeant, si illae agentes in puncta b, a rectae inflexilis ba et circa fixum ejus punctum medium c libere mobilis essent in aequilibrio; patet, illas re ipsa futuras in aequilibrio (76. §.).

2. Si autem in puncta a, d aequidistantia ab axe MN agant vires aequales Q, R; ductis ad MN perpendicularis $a\alpha$, $d\beta$, productoque perpendicularo $d\beta$ in b, ut sit $b\beta = d\beta = a\alpha$, cogitentur in b agere vires P, S, inter se et viribus aequalibus Q, R aequales, directionibus bP, bS ad planum AC perpendicularibus: erit vis S cum R, et P cum Q in aequilibrio, per demonstrata in (1). Quare erunt omnes quatuor vires S, R, P, Q inter se in aequilibrio (64. §.), et eo ipso, quia vires P, S sunt inter se seorsim in aequilibrio (66. §.), debebunt iis sublati vires Q, R manere in aequilibrio (65. §.).

478. Corollarium.

Si duo plana ABDC, CDFE (86. Fig.) sub quocunque angulo invariabili BDF circa axem fixum MN mobili inter se sint connexa, in quorum puncta a, c aequidistantia ab axe MN agant vires aequales P, Q directionibus aP, cQ ad plana AD, ED perpendicularibus; erunt hae vires in aequilibrio. Sit ab in plano AD, $bf = ab$ in plano ED perpendicularis ad axem MN, et in punctum f cogitentur agere vires q, p inter se et viribus aequalibus P, Q aequales directionibus fq, fp ad planum ED perpendicularibus: jacebunt directiones virium P, p in plano anguli abf; vires idcirco P, p erunt inter se in aequilibrio (76. §.). Quare, cum etiam vires q, Q debeant inter se esse in aequilibrio (477. §.), erunt omnes quatuor vires P, p, q, Q inter se in aequilibrio (64. §.): sublati itaque

viribus p, q inter se seorsim in aequilibrio existentibus (66. §.), manebunt reliquae P, Q inter se in aequilibrio (65. §.).

479. Theorema.

Si in duo puncta a, e planorum $ABDC, EFDC$ sub angulo invariabili et circa axem fixum MN libere mobili inter se connexorum agant vires P, R directionibus ad eadem plana perpendicularibus; erunt illae in aequilibrio, si sint inter se in ratione inversa distantiarum ab, ed punctorum a, e ab axe MN , id est, si sit $P:R = ed:ab$: et vicissim, si vires P, R sint in aequilibrio, erit $P:R = ed:ab$.

Demonstratio.

1. Per hypothesim sunt ab, ed perpendiculares distantiae punctorum a, e ab axe MN . Sit $ed > ab$, et fiat $cd = ab$, atque in punctum c cogitentur agere vires r, Q inter se et vi P aequales directionibus cr, cQ ad planum ED perpendicularibus.

2. Debeant vires r, Q inter se necessario esse in aequilibrio per (66. §.), quidquid sint reliquae vires P, R .

3. Ponamus jam esse $P:R = ed:ab$; erit ob (1) etiam $r:R = ed:cd$: vires igitur r, R erunt per (92. §.) inter se in aequilibrio. Quamobrem, cum etiam vires P, Q debeant esse inter se in aequilibrio (478. §.), erunt omnes quatuor vires r, R, P, Q inter se in aequilibrio (64. §.): unde, quia vires r, Q sunt seorsim inter se in aequilibrio (2), necessario sequitur, vires quoque P, R inter se seorsim esse in aequilibrio (65. §.).

4. Si autem dicas, vires P, R esse in aequilibrio; erunt ob (2) omnes quatuor vires r, Q, P, R inter se (64. §.), et binae P, Q seorsim inter se in aequilibrio, ob (1) per (478. §.): sublati igitur viribus P, Q manebunt vires r, R inter se in aequilibrio (65. §.). Erit itaque $r:R = ed:cd$ (92. §.); hinc ob (1) etiam $P:R = ed:ab$.

480. Corollarium.

Fig. 83. Si duae rectae af, AF (83. Fig.) cum axe fixo MN sub angulis rectis firmissime sint connexae, ita ut et utraque circa axem MN libere possit converti, et impossibile sit, ut una illarum circa MN convertatur, quin eo ipso altera quoque circa MN debeat converti; in puncta vero a, A agant vires P, R secundum directiones aP, AR perpendiculares ad af, AF in

in planis ad MN perpendicularibus jacentes, in quibus jacent rectae af, AF: nitentur hae vires rectas af, AF in partes oppositas circa axem MN eadem prorsus efficacia convertere, ac si rectae af, AF pertinerent ad bina plana circa axem MN mobilia et in hoc firmissime inter se connexa, ad modum, qui in (86. Fig.) est conspicuus. Vires ergo P, R erunt inter se in aequilibrio, si illae fuerint in ratione inversa rectarum af, AF, id est, si fuerit $P:R=AF:af$; et vicissim erit $P:R=AF:af$, si vires P, R sint in aequilibrio (479. §.).

481. Problema.

Data directione vis V agentis in punctum A (87. Fig.) circuli Apq Fig. 87. circa axem fixum MN per ejus centrum C transeuntem et ad illud planum perpendicularem libere mobilis; determinare vim, quae tota sua efficacia circulum Apq circa axem MN convertere nititur.

Solutio.

1. Directio datae vis V sit AD in plano Aaeb perpendiculari ad planum circuli Apq hocque in Ab secante, quae detur per angulos $DAb=\beta$, $bAC=\alpha$ inter eandem directionem AD, radium circuli AC, et intersectionem communem Ab planorum Aaeb, Apq comprehensos.

2. Si in plano aAbe sit aA perpendicularis ad planum circuli Apq (1); poterit vis V agens in punctum A directione AD in duas vires resolveri, quarum una agat directione Aa sitque $=V\sin DAb=V\sin\beta$, et altera agat directione Ab sitque $=V\cos DAb=V\cos\beta$, ob (1) per (115. §.). Quare, cum prior vis agens in punctum A directione Aa perpendiculari ad planum circuli Apq, adeoque parallela axi gyrationis MN nulla ratione possit influere in conversionem ejusdem circuli circa axem MN; videndum est, quantum influxum in hanc conversionem vis altera $=V\cos\beta$ agens in punctum A directione Ab jacente in plano circuli (1) habeat.

3. Si ad punctum A in plano circuli Apq ducatur tangens AB; erit illa perpendicularis ad radium AC. Vis ergo $=V\cos\beta$ in (2) agens in punctum A directione Ab poterit resolveri in duas vires, quarum una $=V\cos\beta\cos bAC=V\cos\beta\cos\alpha$ agat directione AC, et altera $=V\cos\beta\sin bAC=V\cos\beta\sin\alpha$ agat directione AB per (115. §.). Est vero evidens, priorem vim nullo pacto in conversionem circuli Apq circa axem MN posse influere; alteram vero vim agentem directione AB in plano

circuli Apq ad radium ejus AC perpendiculari tota sua efficacia niti, eundem radium circumque circa axem MN convertere.

4. In assumpta hypothefi (1) tantum ergo habebit data vis V, agens in punctum A secundum directionem AD, influxum in conversionem circuli Apq circa axem MN, quantum haberet vis $= V \cos \beta \sin \alpha$, si haec in punctum A secundum directionem tangentis AB ageret, quae tota sua efficacia eundem circum circa axem MN niteretur convertere (3).

482. Corollarium 1.

Semper, si in (481. §. 1. n.) fit angulus $\angle BAC = \alpha = 0$, erit vis $V \cos \beta \sin \alpha = 0$: quoties ergo directio AD datae vis V agentis in punctum A circuli Apq jacuerit in plano AaeC perpendiculari ad planum circuli et cum hoc radium AC pro communi intersectione habente, erit vis, quae in conversionem circuli Apq circa axem MN deberet impendi, aequalis nihilo, ipsaque conversio impossibilis (481. §. 1. 4. n.).

483. Corollarium 2.

Et pro angulo $\angle DAB = \beta = 0$ erit vis $V \cos \beta \sin \alpha = V \sin \alpha$, id est: si directio vis V agentis in punctum A circuli Apq jaceat in plano circuli, ita ut illa cum radio AC angulum α comprehendat; efficacia, qua illa circum Apq circa axem MN nitetur convertere, aequabitur efficaciae, qua vis $= V \sin \alpha$ in puncto A secundum directionem tangentis AB applicata eundem circa MN convertere niteretur; haec vero vis tota deberet in ejus conversionem impendi (481. §. 1. 4. n.).

484. Corollarium 3.

Quodsi autem ponas angulum $\alpha = 90^\circ$ in (483. §.); erit vis $V \sin \alpha = V$, id est: vis V agens in punctum A circuli Apq secundum directionem tangentis AB ad radium AC eo ipso perpendicularem, nitetur tota sua efficacia eundem circum circa axem MN convertere (483. §.).

485. Corollarium 4.

Fig. 88. Conditio essentialis, sine qua nulla vis V agens in punctum aliquod B (88 Fig.) corporis abcde, circa axem fixum MN cum illo firmissime connexum libere mobilis, poterit corpus abcde circa eundem axem converti, est, ut illius directio non jaceat in plano circum bpq per B transeuntem et axi MN perpendicularem ita secante sub angulo recto, ut intersectio

sectio coincidat cum radio BC ad idem punctum B ducto (482. §.): omni autem alio casu aderit una vis per (483. 484. 481. §. 4. n.) determinabilis, quae, secundum directionem tangentis BP ad radium BC perpendiculararem in punctum B actura, tota sua efficacia corpus abcdē circa axem MN nitetur convertere.

486. Corollarium 5.

Si igitur motus gyratorius corporum circa datos axes fixos dependens a viribus in quacunque illorum puncta agentibus generatim fuerit determinandus, licebit supponere, directiones omnium virium coincidere cum tangentibus, quae ad eadem puncta totidem circulorum ad axes gyrationis perpendicularium centraque in iisdem axibus habentium possunt duci (485. §.)

487. Theorema.

Si in punctis B, F corporis abcdē circa datum axem MN libere mobilis applicentur vires P, Q, quae idem corpus secundum directiones BP, FQ in partes oppositas circa axem MN nitantur convertere (486. §.): erunt illae in aequilibrio, si fuerint inter se in ratione inversa distantiarum BC, FD punctorum B, F ab axe gyrationis MN, seu si fuerit $P:Q = FD:BC$: et vicissim, quoties vires P, Q fuerint in aequilibrio, toties erit $P:Q = FD:BC$.

Demonstratio.

Per hypothesim coincidunt directiones BP, FQ virium P, Q cum tangentibus, quae ad puncta B, F circulorum Bpq, Fnm ad MN perpendicularium et e centris C, D radiis CB, DF descriptorum possunt duci: quodsi ergo cogitentur duo plana ABCD, FECD, quorum primum sit perpendiculare ad planum circuli Bpq hocque in BC interfecet, et alterum sit perpendiculare ad planum circuli Fnm, atque istud in FD interfecet; erunt directiones BP, FQ virium P, Q perpendiculares ad plana ABCD, FECD, unde, ut patet, necessario sequitur, vires P, Q debere esse in aequilibrio, si est $P:Q = FD:BC$; et esse $P:Q = FD:BC$, si vires P, Q sunt in aequilibrio (479. §.).

488. Problema.

Si, dato puncto A circa axem fixum MN in distantia AF (83. Fig.) Fig. 83. libere mobili, cogitetur in eodem puncto massa μ collecta, quam vis quaecunque R secundum directionem AR ad motum circa MN sollicitet (486. §.): invenire celeritatem veram C puncti A, quam eadem vis tempore T producat.

Solutio.

1. Si vis R sit invariabilis; debet esse $C = 2g \frac{R}{\mu} T$ celeritas vera puncti A (469. §.), quam ea vis tempore T producet (337. 338. §.).

2. Quodsi autem massa μ in puncto A collecta a vi variabili ad motum circa axem MN sollicitetur, et eadem vis intra tempus T fiat $\equiv R$; debet esse per (387. 347. §.) $\varepsilon C = 2g \frac{R}{\mu} \varepsilon T$.

489. Corollarium 1.

Omni ergo casu, seu massa μ collecta in puncto A a vi invariabili $\equiv R$ ad motum circa axem MN urgeatur, seu a vi variabili, quae intra tempus T , durante motu massae μ circa MN , fiat $\equiv R$, ita erit comparata vera celeritas C puncti A , quam eadem vis tempore T producet, ut exponens rationis differentialis ejusdem celeritatis spectatae instar unius functionis temporis variabilis T futurus sit (488. §.).

$$\varepsilon C = 2g \frac{R}{\mu} \varepsilon T.$$

490. Corollarium 2.

Quaelibet vis, tam invariabilis R , quam variabilis intra tempus T in vim $\equiv R$ abiens, si illa datam massam μ in puncto A collectam ad motum circa axem MN secundum directionem AR continuo sollicitet, producet intra tempus T celeritatem angularem γ puncti A rectaeque AF ad MN perpendicularis, cujus exponens differentialis erit per (489. 476. §.).

$$\varepsilon \gamma = \frac{\varepsilon C}{AF} = \frac{2g.R}{\mu.AF} \varepsilon T.$$

491. Problema.

Si, datis duobus punctis a, A inter se et cum axe gyrationis MN ita connexis, ut neutrum illorum circa MN possit converti, quin etiam alterum circa MN eo ipso moveatur, in puncto a massa m collecta cogitetur, in puncto vero A agat quaecunque vis invariabilis R secundum directionem AR (486. §.); invenire celeritatem angularem γ , quam vis R tempore T producat.

Solutio.

Solutio.

1. Puncta A, a rectaeque AF, af concipient tempore T eandem celeritatem angularem γ (468. §.).

2. Cogitentur in puncto a applicari duae vires invariabiles inter se aequales P, p secundum directiones oppositas aP, ap (485. §.); erunt eae inter se in aequilibrio (66. §.); consequenter erit punctum a ob vires P, p, R in eodem statu motus, in quem illud ob solam vim R, absentibus viribus P, p intra tempus T potest reponi. Quodsi ergo vires P, p ita sint comparatae, ut sit $P=p:R=AF:af$, adeoque $P=p=R \cdot \frac{AF}{af}$; debebit punctum a etiam in hac hypothese in eodem prorsus statu motus manere, proinde eandem celeritatem angularem γ tempore T concipere (1). Sed vires P, R sunt in hac hypothese inter se in aequilibrio (480. §.); quae idcirco tolli possunt, quin ideo status motus puncti a turbetur: punctum ergo a debebit datam celeritatem γ intra tempus T concipere, si illud a vi invariabili $p=R \cdot \frac{AF}{af}$ ad motum circa MN continuo urgeatur.

3. Hinc autem (2) per (490. §.) sequitur, celeritatem angularem γ debere esse

$$\gamma = \frac{2g}{m \cdot af} \cdot \frac{R \cdot AF}{af} \cdot T = \frac{2g \cdot R \cdot AF}{m \cdot af^2} T.$$

492. Corollarium 1.

Coaequantis celeritatibus angularibus, quarum unam vis invariabilis R agens in punctum A intra tempus T debet producere, si in eodem puncto massa μ collecta cogitetur, et nulla in a; alteram vero eadem vis debet generare, si in puncto a massa m collecta concipiatur, et nulla in A, habebimus per (490. 491. §.).

$$\frac{2g \cdot R}{\mu \cdot AF} T = \frac{2g \cdot R \cdot AF}{m \cdot af^2} T;$$

$$\text{igitur } m \cdot af^2 = \mu \cdot AF^2.$$

Et vicissim pro $m \cdot af^2 = \mu \cdot AF^2$, adeoque $\frac{1}{\mu \cdot AF} = \frac{AF}{m \cdot af^2}$ erunt celeritates angulares in (490. 491. §.) inter se aequales.

493. Corollarium. 2.

Producta $m.af^2$, $\mu.AF^2$ ex massis m, μ , quas in punctis a, A collectas imaginati nobis sumus (490. 491. §.), in quadrata distantiarum respectivarum af, AF ab axe gyrationis MN sunt momenta inertiae earundem massarum respectu axeos MN (398. §.): vis ergo invariabilis R agens in punctum A eandem tempore T producet celeritatem angularem γ , seu massa μ in puncto A collecta, nulla vero in a , seu massa m in puncto a collecta, nulla vero in A cogitetur, modo massae m, μ ita sint comparatae, ut momentum inertiae massae μ in puncto A respectu axeos gyrationis MN aequetur momento inertiae massae m in puncto a respectu ejusdem axeos (492. §.).

494. Corollarium 3.

Si, data massa m collecta in puncto a , quaeratur vis invariabilis R , quae in puncto A applicata producat celeritatem angularem γ intra tempus T ; erit illa ob (491. §.)

$$R = \frac{\gamma.m.af^2}{2g.T.AF}.$$

Per hanc vim invariabilem ita determinatur celeritas angularis γ puncti A rectaeque AF , ut alia vis hac major vel minor in eodem puncto A applicata necessario aliam celeritatem angularem majorem vel minorem deberet intra idem tempus generare (491. §.).

495. Corollarium 4.

Fig. 89.

Si ergo in punctis $a, b, c, d, e, \dots z$ (89. Fig.) circa datum axem MN mobilibus et cum eodem per perpendiculara $aa', bb', cc', dd', ee', \dots zz'$ ita connexis, ut punctum R per perpendicularum RS cum MN connexum, circa MN converti nequeat, quin eo ipso omnia puncta circa MN debeant in eandem partem converti, totidem massae $A, B, C, D, E, \dots Z$ collectae cogitentur, A' vero, $B', C', D', E', \dots Z'$ sint vires invariabiles, quarum prima A' , vel secunda B' , aut tertia C' , et sic porro, in puncto R ad celeritatem angularem γ intra tempus T producendam requiratur, prout vel tantum in puncto a adest massa A , vel tantum in b massa B , aut tantum in c massa C , et sic porro; erit per (492. §.)

$$A' =$$

$$A^r = \frac{\gamma \cdot A \cdot a^r a^2}{2g \cdot RS \cdot T}; \quad B^r = \frac{\gamma \cdot B \cdot b^r b^2}{2g \cdot RS \cdot T};$$

$$C^r = \frac{\gamma \cdot C \cdot c^r c^2}{2g \cdot RS \cdot T}; \quad D^r = \frac{\gamma \cdot D \cdot d^r d^2}{2g \cdot RS \cdot T};$$

$$E^r = \frac{\gamma \cdot E \cdot e^r e^2}{2g \cdot RS \cdot T}; \quad - - - - -$$

$$- - - - - Z^r = \frac{\gamma \cdot Z \cdot z^r z^2}{2g \cdot RS \cdot T}.$$

496. Corollarium 5.

Hinc (495. 494 §.) et ex notione celeritatis angularis (457. §.) evidenter sequitur, quod, si omnes massae A, B, C, D, E, - - - Z in suis punctis a, b, c, d, e, - - - z collectae simul circa axem MN debeant moveri, ita ut recta RS dato quocunque tempore T datam celeritatem angularem γ concipiat, ad generationem hujus celeritatis vis una invariabilis

$$\begin{aligned} X &= A^r + B^r + C^r + D^r + E^r + - - - + Z^r = \\ &= \frac{\gamma}{2g \cdot RS \cdot T} (A \cdot a^r a^2 + B \cdot b^r b^2 + C \cdot c^r c^2 + D \cdot d^r d^2 + \\ &\quad + E \cdot e^r e^2 + - - - - - + Z \cdot z^r z^2) \end{aligned}$$

sit necessaria, quin alia aliqua vis invariabilis, vi X major aut minor, in eodem puncto R applicata eandem celeritatem angularem γ intra idem tempus T possit generare.

497. Corollarium 6.

Quamobrem, si in hypothesi massarum A, B, C, D, E, - - - Z in totidem punctis a, b, c, d, e, - - - z circa datum axem MN mobilibus collectarum (495. §.) in puncto R applicetur data vis invariabilis V; convertentur omnes massae circa axem MN, rectaeque RS concipiet intra quodvis tempus T certam celeritatem angularem γ , pro qua debet esse (496. §.)

$$V = \frac{\gamma}{2g \cdot RS \cdot T} (A \cdot a^r a^2 + B \cdot b^r b^2 + C \cdot c^r c^2 + D \cdot d^r d^2 + \\ + E \cdot e^r e^2 + - - - - - + Z \cdot z^r z^2);$$

ipsa igitur celeritas γ erit

$$\gamma = \frac{2g \cdot V \cdot RS \cdot T}{A \cdot a^r a^2 + B \cdot b^r b^2 + C \cdot c^r c^2 + - - - + Z \cdot z^r z^2},$$

id est: celeritas angularis γ , quam vis invariabilis V dato tempore T

generabit, aequatur producto $2gVT.RS$ diviso per summam productorum ex singulis massis $A, B, C, \dots Z$ in punctis $a, b, c, \dots z$ collectis in quadrata distantiarum respectivarum $a'a, b'b, c'c, \dots z'z$ ab axe gyrationis MN .

498. Problema.

Punctum R est cum dato corpore circa axem fixum MN libere mobili ita connexum, ut illud a nulla vi circa MN possit converti, quin eo ipso totum corpus motum gyratorium circa eundem axem concipiat (453. §.): invenire celeritatem angularem γ (457. 468. §.) et veram seu linearem celeritatem C puncti R , quam data vis invariabilis V tempore T debeat generare, si illa in punctum R secundum directionem RV agat (486 §.).

Solutio.

Corpus rigidum, de quo hic sermo est, potest spectari instar aggregati minimarum massularum cum axe gyrationis MN in certis distantis $a'a, b'b, c'c, d'd, e'e, \dots z'z$ cum illo firmissime connexarum (453. 60. §.): cum igitur momentum inertiae ejusdem corporis respectu axeos MN aequetur summae productorum ex singulis massulis in quadrata respectivarum distantiarum ab axe MN (398. §.); obtinebitur celeritas angularis γ , quam data vis invariabilis V intra tempus T producat, si productum $2gVT.RS$ dividatur per momentum inertiae dati corporis respectu axeos MN (495. §.): et si haec celeritas multiplicetur per RS , invenietur celeritas vera puncti R , quam eadem vis intra idem tempus generabit (475. §.). Quamobrem, si pro pondere seu ei proportionali massa P dati corporis denotet Pk^2 illius momentum inertiae respectu axeos MN (402. §.), erit (497. §.)

$$\gamma = 2gT \frac{V.RS}{Pk^2}; \quad C = 2gT \cdot \frac{V.RS^2}{Pk^2}.$$

499. Problema.

In eadem hypothese (498. §.) investigare celeritatem angularem γ et veram C puncti R , quam data quaecunque vis variabilis in R agens tempore T producat.

Solutio.

1. Vis variabilis in puncto R applicata debeat toto tempore T , quo motus gyratorius corporis circa axem MN durare supponitur, crescere vel

vel decrefcere (294. §.), ita ut, fi tempus T crefcat differentia ΔT , et V quantitatem vis in fine temporis T exprimat, haec intra tempusculum ΔT incrementum aliquod ΔV capiat, vel decrementum ΔV patiatur: vis ergo in fine temporis T adeoque initio tempusculi ΔT agens in R erit $= V$; vis vero, quae in fine temporis $T + \Delta T$, confequenter in fine tempusculi ΔT aget in R , erit $= V + \Delta V$, vel $= V - \Delta V$.

2. Semper autem, feu crefcat vis agens in R feu decrefcatur tempore T (1), debet celeritas angularis γ tempore T genita, crefcente tempore T differentia ΔT , augeri certa differentia $\Delta \gamma$, quae celeritati aequabitur a vi in R agente tempusculo ΔT productae.

3. Cum jam initio tempusculi ΔT agat in R vis $= V$, haecque toto tempusculo ΔT continuo crefcat, vel continuo decrefcatur, et in fine tempusculi ΔT fiat $= V + \Delta V$ vel $= V - \Delta V$ (1); evidens eft, vim in R corpus ad motum circa axem MN continuo follicitantem quovis momento, durante motu tempusculo ΔT , minorem effe vi invariabili $= V + \Delta V$ et majorem vi invariabili $= V$, vel majorem vi invariabili $= V - \Delta V$ et minorem vi invariabili $= V$.

4. Igitur in hypothefi vis continuo crefcentis erit celeritas $\Delta \gamma$, quam illa tempusculo ΔT producit (2), major celeritate, quam vis invariabilis $= V$, et minor illa, quam vis invariabilis $= V + \Delta V$ eodem tempusculo produceret (3).

5. Si autem vis continuo decrefcatur, debet effe celeritas $\Delta \gamma$, quam illa tempusculo ΔT generat, minor celeritate, quam vis invariabilis $= V$, et major celeritate, quam vis invariabilis $= V - \Delta V$ intra idem tempusculum generaret (3).

6. Sed, fi P fit pondus feu ei proportionalis maffa corporis circa axem MN mobilis, et Pk^2 illius momentum inertiae refpectu axeos MN , quaevis autem virium invariabilium V , $V + \Delta V$, $V - \Delta V$ feorfim in punctum R agere cogitetur; debet tempusculo ΔT generare per (498. §.)

$$\text{vis } V \text{ celeritatem angularem} = \frac{2gV.RS}{Pk^2} \Delta T;$$

$$\text{vis } V + \Delta V \text{ celeritatem angularem} = \frac{2g(V + \Delta V).RS}{Pk^2} \Delta T;$$

$$\text{vis } V - \Delta V \text{ celeritatem angularem} = \frac{2g(V - \Delta V).RS}{Pk^2} \Delta T.$$

7. Quamobrem habebimus ob (4) (5) (6) pro quovis quantumcunque parvo tempusculo ΔT

$$\Delta \gamma > \frac{2gV.RS}{Pk^2} \Delta T; \text{ et } \Delta \gamma < \frac{2g(V+\Delta V)RS}{Pk^2} \Delta T;$$

vel

$$\Delta \gamma < \frac{2gV.RS}{Pk^2} \Delta T; \text{ et } \Delta \gamma > \frac{2g(V-\Delta V)RS}{Pk^2} \Delta T.$$

8. Potest porro, sicut in (347. §. 6. n.), poni $\Delta V = 1\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.}$ pro certis coefficientibus $1, m, n, \text{etc.}$ independentibus a ΔT ; pro hoc vero valore in (7) substituto fiet

$$\frac{\Delta \gamma}{\Delta T} > \frac{2gV.RS}{Pk^2}; \text{ et } \frac{\Delta \gamma}{\Delta T} < \frac{2gV.RS}{Pk^2} + \frac{2g.RS}{Pk^2} (1\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.});$$

vel

$$\frac{\Delta \gamma}{\Delta T} < \frac{2gV.RS}{Pk^2}; \text{ et } \frac{\Delta \gamma}{\Delta T} > \frac{2g.VRS}{Pk^2} - \frac{2g.RS}{Pk^2} (1\Delta T + m\Delta T^2 + n\Delta T^3 + \text{etc.}).$$

9. Quapropter erit per (Vol. I. §. 131.) exponens rationis differentialis celeritatis angularis γ consideratae instar unius functionis temporis variabilis T omni casu

$$\epsilon \gamma = \frac{2g.RS}{Pk^2} V \epsilon T.$$

10. Hinc, quia pro celeritate angulari γ debet esse $C = \gamma.RS$ vera seu linearis celeritas puncti R ; erit exponens rationis differentialis verae celeritatis C puncti R (475. §.) omni casu, seu crescat seu decrescat vis agens in R , $\epsilon C = \epsilon \gamma.RS$, adeoque per (9)

$$\epsilon C = \frac{2g.RS^2}{Pk^2} V \epsilon T.$$

11. Cognita ergo lege, qua data vis variabilis, durante motu gyatorio corporis circa axem MN tempore T , crescat vel decrescat, exprimatur V per congruam functionem vel ipsius temporis T , vel celeritatis angularis γ aut linearis C : si enim haec functio loco V in (9) (10) substituat, obtinebitur utroque casu aequatio differentialis inter duas variabiles γ et T vel C et T , ex qua ope calculi integralis ipsam celeritatem angularem γ vel linearem C licebit elicere.

500. Corollarium.

Omnis ergo vis, tam invariabilis V agens in punctum R directione RV (486. §.), quam variabilis intra tempus T in vim $= V$ abiens, si illa corpus quodcunque, cum dato axe gyrationis MN firmissime connexum, ad motum circa eundem axem continuo sollicitet, producet tempore T celeritatem angularem γ et veram C puncti R , pro qua, denotante P massam, et Pk^2 momentum inertiae ejusdem corporis respectu axeos MN , debet esse (499. 498. §.)

$$\varepsilon \gamma = \frac{2g \cdot RS}{Pk^2} V \varepsilon T; \quad \varepsilon C = \frac{2g \cdot RS^2}{Pk^2} V \varepsilon T.$$

501. DEFINITIO.

Si massae A, B, D, E, F , a quibuscunque viribus ad motum gyrationis circa datum axem mn continuo sollicitentur, (92. Fig.), una vero massa M ita sit comparata, ut datae vires eandem intra datum quodcunque tempus celeritatem angularem debeant producere, seu ab illis omnes massae A, B, D, E, F , circa axem mn ad motum urgeantur, seu, remotis omnibus his massis, sola massa M in certo puncto d collecta ab iisdem viribus circa mn moveatur; dicetur massis A, B, D, E, F respondere in puncto d massa *aequivalens* M ; datas vero massas A, B, D, E, F ad punctum d *reducere* idem erit, ac massam aequivalentem M in dato puncto d determinare.

502. Corollarium.

Ad quodcunque punctum reducantur massae in motu gyrationis circa datum axem constitutae; eadem manebunt celeritates verae, seu lineares singulorum punctorum in motu gyrationis circa eundem axem constitutorum (501. 475. 473. §.).

503. Problema.

Corpus R (90. 91. Fig.) sollicitatur a vi U agente in punctum a ad motum gyrationis circa axem mn ; *reducere* massam corporis R ad datum punctum a .

Solutio.

1. Quidquid est vis massam R ad motum circa axem mn sollicitans, invariabilis $= U$, vel variabilis intra tempus T in vim $= U$ abiens, necesse est,

est, ut illa tempore T producat certam celeritatem angularem γ , quae, si Rk^2 designet momentum inertiae ejusdem massae respectu axeos mn , det (500. §.)

$$\varepsilon\gamma = \frac{2g \cdot ab}{Rk^2} \cdot U\varepsilon T: \text{ igitur } \gamma = \frac{2g \cdot ab}{Rk^2} \int U\varepsilon T.$$

2. Si, absente corpore R , in puncto a , in quod vis U agit, massa x collecta cogitetur; debet vis U inter tempus T producere celeritatem angularem y , quae per (490. §.) dabit

$$\varepsilon y = \frac{2g}{x \cdot ab} U\varepsilon T: \text{ igitur } y = \frac{2g}{x \cdot ab} \int U\varepsilon T.$$

3. Quamobrem, si massa corporis R ad punctum a sit reducenda, quo massa aequivalens x in puncto a determinetur; debet in (1) (2) per (501. §.) poni $\gamma = y$: igitur erit

$$\frac{2g \cdot ab}{Rk^2} \int U\varepsilon T = \frac{2g}{x \cdot ab} \int U\varepsilon T;$$

$$\text{hinc massa aequivalens } x = \frac{Rk^2}{ab^2}.$$

504. Corollarium 1.

A quacunque vi U agente in punctum a datum corpus R ad motum gyratorium circa datum axem mn sollicitetur; dabit corpus R reductum ad idem punctum a massam aequivalentem x aequalem momento inertiae ejusdem corporis respectu axeos mn diviso per quadratum distantiae ab puncti a ab axe gyrationis mn (503. §.).

505. Corollarium 2.

Fig. 92. Si plures massae A, B, D, E, F ab aliqua vi U agente in punctum a (92 Fig.) ad motum gyratorium circa datum axem mn continuo urgeantur, cum omnes massae A, B, D, E, F instar totidem partium unius corporis circa axem mn mobilis possint considerari; erit massa aequivalens, quam eadem massae A, B, D, E, F ad punctum a reductae dabunt, aequalis summae momentorum inertiae singularum massarum A, B, D, E, F respectu axeos gyrationis mn divisae per quadratum ab^2 distantiae ab puncti a ab eodem axe (504. 399. §.).

506. Corollarium 3.

Quoties ergo motus gyratorius aut unius massae R (90. 91. Fig.), aut plurium massarum A, B, D, E, F (92. Fig.) circa datum axem mn, dependens ab aliqua vi U agente in datum punctum a, fuerit determinandus; quaerantur ante omnia momenta inertiae singularum massarum respectu axeos gyrationis mn; tum determinetur massa aequivalens M in puncto a respondens omnibus massis per (504. 505. §.): inventa enim massa hac M licebit ob (501. §.) investigare tam celeritatem angularem γ quam veram C puncti a per (488. 489. 490. §.), qua cognita poterit per (473. §.) determinari etiam vera celeritas cujusvis alterius puncti in motu circa axem mn constituti.

507. Corollarium 4.

Sit in puncto d collecta massa u, et in punctum a agat quaecunque Fig. 90. 91. vis U; debebit haec intra tempus T producere certam celeritatem angularem z, pro qua, cum $u.cd^2$ sit momentum inertiae massae u respectu axeos mn (398. §.), debet esse per (500. §.)

$$uz = \frac{2g.ab}{u.cd^2} U \varepsilon T: \text{ igitur } z = \frac{2g.ab}{u.cd^2} / U \varepsilon T.$$

Si igitur ponas $z=y$ in (503. §. 2. n.), obtinebis

$$\frac{2g.ab}{u.cd^2} / U \varepsilon T = \frac{2g}{x.ab} / U \varepsilon T:$$

$$\text{adeoque fiet } u = \frac{x.ab^2}{cd^2}.$$

508. Corollarium 5.

Ex (507. §.) et (503. §. 2. n.) sequitur, quod pro casu vis invariabilis in (493. §.) est demonstratum: nimirum, vim quoque variabilem agentem in datum punctum a eandem intra idem tempus celeritatem angularem producturam, seu in puncto a collecta sit massa x, et absit omnis alia massa convertenda circa datum axem mn; seu in puncto d collecta sit massa u, et nulla in a, modo tales sint massae x, u, ut momentum inertiae $x.ab^2$ massae x in puncto a aequetur momento inertiae $u.cd^2$ massae u in puncto d respectu axeos mn.

509. Corollarium 6.

In (507. 503. §.) est $u = \frac{Rk^2}{cd^2}$: erat autem x in (503. §.) massa aequivalens in puncto a debita massae corporis R ad idem punctum reductae, et u in (507. §.) massa aequivalens in puncto d debita massae x ad idem punctum reductae; adeoque debet esse $u = \frac{Rk^2}{cd^2}$ massa aequivalens in puncto d debita massae corporis R reductae ad punctum d (501. §.). Hinc igitur et ex (504. §.) generatim sequitur, massam cujlibet corporis R circa axem fixum mn mobilis ad quodcunque punctum reductam (punctum a , in quovis U supponitur applicari, vel aliud aliquod d) dare in eodem puncto massam aequivalentem aequalem momento inertiae corporis R respectu axeos mn diviso per quadratum distantiae ejusdem puncti (a vel d) ab axe mn .

510. Corollarium 7.

Fig. 92. Hinc vero (509. §.) per (506. §.) porro elucet, plures massas A, B, D, E, F circa datum axem mn mobiles (92. Fig.) ad quodlibet punctum, (a in quo certa vis U agat, vel aliud d) reductas dare in eodem puncto massam aequivalentem aequalem summae momentorum inertiae singularum massarum A, B, D, E, F respectu axeos mn divisa per quadratum distantiae ejusdem puncti (a vel d) ab axe mn .

DISSERTATIO XIII.
DE
MOTU PENDULORUM, CENTROQUE OSCILLA-
TIONIS.

511. DEFINITIO.

Si corpus grave FDBE (93. Fig.) ope rectae inflexilis aB transeuntis Fig. 93. per ejus centrum gravitatis G et ad datum axem fixum horizontalemque nm perpendicularis cum hoc in puncto a ita connectatur, ut illud circa nm libere possit moveri; vocabitur aFDBE *Pendulum compositum*; punctum a erit *punctum suspensionis*; et angulus Gaβ, sub quo recta Ga inclinetur ad rectam verticalem αβ transeuntem per punctum suspensionis, appellabitur *Elongatio a situ naturali*.

512. Corollarium 1.

Recta aG inter centrum gravitatis penduli punctumque suspensionis intercepta aequatur distantiae centri gravitatis ab axe suspensionis nm (511. §.).

513. Corollarium 2.

Rectae verticales Gv, αβ ductae e centro gravitatis G punctoque suspensionis a sunt in plano verticali ad axem nm in a perpendiculari inter se parallelae, ita ut angulus BGv debeat aequari elongationi Gaβ penduli a situ naturali (511. §.).

514. Corollarium 3.

Si P sit pondus penduli seu massa ei proportionalis, licebit totum pendulum omni gravitate destitutum considerare, quin ideo status motus turbetur, in quo illud ob gravitatem cogatur perseverare, modo centrum gravitatis G a vi $v = P$ directione verticali Gv deorsum continuo urgeri supponatur (148. §.).

515. Corollarium 4.

Potest autem vis $v = P$ agens directione Gv resolvi in vim $= P \cos BGv = P \cos Ga\beta$ secundum directionem GB , et alteram $y = P \sin BGv = P \sin Ga\beta$ secundum directionem Gy in eodem cum Gv plano ad aG perpendicularem (115. §.): priorem vim sustinet, ut patet, solus axis fixus nm in puncto a ; posterior vero vis nititur tota sua efficacia rectam Ga ipsumque pendulum circa axem nm movere.

516. Corollarium 5.

Si ergo pendulum in situ naturali, centro gravitatis G cum puncto suspensionis a in eadem recta verticali $a\beta$ jacente, quiescat; debet illud, ob angulum $Ga\beta = 0$, adeoque etiam $P \sin Ga\beta = 0$, perpetuo in eodem situ quiescere, nisi externa aliqua causa independens a vi gravitatis ejus statum turbet (514. 515. §.).

517. Corollarium 6.

In quovis autem alio situ, sub qualibet elongatione $Ga\beta$ a situ naturali (511. §.), concipiet pendulum ob solam gravitatem motum gyrationum circa axem suspensionis nm , quo singula ejus puncta quovis tempore per certos arcus circulares in planis verticalibus ad nm perpendicularibus debebunt promoveri, ipso centro gravitatis G incedente in arcu Gg circuli e puncto suspensionis a radio aG in eodem plano verticali descripti, in quo jacent rectae aG , $a\beta$ (514. 515. §.).

518. Corollarium 7.

Quamobrem cognita celeritate lineari seu vera C , quam centrum gravitatis G penduli intra datum tempus T concipiat, innotescet eo ipso celeritas angularis $= \frac{C}{aG}$ totius penduli (517. 463. 476. §.); verae autem celeritates omnium reliquorum punctorum poterunt inde per (473. §.) determinari.

519. Problema.

Datis elongatione $\Phi = Ga\beta$ a situ naturali, massa seu ei proportionali pondere P penduli, et distantia $AG = D$ illius centri gravitatis ab axe suspensionis nm (511. 512. §.); invenire veram celeritatem C , quam centrum gravitatis G durante motu per arcum Gg (518. §.) concipiet

Solutio.

Solutio.

1. Pendulum aFD~~B~~E potest concipi omnis gravitatis expers, si in ejus centrum gravitatis G vis $v=P$ directione verticali Gv deorsum continuo agere supponatur (514. §.).

2. Ob hanc vero vim (1) concipiet centrum gravitatis G durante ejus motu per arcum Gg eandem celeritatem veram C, quam, absente corpore FDBE, punctum G rectae aG conciperet, si in illo massa M aequivalens massae totius penduli esset collecta (501. §.).

3. Si igitur GH, gh sint perpendiculares ad rectam verticalem a β , ponaturque aH=e, ah=x; erit ob (1) (2) per (389. §.) quaesita celeritas

$$C=2\sqrt{\frac{gP}{M}}(x-e).$$

4. Sit k recta, per cujus quadratum k^2 debet multiplicari massa P penduli, ut productum Pk^2 aequetur ejus momento inertiae respectu axeos horizontalis transeuntis per centrum gravitatis G et paralleli axi mn (402. §.); erit Pk^2+PD^2 momentum inertiae penduli respectu axeos nm (406. §.), et $M=\frac{Pk^2+PD^2}{D^2}$ massa in puncto G aequivalens massae penduli (2) per (504. §.).

5. Porro pro data elongatione a situ naturali $\phi=Ga\beta$, si praeterea ponatur angulus $Gag=\alpha$, fiet aH=e=D Cof ϕ , et ah=x=D Cof ($\phi-\alpha$): consequenter erit

$$x-e=D(\text{Cof}(\phi-\alpha)-\text{Cof}\phi).$$

6. Pro his igitur valoribus (4) (5) in (3) substitutis obtinebimus sequentem expressionem celeritatis linearis C, quam centrum gravitatis G penduli durante motu per arcum Gg debet concipere.

$$C=2D\left(\frac{gD}{k^2+D^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{(\text{Cof}(\phi-\alpha)-\text{Cof}\phi)}.$$

520. Corollarium 1.

Crescente arcu Gg crescet quoque angulus $\alpha=Gag$, hinc decrescet $\phi-\alpha=gac$, et crescet Cof($\phi-\alpha$): celeritas centri gravitatis G durante motu in arcu GC debet ergo continuo crescere (519. §.).

521. Corollarium 2.

Si centrum gravitatis G percurso toto arcu GC incidat in lineam verticalem $a\beta$ in puncto C , abibit angulus $\alpha = Gac$ in $\phi = GaC$, adeoque fiet $\phi - \alpha = 0$ et $\text{Cof}(\phi - \alpha) = 1$: in puncto C lineae verticalis $a\beta$ habebit igitur centrum gravitatis G penduli celeritatem (519. §.).

$$C = 2D \left(\frac{gD}{k^2 + D^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(1 - \text{Cof} \phi)} = 2D \sqrt{\left(\frac{gD}{k^2 + D^2} \cdot \text{Sin} \nu \phi \right)}.$$

522. Corollarium 3.

Si porro centrum gravitatis G percurso arcu Gc supponatur excurrere ultra C per arcum CI , abibit angulus $\alpha = Gac$ in $\alpha = GaI = \phi + CaI$, adeoque fiet $\phi - \alpha = -CaI$, hinc erit $\text{Cof}(\phi - \alpha) = \text{Cof}(-CaI) = \text{Cof} CaI$: celeritas centri gravitatis in puncto I erit igitur (519. §.)

$$C = 2D \left(\frac{gD}{k^2 + D^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{(\text{Cof} CaI - \text{Cof} \phi)}.$$

523. Corollarium 4.

Quare, si sit angulus $CaI < \phi = GaC$; erit $\text{Cof} CaI < 1$ et $> \text{Cof} \phi$, crescente vero angulo CaI decrescet $\text{Cof} CaI$, et differentia $\text{Cof} CaI - \text{Cof} \phi$: centrum gravitatis G habebit ergo in quovis puncto I celeritatem realem C minorem illa, quam in puncto C rectae verticalis $a\beta$ habuit (521. 522. §.), eaque fiet eo minor, quo magis creverit angulus CaI crescente arcu CI (522. §.), modo sit $CaI < GaC$ et $CI < GC$.

524. Corollarium 5.

Sed pro $CaI = \phi = GaC$ fiet celeritas centri gravitatis G in puncto I aequalis nihilo, ob $\text{Cof} CaI - \text{Cof} \phi = 0$ (522. §.); et pro $CaI > \phi = GaC$ erit $\text{Cof} CaI < \text{Cof} \phi$, adeoque $\text{Cof} CaI - \text{Cof} \phi$ valoris negativi, celeritasque centri gravitatis G in I imaginaria (522. §.).

525. Corollarium 6.

Quare, si pendulum in situ $aFD\beta E$ per datam elongationem $\phi = Ga\beta$ a situ naturali (511. §.) determinato quiescat, ita illud a sola gravitate ad motum gyratorium circa axem suspensionis n m sollicitabitur (514. 517. §.), ut ejus centrum gravitatis G , absentibus omnibus motus obstaculis, celeritate continuo crescente in arcu GC ad rectam verticalem $a\beta$ per punctum suspensionis

suspensionis a traiectionem sit descensum (520. §.), obtentaque celeritate maxima in puncto C ejusdem rectae (521. §.) ultra hanc rectam per arcum CI celeritate continuo decrescente ascensum (523. §.), donec per curso arcu CI aequali arcui GC, per quem descenderat, omni celeritate spoliatur (524. §.), consequenter ob parem gravitatis actionem ex puncto I ad G celeritate motu eadem lege primum accelerato usque C, tum retardato redire cogatur.

526. Corollarium 7.

Motus penduli aFDDBE circa axem suspensionis nm erit ergo *oscillatorius*, quo illius centrum gravitatis G alternatim recedet a suo situ initiali per arcum GI, et accedet ad illum per arcum IG, ita ut arcus GC, IC ad partes oppositas rectae verticalis $\alpha\beta$ traiectionis per punctum suspensionis a sint inter se aequales futuri (525. §.): motus idcirco per arcum $GI = 2GC = 2CI$ vocari solet *integra*, et per GC, aut CI *dimidia Oscillatio*.

527. Corollarium 8.

De reliquo evidens est, celeritatem maximam centri gravitatis G, quam illud in puncto infimo C arcus GI debet habere; per elongationem penduli a situ naturali $\phi = GaC$ (511. §.) sic esse determinatam, ut illa eo minor sit, quo minor est haec elongatio, et aequetur nihilo, pro elongatione $\phi = GaC = 0$ (521. §.).

528. Problema.

Data elongatione penduli a situ naturali $\phi = GaC$ (511. §.); invenire tempus T integrae oscillationis in arcu $GI = 2GC$ (526. §.).

Solutio.

Tempus unius integrae oscillationis T aequatur tempori, quo centrum gravitatis G percurrit arcum $GI = 2GC$ circuli radio $aG = D$ in plano verticali ad axem suspensionis nm perpendiculari descripti: quare, cum centrum gravitatis G in hoc motu possit spectari instar puncti massae $M = \frac{P(k^2 + D^2)}{D^2}$, quod a vi $v = P$ perpetuo secundum directionem verticalem Gv deorsum impulsus in arcu circulari GI incedere cogatur (519. §. 1. 2. 3. n.); invenies per (396. §.) pro $r = D = aG$, $b = CH = D \sin \phi$, $V = P$, et $M = \frac{P(k^2 + D^2)}{D^2}$ tempus dimidia oscillatio-

nis, cujus duplum dabit tempus unius integrae oscillationis ut sequitur

$$T = \pi S \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}}$$

$$\begin{aligned} \text{pro } S &= 1 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2D} \right)^n = \\ &= 1 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin v \varphi}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Constat autem, terminum indeterminatum factoris S daturum singulos illius terminos post primum $= 1$ ordine sequentes, si successive fiat $n=1, n=2, n=3$, et ita porro.

529. Corollarium.

Quo minor fuerit elongatio penduli a situ naturali $\varphi = GaC$, eo minor erit arcus $GI = 2GC$, in quo singulae oscillationes perficientur (526. §.), eoque minor fiet $b = CH = D \sin v \varphi$; et si adeo parva sit elongatio φ , consequenter etiam arcus GI adeo exiguus, ut $b = CH$ respectu radii $D = aG$ prope evanescat; erit valor fractionis $\frac{b}{2D}$ prope aequalis nihilo. Tempus igitur integrae oscillationis in valde parvo arca GI poterit ob (528. §.) poni

$$= \pi \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}},$$

$$\text{et accuratius} = \pi \left(1 + \frac{b}{8D} \right) \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}}.$$

Scholion.

Proprie nequit in (528. §.) fieri $T = \pi \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}}$, nisi b penitus evanescat, seu fiat $b = 0$, adeoque arcus GI , in quo oscillationes perfici supponuntur, in punctum C abiens nullus evadat. Cum autem pendulum in situ naturali, existente $b = 0$, perfecte debeat quiescere (516. §.), ejusdemque celeritas in hoc situ aequetur nihilo (527. §.); clarum est, expressionem temporis in (528. §.) ita esse ad certum valorem b pendentem ab elongatione penduli $\varphi = GaC$ restrictam, ut $T = \pi \left(\frac{k^2 + D^2}{2gD} \right)^{\frac{1}{2}}$ proprie denotare debeat tempus vero proximum, quo pendulum in arcu GI prope evanescente, non tamen aequali nihilo, singulas oscillationes perficiat.

530. DEFINITIO.

Si corpus grave FDBE successive decreascat, ac demum in unum punctum grave G abire cogitur, ope rectae inflexilis aG et omni gravitate destitutae cum fixo puncto a ita connexum, ut circa hoc libere possit moveri; habebitur loco penduli compositi (511. §.) *simplex pendulum* longitudinis aG.

531. Corollarium 1.

Quaecunque superius pro pendulo composito aFDBE sunt demonstrata, subsistent etiam pro pendulo simplici aG, in quod illud abibit, si corpus grave FDBE in unum punctum grave G abeat (530. §.), cujus momentum inertiae Pk^2 (519. §. 4. n.) respectu axeos horizontalis per G transeuntis et axi nm paralleli aequetur nihilo, ob $k=0$ (398. 402. §.).

532. Corollarium 2.

Pendulum simplex in situ verticali a β quiescens perpetuo quiescet, nisi ab externa aliqua vi, independente a gravitate, ad motum concitetur (531. 516. §.).

533. Corollarium 3.

In quovis alio situ per elongationem $\phi = Ga\beta$ a situ naturali determinato (511. §.) debeat pendulum simplex aG ad motum oscillatorium a gravitate concitari, vi cujus punctum grave G alternatim descendet per arcum GC ascendetque per illi aequalem CI, et descendet per IC ascendetque per CG (531. 526. §.).

534. Corollarium 4.

Descensus penduli per GC vel IC tempore unius integrae oscillationis in arcu GI (533. 526. §.), fiet celeritate continuo crescente, ascensus vero per CI vel CG celeritate continuo decrescante evanescenteque in I vel G (531. 525. §.): maxima vero celeritas penduli in infimo puncto C arcus GCI ita dependebit ab ejus elongatione $\phi = GaC$ a situ naturali, ut ea pro $b = CH$ et longitudine penduli $aG = D$ futura sit (531. 521. §.)

$$C = 2\sqrt{gD} \sin \frac{1}{2}\phi = 2\sqrt{gb} = 2\sqrt{g \cdot CH}.$$

535. Corollarium 5.

Tempus porro unius integrae oscillationis penduli simplicis in arcu $GI = 2GC$ (533. 526. §.), data tam ejus longitudine $D = aG$, quam elon-

elongatione $\varphi = GaC$ a situ naturali, pro qua fit $CH = b = D \sin \varphi$, obtinebitur per (531. 528. §.)

$$T = \pi S \sqrt{\frac{D}{2g}}.$$

$$\text{pro } S = 1 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2D} \right)^n =$$

feu

$$= 1 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \sin \varphi \right)^n.$$

536. Corollarium 6.

Si autem adeo exigua fuerit elongatio $\varphi = gaC$ penduli simplicis, adeoque arcus $gI = 2gC$, in quo illud singulas oscillationes perficiat, adeo parvus, ut $b = Ch$ respectu longitudinis $D = aG$ prope evanescat; erit ob (536. §.), ut in (529. §.), tempus unius integrae oscillationis in ejusmodi arcu gI prope verum

$$T = \pi \sqrt{\frac{D}{2g}}; \text{ et accuratius } T = \pi \left(\frac{D}{2g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{b}{8D} \right).$$

537. Corollarium 7.

Ex (536. §.) obtinetur $g = \frac{D\pi^2}{2T^2}$ altitudo, per quam corpus grave libere labens primo minuto secundo decedit (323. §.): cognito igitur per observationes tempore T , quo pendulum simplex datae longitudinis D in certa terrae regione singulas oscillationes in exiguis arcubus perficiat, poterit eo ipso inveniri altitudo g , per quam corpora gravia in eadem regione de quiete libere labentia intra primum minutum secundum debent decidere.

538. Corollarium 8.

Cognita autem altitudine g liberi lapsus corporum gravium intra primum minutum secundum pro quacunque terrae regione; invenietur $D = \frac{2gT^2}{\pi^2}$ (537. §.) longitudo penduli simplicis, quod in arcubus exiguis oscillans singulas oscillationes tempore T perficiet: et pro $T = 1$ fiet $D = \frac{2g}{\pi^2}$ longitudo penduli simplicis singulas oscillationes intra unum minutum secundum absolventis.

539. Corollarium 9.

Si in omnibus terrae regionibus eadem sit longitudo D penduli simplicis singulas oscillationes intra unum minutum secundum absolventis; debebunt quoque corpora gravia de quiete libere labentia in omnibus terrae regionibus per eandem altitudinem $=g$ intra primum minutum secundum decidere: quodsi autem longitudo D, d pendulorum simplicium singulas oscillationes intra unum minutum secundum absolventium diversae sint in diversis terrae regionibus; erunt altitudines G, g , per quas corpora gravia de quiete in iisdem regionibus libere labentia primo minuto secundo decident, inter se directe ut longitudo pendulorum, nimirum: $G = \frac{D\pi^2}{2}$, $g = \frac{d\pi^2}{2}$ (537. §.), hinc $G:g = D:d$.

540. Corollarium 10.

Vires gravitatis V, v in illis terrae regionibus, in quibus pendula simplicia singulas oscillationes uno minuto secundo absolventia diversas habent longitudo D, d sunt itaque inter se directe ut hae longitudo: si enim corpora gravia in iisdem regionibus de quiete libere labentia per altitudines G, g primo minuto secundo decident; erit $V:v = G:g$ (322. §.) $= D:d$ (539. §.).

541. Corollarium 11.

Si duo pendula simplicia longitudo D, d in eadem terrae regione sub eadem elongatione ϕ a situ naturali temporibus T, t singulas oscillationes perficiant; erunt haec tempora inter se ut radices quadratae longitudo; et ipsae longitudo inter se directe ut quadrata temporum: erit enim per (535. §.)

$$T = \pi S \sqrt{\frac{D}{2g}}, \text{ et } t = \pi S \sqrt{\frac{d}{2g}};$$

adeoque fiet

$$T:t = \sqrt{D}:\sqrt{d}; \text{ et } D:d = T^2:t^2.$$

542. Corollarium 12.

Quodsi autem pendula simplicia longitudo D, d in arcubus prope evanescentibus oscillent; erunt tempora T, t , quibus illa singulas oscillationes absolvent, semper inter se directe ut radices quadratae longitudo

D, d, et hae ut quadrata temporum, etiam si diversa sit pendulorum elongatio (511. §.): semper enim erit per (538. §.)

$$D = \frac{2gT^2}{\pi^2}; \quad d = \frac{2gt^2}{\pi^2};$$

$$\text{hinc } D:d = T^2:t^2, \text{ et } T:t = \sqrt{D}:\sqrt{d}.$$

543. Corollarium 13.

Pendulum longitudinis D singulas oscillationes in arcu prope evanescente tempore T absolvens, absolvit quovis alio tempore Z oscillationes numero $N = \frac{Z}{T} = \frac{Z}{\pi \sqrt{\frac{D}{2g}}}$ (536. §.).

544. Corollarium 14.

Quamobrem, si duo pendula simplicia longitudinum D, d singulas oscillationes temporibus quibuscunque T, t absolvant, in eadem terrae regione in arcubus prope evanescentibus oscillent; erunt numeri N, n oscillationum, quas illa eodem tempore Z debebunt perficere, inter se inverse ut radices quadratae longitudinum: nimirum erit per (543. §.)

$$N = \frac{Z}{\pi \sqrt{\frac{D}{2g}}} \quad \text{et} \quad n = \frac{Z}{\pi \sqrt{\frac{d}{2g}}};$$

$$\text{adeoque } N:n = \sqrt{d}:\sqrt{D}.$$

545. Problema.

Fig. 69. 93. *Datis longitudine l=EP (69. Fig.) penduli simplicis et distantia D=aG centri gravitatis G penduli compositi aFDBE (93. Fig.) ab axe suspensionis nm, invenire rationem temporum, quibus ejusmodi pendula sub eadem elongatione $\phi = PED = GaC$ (69. 93. Fig.) a situ naturali singulas oscillationes absolvant.*

Solutio.

1. Sit k linea recta, cujus quadratum k^2 aequetur momento inertiae penduli compositi aFDBE (93. Fig.) respectu axeos horizontalis transeuntis per illius centrum gravitatis G et paralleli axi oscillationis nm diviso per massam ejusdem penduli, et T sit tempus unius integrae oscillationis; erit per (528. §.)

$$T =$$

$$T = \pi S \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{2gD}} = \frac{\pi S}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{D}}.$$

2. Si autem pendulum simplex (69. Fig.) $l = E$ tempore t singulas oscillationes absolvat; erit per (535. §.)

$$t = \pi S \sqrt{\frac{D}{2g}} = \frac{\pi S}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{l}.$$

Debebit ergo esse

$$T:t = \sqrt{\frac{k^2 + D^2}{D}} : \sqrt{l}, \text{ et } T^2:t^2 = \frac{k^2 + D^2}{D} : l.$$

546. Corollarium 1.

Pro $l = D$ effiet $T^2:t^2 = (k^2 + l^2):l^2$, consequenter $T^2 > t^2$ et $T > t$ (545. §.): tempus ergo unius integrae oscillationis penduli compositi majus est tempore, intra quod pendulum simplex sub eadem elongatione a situ naturali singulas oscillationes absolveret, si illius longitudo aequaretur distantiae $D = aG$ centri gravitatis G penduli compositi ab axe oscillationis $n m$.

547. Corollarium 2.

Semper autem, si penduli simplicis longitudo sit $l = \frac{k^2 + D^2}{D}$, erit $T = t$ (545. §.), id est: pendulum compositum $aFDBE$ (93. Fig.) et pendulum simplex EP (69. Fig.) absolvent sub pari elongatione $GaC = PED$ a situ naturali singulas oscillationes eodem tempore, si longitudo l penduli simplicis per distantiam D centri gravitatis penduli compositi ab axe suspensionis ita determinetur, ut ea sit $l = \frac{k^2 + D^2}{D}$.

548. DEFINITIO.

Pendula isochrona sunt, quae singulas oscillationes eodem tempore absolvunt.

549. Corollarium 1.

Ut pendulum simplex longitudinis l sub eadem elongatione a situ naturali, quam pendulum quodcunque compositum $aFDBE$ (93. Fig.) habeat, sit huic isochronum, debet necessario esse $l = \frac{k^2 + D^2}{D} = \frac{k^2 + aG^2}{aG}$ (548. 547.).

550. Corollarium 2.

Cum igitur omne corpus grave FDBE unum centrum gravitatis G habeat (148. §.), per quod potest transire axis horizontalis parallelus axi oscillationis nm; adeoque in omni pendulo composito aFDBE possibilis debeat esse recta k (545. §. 1. n.), et alia $D=aG$: evidens est, pro quovis pendulo composito possibile esse pendulum simplex ei isochronum (549. §.).

551. Corollarium 3.

Ob $I=aG + \frac{k^2}{aG}$ fit $I > aG$: longitudo penduli simplicis isochroni pendulo composito aFDBE est ergo major distantia aG centri gravitatis G ab axe oscillationis nm (549. §.). Quare cogitetur in recta aG producta punctum z in distantia $az = \frac{k^2 + D^2}{D}$, in quo tota massa gravis FDBE sit collecta; erit az pendulum simplex isochronum pendulo composito aFDBE (531. 549. §.).

552. DEFINITIO.

Punctum z rectae aB transeuntis per centrum gravitatis G penduli compositi aFDBE, pro quo, si tota massa gravis corporis FDBE in illo collecta esset, nasci deberet pendulum simplex az composito aFDBE isochronum, vocatur *Centrum oscillationis* penduli compositi aFDBE.

553. Corollarium 1.

In omni pendulo composito aFDBE datur in recta aB transeunte per illius centrum gravitatis G et perpendiculari ad axem oscillationis nm unum centrum oscillationis z in distantia ab eodem axe $az = \frac{k^2 + D^2}{D}$, quae semper est major quam distantia $D=aG$ centri gravitatis G ab hoc axe (551. 552. §.).

554. Corollarium 2.

Distantia centri oscillationis z penduli compositi aFDBE excedit distantiam $D=aG$ illius centri gravitatis G ab axe oscillationis nm differentia $az - aG = az - D = Gz$, estque (553. §.)

$$Gz = \frac{k^2 + D^2}{D} - D = \frac{k^2}{D}.$$

555. Corollarium 3.

Inventio centri oscillationis z in dato quocunque pendulo composito aFD BE dependet igitur a calculo, quem superius pro investigando momento inertiae tradidimus. Si enim dato centro gravitatis G dataque illius distantia $D = Ga$ ab axe suspensionis nm et massa P corporis FDBE, quaeras ejus momentum inertiae $\mu = Pk^2$ respectu axeos horizontalis transeuntis per centrum gravitatis G et paralleli axi nm ; innotescet eo ipso $k^2 = \frac{\mu}{P}$ (545. §. 1. n.), et distantia $Gz = \frac{k^2}{D} = \frac{\mu}{PD}$ centri oscillationis z a centro gravitatis G (554 §.).

556. Corollarium 4.

Dato autem momento inertiae $N = Pk^2 + PD^2$ penduli aFD BE respectu ipsius axeos oscillationis mn (519. §. 4. n.), datisque massa P penduli et distantia $D = Ga$ illius centri gravitatis G ab axe oscillationis nm ; invenies distantiam $az = \frac{N}{P \cdot D}$ centri oscillationis z ab axe oscillationis nm (553. §.) divisione momenti inertiae N per productum ex pondere penduli in distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis.

557. Corollarium 5.

Exemplo fit cylinder rectus (78. Fig.) circa axem cum diametro AB Fig. 78. coincidentem oscillans. Cum axis cylindri ch sit perpendicularis ad axem oscillationis nm , transeatque per centrum gravitatis u , ita ut sit $uc = \frac{1}{2}ch$ (219. §.); jacebit centrum oscillationis cylindri in ipso axe ch , puta in ejus puncto z (552. §.); si igitur, pro radio cylindri $R = Ac$, axe $a = ch$, et massa seu pondere P , capiatur distantia $D = uc = \frac{1}{2}a$ centri gravitatis u ab axe oscillationis, et momentum inertiae $N = \frac{1}{12}P(4a^2 + 3R^2)$ totius cylindri respectu axeos AB (435. §.); erit distantia centri oscillationis z ab hoc axe per (556. §.)

$$cz = \frac{\frac{1}{12}P(4a^2 + 3R^2)}{P \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{2}{3}a + \frac{R^2}{2a}.$$

558. Corollarium 6.

Si conus rectus ABD (56. Fig.) oscillet circa axem MN ad illius Fig. 56. axem $AC = a$ perpendicularem; jacebit in AC centrum gravitatis γ in distantia $D = A\gamma = \frac{3}{4}a$ (223. §.), et centrum oscillationis (552. §.) alicubi

Ff 3

intra

intra centrum gravitatis γ et baseos centrum C (553. §.), cujus distantia X ab axe oscillationis MN , adeoque a vertice conici A , denotante P pondus, et N momentum inertiae conici respectu axeos MN , erit per (556. §.)

$$X = \frac{N}{P \cdot D} = \frac{N}{P \cdot \frac{3}{4}a}.$$

Eft autem per (436. §.)

$$N = \frac{3}{20}P(4a^2 + R^2) = P(\frac{3}{5}a^2 + \frac{3}{20}R^2):$$

igitur debet esse

$$X = \frac{\frac{3}{5}a^2 + \frac{3}{20}R^2}{\frac{3}{4}a} = \frac{4}{5}a + \frac{R^2}{5a}.$$

559. Corollarium 7.

Fig. 59. Oscillet conoides parabolicum pQq (59. Fig.) circa axem MN ejus axi Qa perpendicularem: cum illius centrum gravitatis γ jaceat in axe Qa , ita ut ejus distantia a vertice Q sit $D = Q\gamma = \frac{2}{3}Qa$ (233. §.); jacebit centrum oscillationis in eodem axe, puta in puncto α (552. 553. §.), ita ut illius distantia a puncto Q , pro axe conoidis $a = Qa$, pondere P , et momento inertiae N respectu axeos MN , debeat esse (556. §.)

$$Q\alpha = \frac{N}{P \cdot D} = \frac{N}{P \cdot \frac{2}{3}a}.$$

Sed pro $x = Qa = a$, et parametro p parabola Qp , cujus revolutione circa axem Qa generatur conoides pQq debet esse (439. §.)

$$N = \frac{1}{6}P(3a^2 + p^2) = P(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}p^2):$$

debet ergo poni

$$Q\alpha = \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}p^2}{\frac{2}{3}a} = \frac{3}{4}a + \frac{p^2}{4a}.$$

560. Corollarium 8.

Et generatim, quidquid sit curva Qp debita coordinatis orthogonis $y = pa$, $x = Qa$, cujus revolutione circa axem Qa generetur corpus rotundum pQq oscillans circa axem MN axi Qa perpendicularem, jacebit et centrum gravitatis corporis pQq in axe Qa (225. §.), et ipsum centrum oscillationis, puta in puncto α (552. §.), pro cujus distantia $Q\alpha$ ab axe oscillationis MN facile ex praecedentibus derivabitur expressio generalis.

Si

Si enim N denotet momentum inertiae corporis pQq respectu axeos mn , et n exprimat productum ex pondere corporis pQq in distantiam illius centri gravitatis, ab axe MN aequale momento statico ejusdem corporis respectu plani in Q ad Qa perpendicularis (150. §.);

$$\text{erit } Qa = \frac{N}{n} \text{ per (556. §.)};$$

$$N = \frac{\pi}{4} \int (4x^2y^2 + y^4) \varepsilon x \text{ per (437. §.)};$$

$$n = \pi \int xy^2 \varepsilon x \text{ per (226. §.):}$$

igitur erit

$$Qa = \frac{\frac{\pi}{4} \int (4x^2y^2 + y^4) \varepsilon x}{\pi \int xy^2 \varepsilon x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\int (4x^2y^2 + y^4) \varepsilon x}{\int xy^2 \varepsilon x}.$$

561. Problema.

Investigare centrum oscillationis penduli egihPDQi (77. Fig.) com- Fig. 77. positi ex duabus partibus egih, BPDQ, quarum centra gravitatis γ , C jaceant in una recta AD ad axem oscillationis mn perpendiculari.

Solutio.

1. Commune centrum gravitatis partium egih, BPDQ, adeoque centrum gravitatis ipsius penduli egih PDQ coincidit in hac hypothesi cum puncto α rectae AD intra centra gravitatis C , γ ita jacente, ut pro massis seu ponderibus m , M partium egih, BPDQ, sit (154. §.).

$$A\alpha = \frac{m \cdot A\gamma + M \cdot AC}{m + M}.$$

2. Quodsi jam m' , M' sint momenta inertiae partium egih, BPDQ penduli respectu axeos oscillationis mn ; erit $m' + M'$ momentum inertiae totius penduli respectu ejusdem axeos (399 §.): quare, cum illius centrum oscillationis cum aliquo puncto z rectae AD debeat coincidere (552. 553. §.), et $m + M$ sit massa, Az vero distantia centri gravitatis penduli ab axe mn ; erit distantia centri oscillationis ab eodem axe per (556. §.)

$$Az = \frac{m' + M'}{A\alpha(m + M)} = \frac{m' + M'}{m \cdot A\gamma + M \cdot AC}.$$

3. Determinatis ergo ponderibus m, M partium egih, BPDQ penduli, inventisque distantis $A\gamma, AC$ centrorum gravitatis γ, C earundem partium ab axe oscillationis mn , quaerantur momenta inertiae m^1, M^1 illarum respectu hujus axeos: si enim summam horum momentorum divides per summam productorum ex ponderibus m, M in distantias respectivorum centrorum gravitatis γ, C ab axe mn ; dabit quotus distantiam centri oscillationis z ab eodem axe.

562. Corollarium 1.

Fig. 76. Sit datum pendulum compositum ex virga parallelepipedæ AB (76. Fig.) longitudinis l crassitie vero adeo parvae, ut illa respectu longitudinis evanescat, et ex globo BPDQ radii $R=PC$; erit in (561. §.)

$$A\gamma = \frac{1}{2}l; AC = l + R \text{ (217. 231. §.)};$$

$$m^1 = \frac{1}{3}ml^2 \text{ per (449. §.)};$$

$$M^1 = \frac{1}{2}M(7R^2 + 10Rl + 5l^2) \text{ per (428. §.)};$$

pro ponderibus m, M virgae AB et globi BPDQ erit, ergo distantia centri oscillationis z penduli ABPDQ ab axe oscillationis mn

$$Az = \frac{m^1 + M^1}{m \cdot A\gamma + M \cdot AC} = \frac{\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{2}M(7R^2 + 10Rl + 5l^2)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(l + R)};$$

$$\text{id est } Az = \frac{m \cdot \frac{1}{3}l^2 + M(\frac{7}{2}R^2 + 2Rl + l^2)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(l + R)}.$$

563. Corollarium 2.

Si autem etiam pondus m virgae AB sit tam parvum, ut illud respectu ponderis M globi BPDQ evanescat; poterit distantia centri oscillationis z penduli ABPDQ ab axe oscillationis mn poni (562. §.)

$$Az = \frac{l^2 + 2Rl + \frac{7}{2}R^2}{l + R} = l + R + \frac{2R^2}{5(l + R)}.$$

564. Corollarium. 3.

Fig. 77. Sit pars una egih penduli (77. Fig.) virga cylindrica longitudinis $l=AB$, et radii r ; pars altera BPDQ sit lens composita ex segmentis aequalibus BPD, BQD sphaerae radii R , cujus axes sint $PQ=2b, BD=2a$; erit in (561. §.)

$$A\gamma = \frac{1}{2}l; \quad AC = l + a;$$

$$m' = \frac{1}{12}m(4l^2 + 3r^2) \text{ per (435. §.)};$$

$$M' = \frac{1}{10}M \left(10(l+a)^2 + \frac{10a^4 + 5a^2b^2 + b^4}{3a^2 + b^2} \right) \text{ (430. §.):}$$

pro ponderibus m , M ergo virgae cylindricae $egih$, et lentis $BPDQ$ erit distantia centri oscillationis z penduli $egihPDQ$ ab axe oscillationis mn

$$Az = \frac{m(\frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{4}r^2) + M\left((l+a)^2 + \frac{a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{10}b^4}{3a^2 + b^2}\right)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(l+a)}.$$

565. Corollarium 4.

Quodsi autem pondus m virgae cylindricae $egih$ evanescat respectu ponderis M lentis $BPDQ$; erit prope vera distantia centri oscillationis z ab axe oscillationis mn in (564. §.)

$$Az = l + a + \frac{a^4 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{10}b^4}{(3a^2 + b^2)(l+a)}.$$

566. Corollarium 5.

Segmenta sphaerica BPD , BQD abibunt in duos semiglobos aequales globum $BPDQ$ constituentes, si axes lentis BD , PQ inter se aequentur: pro $a=b=R$ debet ergo ex (565. §.) prodire formula, quam jam in (563. §.) invenimus.

567. Corollarium 6.

Pari ratione potest determinari distantia Az centri oscillationis z penduli $egihPDQ$ ab axe oscillationis mn , si pars una $egih$ sit virga cylindrica longitudinis $l=AB$, et radii r , pars altera autem $BPDQ$ lens composita ex aequalibus segmentis BPD , BQD sphaeroidis elliptici revolutione ellipseos circa axem conjugatum geniti, cujus axes sint $PQ=2e$, $BD=2c$, pro ellipseos axe conjugato b et transverso a . Pro centris gravitatis γ , C virgae et lentis, massis illarum m , M , et momentis inertiae m' , M' respectu axeos mn , debet enim esse

$$A\gamma = \frac{1}{2}l; \quad AC = l + c;$$

$$m' = \frac{1}{12}m(4l^2 + 3r^2) \text{ per (439. §.)}.$$

Porro pro $x=e$ invenies per (426. §.) momentum inertiae segmenti BPD respectu axeos PC, cujus duplum dabit momentum inertiae totius lentis BPDQ respectu axeos PQ (399. §.), unde additione producti $M.AC^2=M(1+c)^2$ reperietur momentum inertiae lentis respectu axeos oscillationis mn (406. §.), nimirum

$$M^1=M\left((1+c)^2+\frac{a^2(10eb^2-15be^2+6e^3)}{10b^2(3b-2e)}\right).$$

Hinc per (561. §.) fiet

$$Az=\frac{m(\frac{1}{3}l^2+\frac{1}{4}r^2)+M\left((1+c)^2+\frac{a^2(eb^2-\frac{3}{2}be^2+\frac{3}{2}e^3)}{b^2(3b-2e)}\right)}{m.\frac{1}{2}l+M(1+c)}.$$

568. Corollarium 7.

Pro $2ex=PQ=b$, $2c=BD=a$ abibit lens BPDQ in sphaeroidem ellipticum revolutione ellipseos circa axem conjugatum PQ genitum, pro quo casu erit itaque distantia centri oscillationis z ab axe oscillationis mn in (567. §.)

$$Az=\frac{m(\frac{1}{3}l^2+\frac{1}{4}r^2)+M(l^2+al+\frac{7}{20}a^2)}{m.\frac{1}{2}l+M(1+\frac{1}{2}a)}.$$

569. Corollarium 8.

Si vero pondus m virgae cylindricae egih respectu ponderis M lentis vel integri sphaeroidis elliptici BPDQ in (567. 568. §.) evanescat; erit

$$Az=1+c+\frac{a^2(eb^2-\frac{3}{2}be^2+\frac{3}{2}e^3)}{b^2(3b-2e)(1+c)} \text{ in (567. §.)};$$

$$Az=1+\frac{1}{2}a+\frac{1}{10}.\frac{a^2}{1+\frac{1}{2}a} \text{ in (568. §.)}.$$

570. Problema.

Fig. 77. Si pendulum compositum sit ex virga tenuissima parallelepipeda vel cylindrica egih, et cono truncato BPQ, qui basi minore in B ita sit ei virgae annexus, ut illius axis BC cum virgae axe AB in eadem recta AC jaceat; invenire centrum oscillationis (77. Fig.).

Solutio.

Solutio.

1. Sit m pondus, l longitudo, et γ centrum gravitatis virgae egih, cum crassities illius evanescat respectu longitudinis, seu parallelepipedum illa sit, seu cylindrica, per hypothefim; poterit utroque casu illius momentum inertiae respectu axeos mn poni $= \frac{1}{2} m l^2 = m^1$ (449. 435. §.); distantia autem centri gravitatis γ ab axe oscillationis erit $A \gamma = \frac{1}{2} l$.

2. Porro sit axis conii truncati $BC = a$ et in hoc illius centrum gravitatis α , cujus distantia a puncto B , pro radio r baseos minoris in B , et radio R baseos majoris in PQ , erit per (224. §.) $B\alpha = \frac{1}{4} a \cdot \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)}$. Hinc, si M sit massa ejusdem conii, et M^1 momentum inertiae respectu axeos oscillationis mn , fiet ob (1) per (561. §.) distantia centri oscillationis z ab axe oscillationis

$$Az = \frac{m \cdot \frac{1}{2} l^2 + M^1}{m \cdot \frac{1}{2} l + M \left(\frac{1}{4} a \cdot \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)} + 1 \right)}.$$

3. Inveniendum sit jam in (57. Fig.) momentum inertiae μ conii truncati $bdDB = M$ respectu diametri BD baseos majoris, pro illius axe $Cc = x$, et radiis $CD = R$, $cd = r$: si k denotet illius momentum inertiae respectu plani $BMDNB$, et Z respectu axeos Cc ; erit per (434. §.)

$$\mu = k + \frac{1}{2} Z.$$

Verum pro angulo $dDC = \phi$ erit $r = cd = R - Dd = R - x \cot \phi$; igitur fiet

$$M = \frac{1}{3} \pi (3R^2x - 3Rx^2 \cot \phi + x^3 \cot^2 \phi);$$

hinc per (431. §.)

$$ek = x^2 \epsilon M = \frac{1}{3} \pi (3R^2x^2 - 6Rx^3 \cot \phi + 3x^4 \cot^2 \phi) \epsilon x;$$

$$\text{et } k = \frac{\pi x^3}{3} (R^2 - \frac{1}{2} R x \cot \phi + \frac{1}{3} x^2 \cot^2 \phi) =$$

$$= \frac{\pi x^3}{30} (R^2 + 3Rr + 6r^2);$$

$$\text{seu } k = \frac{1}{10} M x^2 \frac{(R^2 + 3Rr + 6r^2)(R - r)}{R^3 - r^3}.$$

Et per (417. §.) est

$$\frac{1}{2} Z = \frac{1}{20} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

His itaque valoribus loco k et $\frac{1}{2}Z$ in aequatione pro μ substitutis inveniemus

$$\mu = \frac{1}{20} M \frac{3(R^5 - r^5) + 2x^2 R^2(R + 2r) + 6x^2 r^2(R - 2r)}{R^3 - r^3}.$$

Fig. 77. 4. Differentia quadratorum distantiarum $A\alpha$, αC centri gravitatis α conii truncati BPQ (77. Fig.) ab axibus parallelis mn, PQ est

$$\begin{aligned} A\alpha^2 - C\alpha^2 &= (l + B\alpha)^2 - (a - B\alpha)^2 = l^2 - a^2 + 2(l + a)B\alpha = \\ &= l^2 - a^2 + \frac{1}{2}a(l + a) \frac{3R^4 + r^4 - 4rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)} \text{ ob (2).} \end{aligned}$$

5. Quare pro $x = a = BC$ dabit μ in (3) momentum inertiae conii truncati BPQ respectu axeos PQ coincidentis cum diametro illius baseos majoris; et si eidem momento addas productum ex massa seu pondere conii M in differentiam $A\alpha^2 - C\alpha^2$ juxta (4) determinatam, obtinebis momentum inertiae M^1 ejusdem conii respectu axeos oscillationis mn (409. §.): hoc ergo valore loco M^1 in (2) substituto inveniemus sequentem expressionem distantiae centri oscillationis ab axe oscillationis:

$$\begin{aligned} Az &= \frac{1}{m \frac{1}{2}l + M \left(1 + a \frac{\frac{3}{2}R^4 + \frac{1}{2}r^4 - rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)} \right)} \left[m \cdot l^2 \right. \\ &\quad + M \left(\frac{\frac{3}{20}(R^5 - r^5) + \frac{1}{10}a^2 R^2(R + 2r) + \frac{3}{10}a^2 r^2(R - 2r)}{R^3 - r^3} \right. \\ &\quad \left. \left. + l^2 - a^2 + a(l + a) \frac{\frac{3}{2}R^4 + \frac{1}{2}r^4 - 2rR^3}{(R^3 - r^3)(R - r)} \right) \right]. \end{aligned}$$

571. Corollarium 1.

Conus truncatus BPQ, si radius r baseos minoris in B evanescat, abit in conum integrum axeos $a = BC$: pro $r = 0$ obtinebimus ergo ex (570. §) sequentem formulam pro distantia centri oscillationis z ab axe oscillationis mn, si una pars egih penduli sit virga tenuissima longitudinis l et ponderis m ; pars altera BPQ autem conus rectus axeos $a = BC$, radii R baseos in PQ, et ponderis M .

$$Az = \frac{m \cdot \frac{1}{3}l^2 + M \left(\frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{2}a^2 + l \left(1 - \frac{3}{2}a \right) \right)}{m \cdot \frac{1}{2}l + M \left(\frac{3}{2}a + 1 \right)}.$$

572. Corollarium 2.

Si petatur distantia Az centri oscillationis z ab axe oscillationis mn pro pendulo ex virga tenuissima $egih$ et corpore $BPDQ$ composito, quod constet e duobus conis truncatis aequalibus BPQ , DPQ basium majorum in PQ congruentium; erit, ut in (570. §. 1. n.) $A\gamma = \frac{1}{2}l$, $m^1 = m \frac{1}{2}l^2$ pro longitudine l , et pondere m virgae $egih$: quodsi ergo $BD = 2a$ fit axis corporis $BPDQ$, in cujus medio puncto C jacet ejus centrum gravitatis, M vero denotet illius pondus, et M^1 momentum inertiae respectu axeos oscillationis mn ; erit per (561. §.)

$$Az = \frac{m \frac{1}{2}l^2 + M^1}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(1+a)}.$$

Si jam R sit communis radius basium majorum in PQ , et r radius minorum basium in B , D utriusque conii truncati BPQ , DPQ ; invenies momentum inertiae utriusque conii seorsim respectu diametri in PQ , si in (570. §. 3. n.) ponas $x = a$, et $\frac{1}{2}M$ loco M , cujus duplum dabit momentum inertiae totius corporis $BPDQ$ respectu diametri PQ parallelae axi oscillationis mn , unde additione producti $M \cdot AC^2 = M(1+a)^2$ obtinebitur momentum inertiae M^1 ejusdem corporis respectu axeos oscillationis mn (406. §.). Hoc ergo valore sumto pro M^1 in praecedente formula inveniemus

$$Az = \frac{1}{m \frac{1}{2}l + M(1+a)} \left[m \frac{1}{2}l^2 + M \left((1+a)^2 + \frac{3(R^5 - r^5) + 2a^2 R^2(R+2r) + 6a^2 r^2(R-2r)}{20(R^3 - r^3)} \right) \right].$$

573. Corollarium 3.

Pro $r = 0$ abibit corpus $BPDQ$ compositum ex duobus conis truncatis aequalibus BPQ , DPQ in corpus constans ex duobus conis integris aequalibus axium $BC = CD = a$, et communis radii R basium in PQ congruentium: pro $r = 0$ inveniemus ergo ex (572. §.) distantiam centri oscillationis z ab axe oscillationis mn pro pendulo ex ejusmodi corpore $BPDQ$ et virga tenuissima $egih$ composito, nimirum

$$Az = \frac{m \frac{1}{2}l^2 + M \left(\frac{7}{5} (3R^2 + 2a^2) + (1+a)^2 \right)}{m \frac{1}{2}l + M(1+a)}.$$

574. Corollarium 4.

Si cono truncato BPQ in (570. §.) substituas cylindrum axeos $a=BC$, et radii R , cum illius centrum gravitatis α coincidat cum medio puncto axeos BC (219. §.); erit $A\alpha = l + \frac{1}{2}a$, hinc ob (570. §. 1. n.) per (561. §.)

$$Az = \frac{m \cdot \frac{1}{3}l^2 + M^1}{m \cdot \frac{1}{2}l + M(1 + \frac{1}{2}a)}.$$

Cum autem momentum inertiae cylindri BPQ respectu diametri PQ illius baseos sit $\frac{1}{12}M(4a^2 + 3R^2)$ per (435. §.); erit $M^1 = \frac{1}{12}M(4a^2 + 3R^2) + M(A\alpha^2 - \alpha C^2)$, seu

$$\begin{aligned} M^1 &= M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}R^2 + (l + \frac{1}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2) \\ &= M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}R^2 + l(1 + a)) \end{aligned}$$

momentum inertiae ejusdem cylindri respectu axeos oscillationis mn (409. §.): quare, si hunc valorem loco M^1 in praecedenti formula substituas, invenies distantiam centri oscillationis z ab axe oscillationis mn pro pendulo ex virga tenuissima egi longitudinis l et ponderis m , et cylindro BPQ axeos $a=BC$, radii R et ponderis M composito, nimirum

$$Az = \frac{m \frac{1}{3}l^2 + M(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{4}R^2 + l(1 + a))}{m \frac{1}{2}l + M(1 + \frac{1}{2}a)}.$$

575. Problema.

Dato numero N oscillationum, quas pendulum compositum sub elongatione Φ a situ naturali intra certum tempus T absolvat, invenire longitudinem L penduli simplicis sub eadem elongatione Φ , vel in quocunque arcu exiguo ad singula minuta secunda oscillantis.

Solutio.

1. Si pendulum compositum intra T minuta secunda oscillationes numero N absolvat; debet illud singulas oscillationes intra tempus $\frac{T}{N}$ absolvere.

2. Quodsi ergo D sit distantia centri oscillationis dati penduli compositi ab axe oscillationis; erit D longitudo penduli simplicis dato composito

posito ifochroni, quod idcirco sub elongatione ϕ a situ naturali quamvis oscillationem intra tempus $= \frac{T}{N}$ perficiet ob (1) per (552. 548. §.) Adeoque, denotante L longitudinem penduli simplicis sub pari elongatione a situ naturali ad singula minuta secunda oscillantis, debet esse per (541. §.)

$$L:D=1^2: \frac{T^2}{N^2}; \text{ hinc } L=D \frac{N^2}{T^2}.$$

3. Porro pro cognita elongatione ϕ penduli simplicis a situ naturali, quod longitudinem D habeat, et tempore $= \frac{T}{N}$ singulas oscillationes perficiat (2), debet esse per (535. §.) proxime

$$\frac{T}{N} = \pi \left(1 + \frac{b}{8D}\right) \sqrt{\frac{D}{2g}} : \text{ igitur}$$

$$\pi \sqrt{\frac{D}{2g}} = \frac{T}{N \left(1 + \frac{b}{8D}\right)} \text{ pro } b = D \sin^2 \phi.$$

Hinc autem, quia $\pi \sqrt{\frac{D}{2g}}$ est tempus, intra quod pendulum simplex longitudinis D singulas oscillationes in quocunque arcu exiguo debet absolvere (536. §.); fiet pro longitudine L penduli simplicis in quibuslibet arcubus exiguis ad singula minuta secunda oscillantis, per (541. §.)

$$L:D=1^2: \frac{T^2}{N^2 \left(1 + \frac{b}{8D}\right)^2}; \text{ hinc } L=D \frac{N^2 \left(1 + \frac{b}{8D}\right)^2}{T^2};$$

$$\text{feu } L = \frac{N^2(b+8D)^2}{64DT^2}.$$

576. Corollarium 1.

Quamobrem, si determinanda sit in quapiam terrae regione longitudo L penduli simplicis, quod in arcubus exiguis oscillans singulas oscillationes minutis secundis perficiat, sumatur tale pendulum compositum, pro quo distantiam D centri oscillationis ab axe oscillationis calculo definire liceat; tum observetur ope exquisiti chronometri tempus T in minutis

nutis secundis, intra quod illud sub determinata elongatione ϕ a situ naturali determinatum aliquem numerum N oscillationum absolvat: per haec enim reperietur quaesita longitudo

$$L = \frac{N^2(b+8D)^2}{64DT^2} \text{ ob (375. §).}$$

Ubi autem elongatio ϕ penduli compositi a situ naturali valde parva fuerit, ita ut $b = D \sin \phi$ respectu $8D$ fere evanescat; poterit poni

$$L = \frac{N^2(8D)^2}{64DT^2} = D \frac{N^2}{T^2}.$$

Exemplum.

Clar. Liesganig factis peculiari diligentia observationibus comperit, pendulum ex filo tenuissimo AB (77. Fig.) et duplicato cono truncato $BPDQ$ compositum, quale in (572. §.) consideravimus, Viennae 87861 oscillationes $= N$ intra 86409,4 minuta secunda $= n$ absolvisse. Erat autem, omnibus dimensionibus ad mensuras viennenses relatis, longitudo fili, $t = AB = 431,941$ lin.; pondus fili, $m = \frac{1}{2}$ gran.; semiaxis corporis $BPDQ$, $a = BC = 5,922$ lin.; radius communis basium majorum conorum truncatorum BPQ , DPQ in PQ cohaerentium, $R = PC = 4,26$ lin.; radius communis basium minorum in B , D , $r = 2,28$ lin.; et pondus totius corporis $BPDQ$, $M = 540$ gran.

Quare, si hos valores in (572. §.) substituas, invenies distantiam $D = Az$ centri oscillationis z ab axe oscillationis m aequalem longitudini penduli simplicis pendulo composito *Liesganigiano* isochroni, nimirum $D = 437,903$ lin. Hinc autem determinabis porro longitudinem L penduli simplicis sub pari elongatione a situ naturali ad singula minuta secunda oscillantis, nimirum

$$L = 437,903 \frac{(87861)^2}{(86409,4)^2}.$$

Id est $L = 452,739$ lin. vienn. $= 440,562$ lin. parif.

577. Corollarium 2.

Inventa ope penduli compositi longitudine L penduli simplicis in arcibus exiguis ad singula minuta secunda oscillantis (576. §.), potest eo ipso etiam

etiam altitudo g determinari, per quam corpora gravia de quiete libere labentia intra primum minutum secundum decidunt, ob $g = \frac{1}{2}\pi^2 L$ per (537. §.).

Exemplum.

In (576. §.) invenimus $L = 440,562$ lin. paris. pro longitudine penduli simplicis ad singula minuta secunda oscillantis: assumpta ergo ratione radii ad semiperipheriam $1:\pi = 1:3,1415$ etc., quo fiat $\pi = 3,1415$ etc. erit

$$g = \frac{1}{2}\pi^2 \cdot 440,562 = \pi^2 \cdot 220,281.$$

Quia vero est pes rhenanus ad parisinum $= 13913:14400$, si g ad pedem rhenanum referatur; debet esse

$$13913:14400 = \pi^2 \cdot 220,281:g$$

$$\text{hinc } g = \frac{\pi^2 \cdot 220,281 \cdot 14400}{13913};$$

et adhibitis logarithmis fiet

$$\log g = S - \log 13913$$

$$\text{pro } S = 2 \log \pi + \log 220,281 + \log 14400.$$

Iam autem est

$$\log \pi = 0,4971499$$

$$2 \log \pi = 0,9942998$$

$$\log 220,281 = 2,3429771$$

$$\log 14400 = 4,1583625$$

$$\text{igitur } S = 7,4956394$$

$$\text{Porro } \log 13913 = 4,1434208$$

$$\text{igitur } \log g = 3,3522186$$

Quare, cum huic logarithmo proxime respondeat numerus 2250,187; debet poni $g = 2250,187$ lin. rhen. $= 15,6262$ ped. rhen., qui numerus ab illo, quem in (323. §.) calculi gratia proposuimus, $\frac{1}{2} \frac{1}{10000}$ pedis rhenani differt.

578. Corollarium 3.

Observationes enim a diversis Academicis in variis terrae regionibus ope pendulorum compositorum factae evicerunt, haud eandem esse ubique

longitudinem penduli simplicis ad singula minuta secunda oscillantis (576. §.), sed eam continuo decrefcere, fi locus obfervationis continuo magis a polo verſus aequatorem removeatur: unde neceſſario ſequitur, nec efficaciam gravitatis in corpora terreſtria eandem eſſe in omnibus terrae regionibus, ſed illam continuo fieri minorem, prout terrae regio magis a polo verſus aequatorem removetur (540. §.).

Scholion.

Vienna, ubi *Liesganigius* experimentum cepit (576. §.) jacet ſub latitudine $= 48^{\circ}.13'$: ſub hac itaque latitudine, ut vidimus, eſt longitudo penduli ſimplicis ad ſingula minuta ſecunda oscillantis $= 440,562$ lin. pariſ. *Mairanus* vero Pariſiis ſub latitudine $= 48^{\circ}.50'$ invenit longitudinem talis penduli $= 440,57$ lin. pariſ.: in hac ergo terrae regione eſt efficacia vis gravitatis in corpora terreſtria nonnihil major quam Viennae. Et ſane pro hac penduli ſimplicis longitudine habebimus, ut in (577. §.), altitudine g ad pedem rhenanum relata,

$$g = \frac{\pi^2 \cdot 220,285,14400}{13913};$$

et adhibitis logarithmis

$$\log g = S - \log 13913$$

pro $S = 2 \log \pi + \log 220,285 + \log 14400.$

Quamobrem erit

$$2 \log \pi = 0,9942998$$

$$\log 220,285 = 2,3429850$$

$$\log 14400 = 4,1583625$$

$$S = 7,4956473$$

$$\log 13913 = 4,1434208$$

$$\log g = 3,3522265$$

Conſequenter eſt hic $g = 2250,227$ lin. rhen. $= 15,6265$ ped. rhen., loco $15,6262$ ped. rhen. in (577. §.).

579. Corollarium 4.

In (575. §.) fit $T = N\pi \left(1 + \frac{b}{8D}\right) \sqrt{\frac{D}{2g}}$ pro $b = D \sin \nu \phi$. Si ergo ignoretur tempus T , intra quod pendulum compoſitum numerum N oscilla-

oscillationum sub data elongatione ϕ a situ naturali absolvat; poterit illud proxime ope hujus formulae determinari, si antea quaeratur distantia D centri oscillationis ejusdem penduli ab axe oscillationis. Ubi autem elongatio ϕ tam parva fuerit, ut $b = D \sin \phi$ prope evanescat; poterit idem tempus ope formulae $T = N \pi \sqrt{\frac{D}{2g}}$ quaeri, aut, adhibitis logarithmis, adhibitoque pede rhenano pro mensura linearum D, g , ope formulae

$$\log T = \log N + \frac{1}{2} \log ND + 0,2503032.$$

Exemplo fit experimentum *Liesganigianum*. Pendulum illius absolverat 87861 = N oscillationes intra tempus T ; distantia vero centri oscillationis ab axe oscillationis erat in (576. §.) $D = 437,903$ lin. vienn. = 3,041 ped. vienn. Quare, ob rationem pedis viennensis ad rhenanum = 14013:13913, erit

$$D = \frac{3,041, 14013}{13913} \text{ ped. rhen.}$$

$$\text{Est autem } \log 3,041 = 0,4830164;$$

$$\log 14013 = 4,1465311;$$

$$\underline{4,6295475};$$

$$\log 13913 = 4,1434208;$$

$$\text{hinc } \log D = 0,4861267;$$

$$\text{et } \frac{1}{2} \log D = 0,2430633.$$

$$\text{Porro est } \log N = 4,9437961;$$

$$\text{hinc } \log N + \frac{1}{2} \log D = 5,1868594.$$

$$\underline{0,2503032}$$

$$\log T = 4,9365502.$$

Quamobrem est $T = 86408,44$ min. sec., quod tempus cum observatione *Liesganigiana* (576. §.) quam optime consentit.