# Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Auctore Isaaco Newtono ...

**Newton, Isaac**

**Amstaelodami [i.e. Amsterdam], 1723**



Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-1749

Sectio XII. De corporum sphaericorum viribus attractivis.

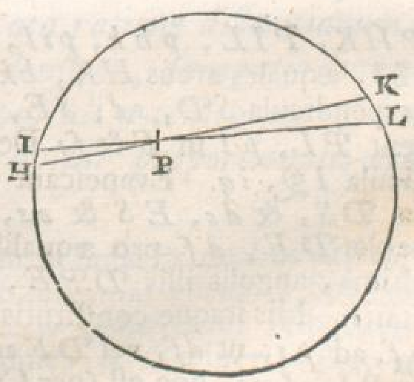
& qualitates Physicas, sed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens, ut in Definitionibus explicui. In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus Physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere, & quales motus inde consequantur. 

# SECTIO XII.

## *De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.*

### PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

*Si ad Sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.*



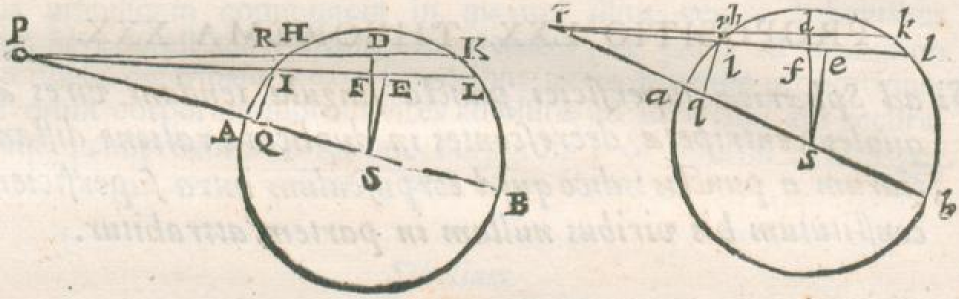

Sit *HIKL* superficies illa Sphærica, & *P* corpusculum intus constitutum. Per *P* agantur ad hanc superficiem lineæ duæ *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes; &, ob triangula *HPI*, *LPK* (per Corol. 3. Lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantiis *HP*, *LP* proportionales; & superficiei Sphæricæ particulæ quævis ad *HI* & *KL*, rectis per punctum *P* transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus *P* exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem æquali-

æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, ſe mutuo deſtruunt. Et ſimili argumento, attractiones omnes per totam Sphæricam ſuperficiem a contrariis attractionibus deſtruuntur. Proinde corpus $P$ nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

*Iiſdem poſitis, dico quod corpuſculum extra Sphæricam ſuperficiem conſtitutum, attrahitur ad centrum Sphæræ vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.*

Sint $AHKB$, $ahkb$ æquales duæ ſuperficies Sphæricæ, centris $S$, $s$, diametris $AB$, $ab$ deſcriptæ, & $P$, $p$ corpuſcula ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur a corpuſculis lineæ




$PHK$, $PIL$, $phk$, $pil$, auferentes a circulis maximis $AHB$, $ahb$, æquales arcus $HK$, $hk$ & $IL$, $il$: Et ad eas demittantur perpendicula $SD$, $sd$; $SE$, $se$; $IR$, $ir$; quorum $SD$, $sd$ ſecent $PL$, $pl$ in $F$ & $f$: Demittantur etiam ad diametros perpendicula $IQ$, $iq$. Evaneſcant anguli $DPE$, $dpe$: & (ob æquales $DS$, & $ds$, $ES$ & $es$,) lineæ $PE$, $PF$ & $pe$, $pf$ & lineolæ $DF$, $df$ pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis $DPE$, $dpe$ ſimul evaneſcentibus, eſt æqualitatis. His itaque conſtitutis, erit $PI$, ad $PF$, ut $RI$ ad $DF$, & $pf$, ad $pi$, ut $df$, vel $DF$ ad $ri$, & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut $RI$, ad $ri$, hoc eſt (per Corol. 4. Lem. VII,) ut arcus $IH$ ad arcum $ih$. Rurſus $PI$, ad $PS$ ut $IQ$ ad $SE$, & $ps$ ad $pi$ ut $se$ vel $SE$ ad $iq$; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut $IQ$ ad $iq$. Et conjunctis rationibus $PI\ quad. \times pf \times ps$ ad $pi\ quad. \times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc eſt, ut ſuperficies circularis, quam

arcus

arcus $IH$ convolutione semicirculi $AKB$ circa diametrum $AB$ describet, ad superficiem circularem, quam arcus $ib$ convolutione semicirculi $akb$ circa diametrum $ab$ describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula $P$ & $p$, sunt (per Hypothesin) ut ipsæ superficies applicatæ ad quadrata distantiarum suarum a corporibus, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2. resolutione virium) secundum lineas $PS$, $ps$ ad centra tendunt, ut $PI$ ad $PQ$, & $pi$ ad $pq$; id est (ob similia triangula $PIQ$ & $PSF$, $piq$ & $psf$) ut $PS$ ad $PF$ & $ps$ ad $pf$. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus $P$ versus $S$ ad attractionem corpusculi $p$ versus $s$, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc est, ut $ps$ *quad.* ad $PS$ *quad.* Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum $KL$, $kl$ descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut $ps$ *quad.* ad $PS$ *quad.*; inque eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies Sphærica, capiendo semper $sd$ æqualem $SD$ & $se$ æqualem $SE$, distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum Sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

## PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

*Si ad Sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, ac detur tum Sphæræ densitas, tum ratio diametri Sphæræ ad distantiam corpusculi a centro ejus; dico quod vis qua corpusculum attrahitur proportionalis erit semidiametro Sphæræ.*

Nam concipe corpuscula duo seorsim a Sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & distantias eorum a Sphærarum centris proportionales esse diametris Sphærarum respective, Sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione composita ex ratione particularum directe & ratione duplicata distantiarum inverse

verse. Sed particulæ sunt ut Sphæræ, hoc est, in ratione triplicata diametrorum, & distantiæ sunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione posteriore bis inverse est ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc si corpuscula in Circulis, circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva constantes, revolvantur; sintque distantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

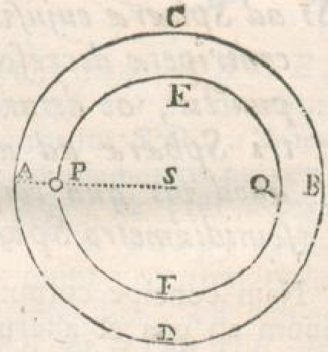
*Corol.* 2. Et vice versa, si Tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

*Corol.* 3. Si ad Solidorum duorum quorumvis similium & æqualiter densorum puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: vires quibus corpuscula, ad Solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri Solidorum.

## PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

*Si ad Sphæræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra Sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.*

In Sphæra *ABCD*, centro *S* descripta, locetur corpusculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe Sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est, per Prop. LXX. quod Sphæricæ superficies concentricæ ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus *P*. Restat sola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Prop. LXXII. hæc est ut distantia *PS*. *Q. E. D.*




### *Scholium.*

Superficies ex quibus solida componuntur, hic non sunt pure Mathematicæ, sed Orbes adeo tenues ut eorum crassitudo instar nihili

nihili sit; nimirum Orbes evanescentes ex quibus Sphæra ultimo constat, ubi Orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta ex quibus lineæ, superficies & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ. 

## PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

*Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro.*

Nam distinguatur Sphæra in superficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantiæ corpusculi a centro, per Prop. LXXI. Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in Sphæram totam, in eadem ratione. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc in æqualibus distantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones sunt ut Sphæræ. Nam per Prop. LXXII, si distantiæ sunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione; &, distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est, in ratione Sphærarum.

*Corol.* 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

*Corol.* 3. Si corpusculum, extra Sphæram homogeneam positum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem Sphæra ex particulis attractivis; decrescet vis particulæ cujusque in duplicata ratione distantiæ a particula.

## PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

*Si ad Sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; dico quod Sphæra quævis alia similaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ centrorum.*

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantiæ suæ a centro Sphæræ trahentis, (per Prop. LXXIV.) & propterea

terea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciproce proportionalis quadrato distantiæ suæ a centro Sphæræ; adeoque huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Attractiones Sphærarum, versus alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum quas attrahunt.

*Corol.* 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem III.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

*Corol.* 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

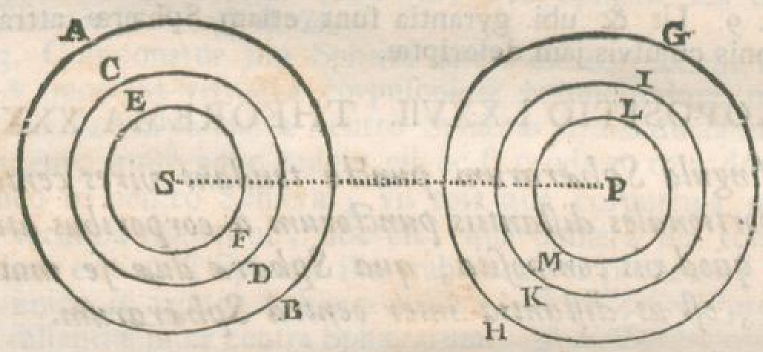
*Corol.* 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

## PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

*Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similares, & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicata ratione distantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum.*

Sunto Sphæræ quotcunque concentricæ similares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem

densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per Prop. LXXV.) trahent Sphæras alias quotcunque concentricas similares $GH$, $IK$, $LM$, &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiæ $SP$. Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias, hoc est, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita $AB$, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam $GH$, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum sic, ut materiæ densitas una cum vi attractiva, in progressu a circumferentia ad centrum, secundum Legem quamcunque crescat vel decrescat: &, addita materia 




non attractiva, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum superius) in eadem illa distantiæ quadratæ ratione inversa. *Q. E. D.*

*Corol.* 1. Hinc si ejusmodi Sphæræ complures, sibi invicem per omnia similes, se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibusvis centrorum distantiis, ut Sphæræ attrahentes.

*Corol.* 2. Inque distantiis quibusvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum intra centra.

*Corol.* 3. Attractiones vero motrices, seu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub Sphæris per multiplicationem producta.

*Corol.* 4. Inque distantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

 *Corol.*

*Corol.* 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriusque virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

*Corol.* 6. Si hujusmodi Sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintque distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt Tempora periodica.

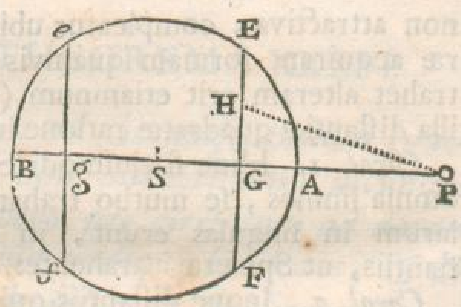
*Corol.* 7. Et vicissim, si Tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris.

*Corol.* 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

*Corol.* 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

## PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

*Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ, proportionales distantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.*




*Cas.* 1. Sit $AEBF$ Sphæra, $S$ centrum ejus, $P$ corpusculum attractum, $PASB$ axis Sphæræ per centrum corpusculi transiens, $EF$, $ef$ plana duo quibus Sphæra secatur, huic axi perpendicularia & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphæræ; $G$, $g$ intersectiones planorum & axis, & $H$ punctum quodvis in plano $EF$. Puncti $H$ vis centripeta in corpusculum $P$, secundum lineam $PH$ exercita, est ut distantia $PH$; & (per Legum Corol. 2.) secundum lineam $PG$, seu versus centrum $S$, ut longitudo $PG$. Igitur punctorum omnium in plano $EF$, hoc est plani totius vis, qua corpusculum $P$ trahitur versus centrum $S$, est ut numerus punctorum ductus in distantiam $PG$: id est, ut contentum sub plano ipso $EF$ & distantia illa $PG$. Et similiter vis plani $ef$, qua corpusculum $P$ trahitur

trahitur versus centrum $S$, est ut planum illud ductum in distantiam suam $Pg$, sive ut huic æquale planum $EF$ ductum in distantiam illam $Pg$; & summa virium plani utriusque ut planum $EF$ ductum in summam distantiarum $PG + Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam $PS$, hoc est, ut duplum planum $EF$ ductum in distantiam $PS$, vel ut summa æqualium planorum $EF + ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam $PS$, hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui $S$ a corpusculo $P$. *Q. E. D.*



*Cas.* 2. Trahat jam corpusculum $P$ Sphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia $PS$. *Q. E. D.*

*Cas.* 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris $P$; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantiæ inter centra Sphærarum. *Q. E. D.*

*Cas.* 4. Trahant Sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. *Q. E. D.*

*Cas.* 5. Locetur jam corpusculum $p$ intra Sphæram $AEBF$; & quoniam vis plani $ef$ in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia $pg$; & vis contraria plani $EF$ ut contentum sub plano illo & distantia $pG$; erit vis ex utraque composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in $pS$ distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium $EF$, $ef$ in Sphæra tota, hoc est, attractio Sphæræ totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in $pS$ distantiam corpusculi a centro Sphæræ. *Q. E. D.*

*Cas.* 6. Et si ex corpusculis innumeris $p$ componatur Sphæra nova, intra Sphæram priorem $AEBF$ sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex Sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum $pS$. *Q. E. D.*

De Motu Corporum,

## PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

*Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcunque dissimilares & inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undique similares; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiæ inter centra Sphærarum.*

Demonstratur ex Propositione præcedente, eodem modo quo Propositio LXXVI ex Propositione LXXV demonstrata fuit.

*Corol.* Quæ superius in Propositionibus X & LXIV de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæræ conditionis ejusdem.

### *Scholium.*

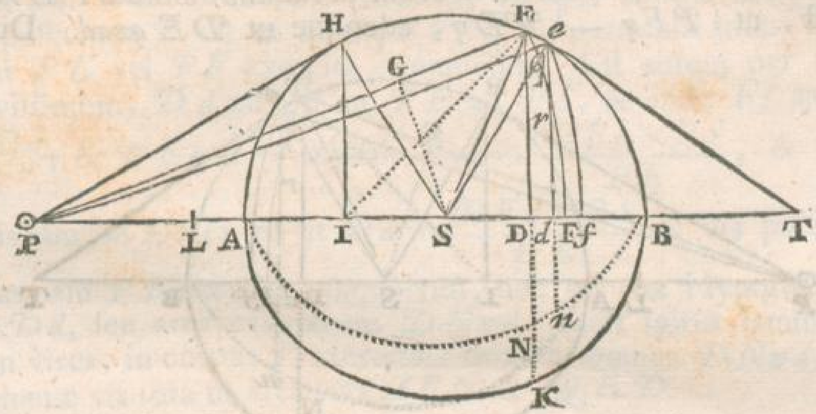
Attractionum Casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi Vires centripetæ decrescunt in duplicata distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque Casu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum Vires centripetas eadem Lege, in recessu a centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

## LEMMA XXIX.

*Si describantur centro* S *circulus quilibet* AEB, & *centro* P *circuli duo* EF, ef, *secantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; & *ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, si distantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* Dd *ad lineam evanescentem* Ff *ea sit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam

Nam si linea $Pe$ secet arcum $EF$ in $q$; & recta $Ee$, quæ cum arcu evanescente $Ee$ coincidit, producta occurrat rectæ $PS$ in $T$; & ab $S$ demittatur in $PE$ normalis $SG$: ob similia triangula $DTE$, $dTe$, $DES$; erit $Dd$ ad $Ee$, ut $DT$ ad $TE$, seu $DE$ ad $ES$;



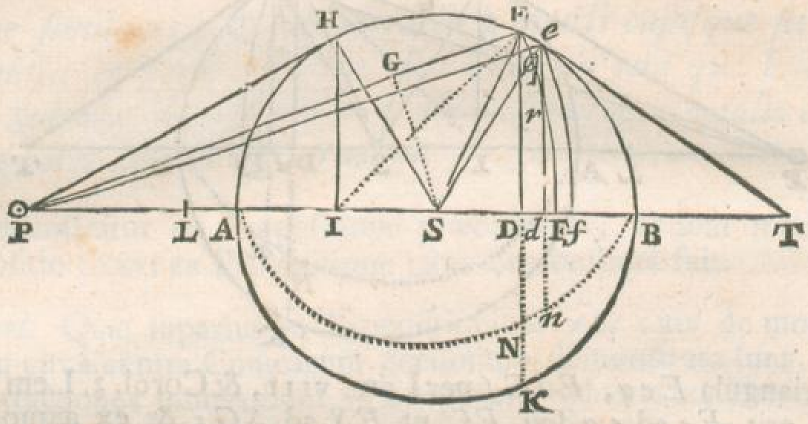

& ob triangula $Eeq$, $ESG$ (per Lem. VIII, & Corol. 3. Lem VII.) similia, erit $Ee$ ad $eq$ seu $Ff$, ut $ES$ ad $SG$; & ex æquo, $Dd$ ad $Ff$ ut $DE$ ad $SG$; hoc est (ob similia triangula $PDE$, $PGS$) ut $PE$ ad $PS$. *Q.E.D.*

## PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

*Si superficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evanescens* EFfe, *convolutione sui circa axem* PS, *describat solidum Sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod Vis, qua solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione composita ex ratione solidi* $DEq \times Ff$ *& ratione vis qua particula data in loco* Ff *traheret idem corpusculum.*

Nam si primo consideremus vim superficiei Sphæricæ $FE$, quæ convolutione arcus $FE$ generatur, & a linea $de$ ubivis secatur in $r$; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus $rE$ genita, ut lineola $Dd$, manente Sphæræ radio $PE$, (uti demonstravit *Archimedes* in Lib. de *Sphæra* & *Cylindro.*) Et hujus vis secundum lineas $PE$ vel $Pr$ undique in superficie conica sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola $Dd$ vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato Sphæræ radio $PE$ & lineola

lineola illa $Dd$: at secundum lineam $PS$ ad centrum $S$ tendentem minor, in ratione $PD$ ad $PE$, adeoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea $DF$ in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur $Dd$; & superficies $FE$ dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$, adeoque ut $DE$ *quad.* Ducatur




jam superficies $FE$ in altitudinem $Ff$ & fiet solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum $P$ ut $DEq \times Ff$: puta si detur vis quam particula aliqua data $Ff$ in distantia $PF$ exercet in corpusculum $P$. At si vis illa non detur, fiet vis solidi $EFfe$ ut solidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q.E.D.*

## PROPOSITIO LXXX. THEOREMA XL.

*Si ad Sphæræ alicujus* ABE, *centro* S *descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem* AB, *in quo corpusculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis singulis* D *perpendicula* DE, *Sphæræ occurrentia in* E, *& in ipsis capiantur longitudines* DN, *quæ sint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis quam Sphæræ particula sita in axe ad distantiam* PE *exercet in corpusculum* P *conjunctim: dico quod Vis tota, qua corpusculum* P *trahitur versus Sphæram, est ut area comprehensa sub axe Sphæræ* AB *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem Sphæræ $AB$ dividi in particulas innumeras æquales $Dd$, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$, & erigatur perpendiculum $dn$. Per Theorema ſuperius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpuſculum $P$ eſt ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad diſtantiam $PE$ vel $PF$ exercita conjunctim. Eſt autem per Lemma noviſſimum, $Dd$ ad $Ff$ ut $PE$ ad $PS$, & inde $Ff$ æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale $Dd$ in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ eſt ut $Dd$ in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam $PF$ exercita conjunctim, hoc eſt (ex Hypotheſi) ut $DN \times Dd$, ſeu area evaneſcens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus $P$ exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc eſt, Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. *Q.E.D.*

*Corol.* 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$: erit vis tota qua corpuſculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

*Corol.* 2. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia corpuſculi a ſe attracti, & fiat $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$: erit vis qua corpuſculum $P$ a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

*Corol.* 3. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut cubus diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti, & fiat $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$: erit vis qua corpuſculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

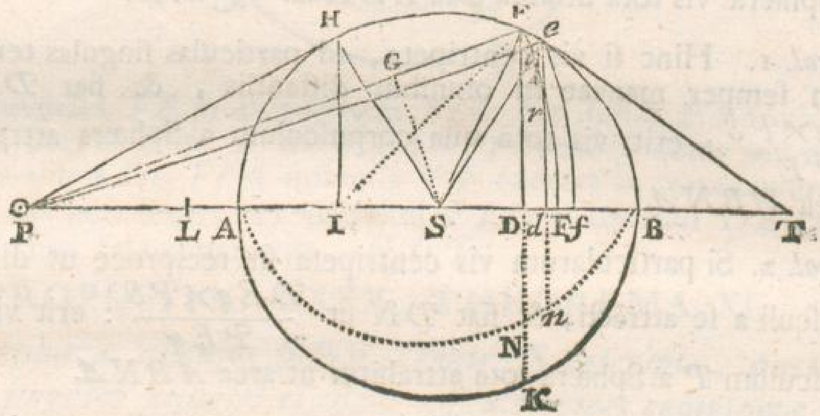
*Corol.* 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciproce ut quantitas V, fiat autem $DN$ ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpuſculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

De Motu Corporum,

## PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

*Stantibus jam positis, mensuranda est Area* ABNA.

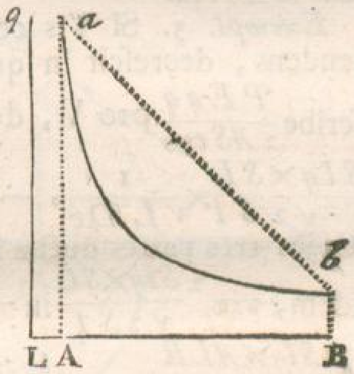
A puncto $P$ ducatur recta $PH$ Sphæram tangens in $H$, & ad axem $PAB$ demissa normali $HI$, bisecetur $PI$ in $L$; & erit (per Prop. 12. Lib. 2. Elem.) $PEq$ æquale $PSq + SEq + 2\,PSD$. Est autem $SEq$ seu $SHq$ (ob similitudinem triangulorum $SPH$, $SHI$) æquale rectangulo $PSI$. Ergo $PEq$ æquale est contento sub $PS$ & $PS + SI + 2\,SD$, hoc est, sub $PS$ & $2\,LS + 2\,SD$, id est, sub $PS$ & $2\,LD$. Porro $DE$ *quad.* æquale est $SEq - SDq$, seu $SEq - LSq + 2\,SLD - LDq$, id est, $2\,SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$




(per Prop. 6. Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo $ALB$. Scribatur itaque $2\,SLD - LDq - ALB$ pro $DEq$; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ $DN$, resolvet sese in tres partes $\frac{2\,SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro $PE$ medium proportionale inter $PS$ & $2\,LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innotescunt. *Q.E.F.*

Ex-

*Exempl.* 1. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut diſtantia; pro V ſcribe diſtantiam $PE$; dein $2\,PS \times LD$ pro $PEq$, & fiet $DN$ ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2\,LD}$. Pone $DN$ æqualem duplo ejus $2\,SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2\,SL$ ducta in longitudinem $AB$ deſcribet aream rectangulam $2\,SL \times AB$; & pars indefinita $LD$ ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum creſcendo vel decreſcendo æquetur ſemper longitudini $LD$, deſcribet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id eſt, aream $SL \times AB$; quæ ſubducta de area priore $2\,SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, deſcribet aream Hyperbolicam; quæ ſubducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæſitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis conſtructio. Ad puncta $L$, $A$, $B$ erige perpendicula $Ll$, $Aa$, $Bb$, quorum $Aa$ ipſi $LB$, & $Bb$ ipſi $LA$ æquetur. Aſymptotis $Ll$, $LB$, per puncta $a$, $b$ deſcribatur Hyperbola $ab$. Et acta chorda $ba$ claudet aream $aba$ areæ quæſitæ $ABNA$ æqualem.

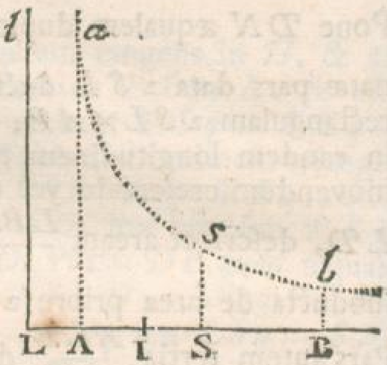



*Exempl.* 2. Si vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ſit reciproce ut cubus diſtantiæ, vel (quod perinde eſt) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; ſcribe $\frac{PE\,cub.}{2\,ASq}$ pro V, dein $2\,PS \times LD$ pro $PEq$; & fiet $DN$ ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2\,PS} - \frac{ALB \times ASq}{2\,PS \times LDq}$, id eſt (ob continue proportionales $PS$, $AS$, $SI$) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2\,LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem $AB$, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperboli-

 cam;

De Motu Corporum

cam; secunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima subducatur summa secundæ & tertiæ, & manebit area quæsita $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta $L$, $A$, $S$, $B$ erige perpendicula $Ll$, $Aa$, $Ss$, $Bb$, quorum $Ss$ ipsi $SI$ æquetur, perque punctum $s$ Asymptotis $Ll$, $LB$ describatur Hyperbola $asb$ occurrens perpendiculis $Aa$, $Bb$ in $a$ & $b$; & rectangulum $2ASI$ subductum de area Hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$.




*Exempl.* 3. Si Vis centripeta, ad singulas Sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicata ratione distantiæ a particulis; scribe $\frac{PEqq}{2AS\,cub}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro $PE$, & fiet $DN$ ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}}$, $-\frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}}$, $-\frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem $AB$, producunt areas totidem; viz. $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA\,cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\,cub.}}$ Et hæ post debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, $SIq$, & $SIq + \frac{2SI\,cub.}{3LI}$. Hæ vero subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4SI\,cub.}{3LI}$. Igitur vis tota, qua corpusculum $P$ in Sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$ id est, reciproce ut $PS\,cub. \times PI$. Q.E.I.

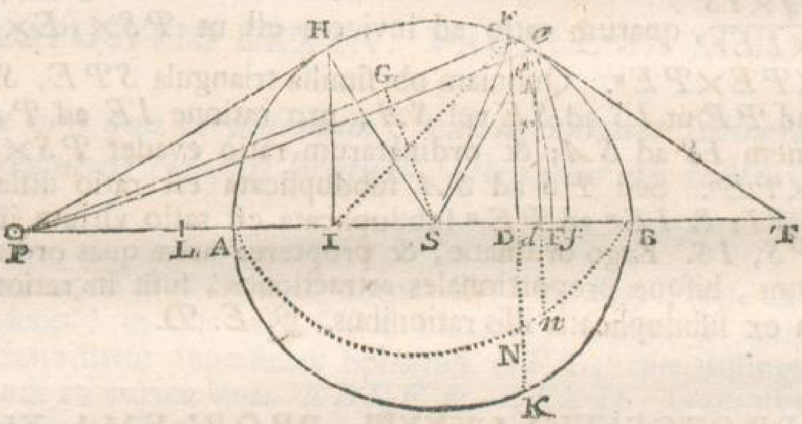
Eadem Methodo determinari potest Attractio corpusculi siti intra Sphæram, sed expeditius per Theorema sequens.

PRO-

## PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

*In Sphæra centro* S *intervallo* SA *descripta, si capiantur* SI, SA, SP *continue proportionales: dico quod corpusculi intra Sphæram in loco quovis* I *attractio est ad attractionem ipsius extra Sphæram in loco* P, *in ratione composita ex subduplicata ratione distantiarum a centro* IS, PS *& subduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut si vires centripetæ particularum Sphæræ sint reciproce ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in $I$ trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in $P$, in ratione




composita ex subduplicata ratione distantiæ $SI$ ad distantiam $SP$ & ratione subduplicata vis centripetæ in loco $I$, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco $P$ ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione subduplicata distantiarum $SI$, $SP$ ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in $I$ & $P$ a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum Sphæræ sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in $I$ sit ad attractionem in $P$, ut distantia $SP$ ad Sphæræ semidiametrum $SA$: Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in $I$ & $P$ erunt ad invicem

cem ut $SP$ *quad.* ad $SA$ *quad.* Si in quadruplicata, ut $SP$ *cub.* ad $SA$ *cub.* Unde cum attractio in $P$, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut $PS$ *cub.* $\times PI$, attractio in $I$ erit reciproce ut $SA$ *cub.* $\times PI$, id est (ob datum $SA$ *cub.*) reciproce ut $PI$. Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco quovis $P$, ordinatim applicata $DN$ inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur $IE$, ordinata illa ad alium quemvis locum $I$, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis $E$ manantes, esse ad invicem in distantiis $IE$, $PE$, ut $PE^n$ ad $IE^n$, (ubi numerus $n$ designet indicem potestatum $PE$ & $IE$) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula $SPE$, $SEI$, fit $IE$ ad $PE$ ut $IS$ ad $SE$ vel $SA$; pro ratione $IE$ ad $PE$ scribe rationem $IS$ ad $SA$; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed $PS$ ad $SA$ subduplicata est ratio distantiarum $PS$, $SI$; & $IE^n$ ad $PE^n$ subduplicata est ratio virium in distantiis $PS$, $IS$. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione composita ex subduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

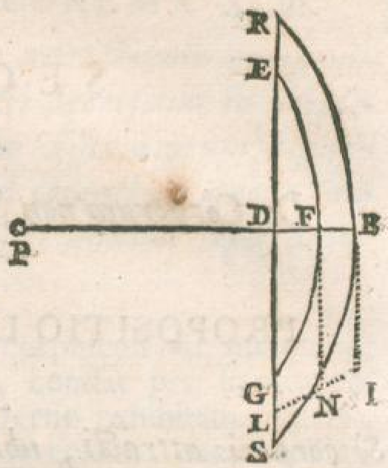
## PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

*Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad ejus Segmentum quodcunque attrahitur.*

Sit $P$ corpus in centro Sphæræ, & $RBSD$ Segmentum ejus plano $RDS$ & superficie Sphærica $RBS$ contentum. Superficie Sphærica $EFG$ centro $P$ descripta secetur $DB$ in $F$, ac distinguatur Segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profundi-

tas O,

tas O, & erit hæc superficies (per demonstrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ esse reciproce ut distantiarum dignitas illa cujus Index est $n$; & vis qua superficies $FE$ trahit corpus $P$ erit ut $\frac{DF \times O - DFq \times O}{PF^{n-1}} \frac{}{2\,pFn}$. Huic proportionale sit perpendiculum $FN$ ductum in O; & area curvilinea $BDLIB$, quam ordinatim applicata $FN$ in longitudinem $DB$ per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota qua Segmentum totum $RBSD$ trahit corpus $P$. *Q. E. I.*




## PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

*Invenire vim qua corpusculum, extra centrum Sphæræ in axe Segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem Segmento.*

A Segmento $EBK$ trahatur corpus $P$ (Vide Fig. Prop. LXXIX, LXXX, LXXXI.) in ejus axe $ADB$ locatum. Centro $P$ intervallo $PE$ describatur superficies Sphærica $EFK$, qua distinguatur Segmentum in partes duas $EBKF$ & $EFKD$. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI, & vis partis posterioris per Prop. LXXXIII; & summa virium erit vis Segmenti totius $EBKD$. *Q. E. I.*

*Scholium.*

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad Leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit Propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus Philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SECTIO