Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Auctore Isaaco Newtono ...

Newton, Isaac

Amstaelodami [i.e. Amsterdam], 1723

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-1749

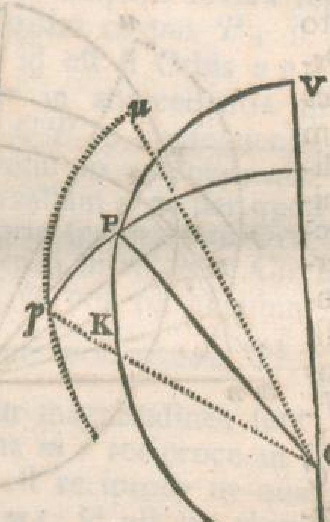
Sectio IX. De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.

SECTIO IX.

De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque motu Apsidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

Efficiendum est ut corpus in Trajectoria quacunque circa centrum Virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eadem Trajectoria quiescente.



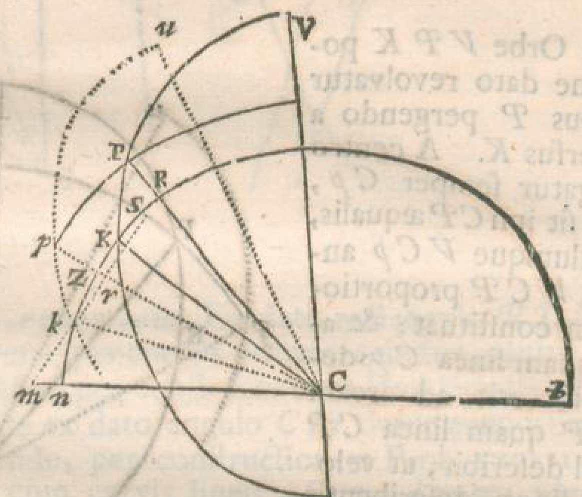
In Orbe *VPK* positione dato revolvatur corpus *P* pergendo a *V* versus *K*. A centro *C* agatur semper *Cp*, quæ sit ipsi *CP* æqualis, angulumque *VCp* angulo *VCP* proportionalem constituat; & area quam linea *Cp* describit erit ad aream *VCP* quam linea *CP* simul describit, ut velocitas lineæ describentis *CP* ad velocitatem lineæ describentis *CP*; hoc est, ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*, adeoque in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea *Cp* in plano immobili describit; manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis Vi centripeta, revolvi possit una cum puncto *p* in Curva illa linea quam punctum idem *p* ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus *VCu* angulo *PCp*, & linea *Cu* lineæ *CV*, atque Figura *uCp* Figuræ *VCP* æqualis, & corpus in *p* semper existens movebitur in

peri-

De Motu Corporum. perimetro Figuræ revolventis *u C p*, eodemque tempore describet arcum ejus *u p* quo corpus aliud *P* arcum ipsi similem & æqualem *V P* in Figura quiescente *V P K* describere potest. Quæratur igitur, per Corollarium quintum propositionis VI, Vis centripeta qua corpus revolvi possit in Curva illa linea quam punctum *p* describit in plano immobili, & solvetur Problema. *Q.E.F.*

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia Virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.



Partibus Orbis quiescentis *VP*, *PK* sunto similes & æquales Orbis revolventis partes *up*, *pk*; & punctorum *P*, *K* distantia intelligatur esse quam minima. A puncto *k* in rectam *pC* demitte perpendiculum *kr*, idemque produc ad *m*, ut sit *mr* ad *kr* ut angulus *VCp* ad angulum *VCP*. Quoniam corporum altitudines *PC* & *pC*, *KC* & *kC* semper æquantur, manifestum est quod linearum *P C* & *p C* incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis *P* & *p* existentium distinguantur motus singuli (per Legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas *P C*, *p C* determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis *P C*, *p C*, perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis *p* erit ad motum transversum corporis *P*, ut motus angularis lineæ *p C*, ad motum angularem lineæ *P C*, id est, ut ut angulus VCp ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroque pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a p versus C, adeoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr, quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam a linea pC, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum P acquirit a linea PC, ut est motus transversus corporis p ad motum transversum corporis alterius P. Quare cum kr æqualis sit distantiæ quam corpus P acquirit a linea PC, sitque mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP, hoc est, ut motus transversus corporis p ad motum transversum corporis P, manifestum est quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita se habebunt ubi corpora p & P æqualiter secundum lineas pC & PC moventur, adeoque æqualibus Viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus pCn ad angulum pCk ut est angulus VCp ad angulum VCP, sitque nC æqualis kC, & corpus p completo illo tempore revera reperietur in n; adeoque Vi majore urgetur quam corpus P, si modo angulus mCp angulo kCp major est, id est si Orbis upk vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus qua linea CP in consequentia fertur; & Vi minore si Orbis tardius movetur in antecedentia. Estque Virium differentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck describi intelligatur Circulus secans lineas mr, mn productas in s & t, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula pCk, pCn dentur magnitudine, sunt kr & mr, earumque differentia mk & summa ms reciproce ut altitudo pC, adeoque rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis pC. Est & mt directe ut $\frac{1}{2} mt$, id est, ut altitudo pC. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est lineola nascens mn, eique proportionalis Virium differentia reciproce ut cubus altitudinis pC. *Q.E.D.*

LIBER PRIMUS.

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p vel K & k, est ad vim qua corpus motu Circulari revolvi possit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in Orbe immobili describit arcum PK, ut lineola nascens mn ad sinum versum arcus nascentis RK, id est

 ut

ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc eſt, ſi capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus *VCP* ad angulum *VCp*, ut GG—FF ad FF. Et propterea, ſi centro *C* intervallo quovis *CP* vel *Cp* deſcribatur Sector circularis æqualis areæ toti *VPC*, quam corpus *P* tempore quovis in Orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto deſcripſit: differentia virium, quibus corpus *P* in Orbe immobili & corpus *p* in Orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo deſcripta ſit area *VPC* uniformiter deſcribere potuiſſet, ut GG—FF ad FF. Namque Sector ille & area *pCk* ſunt ad invicem ut tempora quibus deſcribuntur.

Corol. 2. Si Orbis *VPK* Ellipſis ſit umbilicum habens *C* & Apſidem ſummam *V*; eique ſimilis & æqualis ponatur Ellipſis *upk*, ita ut ſit ſemper *pC* æqualis *PC*, & angulus *VCp* ſit ad angulum *VCP* in data ratione G ad F; pro altitudine autem *PC* vel *pC* ſcribatur A, & pro Ellipſeos latere recto ponatur 2 R: erit vis qua corpus in Ellipſi mobili revolvi poteſt, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\,cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipſi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in *V* erit $\frac{FF}{CV\,quad.}$. Vis autem qua corpus in Circulo ad diſtantiam *CV* ea cum velocitate revolvi poſſet quam corpus in Ellipſi revolvens habet in *V*, eſt ad vim qua corpus in Ellipſi revolvens urgetur in Apſide *V*, ut dimidium lateris recti Ellipſeos ad Circuli ſemidiametrum *CV*, adeoque valet $\frac{RFF}{CV\,cub.}$: & vis quæ ſit ad hanc ut GG—FF ad FF, valet $\frac{RGG - RFF}{CV\,cub.}$: eſtque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in *V* quibus corpus *P* in Ellipſi immota *VPK*, & corpus *p* in Ellipſi mobili *upk* revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A ſit ad ſeipſam in altitudine *CV* ut $\frac{1}{A\,cub.}$ ad $\frac{1}{CV\,cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG - RFF}{A\,cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$ qua corpus revolvi poteſt in Ellipſi immobili *VPK*, addatur exceſſus $\frac{RGG - RFF}{A\,cub.}$ & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\,cub.}$

qua

qua corpus in Ellipsi mobili *upk* iisdem temporibus revolvi possit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, si Orbis immobilis *VPK* Ellipsis sit centrum habens in virium centro *C*; eique similis, æqualis & concentrica ponatur Ellipsis mobilis *upk*; sitque 2 R Ellipseos hujus latus rectum principale, & 2 T latus transversum sive axis major, atque angulus *VCp* semper sit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires quibus corpora in Ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\ cub.}$ & $\frac{FFA}{T\ cub.} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$ respective.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id est radius Circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi potest, in loco *V* dicatur $\frac{VFF}{TT}$ atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *CP* nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta qua corpus idem eosdem motus in eadem Trajectoria *upk* circulariter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGG - VRFF.}{A\ cub.}$

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi Orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCp*, qui sit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari potest in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam

 curvam

curvam Vpk. Est autem hæc Curva Vpk eadem cum Curva illa VPQ in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut Orbis, quem corpus in Ellipsi mobili (ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam Orbis cujus Apsides requiruntur, & quærendo Apsides Orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V Apsis summa, & scribantur T pro altitudine maxima CV, A pro altitudine quavis alia CP vel Cp, & X pro altitudinum differentia $CV - CP$; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum suum C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæque in Corollario 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\,cub.}$, id est ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A\,cub.}$, substituendo $T - X$ pro A, erit ut $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A\,cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.*, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoque ut $\frac{A\,cub.}{A\,cub.}$, sive (scribendo $T - X$ pro A in Numeratore) ut $\frac{T\,cub. - 3TTX + 3TXX - X\,cub.}{A\,cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $T\,cub.$ ut $-FFX$ ad $-3TTX + 3TXX - X\,cub.$ sive ut $-FF$ ad $-3TT + 3TX - XX$. Jam cum Orbis ponatur Circulo quam maxime finitimus, coeat Orbis cum Circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum

infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut — FF ad — 3TT, seu GG ad TT ut FF ad 3 TT & vicissim GG ad FF ut TT ad 3 TT id est, ut 1 ad 3; adeoque G ad F, hoc est angulus *VCp* ad angulum *VCP*, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum *VCP* (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atque adeo in Orbe immobili de quo agimus, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiet angulum *VCp* graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id adeo ob similitudinem Orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & Orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi Orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in Orbe propemodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* 23. *sec.* ad centrum; perveniens ab Apside summa ad Apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T-X}^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1} & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1}, id est ut 1 ad n; adeoque G ad F, id est angulus *VCp* ad angulum *VCP*;

ut

De Motu Corporum

ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam, in Ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus VCp, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam, in Orbe propemodum Circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apside ima ad Apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; adeoque angulus inter Apsidem summam & Apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* seu 90. *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius, corpus perveniet ad Apsidem imam, & completa alia quarta parte ad Apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2. adeoque inter Apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 *gr.* 16. *m.* 45. *sec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apside summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, adeoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de Apside summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad Apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad Apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$, id est, ut $\frac{b\ \text{in}\ \overline{T - X}^m + c\ \text{in}\ \overline{T - X}^n}{A\ cub.}$ seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}\ \&c.}{A\ cub.}$$

&

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & viciſſim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV ſeu T arithmetice per Unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, adeoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde eſt G ad F, id eſt angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum Angulus VCP inter Apſidem ſummam & Apſidem imam in Ellipſi immobili ſit 180. *gr.* erit angulus VCp inter eaſdem Apſides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$ proportionali deſcribit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento ſi vis centripeta ſit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\ cub.}$, angulus inter Apſides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec ſecus reſolvetur Problema in caſibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis eſt, reſolvi ſemper debet in Series convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit, ad ipſius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipſius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ ſunt: Et quantitates ſuperfluas delendo, ſcribendoque Unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta ſit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri poteſt dignitas illa ex motu Apſidum; & contra. Nimirum ſi motus totus angularis, quo corpus redit ad Apſidem eandem, ſit ad motum angularem revolutionis unius, ſeu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus In-

 dex

De Motu Corporum

dex eſt $\frac{nn}{mm}-3$. Id quod per exempla ſecunda manifeſtum eſt. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in receſſu a centro, decreſcere non poſſe: Corpus tali vi revolvens deque Apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere nunquam perveniet ad Apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens Curvam illam lineam de qua egimus in Cor. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud, de Apſide diſcedens, vel minimum aſcendere, aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad Apſidem ſummam. Deſcribet enim Curvam illam lineam de qua actum eſt in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in receſſu a centro, decreſcit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſque vel aſcendet in infinitum. At ſi vis, in receſſu a centro, vel decreſcat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad Apſidem imam aliquando perveniet: & contra, ſi corpus de Apſide ad Apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de Apſide ad Apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apſide ſumma ad Apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoque $\frac{nn}{mm}-3$ valeat $\frac{1}{64}-3$ vel $\frac{1}{16}-3$ vel $\frac{1}{4}-3$ vel $\frac{4}{9}-3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$ vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id eſt, reciproce ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$ vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad Apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{AA}$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apſidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}; & propterea vis aut reciproce ut

$A^{\frac{11}{9}}$

$A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut A^6 vel A^{13}. Denique si corpus pergendo ab Apside summa ad Apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoque Apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* sive ut 121 ad 120, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus vi centripeta, quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per Exempla tertia) motus Apsidum qui ex vi illa extranea orietur, & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in Ellipsi sit ut $\frac{1.}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA, adeoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^4}{A\ cub.}$; erit (in Exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, n æqualis 4, adeoque angulus revolutionis inter Apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam esse 357,45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1; & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$ seu 180,7623, id est, 180 *gr.* 45. *m.* 44. *s.* Igitur corpus de Apside summa discedens, motu angulari 180 *gr.* 45. *m.* 44. *s.* perveniet ad Apsidem imam, & hoc motu duplicato ad Apsidem summam redibit: adeoque Apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *sec.*

Hactenus de Motu Corporum in Orbibus quorum plana per centrum Virium transeunt. Superest ut Motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui Motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure Motus corporum Viribus quibuscunque centra

tra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & Orbitas movendo describunt. Et eadem lege Motus corporum in superficiebus Curvis peractos subinde determinamus.

SECTIO X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deque Funipendulorum Motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta, datoque tum Virium centro tum Plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur Motus corporis de loco dato, data cum Velocitate, secundum rectam in Plano illo datam egressi.

Sit S centrum Virium, SG distantia minima centri hujus a Plano dato, P corpus de loco P, secundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in Trajectoria sua revolvens, & PQR Trajectoria illa, in Plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & si in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur versus centrum S, & agatur VT quæ sit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV resolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo secundum positionem plani, trahit corpus directe versus punctum C in plano datum, adeoque facit illud in hoc plano perinde moveri ac si vis ST tolleretur, & corpus vi sola TV revolveretur circa centrum C in spatio libero. Data autem vi