

www.e-rara.ch

Analytische Mechanik

Lagrange, Joseph Louis de

Göttingen, 1797

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 4693

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-20298>

Erster Theil der analytischen Mechanik oder die Statik.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Erster Theil.
der
analytischen Mechanik oder die Statik.

Erster Abschnitt.
Von den verschiedenen Grundlehren der Statik.

Die Statik ist die Wissenschaft des Gleichgewichts der Kräfte. Unter Kraft versteht man überhaupt eine Ursache, sie mag übrigens beschaffen seyn, wie sie will, die einem Körper, woran man sie sich angebracht vorstellt, entweder wirklich eine Bewegung eindrückt, oder doch dazu ein Bestreben äußert; nach der Größe der eingedrückten Bewegung oder des Bestrebens sie einzudrücken wird dann die Kraft geschätzt. Im Zustande des Gleichgewichts übt die Kraft keine Wirkung aus, nur ein simples Bestreben zur Bewegung bringt sie in diesem Falle hervor; jedoch muß sie hier durch die Wirkung allezeit gemessen werden, welche sie, wenn keine Hindernisse statt fänden, ausüben würde. Nimmt man eine gewisse Kraft oder ihre Wirkung zur Einheit an, so ist die Ausdrückung jeder andern Kraft nichts wie ein Verhältnis zu jener, folglich eine mathematische Größe, die durch Zahlen und Linien ausgedrückt werden kann, und unter diesem Gesichtspunkt muß man die Kräfte in der Mechanik betrachten.

Gleichgewicht entsteht durch die Aufhebung mehrerer Kräfte, die einander entgegengesetzt sind, und wovon eine die Wirkung der andern vernicht

vernichtet; die Gesetze nun anzugeben, wonach diese Aufhebung vor sich geht, das ist der Zweck der Statik. Diese Gesetze aber beruhen auf allgemeine Principien, die sich auf drei bringen lassen, nämlich auf das des Gleichgewichts beim Hebel, 2) das der Zusammensetzung der Bewegung und 3) das des Bestrebens nach Geschwindigkeit (des vitelles virtuelles).

*) Archimedes, der einzige unter den Alten, der uns eine Art von Theorie der Mechanik in seinen 2 Büchern de aequi ponderantibus hinterlassen hat, ist der Erfinder des Gesetzes des Hebels, welches, wie jedermann weiß, darin besteht, daß wenn ein geradlinigter Hebel von 2 Gewichten beschwert ist, deren Entfernungen vom Ruhepunkt sich umgekehrt verhalten wie die Gewichte selbst, allezeit ein Gleichgewicht dieses Hebels erfolgt und daß sein Unterstützungspunkt von der Summe dieser 2 Gewichte beschwert wird. Archimedes nimmt dieses Gesetz in dem Falle, wo gleiche Gewichte gleichweit vom Unterstützungspunkt entfernt sind, für einen an und für sich evidenten Grundsatz der Mechanik oder doch wenigstens für ein Erfahrungsgesetz an, und auf diesen einfachen und ersten Fall bringt er dann auch den, wo die Gewichte ungleich sind, in dem er sich diese Gewichte, wenn sie commensurabel sind, in mehrere unter einander gleiche Theile getheilt vorstellt und annimmt, daß die Theile jedes Gewichts von einander sich trennen und auf beiden Seiten des Hebels in gleichen Entfernungen sich vertheilen lassen, so daß der ganze Hebel von mehreren kleinen unter einander gleichen Gewichten und in gleichen Entfernungen vom Unterstützungspunkt beschwert sey. Hierauf erweist er auch die Wahrheit desselben Theorems für incommensurabele Gewichte mit Hülfe der Erschöpfungsmethode, und zeigt, daß unter diesen Gewichten nie ein Gleichgewicht statt finden kann, wenn sie sich nicht im umgekehrten Verhältniß der Entfernungen vom Unterstützungspunkt befinden. Einige der Neuern wie Stevin in seiner Statik und Galiläi in seinen Gesprächen über die Bewegung haben Archimedes's Beweis dadurch einfacher zu machen gesucht, daß sie annahmen, die an den Hebel angebrachte Gewichte seien 2 in ihrer Mitte horizontal aufgehängene Parallelepiped, deren Breiten und Höhen einander gleich, die Längen aber doppelt so groß seyen als die Hebelarmen, die umgekehrt zu ihnen gehören. Denn hiedurch sind die beiden Parallelepiped im umgekehrten Verhältniß ihrer Hebelarmen, und ihre Stellung ist so beschaffen, daß sie

*) Vergl. Z. Mach. „Die Mechanik in ihrer Entwickelg.“ 1. Kap.

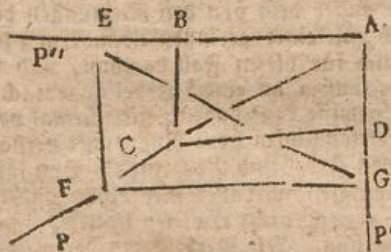
sie nur ein einziges ausmachen, dessen Mittelpunkt vollkommen mit dem Unterstützungspunkt des Hebels übereinkommt.

Anderer aber haben Fehler in Archimed's Beweis finden wollen, und ihn auf verschiedene Art verändert, um ihm eine größere Strenge zu geben. Aber außer Huyghens verdienet keiner hier den Geometern bekannt zu werden.

Huyghens Beweis gründet sich auf die Betrachtung des Gleichgewichts einer Ebene, die mit mehreren gleichen Gewichten beschwert ist und deren Unterstützung eine gerade Linie ist; aber ohnerachtet dieser Beweis sehr sinnreich und frei von den Schwierigkeiten ist, denen der Archimed'sche unterworfen ist; so kann man doch manches dagegen einwenden. Man sehe die Opera varia von Huyghens Tom. 1. *)

Hat

*) Man kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes, der für den geradlinigten Hebel an sich schon ziemlich evident scheint, geometrisch auf folgende Art überzeugen: Es seyen P' P'' 2 Kräfte, welche durch AB , AD ausgedrückt werden, man verzeichne das Parallelogram $ABCD$ und nenne P die durch AC ausgedrückte mittlere Kraft: so hat man, wenn man aus einem willkürlichen Punkte von einer der Richtungslinien dieser 3 Kräfte 2 senkrechte Linien FG , FE zieht, die Proportion:



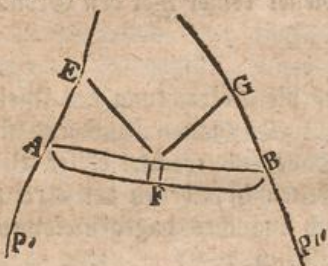
$$P' : P'' : P = GF : FE : GE.$$

Wir wollen nun einen Hebel AB betrachten, hier muß der Ruhepunkt in der Richtungslinie der mittlern Kraft liegen, ziehet man daher aus diesem

Hat man einmal das Gesetz des geradlinigten und horizontalen Hebels festgesetzt; so kann man daraus die Gesetze des Gleichgewichts bet

den

von Punkte F die senkrechte Linie GF, EF auf die Directionslinien der Kräfte P' P''; so haben wir aus dem vorhergehenden folgende Proportion:



$$P' : P'' = FG : FE \text{ d. h.}$$

Wenn 2 an den Endpunkten eines Hebels angebrachte simple oder Bewegungskräfte im Gleichgewicht sind, und nun aus dem Ruhepunkt auf die Richtung einer jeden ein Perpendikel gezogen wird, so verhalten sich diese simplen oder Bewegungskräfte umgekehrt wie die auf ihre Richtung gezogene Perpendikel. Ist nun aber AB gerade und die Direction der Kraft P' mit der der Kraft P'' parallel; so fallen, wenn diese Linien auf die Richtung des Hebels perpendicular sind, die Perpendikel FG, FE in die Richtungslinie des Hebels und sind der Entfernung vom Ruhepunkt bis zur Richtung einer jeden Kraft gleich. Alsdenn verhalten sich also im Falle des Gleichgewichts die Kräfte verkehrt, wie die Längen ihrer Hebelarmen. Setzen wir nun, der Ruhepunkt liege ausser dem von den Richtungen der Kräfte gemachten Winkel; so läßt sich mit einer geringen Abänderung die Wahrheit des vorhergehenden Satzes auch für diesen Fall darthun, und so hat man dann den allgemeinen Satz, daß 2 an einem Hebel angebrachte Kräfte, die gegen den Ruhepunkt eine gewisse Lage haben, sich allemal verkehrt wie die Entfernungen ihrer Directionslinien vom Ruhepunkt verhalten. Dies gilt daher für alle Arten von Hebel und Archimed's Satz läßt sich also auf diese Art erweisen, nur mußten wir aber hier einen andern Satz zu Hülfe nehmen, den wir bisher noch nicht erwiesen hatten, nämlich den der Zusammensetzung der Bewegung. Die Verbindung der mechanischen Gesetze unter einander wird man übrigens ausführlich aus einem Werke kennen lernen, dessen Vollendung alle Kenner der Mathematik mit Verlangen entgegensehen, und das gewiß dem Nahmen seines Urhebers Unsterblichkeit verschaffen wird, nämlich aus der Nouvelle architecture hydraulique par Mr. de Prony (à Paris 1790. 4 maj) Tom 1 wovon uns Hr. Langsdorf nun auch mit einer deutschen Uebersetzung beschenkt hat.

den andern Maschinen und bei jedem Systeme von Kräften überhaupt herleiten. Auf diese Art sind viele Schriftsteller verfahren, unter andern La Hire in seinem Traktat über die Mechanik, der sich im 6ten Bande der alten Memoires de l'Academie des sciences de Paris befindet. Jedoch scheint es, man hat nicht gleich anfangs die Methode gekannt, die Theorie aller andern Maschinen, besonders die von der schiefen Ebene, auf die Theorie des Hebels zu bringen; denn man siehet nicht nur aus den Fragmenten, die vom 8ten Buche des Pappus bis auf uns gekommen sind, daß die Alten das wahre Verhältniß der Kraft zum Gewicht bey der schiefen Ebene nicht kannten; sondern man weiß auch, daß die Bestimmung dieses Verhältnisses lange Zeit ein Problem bei den ersten neuern Mathematikern war, welches der berühmte Stevin, der in Diensten des Prinzen Moriz von Nassau war, zuerst auflöste, und wozu auch er nur durch eine indirekte und von der Theorie des Hebels independente Betrachtung gelangt war.

Stevin betrachtet ein solides Dreyeck, das auf seiner horizontalen Basis steht, so daß seine beiden Seitenflächen 2 schiefe Ebenen ausmachen und nimt an, daß ein Kranz von verschiednen in gleichen Entfernungen von einander durch Faden verbundenen Gewichten, oder vielmehr eine Kette von gleicher Dicke an die beiden Seiten dieses Dreyecks angebracht sey, so daß der obere Theil an den beiden Seiten desselben festgemacht sey, der untere aber frey unter der Basis herunterhänge, eben so als wenn er an den beiden Enden derselben festgemacht wäre.

Stevin merkt an, daß wenn man selbst auch annähme, die Kette könne frey über das Dreyeck wegrutschen; sie doch in Ruhe bleiben müsse; denn sänge sie an von sich selbst zu rutschen nach irgend einer Richtung hin; so müßte sie fortfahren in alle Ewigkeit zu rutschen, denn es würde eben dieselbe Ursache der Bewegung immerfort statt finden, indem die Kette wegen der Gleichförmigkeit ihrer Theile immer auf dieselbe Art am Dreyeck fest hänge, woraus eine beständige Bewegung entspringen würde, welches absurd ist.

Es muß also nothwendig ein Gleichgewicht zwischen allen Theilen der Kette statt finden, man siehet aber leicht ein, daß der unter der Basis

sis hängende Theil der Kette schon an und für sich im Gleichgewicht ist, die Kraft aller Gewichte auf der einen Seite muß daher der auf der andern Seite das Gleichgewicht halten; aber die Summe der erstern verhält sich zur Summe der andern, wie die Längen der Seiten, wo sie angebracht sind, sich gegen einander verhalten, folglich bedarf es immer derselben Kraft, um ein oder mehrere auf einer schiefen Ebene befindliche Gewichte zu halten, wenn das ganze Gewicht der Länge der Ebene gleich und die Höhe dieselbe ist. Ist aber die Ebene vertikal; so ist die Kraft dem Gewichte gleich; folglich verhält sich bey jeder schiefen Ebene die Kraft zum Gewicht, wie die Höhe der Ebene zu ihrer Länge.

Ich habe diesem Beweis Stevins nur deswegen hier eine Stelle vergönnt, weil er sehr sinnreich, und sonst wenig bekannt ist. Uebrigens leitet er, aus dieser Theorie, die des Gleichgewichts zwischen 3 Kräften her, die auf einen Punkt wirken, und zeigt, daß dies Gleichgewicht statt findet, wenn die Kräfte einander parallel und den 3 Seiten irgend eines geradlinigten Dreyecks proportional sind. Man sehe weiter hierüber seine Statistik selbst nach, und seine Zusätze dazu in s. Hypomnemat. mathematic.

Der 2te Grundsatz des Gleichgewichts ist der der Zusammensetzung der Bewegung. Er beruhet auf die Voraussetzung, daß, wenn 2 Kräfte zugleich auf einen Körper nach verschiedenen Direktionen wirken, sie einer einzigen Kraft gleich sind, die im Stande ist dem Körper dieselbe Bewegung zu geben, als die beiden Kräfte ihm geben würden, wenn jede besonders wirkte. Nun aber durchläuft ein Körper, den man sich gleichförmig nach 2 verschiedenen Direktionen zugleich bewegen läßt, nothwendig die Diagonallinie des Parallelograms, dessen Seiten er jede besonders nach jeder der beiden Bewegungen durchlaufen würde. Hieraus folgt also, daß 2 Kräfte, die zugleich auf einen Körper wirken, von einer einzigen im Gleichgewicht werden erhalten werden können, deren Größe und Direktion durch die Diagonallinie des Parallelograms ausgedrückt wird, dessen Seiten jede die Größen und Direktionen der beiden gegebenen Kräfte ausdrücken *). Hierin besteht das 2te Grundgesetz nämlich die Zusammensetzung der Kräfte. Es

*) Man hat diesen Satz vom Parallelogram der Kräfte auf gar verschiedene Weise darzuthun gesucht.

7

Es reicht allein hin in allen Fällen die Gesetze des Gleichgewichts zu bestimmen, denn indem man nach und nach die Kräfte zusammensetzt nämlich immer zwei und zwei; so muß man endlich zu einer einzigen gelangen, die allen den andern das Gleichgewicht hält, und die also in Falle des Gleichgewichts, wenn bei dem System kein fester Punkt vorhanden ist, $= 0$ seyn muß; wenn ein solcher aber da ist durch denselben ihre Direktion haben muß. Dies kann man in allen statischen Büchern sehen, und insbesondere in der neuen Mechanik des Varignon; wo die Theorie der Maschinen aus diesem Fundamentalgesetz allein abgeleitet worden ist.

Es ist klar, daß Stevins Theorien vom Gleichgewicht dreier Kräfte die den 3 Seiten eines gewissen Dreiecks parallel und proportional sind, eine unmittelbare und nothwendige Folge des Gesetzes von der Zusammensetzung der Kräfte ist, oder vielmehr daß es dasselbe Grundgesetz nur unter einer andern Form ist. Allein dieses hat den Vorzug auf einfachen und natür-

Wolff, Krüger u. a. geben nichts weniger als einen geometrischen Beweis davon. Unter allen scheint mir noch Newtons Verfahren hier am meisten auf mathematische Evidenz Ansprüche zu machen, man findet das selbe noch weiter ausgeführt und erläutert in der Bibliotheca fisica a'Europa, wo kann ich nicht sagen, da ich das Buch nicht bey der Hand habe.

Im strengsten geometrischen Verstande genommen wird man ihn wohl nie erwelien können; aber von der Wahrheit desselben überzeugen, kann man sich auf mancherlei Art. Herrn Mariés Beweis in seinem traité de mécanique kann schon völliß dazu dienen die Nothwendigkeit dieses Fundamentalsatzes einzusehen; daher hat ihn auch Prony in der Nouvelle architecture hydraulique wieder abdrucken lassen. Einen metaphysischen Beweis davon hat unter andern auch Hr. Kant in s. metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft versucht. Durch Versuche kann man sich übrigens sehr wohl davon überzeugen, auch kann man sich dazu kleiner Insekten bedienen, die man an einem Lineal fortlaufen läßt, und die die Diagonallinie eines Parallelograms beschreiben, indem man langsam das Lineal weiter herunterrückt. Hiebey fällt mir ein Beyspiel ein, welches genugsam zeigt, wie sehr auch schon die Natur der Sache diese Bewegung in der Diagonallinie des Parallelograms mit sich bringe. Es gieng jemand spazieren, sein Hund lief voran, nun theilte sich der Weg in 2; der Hund wollte gerne voran, wußte aber nicht, welchen von beiden sein Herr wählen würde, deswegen gieng er in der Diagonallinie des Parallelograms weiter, dessen Seiten die beiden Wege ausmachten.

natürlichen Begriffen zu beruhen, da hingegen Stevins Theorem nur auf indirekte Betrachtungen gegründet ist.

Was aber die Erfindung des gegenwärtigen Grundgesetzes betrifft, so ist sie meiner Meinung nach dem Galiläi zuzuschreiben, der in der 2ten Proposition des 4ten Tages seiner Dialogen, erweist, daß, wenn ein Körper mit 2 gleichförmigen Geschwindigkeiten, wovon die eine horizontal die andere vertikal ist, bewegt wird, er eine Geschwindigkeit annehmen muß, die durch die Hypothenuse des Dreiecks ausgedrückt wird, dessen beiden andern Seiten diese 2 Geschwindigkeiten ausdrücken; jedoch scheint es zugleich, daß Galiläi den ganzen Nutzen dieses Theorems in der Theorie des Gleichgewichts nicht gekannt habe. Denn in dem 2ten Dialog, wo er von der Bewegung der schweren Körper auf schiefen Ebenen handelt, leitet er, anstatt den Grundsatz der Zusammensetzung der Bewegung zur direkten Bestimmung der einem Körper auf einer schiefen Ebene zukommenden Schwere anzuwenden, vielmehr diese Bestimmung von der Theorie des Gleichgewichts auf schiefen Ebenen nach dem her, was er vorher in seinem Traktat della scienza Meccanica festgesetzt hatte, worin er die schiefe Ebene vom Hebel herleitet.

Nach Galiläi findet man die Theorie der zusammengesetzten Bewegungen in den Schriften des Des Cartes, Roberval's, Mersenne, Wallis u. a.; aber Varignon hat das Verdienst den Nutzen dieser Theorie bei dem Gleichgewicht der Maschinen gezeigt zu haben.

Seine Absicht bei seiner nouvelle mécanique die er 1687 publicirte, war die Regeln der Statik durch die Zusammensetzung der Bewegungen oder der Kräfte zu beweisen, aber dies wurde nachher noch weit umständlicher in der nouvelle mécanique geleistet, die erst nach seinem Todt im Jahr 1725 erschien. Schon im Jahr 1685 aber hatte er ein Memoire über die Rollen dem Druck übergeben, worin er die Theorie dieser Art von Maschinen durch die der zusammengesetzten Bewegungen erklärte.

Ich komme endlich zum 3ten Grundgesetz nehmlich dem des Bestehens nach Geschwindigkeit. Man versteht hierunter dasjenige, was ein im Gleichgewicht sich befindender Körper, wenn dasselbe aufgehoben ist, bekommt

bekommt d. h. die Geschwindigkeit, die er im ersten Augenblick seiner Bewegung wirklich erhält. Das gegenwärtige Grundgesetz besteht also darin, daß Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn sie sich umgekehrt wie ihre Bestrebungen nach Geschwindigkeit, die nach den Richtungen dieser Kräfte geschäft werden, verhalten.

Erwägt man nur ein wenig die Bedingungen des Gleichgewichts beim Hebel und den andern Maschinen; so erkennt man leicht die Wahrheit dieses Gesetzes, dennoch scheinen die Geometer vor Galiläus es nicht gekannt zu haben, und ich glaube ihm die Erfindung desselben zuschreiben zu müssen, wenigstens trägt er es in seinem Traktat della scienza Meccanica, und in seinen Dialogen über die Bewegung als eine allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichts der Maschinen vor. Man sehe die Anmerkung zum 2ten Satze des 3ten Dialogs.

Unter Moment eines Gewichts oder einer an einer Maschine angebrachten Kraft versteht Galiläus die Stärke, die Wirkung, die gesammte Gewalt ^{*)}, welche diese Kraft anwendet, die Maschine in Bewegung zu setzen, so daß 2 Kräfte im Gleichgewicht seyen, wenn ihre Momente um die Maschine auf entgegengesetzte Art in Bewegung zu setzen, gleich groß sind, und er zeigt, daß das Moment allemal dem Produkte aus der Kraft in das Bestreben nach Geschwindigkeit gleich ist, welches von der Art, wie die Kraft wirkt, abhängt.

In eben der Bedeutung nahm auch Wallis in seiner 1669 herausgegebenen Mechanik das Wort Moment, er nimt darin den Satz der Gleichheit der Momente zum Grund der Statik an, und leitet daraus umständlich die Theorie des Gleichgewichts bey den vornehmsten Maschinen her.

Heut zu Tage versteht man gewöhnlich unter Moment das Produkt einer Kraft in die Entfernung ihrer Direktion von einem gewissen Punkte, oder einer gewissen Linie, d. h. in den Hebelsarm, wodurch sie wirkt; aber die Bedeutung, worunter Galiläus und Wallis das Wort Moment nahmen,

^{*)} Im Original steht l'effort, l'action, l'énergie, l'impetus.

men, scheint mir natürlicher und allgemeiner zu seyn, und ich sehe nicht ein, warum man sie verworfen, und an ihre Stelle eine andere gesetzt hat, die nur den Werth des Moments in gewissen Fällen wie z. B. beim Hebel zc. ausdrückt*).

Des Cartes brachte auf gleiche Art die ganze Statik auf ein einziges Princip, welches im Grunde mit dem Galiläischen einerlei, nur weniger allgemein ist. Es besteht darin, daß man nicht mehr und nicht weniger Kraft gebraucht, ein Gewicht zu einer gewissen Höhe zu erheben, als ein schwereres Gewicht zu einer um eben soviel geringern Höhe. (Man sehe den 7ten Brief im 1ten Theile, und seine in seinen operibus posthumis befindliche Mechanik). Hieraus folgt, daß ein Gleichgewicht statt finden wird, wenn 2 Gewichte dergestalt gesetzt sind, daß die perpendicularen Wege, die sie durchlaufen können, mit ihnen in einer umgekehrten Verhältnis stehen. Aber bey der Anwendung dieses Principis auf verschiedene Maschinen, muß man nur die im ersten Augenblick der Bewegung durchlaufenen Räume, die dem Bestreben nach Geschwindigkeit proportional sind, in Betrachtung ziehen; sonst würde man die wahren Gesetze des Gleichgewichts nicht erhalten.

Man mag übrigens den Satz des Bestrebens nach Geschwindigkeit entweder als eine allgemeine Eigenschaft des Gleichgewichts annehmen, wie dies Galiläus thut, oder man mag ihn mit Des Cartes und Wallis für die wahre Ursache des Gleichgewichts halten; so wird man immer gestehen müssen, daß er alle Einfachheit besitzt, die man nur von einem Fundamentalsatze verlangen kann, und wir werden weiter unten erst sehen, wie sehr er sich durch seine Allgemeinheit empfiehlt.

Tor,

*) Dies ist eine sehr richtige Erinnerung, die Bedeutung die Galiläus und Wallis dem Worte Moment gegeben haben, ist gewiß von weit größern Umfang als die man ihm jetzt giebt, allein der Sprachgebrauch hat diese letztere nun einmal so allgemein eingeführt, daß auch alle Schriftsteller beinahe, die über die Mechanik geschrieben haben, sie angenommen haben. Die Größe $D V$, wo D die Entfernung von einem gewissen Punkt, und V die Kraft bedeutet, kommt auch so oft vor, daß man ihr nothwendig einen Namen geben mußte, nur hätte man sich nicht dazu eines Wortes bedienen sollen, das schon eine andere Bedeutung hatte.

Toricelli, der berühmte Schüler des Galiläus, ist Erfinder eines andern Principis, welches jedoch mit dem seines Lehrers einerlei oder vielmehr nur eine Folge davon ist; es besteht dieses darin, daß wenn 2 Gewichte so mit einander verbunden sind, daß, man mag ihnen eine Stellung geben, wie man will, ihr Schwerpunkt weder erhöht noch erniedrigt werde, sie immer im Gleichgewicht sind. Torricelli macht von diesem Satze nur auf die schiefe Ebene eine Anwendung, allein man kann sich leicht davon überzeugen, daß er bey den andern Maschieneen nicht weniger statt findet. Man sehe seinen Traktat über die beschleunigte Bewegung, welcher im Jahr 1644 erschien.

Toricelli's Princip veranlaßte ein anderes, dessen sich einige Schriftsteller bedient haben, um verschiedene statische Aufgaben mit mehrerer Leichtigkeit aufzulösen. Es ist folgendes: Bey einem Systeme von schweren Körpern, das sich im Gleichgewicht befindet, ist der Schwerpunkt so weit unten als möglich. In der That weiß man aus der Theorie de maximis und minimis, daß der Schwerpunkt am niedrigsten ist, wenn das Differential seines Herabsinkens $= 0$ ist oder, welches auf eins hinauskommt, wenn der Schwerpunkt weder steigt noch fällt, während dem daß das System eine unendlich geringe Veränderung seines Orts erleidet.

Allgemein ausgedrückt ist das Gesetz des Bestrebens nach Geschwindigkeit folgendes:

Wenn ein gewisses System von so viel Körpern oder Punkten als man will, auf welche gewisse Kräfte wirken, im Gleichgewicht ist, und man giebt demselben eine gewisse geringe Bewegung, vermöge der jeder Punkt einen unendlich kleinen Raum durchläuft, der sein Bestreben nach Geschwindigkeit ausdrückt; so wird die Summa der Kräfte multiplicirt durch die von den Punkten, wo die Kräfte angebracht sind, nach den Richtungen derselben durchlaufene Räume allezeit $= 0$ seyn, indem man die kleinen Räume bejaht oder verneint nimmt, nachdem solche in einerlei oder in der entgegengesetzten Richtung der Kräfte durchlaufen worden sind.

Soviel ich weiß hat Johann Bernoulli zuerst die große Allgemeinheit dieses Satzes des Bestrebens nach Geschwindigkeit und seinen Nutzen

bey Auflösung statischer Aufgaben wahrgenommen. Dies ersieht man aus einem seiner Briefe an Varignon im Jahr 1717, den dieser letztere im 9ten Abschnitt seiner neuen Mechanik eingerückt hat, welchen er überhaupt ganz allein dazu anwendet, die Wahrheit und den Nutzen dieses Satzes durch verschiedene Anwendungen zu zeigen.

Eben dies Grundgesetz veranlaßte in der Folge den Satz den der Hr. von Maupertuis unter dem Namen des Gesetzes der Ruhe *) in den Memoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1740 bekannt gemacht hat, und den Hr. Euler noch mehr entwickelt und allgemeiner gemacht hat in den Berlin. Memoiren für 1751.

Endlich lag eben dies Grundgesetz auch bei dem des Marquis von Courtyron zum Grunde, welches man in den Pariser Memoiren für 1748 und 1749 findet.

Und überhaupt glaube ich behaupten zu können, daß alle allgemeine Grundsätze, die man noch in der Wissenschaft vom Gleichgewicht entdecken konnte, nichts anders als jenes Gesetz vom Bestreben nach Geschwindigkeit
Zeit

*) Der Satz des Herrn von Maupertuis ist auch unter dem Namen des Satzes der kleinsten Wirkung und des Gesetzes der Sparsamkeit bekannt. Er glaubte daran einen fruchtbaren Grundsatz erfunden zu haben, woraus sich alle Gesetze der Ruhe und Bewegung herleiten ließen, und der an Allgemeinheit alle vorher erfundene weit hinter sich zurückließ. Er zeigte selbst eine Anwendung desselben in verschiedenen Fällen und Hr. Euler fand hier eine neue Gelegenheit zu rechnen, und seine Stärke in der Analysis zu zeigen. Der Streit wegen dieses Satzes zwischen dem Hrn. von Maupertuis und Hrn. König in Holland ist zu bekannt, als daß es nöthig wäre ihn umständlich hier zu erzählen. Er gehört eigentlich auch gar nicht in die Wissenschaft, die hier abgehandelt wird, und gehörte er auch hinein; so würde schon das mich berechtigen ihn mit Stillschweigen zu übergehen, daß Sie meistens darin agirenden Personen gar nichts von Mathematik verstanden. Uebrigens hat dieser Streit eine ganze Reihe von Schriften veranlaßt, die man zum Theil in des Hrn. Hofrath Kästners höheren Mechanik angeziet findet. Voltaire schrieb bei dieser Gelegenheit mehrere lustige und witzige Schriften. Ich verweise übrigens auf meine Geschichte dieses Streits, die vielleicht bald herauskommen wird.

Zeit seyn werden, nur solches aus verschiedenem Gesichtspunkt betrachtet und anders ausgedrückt *).

Uebrigens ist eben dies Gesetz an und für sich nicht allein sehr einfach und doch sehr allgemein, sondern es hat auch den schätzbaren und vor andern einzigen Vorzug, daß es in einer allgemeinen Formel dargestellet werden kann, welche alle Aufgaben, die beim Gleichgewicht der Körper statt finden können, enthält. Wir wollen diese Formel in ihrem ganzen Umfang darstellen, ja wir wollen uns bemühen ihr noch eine allgemeinere Form zu geben, als bisher geschehen ist, und neue Anwendungen derselben zeigen.

*) Es ist nicht zu leugnen, daß Hrn. de la Grange's Grundsatz der Statik in der That ein sehr fruchtbarer Fundamentalsatz ist, davon ist auch dies ganze Werk ein deutlicher Zeuge, welches bloß von demselben ausgeht, und doch alle mechanische Gesetze so schön entwickelt. Er ist im Grunde mit dem bekannten Cartesianischen Grundsatz der Statik einerley, aber weder dieser noch jener kann im geometrischen Verstande Axiom genannt werden. Hr. Kästner bewies die Gesetze der Statik einzeln in aller Strenge, eben so wie dies auch Hr. Kästner gethan hat, und schloß erst aus diesen strengen Beweisen der einzelnen Gesetze auf die allgemeine Richtigkeit des Cartesianischen Grundsatzes, oder des allgemeinen Gesetzes vom Bestreben nach Geschwindigkeit. Dieses Gesetz aber allgemein und direkt zu demonstrieren, dazu hat man bis jetzt noch nicht gelangen können, ohnerachtet seine Richtigkeit hinlänglich ausgemacht ist, indem es Resultate giebt die völlig denen gleich sind, welche man auf andern Wegen gefunden hat. Man kann dieses Gesetz also, wenn man es auch nicht für einen Grundsatz gelten lassen will, wie dies einige neuere französische Schriftsteller nach dem Hrn. de la Grange gethan haben, doch wenigstens als ein allgemeines Resultat der ganzen Statik ansehen, und in so fern verdient dieser Satz doch unsere größte Aufmerksamkeit. Auch konnte man wohl schon daraus, daß alle einzelne Gesetze der Statik auf dies allgemeine führen, schließen, daß wenn man nun diesen Satz zum allgemeinen Fundamentalsatz annehme, sich daraus auch alle einzelne Gesetze rückwärts herleiten ließen.

m.

 Zweiter Abschnitt.

 Allgemeine Formel für das Gleichgewicht eines gewissen Systems
 von Kräften nebst ihrem Gebrauch.

1) Das allgemeine Gesetz des Gleichgewichts bey den Maschinen ist, daß die Kräfte sich verkehrt verhalten wie die Geschwindigkeiten der Punkte, worauf sie angebracht sind, wo diese nach der Direktion dieser Kräfte geschäzt werden.

In diesem Gesetze besteht das des Bestrebens nach Geschwindigkeit, ein Grundsatz der schon seit langer Zeit für den Fundamentalsatz des Gleichgewichts erkannt worden ist, so wie wir im vorigen Abschnitte gezeigt haben, und den man folglich als eine Art von Axiom in der Mechanik ansehen kann.

Um diesen Satz in eine Formel zu bringen; so wollen wir annehmen, die Kräfte $P, Q, R, \text{z.}$, die nach gegebenen Linien wirken, seyen unter einander im Gleichgewicht. Wir wollen uns ferner von den Punkten, worauf diese Kräfte angebracht sind, gerade einander gleiche Linien $pqr \text{ z.}$ in den Direktionen dieser Kräfte gezogen vorstellen; und allgemein durch $dp dq dr \text{ z.}$ die Variationen oder Differentialien dieser Linien, insofern sie von einer unendlich geringen Veränderung in der Stellung der verschiebenen Körper oder Punkte des Systems entspringen können, ausdrücken.

Es ist klar, daß diese Differentialien die Räume ausdrücken werden, die die Kräfte $P, Q, R, \text{z.}$ in einem Augenblick durchlaufen, d. h. die Geschwindigkeiten dieser Kräfte nach ihren Direktionen geschäzt.

Dies vorausgesetzt wollen wir uns zuerst 3 Kräfte P, Q, R im Gleichgewicht vorstellen, man sieht leicht ein, daß das Gleichgewicht noch immer statt finden wird, wenn wir an die Stelle einer dieser Kräfte einen festen Unterstützungspunkt setzen, der im Stande ist der gemeinschaftlichen Wirkung der beiden andern zu widerstehen. Ich fange daher an, die Gesetze des Gleichgewichts zwischen den beiden Kräften P und Q zu suchen, in dem ich den Punkt, worauf die 3te Kraft wirkt, als fest annehme, so daß die Linie r unverändert bleibt, während dem daß aus den Linien p und q, $p + dp$ und $q + dq$ oder $p - dp$ und $q - dq$ wird. Nach dem allgemeinen Princip müßten die Kräfte P und Q sich gegen einander verkehrt wie die Differentialien dp dq verhalten, allein man begreift leicht, daß zwischen 2 Kräften kein Gleichgewicht statt finden kann, wenn sie nicht so gestellt sind, daß wenn die eine von ihnen sich bewegt, die andere sich im entgegengesetzten Sinne bewegt; hieraus folgt denn, daß die Zeichen der Differentialien dp und dq einander entgegengesetzt seyn müssen; und da die Werthe der Kräfte P und Q alle beide als positiv sind angenommen worden; so wird für das Gleichgewicht seyn $\frac{P}{Q} = -\frac{dq}{dp}$ oder $Pdp + Qdq = 0$ und dies ist die allgemeine Formel für das Gleichgewicht zweier Kräfte. Auf gleiche Art wird man, wenn man die Kraft Q als auf einem festen Punkt angebracht ansieht, die Gleichung $Pdp + Rdr = 0$ für die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Kräften P und R erhalten; und eben so hat man für das Gleichgewicht der beiden Kräfte Q und R die Gleichung: $Qdq + Rdr = 0$.

Man hat also für die 3 Kräfte PQR die 3 Gleichungen $Pdp + Qdq = 0$, $Pdp + Rdr = 0$, $Qdq + Rdr = 0$; indem man in der ersten $r = \text{Const.}$ setzt, in der 2ten $q = \text{Const.}$ und in der 3ten $p = \text{Const.}$

Nimt man folglich p q und r zugleich als veränderlich an; so hat man $Pdp + Qdq + Rdr = 0$.

Und in der That müssen die Kräfte P, Q, R wenn sie im Gleichgewicht seyn sollen, so gestellet seyn, daß eine unabhängig von der andern sich nicht bewegen kann.

Es muß folglich ein gegebenes Verhältniß zwischen den Differentia-
lien dp, dq, dr und daher auch zwischen den endlichen Größen p, q, r statt fin-
den; dies Verhältniß mag nun beschaffen seyn, wie es will; so kann man
die veränderliche Größe p als eine Funktion der beiden andern q und r
ansehen; und ihr Differential dp kann folglich allgemein so ausgedrückt
werden: $dp = mdq + ndr$. Setzte man $r = \text{Const.}$, so hätte man
 $dp = mdq$; und setzte man $q = \text{Const.}$; so hätte man $dp = ndr$;
die Größe Pdp in den vorigen Gleichungen, kann also im erstern
Fall durch $Pmdq$, im andern durch $Pndr$ ausgedrückt werden; so
daß die Summe dieser beiden Größen seyn wird: $P(mdq + ndr)$
 $= Pdp$. Auf gleiche Art erweist man, daß, wenn man q als
eine Funktion von p und r ansieht, die Summe der beiden Aus-
drückungen von Qdq die in der erstern und 2ten Gleichung vorkom-
men, wenn man in dq p und r zugleich als veränderlich ansieht, den
Werth von Qdq geben wird; und eben so wird man den Werth von Rdr
finden, wenn man p und q zugleich als veränderlich annimt. Auf diese
Art wird die Summe der 3 oben gefundenen besondern Gleichungen,
wenn man p, q und r zugleich als veränderlich annimt, $Pdp + Qdq$
 $+ Rdr = 0$; und diese Formel drückt das Gleichgewicht der 3 Kräfte
 P, Q, R aus.

Wäre noch eine 4te Kraft S vorhanden, die nach der Linie s ihre
Richtung hätte; so würde man durch ein ähnliches Raisonnement finden,
daß das Gleichgewicht der 4 Kräfte P, Q, R, S durch die Gleichung Pdp
 $+ Qdq + Rdr + Sds = 0$ ausgedrückt wäre. Und so ferner, die
Zahl der Kräfte mag bey dem Gleichgewicht so groß seyn wie sie will.

2) Man hat daher allgemein für das Gleichgewicht einer gewissen
Anzahl von Kräften $P, Q, R, \text{ic.}$, die ihre Richtungen nach den Linien
 $p, q, r, \text{ic.}$ haben, und die auf ein System von Körpern oder Punkten, die
unter einander eine gewisse Stellung haben, angebracht sind, eine Gleichung von folgender Form:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} = 0$$

und dies ist die allgemeine Formel für das Gleichgewicht eines gewissen
Systems von Kräften. Wir wollen jedes Glied dieser Formel als Pdp
das

das Moment von der Kraft P nennen, und dies Wort also in der Bedeutung nehmen, welche ihm Galiläus beygelegt hat, nämlich als das Produkt aus der Kraft in das Bestreben nach Geschwindigkeit, so daß das Gleichgewicht statt finden wird, wenn die Summe aller Momente dieser Kräfte $= 0$ seyn wird.

3) Bey der Anwendung dieser Formel wird alle Schwierigkeit dahin hinauslaufen, die Werthe der Differentialien $dp, dq, dr, \text{etc.}$ der Natur des gegebenen Systems gemäß zu bestimmen.

Wir wollen in dieser Absicht das System in 2 verschiedenen aber unendlich nahen Stellungen betrachten, und soviel als möglich allgemeine Ausdrückungen für die besagten Differentialien suchen, indem wir so viele unbestimmte Größen in dieselben einführen wollen, als willkürliche Elemente durch die Variation der Stellung des Systems entstanden sind; wir wollen hierauf diese Ausdrückungen von $dp, dq, dr, \text{etc.}$ in die gegebene Gleichung substituiren und diese Gleichung muß unabhängig von allen den unbestimmten Größen statt finden, damit das Gleichgewicht des Systems überall und in allem Betracht statt finde. Wir werden daher die Summe der Glieder, worin sich dieselben unbestimmten Größen befinden, jede besonders $= 0$ setzen und dadurch so viele besondere Gleichungen bekommen, als unbestimmte Größen sind; es ist aber nicht schwer sich davon zu überzeugen, daß ihre Anzahl allezeit der Anzahl der unbekanntnen Größen gleich seyn muß, die bey der Stellung des Systems sich eingemischt haben; wir bekommen daher durch diese Methode so viel Gleichungen als nöthig sind, den Zustand des Gleichgewichts des Systems zu bestimmen.

Auf diese Art sind alle Schriftsteller verfahren, die bis auf unsre Zeiten den Satz des Bestrebens nach Geschwindigkeit zur Auflösung statischer Aufgaben angewandt haben; aber diese Methode dieses Princip anzuwenden, erfordert geometrische Zeichnungen und Betrachtungen, die die Auflösungen eben so lang machen, als wenn man sie von den gewöhnlichen statischen Grundsätzen herleitete; und dies war vielleicht der vornehmste Grund, der verhinderte, daß man nicht in allen Fällen Gebrauch von diesem Princip gemacht hat, da es doch scheint, daß man es wegen seiner Einfachheit und Allgemeinheit hätte thun müssen.

Ⓒ

4) Die

4) Die Kräfte $P, Q, R, \text{etc.}$, die auf verschiedene Körper oder Punkte des Systems wirken, mögen auch beschaffen seyn wie man will; so ist klar, daß man ihre Wirkungen immer nach Punkten, die in den Richtungen der Kräfte selbst liegen, und die wir Centra der Kräfte nennen werden, annehmen könne.

Um also die Linien $p, q, r, \text{etc.}$ zu erhalten, die die Richtungen der Kräfte $P, Q, R, \text{etc.}$ ausdrücken, hat man nur die geradlinigten Entfernungen zwischen den Körpern oder Punkten, worauf die Kräfte wirken, und den Mittelpunkten dieser Kräfte zu nehmen. Diese Mittelpunkte aber können entweder ausserhalb des Systems liegen oder einen Theil davon ausmachen. Im erstern Falle ist deutlich, daß die Differentialien $dp, dq, dr, \text{etc.}$ die gesammten Variationen der Linien $p, q, r, \text{etc.}$, die durch die Veränderung der Stellung des Systems bewirkt worden sind, ausdrücken; sie sind folglich die vollständigen Differentialien der Größen $p, q, r, \text{etc.}$, wenn man alle Größen, die Beziehung auf die Stellung des Systems haben, als veränderlich, und alle diejenigen die Beziehung auf die Stellung der verschiedenen Mittelpunkte der Kräfte haben, als beständig ansieht.

Im andern Falle sind einige der Körper des Systems selbst die Mittelpunkte der Kräfte, die auf andere Körper desselben Systems wirken, und weil Wirkung stets der Gegenwirkung gleich ist; so werden diese letztern Körper zu gleicher Zeit die Mittelpunkte der Kräfte seyn, die auf die erstern wirken.

Betrachten wir daher 2 Körper, die auf einander mit einer gewissen Kraft P wirken, es mag nun diese Kraft die Anziehung oder Zurückstossung dieser Körper oder die zwischen ihnen statt findende Elasticität oder etwas anders zur Ursache haben, und ist p die Distanz zwischen diesen beiden Körpern, dp' die Variation dieser Distanz in so fern sie von der Veränderung des Orts eines dieser Körper abhängt; so ist klar, daß man in Beziehung auf diesen Körper $P dp'$ für das Moment der Kraft P hat; eben so wenn man durch dp'' die Variation derselben Distanz p , in so fern sie von der Veränderung des Orts des andern Körpers entspringt, bezeichnet; so hat man $P dp''$ für das Moment von P in Beziehung auf diesen

fen andern Körper; das ganze Moment, das zu dieser Kraft gehört, kann also durch $P(dp' + dp'')$ ausgedrückt werden; aber man sieht leicht, daß $dp' + dp''$ das vollständige Differential von p ist, welches wir durch dp bezeichnen, weil die Distanz p nur durch die Veränderung des Orts der beiden Körper eine Variation erleiden kann; Pdp wird also das vorgegebene Moment ausdrücken; man kann diese Schlüsse auf so viel Körper als man nur will erstrecken.

5) Hieraus folgt, daß, um die Summe der Momente aller Kräfte eines gegebenen Systems zu erhalten, man jede der Kräfte, die auf die verschiedenen Körper oder Punkte des Systems wirken, besonders zu betrachten hat, und daß man die Summe der Producte dieser verschiedenen Kräfte, jede durch das Differential der respectiven Distanz zwischen den beiden Grenzen jeder Kraft d. h. zwischen dem Punkt, worauf diese Kraft wirkt, und dem, wovon sie ausgeht multiplicirt, nehmen müsse, indem man bey diesen Differentialien alle Größen als veränderlich ansieht, die von der Stellung des Systems abhängen, und als beständig alle diejenigen, die sich auf die äussere Punkte oder Mittelpunkte beziehen; d. h. indem man diese Punkte als fest betrachtet, während dem daß die Stellung des Systems eine Variation erleidet. Setzt man diese Größe nun $= 0$; so erhält man die allgemeine Formel für's Princip des Gleichgewichts.

6) Um diese Größe analytisch auszudrücken; so ist die einfachste Methode, die sich darbiethet, die, die Stellung aller Punkte des gegebenen Systems auf rechtwinklichte Coordinaten, die dreien Achsen parallel seyen, zu beziehen.

Wir bezeichnen durch a, b, c , die Coordinaten für die Mittelpunkte der Kräfte; man sieht alsdenn leicht, daß die Distanzen p, q, r , etc. allgemein durch folgende Formel ausgedrückt werden können

$$\sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}$$

wo die Größen a, b, c entweder beständig sind, oder doch wenigstens als solche angesehen werden müssen, während dem daß x, y, z variiren in dem Falle wo sie sich auf feste aufferhalb des Systems befindliche Punkte beziehen; aber diese Größen a, b, c , werden x'' etc y'' etc z'' etc. und folglich veränderlich in dem Falle, wo die Kräfte von einigen der Körper des Systems selbst ausgehen.

Hat man auf diese Art die Ausdrückungen der endlichen Größen p, q, r , etc in bekannten Funktionen der Coordinaten der verschiedenen Körper des Systems; so hat man nur nöthig auf die gewöhnliche Art zu differentiiren indem man diese Coordinaten als veränderlich annimmt, und auf diese Art erhält man die gesuchten Werthe der Differentialien dp, dq, dr etc; die in der allgemeinen Formel des Gleichgewichts vorkommen.

Obnerachtet man aber jederzeit die Kräfte P, Q, R , etc als nach gewissen gegebenen Mittelpunkten wirkend ansehen kann; so gehört doch die Betrachtung dieser Mittelpunkte eigentlich nicht zur Aufgabe selbst, worin man gemeinlich nur die Größe und Direktion jeder Kraft als gegeben annimmt; das folgende wird allgemeinere Methoden enthalten, die Differentialien dp, dq, dr , etc auszudrücken.

7) Nimmt man zuerst an, was jederzeit erlaubt ist, daß die Kraft P auf einem festen Mittelpunkte wirke; so hat man

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

und wenn man differentiirt, ohne a, b, c als veränderlich anzunehmen

$$dp = \frac{x-a}{p} dx + \frac{y-b}{p} dy + \frac{z-c}{p} dz.$$

Man sieht aber leicht, daß $\frac{x-a}{p}, \frac{y-b}{p}, \frac{z-c}{p}$ nichts anders sind

als die Cosinus der Winkel, die die Linie p mit den Coordinaten x, y, z bildet. Nennt man also allgemein α, β, γ die Winkel, die die Direktion der Kraft

Kraft P mit den Achsen x, y, z oder mit den Achsen parallelen Linien macht;

$$\text{so hat man } \frac{x-a}{p} = \text{Cof } \alpha,$$

$$\frac{y-b}{p} = \text{Cof } \beta,$$

$$\frac{z-c}{p} = \text{Cof } \gamma,$$

folglich $dp = \text{Cof } \alpha \, dx + \text{Cof } \beta \, dy + \text{Cof } \gamma \, dz,$

Und eben so kann man die andern Differentialien $dq, dr,$ etc ausdrücken.

In Ansehung der Winkel α, β, γ ist erstlich zu bemerken, daß $\text{Cof}^2 \alpha + \text{Cof}^2 \beta + \text{Cof}^2 \gamma = 1,$ welches leicht aus den vorhergehenden Formeln zu erschen ist; zweitens, daß, wenn man ϵ den Winkel nennt den die Projektion der Linie p auf der Ebene der x und y mit der Achse der x macht, man hat

$$\frac{x-a}{\pi} = \text{Cof } \epsilon,$$

$$\frac{y-b}{\pi} = \text{Sin } \epsilon,$$

wenn man $\pi = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ setzt; setzt man nun statt $x-a, y-b$ ihre Werthe $p \text{ Cof } \alpha, p \text{ Cof } \beta$ so hat man

$$\pi = p \sqrt{(\text{Cof}^2 \alpha + \text{Cof}^2 \beta)}$$

$$= p \sqrt{1 - \text{Cof}^2 \gamma}$$

(weil nemlich $\text{Cof}^2 \alpha + \text{Cof}^2 \beta + \text{Cof}^2 \gamma = 1, \text{ M.})$

$$= p \text{ Sin } \gamma.$$

(Nun aber ist $x-a = \pi \text{ Cof } \epsilon$ und $y-b = \pi \text{ Sin } \epsilon$ folglich hat man, wenn man den eben gefundenen Werth von π substituirt:

$$x - a = p \sin \gamma \cos \epsilon \quad y - b = p \sin \gamma \sin \epsilon \text{ M.)}$$

$$\text{daher } \frac{x - a}{p} = \sin \gamma \cos \epsilon \quad \frac{y - b}{p} = \sin \gamma \sin \epsilon$$

$$\text{folglich } \cos \alpha \left(= \frac{x - a}{p} \text{ M.} \right) = \sin \gamma \cos \epsilon$$

$$\cos \beta \left(= \frac{y - b}{p} \text{ M.} \right) = \sin \gamma \sin \epsilon$$

3) Ich erwäge hierauf, daß weil dp den kleinen Raum ausdrückt, den der Körper oder Punkt, worauf die Kraft P angebracht ist, nach der Direction dieser Kraft durchläuft, dieser Punkt sich nur in senkrechten Directionen auf die dieser Kraft bewegen könne, wenn $dp = 0$. Folglich ist $dp = 0$ die Differentialgleichung für eine Oberfläche, worauf die Direction der Kraft P senkrecht ist.

Nehmen wir nun überhaupt an, die Kraft P würlte senkrecht auf eine durch die Differentialgleichung $du = 0$ ausgedrückte Oberfläche, es mag nun du eine complete Differentialgröße seyn oder nicht; so muß diese Gleichung mit der $dp = 0$ einerley seyn, und man hat nothwendig $du = V dp$, wo V eine endliche Funktion der Coordinaten x, y, z ist. Um nun diese Funktion zu finden; so hat man nur nöthig anzumerken, daß weil

$$dp = \cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz \quad (7)$$

$$\text{und } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

man nach den bekannten Begriffen der partiellen Differentialien hat:

$$\left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dp}{dz} \right)^2 = 1$$

$$\text{folglich auch } \left(\frac{du}{V dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{V dy} \right)^2 + \left(\frac{du}{V dz} \right)^2 = 1$$

$$\text{folglich } V = r \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right] \quad \text{und}$$

$$dp = \frac{du}{V} = \frac{du}{r \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du}{dy} \right)^2 + \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right]}$$

Auf

Auf gleiche Art wird man die Werthe der andern Differentialien dq , dr etc. nach den Differentialgleichungen der Oberflächen, worauf die Direktionen der Kräfte Q, R , etc. senkrecht sind, bestimmen können.

9) Sind nun die Differentialien dp, dq, dr , etc. in Differential-Funktionen der Coordinaten der verschiedenen Körper des Systems ausgedrückt; so braucht man sie nur in der allgemeinen Formel

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} = 0$$

zu substituiren und hierauf diese Gleichung so allgemein als möglich jedoch unabhängig von den Differentialien, die sie enthält, complettiren. Ist also das System völlig frey und findet folglich keine Verbindung zwischen den Coordinaten der verschiedenen Körper, und daher auch nicht zwischen ihren Differentialien statt; so mußte man unabhängig von diesen Differentialien der vorhergehenden Gleichung ein Genüge leisten, und daher die Summe aller Glieder, die durch jede derselben multiplicirt sind, allemal $= 0$ setzen; dies giebt denn so viele Gleichungen als veränderliche Coordinaten vorhanden sind, und folglich so viele als nöthig sind alle diese veränderliche Größen zu bestimmen, und mit Hülfe derselben die Lage des ganzen Systems im Zustande des Gleichgewichts kennen zu lernen.

10) Ist aber die Natur des Systems so beschaffen, daß die Körper in ihren Bewegungen besondern Bedingungen unterworfen sind; so mußte man damit den Anfang machen, daß man diese Bedingungen durch analytische Gleichungen ausdrückte, die wir Bedingungsgleichungen nennen wollen; und dies ist allezeit leicht. Mußten z. B. einige Körper sich auf gegebenen Linien oder Oberflächen bewegen; so hätte man zwischen den Coordinaten dieser Körper die Gleichungen der gegebenen Linien oder Oberflächen selbst. Wären 2 Körper dergestalt mit einander verbunden, daß sie sich allezeit in dergleichen Distanz K von einander befinden müßten; so hätte man augenscheinlich die Gleichung

$$K^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2$$

und so weg.

Hat man die Bedingungsgleichungen auf diese Art gefunden; so muß man mittelst derselben so viele Differentialien als möglich in den Ausdrückun-

Drückungen von dp , dq , dr , etc. wegschaffen, so daß die übrig bleibenden Differentialien völlig unabhängig von einander seyen, und nur das willkührliche bey der Veränderung der Lage des Systems ausdrücken. Da nun die allgemeine Formel des Gleichgewichts statt finden muß, diese Veränderung mag auch beschaffen seyn, wie sie will; so muß man die Summe aller Glieder, worin jede der unbestimmten Differentialien vorkommt, almal $= 0$ setzen; und daraus werden dann so viele besondere Gleichungen entstehen, als solcher Differentialien vorhanden sind; diese Gleichungen nun verbunden mit den gegebenen Bedingungsgleichungen schließen alle zur Bestimmung des Zustandes des Gleichgewichts des Systems nöthige Bedingungen in sich ein; denn es ist leicht zu begreifen, daß alle diese Gleichungen immer von gleicher Zahl mit den verschiedenen veränderlichen Größen seyn werden, die allen Körpern des Systems zu Coordinaten dienen, und sie reichen also hinlänglich dazu hin, jede dieser veränderlichen Größen zu bestimmen.

II) Haben wir übrigens die Orte der Körper immer durch rechtwinklichte Coordinaten bestimmt, so ist dies bloß deswegen geschehen, weil dadurch der Calcul überaus einfach und leicht wird; man kann aber sich eben sowohl anderer bei der vorhergehenden Methode bedienen; denn es ist klar, daß uns nichts zwingt ehr rechtwinklichte Coordinaten anzunehmen als andere Linien oder Größen, die auf die Orte der Körper Beziehung haben. So könnte man statt der beiden Coordinaten x , y , wenn es die Umstände heischten, einen Radius-Vektor $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

und einen Winkel φ gebrauchen, dessen Tangente $= \frac{y}{x}$ sey, (welches

$x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ gäbe); die 3te Coordinate z könnte man so lassen wie sie vorhin war; oder vielmehr man könnte einen Radius-Vektor $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ mit 2 Winkeln φ und ψ gebrau-

chen, so daß $\tan \varphi = \frac{y}{x}$, $\tan \psi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, welches giebt

$x = \rho \cos \psi \cos \varphi$, $y = \rho \cos \psi \sin \varphi$, $z = \rho \sin \psi$ oder auch andere Winkel und Linien.

Wir

Wir bemerken noch, daß da eigentlich nur die Betrachtung der Differentialien dx , dy , dz in unserer Methode vorkommt, es erlaubt ist, an ihre Stelle andere Differential-Ausdrücke, sie mögen nun an sich integrabel seyn oder nicht, und ohne allen Bezug auf die Werthe von x y z , einzuführen.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine aus der vorhergehenden Formel hergeleitete Eigenschaften des Gleichgewichts.

1) Wir wollen nun ein System oder eine gewisse Menge von Körpern oder Punkten betrachten, die indem sie von gewissen Kräften gezogen werden, einander gegenseitig das Gleichgewicht halten. Hörte in einem Augenblick die Wirkung dieser Kräfte aufgehoben zu werden, auf; so würde das System anfangen sich zu bewegen, und die Bewegung desselben mag auch beschaffen seyn, wie sie will; so kann man sie sich doch allezeit als zusammengesetzt vorstellen, 1) aus einer allen Körpern gemeinschaftlichen fortrückenden Bewegung 2) aus einer drehendem Bewegung um einen gewissen Punkt *) 3) aus Bewegungen, die sich auf die einzelnen Körper nur beziehen, und wodurch ihre gegenseitige Lage und Distanz verändert wird. Soll also ein Gleichgewicht statt finden, so müssen die Körper keine dieser verschiedenen Bewegungen annehmen können. Nun ist klar, daß die eigenen relativen Bewegungen von der Art abhängen, wie die Körper gegen einander eine gewisse Lage haben; folglich müssen die zur Hinderung

*) Der fortrückenden Bewegung (mouvement de translation); steht hier die drehende Bewegung (mouvement de rotation) entgegen; weder für die eine noch für die andere hat man im deutschen überall eingeführte Benennungen; die gegenwärtigen scheinen mir die Sache noch am besten auszudrücken.

zung dieser Bewegungen nöthige Bedingungen, bei jedem System besonders seyn. Aber die fortrückende und drehende Bewegungen brauchen nicht von der Form des Systems abzuhängen, und sie können vor sich gehen, ohne daß die Lage und gegenseitige Verbindung der Körper aufgehoben wird.

Die Betrachtung dieser beiden Arten von Bewegungen muß also die allgemeinen Bedingungen oder Eigenschaften des Gleichgewichts verschaffen, und in diese Untersuchung wollen wir uns jetzt einlassen.

2) Es sey daher eine gewisse Zahl von Körpern, die man als Punkte betrachten kann, und die auf eine beliebige Art geordnet, und mit einander verbunden sind, gesetzt, sie würden durch die Kräfte P, P', P'' etc. nach den Direktionen der Linien p, p', p'' etc. gezogen; so hat man (nach dem vorhergehenden Abschnitt) für das Gleichgewicht dieser Körper die Formel:

$$Pdp + P'dp' + P''dp'' + \text{etc.} = 0$$

Es seyen x, y, z die rechtwinklichten Coordinaten des durch die Kraft P gezogenen Punktes, x', y', z' die des durch die Kraft P' gezogenen Punktes und so weiter; und es seyen diese Coordinaten alle dreien festen Achsen parallel, und haben in einem Punkte ihren Anfang.

Es seyen ferner α, β, γ die Winkel, die die Linie p oder die Direktion der Kraft P , mit den Achsen, der x, y, z macht, α', β', γ' die Winkel, die die Direktion der Kraft P' mit eben diesen Achsen macht und so weg;

Man bekommt auf diese Art (vorherg. Abschn. 7.)

$$dp = \text{Cos } \alpha \, dx + \text{Cos } \beta \, dy + \text{Cos } \gamma \, dz,$$

$$dp' = \text{Cos } \alpha' \, dx' + \text{Cos } \beta' \, dy' + \text{Cos } \gamma' \, dz', \text{ etc.}$$

$$dp'' = \text{Cos } \alpha'' \, dx'' + \text{Cos } \beta'' \, dy'' + \text{Cos } \gamma'' \, dz'',$$

etc.

und für die Formel für's Gleichgewicht:

0 =

$$\begin{aligned}
 0 & \equiv P (\text{Cof } \alpha \, dx + \text{Cof } \beta \, dy + \text{Cof } \gamma \, dz) \\
 & + P' (\text{Cof } \alpha' \, dx' + \text{Cof } \beta' \, dy' + \text{Cof } \gamma' \, dz') \\
 & + P'' (\text{Cof } \alpha'' \, dx'' + \text{Cof } \beta'' \, dy'' + \text{Cof } \gamma'' \, dz'') \\
 & + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

3) Wir wollen sehen, welches immer erlaubt ist,

$$\begin{aligned}
 x'' & \equiv x + \xi & x' & \equiv x + \xi' \\
 y'' & \equiv y + \eta & y' & \equiv y + \eta' \\
 z'' & \equiv z + \zeta & z' & \equiv z + \zeta' \\
 & & & \text{etc.}
 \end{aligned}$$

so wird aus der vorhergehenden Formel, wenn man alle diese Werthe substituirt:

$$\begin{aligned}
 0 & \equiv (P \text{Cof } \alpha + P' \text{Cof } \alpha' + P'' \text{Cof } \alpha'' + \text{etc.}) \, dx \\
 & + (P \text{Cof } \beta + P' \text{Cof } \beta' + P'' \text{Cof } \beta'' + \text{etc.}) \, dy \\
 & + (P \text{Cof } \gamma + P' \text{Cof } \gamma' + P'' \text{Cof } \gamma'' + \text{etc.}) \, dz \\
 & + P' (\text{Cof } \alpha' \, d\xi + \text{Cof } \beta' \, d\eta + \text{Cof } \gamma' \, d\zeta) \\
 & + P'' (\text{Cof } \alpha'' \, d\xi' + \text{Cof } \beta'' \, d\eta' + \text{Cof } \gamma'' \, d\zeta') \\
 & \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Nun sind x, y, z die freyen Coordinaten des durch die Kraft P gezogenen Körpers, folglich werden $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ etc. die relativen Coordinaten der andern Körper in Ansehung dessen seyn, der als ihr gemeinschaftlicher Anfang angenommen worden ist, so daß die gegenseitige Lage der Körper nur von diesen letztern Coordinaten und keinesweges von den erstern abhängen wird. Nimmt man daher das System als völlig frey an, d. h. nimmt man an, daß die Körper unter einander auf eine gewisse Art verbunden sind, aber ohne daß sie von gewissen festen Unterstützungspunkten oder gewissen äußeren Hindernissen zurückgehalten oder aufgehalten werden; so ist leicht einzusehen, daß die von der Natur des Systems herkommenden Bedingungen nur die Größen $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ etc. und

und keinesweges die Größen x, y, z , angehen können, deren Differentia-
lien folglich unabhängig und unbestimmt bleiben.

Man muß daher in der vorhergehenden Gleichung jede der Glieder,
worin dx, dy, dz , vorkommt, besonders $= 0$ setzen, und hieraus ent-
stehen die 2 folgenden besondern Gleichungen:

$$P \operatorname{Cof} \alpha + P' \operatorname{Cof} \alpha' + P'' \operatorname{Cof} \alpha'' + \text{etc.} = 0$$

$$P \operatorname{Cof} \beta + P' \operatorname{Cof} \beta' + P'' \operatorname{Cof} \beta'' + \text{etc.} = 0$$

$$P \operatorname{Cof} \gamma + P' \operatorname{Cof} \gamma' + P'' \operatorname{Cof} \gamma'' + \text{etc.} = 0$$

welche immer beim Gleichgewicht eines freyen Systems statt finden müssen.
Dies sind also die zur Verhinderung der fortrückenden Bewegung nöthige
Gleichungen.

4) Wären die Kräfte $P, P', P'', \text{etc.}$ parallel; so hätte man

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' \text{ etc.}$$

$$\beta = \beta' = \beta'' \text{ etc.}$$

$$\gamma = \gamma' = \gamma'' \text{ etc.}$$

und die 3 vorhergehenden Gleichungen verwandelten sich in diese:

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0$$

welche zeigt, daß die Summe der parallelen Kräfte $= 0$ seyn müßte.

Ueberhaupt ist leicht einzusehen, daß, wenn P die ganze Wirkung
der Kraft P nach ihrer eignen Direktion anzeigt, $P \operatorname{Cof} \alpha$ die relative Wirt-
kung ausdrücken wird, die nach der Direktion der Achse der x geschätzt
wird, die mit der Direktion der Kraft den Winkel α macht; eben so sind
 $P \operatorname{Cof} \beta$ und $P \operatorname{Cof} \gamma$ die relativen Wirkungen eben dieser Kraft nach den
Direktionen der Achsen von y und z geschätzt u. s. w.

Und hieraus entspringt dann der Lehrsatz: Beim Gleichgewicht eines
freyen Systems muß die Summe der Kräfte, die nach der Direktion der
drei auf einander senkrechten Achsen geschätzt werden, in Ansehung jeder
dieser Achsen $= 0$ seyn.

5) Wir

5) Wir wollen nun, welches immer geschehen kann, statt der Coordinaten x, y, x', y', x'', y'' etc. die Radios Vektoren ρ, ρ', ρ'' etc. mit den Winkeln $\varphi, \varphi', \varphi''$ etc., die diese Radien mit der Achse der x machen, annehmen; so haben wir wieder

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{Cof} \varphi & x' &= \rho' \operatorname{Cof} \varphi' \\ y &= \rho \sin \varphi & y' &= \rho' \sin \varphi' \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\text{Folglich } dx = \operatorname{Cof} \varphi d\rho - y d\varphi$$

$$dy = \sin \varphi d\rho + x d\varphi$$

$$dx' = \operatorname{Cof} \varphi' d\rho' - y' d\varphi'$$

$$dy' = \sin \varphi' d\rho' + x' d\varphi'$$

etc.

und die Gleichung (2) wird nun in folgende durch diese Substitutionen verwandelt:

$$\begin{aligned} 0 &= P (x \operatorname{Cof} \beta - y \operatorname{Cof} \alpha) d\varphi \\ &+ P' (x' \operatorname{Cof} \beta' - y' \operatorname{Cof} \alpha') d\varphi' \\ &+ P'' (x'' \operatorname{Cof} \beta'' - y'' \operatorname{Cof} \alpha'') d\varphi'' \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ P (\operatorname{Cof} \varphi \operatorname{Cof} \alpha + \sin \varphi \operatorname{Cof} \beta) d\rho \\ &+ P' (\operatorname{Cof} \varphi' \operatorname{Cof} \alpha' + \sin \varphi' \operatorname{Cof} \beta') d\rho' \\ &+ P'' (\operatorname{Cof} \varphi'' \operatorname{Cof} \alpha'' + \sin \varphi'' \operatorname{Cof} \beta'') d\rho'' \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

$$+ P \operatorname{Cof} \gamma dz + P' \operatorname{Cof} \gamma' dz' + P'' \operatorname{Cof} \gamma'' dz'' + \text{etc.}$$

$$\text{Macht man nun } \varphi' = \varphi + \sigma$$

$$\varphi'' = \varphi + \sigma'$$

etc.

so ist offenbar, dass σ, σ' etc. die Winkel seyn werden, die die Radien ρ, ρ', ρ'' , etc. mit dem Radius ρ machen; folglich werden die Distanzen der Körper sowohl unter einander, als in Beziehung auf die Fläche der x, y

und auf den Punkt, der der Anfang der Coordinaten ist, nur von den Größen $\rho, \rho', \rho'', \text{etc. } \sigma, \sigma', \text{etc. } z, z', z'', \text{etc.}$ abhängen. Hat daher das System die Freyheit um diesen Punkt sich zu drehen, der Ebene der $x y$ parallel d. h. um die Achse der z , die auf dieser Ebene senkrecht steht; so wird der Winkel φ unbestimmt, und die Differentialgröße $d\varphi$ willkürlich seyn. Hieraus folgt also, daß das Glied, worin $d\varphi$ in der vorhergehenden Gleichung vorkommt, an und für sich $= 0$ seyn muß.

6) Auf diese Art entsteht also die Gleichung:

$$P(x \operatorname{Col} \beta - y \operatorname{Col} \alpha) + P'(x' \operatorname{Col} \beta' - y' \operatorname{Col} \alpha') \\ + P''(x'' \operatorname{Col} \beta'' - y'' \operatorname{Col} \alpha'') + \text{etc.} = 0,$$

welche beim Gleichgewicht jedes Systems, das die Freyheit hat sich um die Achse der z zu drehen, statt finden muß.

Auf eben die Art findet man in Beziehung auf die Achse der y , wenn das System die Freyheit hat, sich um diese Achse zu drehen, die Gleichung:

$$P(x \operatorname{Col} \gamma - z \operatorname{Col} \alpha) + P'(x' \operatorname{Col} \gamma' - z' \operatorname{Col} \alpha') \\ + P''(x'' \operatorname{Col} \gamma'' - z'' \operatorname{Col} \alpha'') + \text{etc.} = 0$$

und in Beziehung auf die Achse der x

$$P(y \operatorname{Col} \gamma - z \operatorname{Col} \beta) + P'(y' \operatorname{Col} \gamma' - z' \operatorname{Col} \beta') \\ + P''(y'' \operatorname{Col} \gamma'' - z'' \operatorname{Col} \beta'') + \text{etc.} = 0.$$

Hat also das System die Freyheit sich um jede dieser drey Achsen zu bewegen; so müssen für's Gleichgewicht diese 3 Gleichungen zugleich statt finden.

Setzt man in der Größe $x \operatorname{Col} \beta - y \operatorname{Col} \alpha$, welche mit der Kraft P in der ersten Gleichung multiplicirt ist, für $\operatorname{Col} \alpha$, $\operatorname{Col} \beta$ ihre Werthe $\sin \gamma \operatorname{Col} \varepsilon$, $\sin \gamma \sin \varepsilon$ (2 Abschn. S 7.); so bekommt man

$\sin \gamma (x \sin \varepsilon - y \operatorname{Col} \varepsilon)$; welches sich in

$\rho \sin \gamma \sin (\varepsilon - \varphi)$ verwandelt, wenn man wieder für x und y ihre Werthe $\rho \operatorname{Col} \varphi$, $\rho \sin \varphi$ setzt.

Nun

Nun aber ist α der Winkel, den die Projektion der Kraft P auf der Ebene der x und y mit der Achse der x macht und φ der Winkel, den der Radius Vektor ρ mit eben dieser Achse macht. Folglich ist $\alpha - \varphi$ der Winkel, den die eben genannte Projektion mit diesem Radius Vektor macht; und daher wird $\rho \sin(\alpha - \varphi)$ die senkrechte Linie seyn, die vom Mittelpunkt der Radien ρ an die auf der Ebene der x y projicirte Direction der Kraft gezogen ist; d. h. überhaupt die senkrechte Linie, die von der Achse der z (die selbst senkrecht auf dem Radius ρ ist) zur Direction dieser Kraft gezogen worden ist. Nennt man also π diese senkrechte Linie so hat man

$$x \operatorname{Col} \beta - y \operatorname{Col} \alpha = \pi \sin \gamma$$

und auf eine ähnliche Form könnte man die analogen Größen bringen, die in den 3 vorhergehenden Gleichungen mit P P' P'' etc. multiplirt sind.

7) Hat das System die Freyheit sich auf jede Art um einem Punkt zu drehen; so könnte man zweifeln, ob es hinlänglich sey, nur die Rotationen um die 3 durch diesen Punkt gehenden senkrechten Achsen zu betrachten, und ob, wenn diese 3 Rotationen verhindert würden, keine andere Rotation mehr um denselben Punkt statt finden könne?

Um diesen Zweifel zu benehmen, so erwäge ich, daß, wenn man wie oben $x = \rho \operatorname{Col} \varphi$,

$$y = \rho \sin \varphi,$$

$$x' = \rho' \operatorname{Col} \varphi',$$

$$y' = \rho' \sin \varphi',$$

etc.

setzt und nur die Winkel φ φ' etc. als veränderlich annimmt, man erhält

$$dx = -y d\varphi, \quad dy = x d\varphi,$$

$$dx' = -y' d\varphi, \quad dy' = x' d\varphi, \text{ etc.}$$

und dies sind die Variationen von x , y , x' , y' etc. in Ansehung der elementarischen Rotation $d\varphi$ des Systems um die Achse der z .

Auf

Auf gleiche Art bekommt man die Variationen von $y, z, y', z',$ etc. welche durch die elementarische Rotation $d\psi$ um die Achse der x entstehen, indem man nur in den vorhergehenden Formeln x, y, x', y' etc. in y, z, y', z' etc. und $d\varphi$ in $d\psi$ verwandelt; dies giebt

$$\begin{aligned} dy &= -z d\psi, & dz &= y d\psi, \\ dy' &= -z' d\psi', & dz' &= y' d\psi', \end{aligned}$$

etc.

Verwandelt man endlich in diesen letztern Formeln y, z, y', z' etc. in z, x, z', x' etc. und $d\psi$ in $d\omega$; so bekommt man die Variationen, die aus der elementarischen Rotation $d\omega$ um die Achse der y entspringen; diese sind

$$\begin{aligned} dz &= -x d\omega, & dx &= z d\omega, \\ dz' &= -x' d\omega, & dx' &= z' d\omega, \end{aligned}$$

etc.

Setzt man nun, daß die 3 elementarischen Rotationen $d\varphi, d\psi, d\omega$ zugleich statt haben; so werden die ganzen Variationen der Coordinaten $x, y, z, x', y', z',$ etc. nach den Grundlehren des Differentialcalculus der Summe der einzelnen Variationen, die aus jeder dieser Rotationen entspringen sind, gleich seyn, so daß man erhalten wird:

$$\begin{aligned} dx &= z d\omega - y d\varphi, \\ dy &= x d\varphi - z d\psi, \\ dz &= y d\psi - x d\omega, \\ dx' &= z' d\omega' - y' d\varphi', \\ dy' &= x' d\varphi' - z' d\psi', \\ dz &= y' d\psi' - x' d\omega' \end{aligned}$$

etc.

8) Ich bemerke hier, daß wenn die Coordinaten x, y, z eines gewissen Punktes des Systems, den Größen $d\psi, d\omega, d\varphi$ proportional wären, die Variationen $dx, dy, dz = 0$ seyn würden, wie man dies aus den eben

eben gefundenen Formeln leicht ersieht. Alle Punkte also, die zu diesen Coordinaten gehörten, würden in dem Augenblick, daß das System die 3 Winkel $d\psi$, $d\omega$, $d\phi$ beschriebe, indem es sich um die Achsen der x , y , z drehte, unbeweglich seyn.

Man sieht aber leicht, daß alle diese Punkte in einer geraden Linie seyn müssen, die durch den Anfang der Coordinaten geht, und man begreift leicht, daß diese gerade Linie mit den Achsen der x , y , z Winkel machen wird, deren Cosinus

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2)}}, \frac{d\omega}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2)}}, \frac{d\phi}{\sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2)}}$$

seyn werden; diese gerade Linie wird also in eben diesem Augenblick unbeweglich seyn, und die Bewegung des Systems kann nur eine einfache drehende Bewegung um eben diese Linie seyn, die wir eben deswegen die momentanische Umbrehungsachse (*axe instantané de rotation*) nennen werden.

Um den durch diese Rotation beschriebenen Winkel zu erhalten; so erwäge man, daß $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ überhaupt das Element des durch einen gewissen zu den Coordinaten x , y , z gehörigen Punkt beschriebenen Raumes ausdrückt. Substituiert man nun die Werthe von dx , dy , dz , die wir oben gefunden haben, so erhält man

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (zd\omega - yd\phi)^2 + \\ &+ (xd\phi - zd\psi)^2 + (yd\psi - xd\omega)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2) \\ &- (xd\psi + yd\omega + zd\phi)^2 \end{aligned}$$

Auf einer andern Seite ist es leicht durch die Geometrie zu beweisen, daß $xd\psi + yd\omega + zd\phi = 0$ eine Gleichung für eine durch den Anfang der Coordinaten gehenden Ebene ist, die senkrecht auf die gerade Linie ist,
E
in

in Ansehung deren die Coordinaten den gegebenen Größen $d\psi$, $d\omega$, $d\phi$ proportional sind, d. h. die momentanische Umdrehungsachse, wenn man durch x , y , z immer die Coordinaten andeutet. Der durch einen gewissen Punkt eben dieser Ebene beschriebene elementarische Raum wird daher durch $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \pm \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2}$; ausgedrückt werden; und da $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Distanz dieses Punktes vom Anfange der Coordinaten ist, wo die Ebene und die momentanische Umdrehungsachse sich unter rechten Winkeln schneiden; so folgt daraus, daß $\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2}$ der elementarische Rotationswinkel um diese Achse in Ansehung der einzelnen Umdrehungen $d\psi$, $d\omega$, $d\phi$ um die Achsen der Coordinaten x , y , z , seyn wird.

9) Hieraus muß man den allgemeinen Schluß ziehen, daß gewisse Drehungen $d\psi$, $d\omega$, $d\phi$ um die drei Achsen, die sich senkrecht in einem Punkte schneiden, sich in eine einzige $d\vartheta = \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\phi^2}$ um eine Achse zerlegen lassen, die durch eben diesen Durchschnittspunkt gehen, und mit jenen

die Winkel λ , μ , ν dergestalt machen, daß $\text{Cos. } \lambda = \frac{d\psi}{d\vartheta}$, $\text{Cos. } \mu = \frac{d\omega}{d\vartheta}$,

$\text{Cos. } \nu = \frac{d\phi}{d\vartheta}$, und daß umgekehrt eine Umdrehung $d\vartheta$ um eine gegebene Achse in 3 einzelne Umdrehungen zerlegt werden kann, die durch $d\vartheta \text{ Cos. } \lambda$, $d\vartheta \text{ Cos. } \mu$, $d\vartheta \text{ Cos. } \nu$ ausgedrückt werden können, um die 3 Achsen die sich senkrecht in einem gegebenen Punkte der Achse schneiden, und mit ihr die Winkel λ , μ , ν machen; dies giebt, wie man sieht, ein sehr einfaches Mittel an die Hand, die Umdrehungs-Bewegungen zusammenzusetzen und zu zerlegen *).

10) Das

*) Hr. de la Grange beweist hier also bloß analytisch, daß wenn ein Gleichgewicht in Ansehung der Umdrehungs-Bewegung um 3 auf einander senkrechte Achsen, die durch einen Punkt durchgehen, eintritt; dasselbe auch in Ansehung einer jeden andern beliebigen Achse, welche durch den gedachten Punkt durchgeht, statt findet. Es findet auch die Eigenschaft bey jedem Systeme von Körpern statt, daß es allezeit wenigstens 3 Achsen gibt, worum es sich bewegen kann; eben so wie dies zuerst Hr. von Segner in seinem *specimine theoriae turbinum* (Halae 1755.) für jeden Körper einzeln ent-

10) Das System mag also eine Umdrehung um ein Punkt, welches der Anfang der Coordinaten ist, haben, welche es will; so kann man sie doch allezeit auf drei $d\psi$, $d\omega$, $d\phi$ um die drei Achsen der Coordinaten x , y , z bringen, und die Variationen von allen Coordinaten x , y , z , x' , y' , z' etc. der verschiedenen Körper des Systems, die allein durch diese Umdrehungen erzeugt werden, können allgemein durch die (7) gefundene Formeln ausgedrückt werden.

Substituiert man daher nur diese Werthe von dx , dy , dz , dx' , dy' , dz' , etc. in der allgemeinen Formel für's Gleichgewicht (4); so erhält man die von den Umdrehungen $d\psi$, $d\omega$, $d\phi$, des Systems entstandenen Werthe, und da diese Umdrehungen völlig willkürlich sind, wenn das System die Freiheit hat, sich nach allen Seiten zu drehen; so müßte in diesem Falle jedes der Glieder, worin $d\psi$, $d\omega$, $d\phi$ vorkommt, insbesondere $= 0$ seyn; und dies würde die (6) schon gefundenen 3 Gleichungen geben, die also hinreichend sind alle Umdrehung des Systems um den Anfangspunkt der Coordinaten zu verhindern.

II) Was

entdeckt hat, welche Eigenschaft in der Folge Hr. Euler in seiner theoria motus corporum solidorum s. u. rigidorum (Rostockii et Gryphiswaldiae 1765) noch allgemeiner gemacht hat.

Die Verhältniß der Umdrehungs-Bewegungen, welche man zusammensetzt, ist aber willkürlich, wenn sie nicht durch eine besondere Bedingung bestimmt wird; die hier angeführte Methode die Umdrehungs-Bewegungen zusammensetzen und zu zerlegen giebt also an Allgemeinheit derjenigen nichts nach, die sich auf die fortrückende Bewegungen bezieht.

Da den schönen Beweis des Hrn. de la Grange vom obigen Satze einzusehen, schon viele Kenntnisse des Kalküls erfordert werden; so verweise ich diejenigen, die einen geometrischen Beweis davon verlangen, auf des Hrn. von Prony Nouv. Architect. Hydraul. q. § 1:4 nebst der Note, wo man ihn mit aller der Klarheit und Strenge vorgetragen und durch Figuren erläutert findet, als diesem Geometer in seinem ganzen Werke überhaupt eigen ist.

III.

11) Wären alle die Kräfte $P, P', P'', \text{etc.}$ parallel unter einander; so hätte man

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' \text{ etc.}$$

$$\beta = \beta' = \beta'' \text{ etc.}$$

$$\gamma = \gamma' = \gamma'' \text{ etc.}$$

und die eben genannten 3 Gleichungen verwandelten sich in diesem Falle in folgende:

$$(Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}) \text{Cof } \beta - (Py + P'y' + \text{etc.}) \text{Cof } \alpha = 0$$

$$(Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}) \text{Cof } \gamma - (Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.})$$

$$\text{Cof } \alpha = 0$$

$$(Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.}) \text{Cof } \gamma - (Pz + P'z' + P''z'' \text{ etc.})$$

$$\text{Cof } \beta = 0$$

wovon die 3te eine Folge aus den beiden erstern ist. Aber es ist (2 Abschn. 7.)

$$\text{Cof}^2 \alpha + \text{Cof}^2 \beta + \text{Cof}^2 \gamma = 1$$

folglich kann man durch diese Gleichungen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}$ bestimmen. Sehen wir daher um der Kürze willen

$$Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.} = L,$$

$$Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.} = M,$$

$$Pz + P'z' + P''z'' + \text{etc.} = N,$$

so findet man

$$\text{Cof } \alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\text{Cof } \beta = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\text{Cof } \gamma = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

Nun

Nun ist die Lage der Körper in Ansehung der 3 Achsen gegeben; folglich muß, damit alle Umdrehungs-Bewegung des Systems aufgehoben werde, es in Ansehung der Direktion der Kräfte eine solche Lage haben, daß dieselbe mit eben diesen Achsen die eben bestimmten Winkel α , β , γ macht.

12) Wären die Größen L , M , $N = 0$; so blieben die Winkel α , β , γ unbestimmt, und die Lage des Systems in Ansehung der Kräfte kann gar sehr verschieden seyn; hieraus erwächst denn folgender Lehrsatz: Wenn die Summe der Produkte der parallelen Kräfte in ihre Entfernungen von dreien auf einander senkrechten Ebenen in Ansehung jeder dieser Ebenen $= 0$ ist; so wird die Wirkung der Kräfte, um das System um den gemeinschaftlichen Durchschnitts-Punkt dieser Ebenen zu drehen, aufgehoben.

Bekanntlich wirkt die Schwere vertikal und in Verhältniß der Masse; sucht man daher in einem Systeme von schweren Körpern einen Punkt, der so beschaffen ist, daß die Summe jeder Masse und der Entfernung von der durch diesen Punkt gehenden Ebene in Ansehung dreier auf einander senkrechten Ebenen $= 0$ ist; so wird derselbe auch die Eigenschaft haben, daß die Schwere dem System keine Umdrehungsbewegung um eben diesen Punkt verschaffen kann. Diesen Punkt nennt man den Schwerpunkt *), und er ist von einem ausgebreiteten Nutzen in der ganzen Mechanik.

Um ihn zu bestimmen hat man nur die Entfernung desselben von dreien auf einander senkrechten gegebenen Ebenen zu suchen. Die Summe der Produkte der Massen in ihre Entfernungen von einer durch den Schwerpunkt gehenden Ebene aber ist $= 0$; folglich wird die Summe der Produkte

§ 3

dukte

*) Er pflegt auch wohl Mittelpunkt der Schwere nach dem französischen centre de gravité, auch Mittelpunkt des Gleichgewichts, Gleichgewichtspunkt genannt zu werden. Wenn also der Körper und die Kräfte gegeben sind; so muß man, um diesen Punkt zu finden, drei auf einander senkrechte Ebenen der Lage nach als bekannt annehmen, und alsdann vermöge der Analysis die Lage dreier anderer Ebenen, die mit den erstern parallel laufen, und deren gemeinschaftlicher Durchschnitt den verlangten Schwerpunkt giebt, bestimmen.

unkte eben dieser Massen in ihre Entfernungen von einer andern der vorigen parallelen Ebene nothwendig dem Produkte aller Massen in die Entfernung des Schwerpunkts von eben dieser Ebene gleich seyn, und man erhält diese Entfernung, wenn man die Summe der Produkte der Massen in ihre Entfernungen durch die Summe der Massen selbst dividirt. Hieraus entspringen die bekannten Formeln für die Schwerpunkte der Linien, der Flächen und der Körper.

13) Wir wollen jetzt die maxima und minima in Betrachtung ziehen, die beim Gleichgewicht statt finden können, und in dieser Hinsicht die allgemeine Formel

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} = 0,$$

für's Gleichgewicht zwischen den nach den Linien $p, q, r, \text{etc.}$ wirkenden Kräften $P, Q, R, \text{etc.}$ (2 Abschn. 2) wieder vorzunehmen.

Man kan leicht annehmen, daß diese Kräfte so beschaffen seyen, daß die Größe $Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ eine vollkommene Differentialgröße einer Funktion $p, q, r \text{ etc.}$ sey; drückt man diese durch Φ aus; so ist

$$d\Phi = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

und man hat alsdann für's Gleichgewicht die Gleichung $d\Phi = 0$, woraus man sieht, daß das System eine solche Lage haben müsse, daß die Funktion Φ allgemein geredet entweder ein maximum oder ein minimum sey.

Ich sage mit Vorbedacht: allgemein geredet, denn man weiß, daß wenn eine Differentialgröße $= 0$ ist; dies nicht immer ein maximum oder ein minimum andeute; wie man dies aus der Theorie der krummen Linien ersieht.

Die vorige Voraussetzung hat allgemein statt, die Kräfte $P, Q, R, \text{etc.}$ mögen nun wirklich auf feste Punkte wirken oder auf Körper desselben Systems, wenn sie zugleich gewissen Funktionen der Entfernungen (2 Abschn. 54) proportional sind, welches gemeintlich in der Natur der Fall ist.

Bei dieser Annahme der Kräfte, wird also das System im Gleichgewicht seyn, wenn die Funktion Φ ein maximum oder ein minimum ist; und

und hierinn besteht der Grundsatz, den Hr. von Maupertuis unter dem Namen des Gesetzes der Ruhe bekannt gemacht hat.

14) Betrachtet man nun ein System von schweren Körpern im Gleichgewicht; so werden die Kräfte P, Q, R etc., die von der Schwere herkommen, wie wir bereits wissen; den Massen der Körper proportional, folglich beständig seyn, und die Entfernungen p, q, r etc. werden nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet seyn. In diesem Falle hat man daher:

$$\Phi = Pp + Qq + Rr + \text{etc.}$$

und es wird folglich, da die Linien p, q, r etc. als parallel angesehen werden, die Größe

$$\frac{\Phi}{P + Q + R + \text{etc.}}$$

die Entfernung des Schwerpunkts des ganzen Systems vom Mittelpunkt der Erde anzeigen; die also entweder ein maximum oder ein minimum seyn wird, wenn das System sich im Gleichgewicht befinden wird; sie wird z. B. ein minimum bey der Kettenlinie und ein maximum bey mehreren Kugeln, die eine Höhlung bilden, seyn. Dieser Grundsatz ist sehr alt.

15) Denkt man sich jetzt in der Voraussetzung (13) das System in Bewegung und drücken u', u'', u''' , etc. die Geschwindigkeiten m', m'', m''' , etc. aber die Massen in Rücksicht auf die verschiedenen Körper, die das System ausmachen, aus; so verschafft das Gesetz der Erhaltung der lebendigen Kräfte, wovon wir im 2ten Theile einen direkten und allgemeinen Beweis geben werden, folgende Gleichung:

$$m' u'^2 + m'' u''^2 + m''' u'''^2 + \text{etc.} = \text{Const.} - 2 \Phi.$$

Weil daher im Zustande des Gleichgewichts die Größe Φ entweder ein minimum oder ein maximum ist; so folgt daraus, daß auch die Größe $m' u'^2 + m'' u''^2 + m''' u'''^2 + \text{etc.}$, die die lebendige Kraft des ganzen Systems ausdrückt, ein maximum oder ein minimum ist; und hierinn besteht der Grundsatz der Statik, den der Marquis von Courtyron bekannt gemacht hat, daß nemlich unter allen Lagen, die ein System annehmen kann, diejenige, worinn die lebendige Kraft am größten oder kleinsten ist, zugleich

zugleich auch diejenige ist, worinn man es vor allen andern setzen müsse, damit es ein Gleichgewicht sey.

16) Wir haben eben gesehen, daß die Funktion Φ ein minimum oder maximum ist, wenn die Lage des Systems so beschaffen ist, daß ein Gleichgewicht vorhanden ist; jetzt wollen wir erweisen, daß wenn diese Funktion ein minimum ist, alsdann das Gleichgewicht Bestandt hat, so daß wenn man gleich anfangs das System als im Zustand des Gleichgewichts sich vorstellt, und es hernach ein wenig von diesem Zustande abgebracht wird, sich wieder in seinen vorigen Zustand zu versehen, und unendlich kleine Oscillationen machen wird; und daß im Gegentheil in dem Falle, wo dieselbe Funktion ein maximum ist, das Gleichgewicht nicht fortdauern wird; sondern daß, wenn das System alsdenn einmal gestört worden ist, es Oscillationen machen kann, die nicht unendlich klein sind, und die es immer mehr von seinem ersten Zustand abbringen können.

17) Um diesen Satz auf eine allgemeine Art darzuthun, so erwäge ich, daß die Lage des Systems, seine übrige Form mag auch beschaffen seyn wie sie will, d. h. die Lage der verschiedenen Körper die dasselbe ausmachen, allezeit durch eine gewisse Anzahl von veränderlichen Größen bestimmt ist, und daß die Größe Φ eine gegebene Funktion eben dieser veränderlichen Größen seyn wird. Gesezt nun, im Zustande des Gleichgewichts seyen die eben genannten veränderlichen Größen $= a, b, c, \text{etc.}$ und in einem demselben sehr nahe kommenden Zustande seyen sie $a + x, b + y, c + z \text{ etc.}$ wo die Größen $x, y, z \text{ etc.}$ sehr klein seyen; so bekommt die Funktion Φ , wenn man diese leßtern Werthe in den vorigen Ausdruck für dieselbe substituirt, und nach den Dimensionen von $x, y, z, \text{etc.}$ ordnet, folgende Form:

$$\Phi = A + Bx + Cy + Dz + \text{etc.} \\ + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \text{etc.}$$

wo die Größen $A, B, C, \text{etc.}$ in $a, b, c, \text{etc.}$ gegeben sind.

Aber im Zustande des Gleichgewichts muß der Werth von $d\Phi = 0$ seyn, die Lage des Systems mag auch eine Veränderung erleiden, welche sie

sie will. Das Differential von Φ muß daher überhaupt $= 0$ seyn, wenn $x, y, z, \text{etc.} = 0$ sind, folglich ist $B = 0, C = 0, D = 0$ etc.

Man bekommt daher für einem dem Gleichgewicht sehr nahen Zustand diesen Ausdruck für Φ

$$\Phi = A + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \text{etc.}$$

worinn man, so lange die veränderlichen Größen $x, y, z, \text{etc.}$ sehr klein sind, nur bis auf ihre 2te Dimension zu gehen braucht.

18) Man sieht aber hieraus, daß, damit die Größe Φ allezeit ein minimum sey, wenn $x, y, z, \text{etc.} = 0$ sind; die Funktion

$$Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \text{etc.}$$

die ich X nennen will, allezeit positiv seyn muß, die Werthe der veränderlichen Größen $x, y, z, \text{etc.}$ mögen auch beschaffen seyn, wie sie wollen.

Wir wollen zuerst $y, z, \text{etc.} = 0$ setzen, alsdann haben wir $X = Fx^2$, welche Größe immer positiv seyn wird, wenn F positiv ist; also haben wir für die erste Bedingung des Gleichgewichts $F > 0$.

Weil nun die Größe X allezeit positiv ist, wenn $y, z, \text{etc.} = 0$ sind; so ist klar, daß, damit sie immer positiv bleibe, sie nie $= 0$ werden könne, wenn man diesen veränderlichen Größen verschiedene Werthe giebt. Zieht man also aus der Gleichung $X = 0$ den Werth von x ; so muß derselbe imaginair seyn, aber die Gleichung $X = 0$ giebt:

$$x + \frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F} = \sqrt{\frac{Hy^2 + Lyz + Mz^2 + \text{etc.}}{F} + \left(\frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F}\right)^2}$$

folglich muß die Größe

$$\frac{Hy^2 + Lyz + Mz^2 + \text{etc.}}{F} - \left(\frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F}\right)^2$$

⊗

die

die ich Y nennen will, allezeit positiv seyn. Diese Größe läßt sich aber auf folgende Form bringen:

$$Py^2 + Qyz + Rz^2 + \text{etc.}$$

wenn man Kürze halber setzt

$$P = \frac{H}{F} - \frac{G^2}{4F^2},$$

$$Q = \frac{L}{F} - \frac{GK}{2F^2},$$

$$R = \frac{M}{F} - \frac{K^2}{4F^2},$$

etc.

Durch den vorigen ähnliche Schlüsse kommt man daher zuerst zur Bedingung $P > 0$ und dann muß der Werth von y, der aus der Gleichung $Y = 0$ erhalten worden ist, imaginair seyn, diese Gleichung aber giebt:

$$y + \frac{Qz + \text{etc.}}{2P} = \sqrt{-\frac{Rz^2 + \text{etc.}}{P} + \left(\frac{Qz + \text{etc.}}{2P}\right)^2}$$

folglich muß die Größe

$$\frac{Rz^2 + \text{etc.}}{P} - \left(\frac{Qz + \text{etc.}}{2P}\right)^2$$

die ich Z nennen will, und die sich auf die Form $Tz^2 + \text{etc.}$ bringen läßt,

wenn man um der Kürze willen $T = \frac{R}{P} - \frac{Q^2}{4P^2}$, etc. setzt, jederzeit po-

sitiv seyn. Folglich muß man wieder $T > 0$ haben u. s. w.

Enthält die Funktion X nur 3 veränderliche Größen x, y, z, so ist offenbar, daß die 3 Bedingungen $F > 0$, $P > 0$, dazu hinreichen werden, sie allezeit positiv zu machen, und folglich wird alsdann auch ein minimum statt

stätt finden. Wäre noch eine 4te veränderliche Größe vorhanden; so müßte man noch eine Bedingung finden, und überhaupt muß die Zahl der Bedingungen der Zahl der veränderlichen Größen allezeit gleich seyn.

Sollte gegentheils die Größe Φ immer ein maximum seyn, wenn x, y, z etc. $= 0$ sind, so müßte die Funktion X allezeit negativ seyn. Folglich muß F erstlich in diesem Falle negativ seyn, und 2tens die Gleichung $X = 0$ keine wirkliche Wurzel für x geben; dies wird dieselben Bedingungen verschaffen, die man im vorhergehenden Falle gefunden hat, nemlich $P > 0, T < 0$ etc.

Hieraus folgt, daß die Bedingungen des maximum einerley mit denen des minimum sind außer der erstern, die für das minimum $F > 0$ und für's maximum $F < 0$ ist.

19) Ich bemerke jetzt, daß die Größen X, Y, Z , etc. sich unter folgende Form bringen lassen:

$$X = F \left[\left(x + \frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F} \right)^2 + Y \right]$$

$$Y = P \left[\left(y + \frac{Qz + \text{etc.}}{2P} \right)^2 + Z \right]$$

$$Z = T \left[(z + \text{etc.})^2 + \text{etc.} \right]$$

etc.

Folglich, wenn man nach und nach die gehörigen Substitutionen verrichtet; so erhält man:

$$X = F \left(x + \frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F} \right)^2$$

$$+ F P \left(y + \frac{Qz + \text{etc.}}{2P} \right)^2$$

$$+ F P T (z + \text{etc.})^2$$

etc.

Hieraus sieht man denn deutlich, daß der Werth von X allezeit positiv seyn wird, wenn $F, P, T, \text{etc.} > 0$ und im Gegentheil, daß er allezeit negativ seyn wird, wenn $F < 0$ und $P, T, \text{etc.} > 0$.

Nimmt man nun um mehrerer Einfachheit willen statt der veränderlichen Größen $x, y, z, \text{etc.}$ andere $\xi, \eta, \zeta, \text{etc.}$ an, so daß

$$\xi = x + \frac{Gy + Kz + \text{etc.}}{2F}$$

$$\eta = y + \frac{Qz + \text{etc.}}{2P}$$

etc.

so kann man der Funktion X diese sehr einfache Form geben:

$$X = f\xi^2 + g\eta^2 + h\zeta^2 + \text{etc. so daß}$$

$$\Phi (= A + X M) = A + f\xi^2 - g\eta^2 + h\zeta^2 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten $f, g, h, \text{etc.}$ nothwendig alle positiv seyn werden, in dem Falle, worinn Φ ein minimum ist, aber negativ in dem Falle, worinn Φ ein maximum ist.

20) Um also den Lehrsatz (16) zu erweisen, braucht man nur die vorige Ausdrückung für Φ in der Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kräfte zu substituiren (15); so erhält man

$$M'u'^2 + M''u''^2 + M'''u'''^2 + \text{etc.} = \text{Const.} - \\ 2A - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 \text{ etc.}$$

Nun hat man im Zustande des Gleichgewichts nach der Voraussetzung $x = 0, y = 0, z = 0 \text{ etc.}$; folglich auch $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0 \text{ etc.}$ (19); Gesezt also, man bringe das System etwas von diesem Zustande ab, und gäbe den Körpern $M', M'', M''', \text{etc.}$ die sehr kleinen Geschwindigkeiten $V', V'', V''', \text{etc.}$ so müßte man $u' = V', u'' = V'', u''' = V''' \text{ etc.}$ haben, wenn $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0 \text{ etc.}$ Man hat also $M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \text{etc.} = \text{Const.} - 2A$; und dadurch wird die beliebige beständige Größe sich bestimmen lassen.

Die

Die vorhergehende Gleichung verwandelt sich also in diese:

$$M'u^{1/2} + M''u^{1/2} + M'''u^{1/2} + \text{etc.} = M'V^{1/2} + M''V^{1/2} + M'''V^{1/2} + \text{etc.}$$

$$- 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 \text{ etc.}$$

und hieraus ist es leicht folgende 2 Schlüsse zu ziehen:

1) Daß im Falle, daß Φ ein minimum ist, worin die Coefficienten $f, g, h, \text{etc.}$ allezeit positiv sind, die allezeit positive Größe $2f\xi^2 + 2g\eta^2 + 2h\zeta^2 + \text{etc.}$ kleiner oder wenigstens nicht viel größer seyn kann, als die gegebene Größe $M'V^{1/2} + M''V^{1/2} + M'''V^{1/2} + \text{etc.}$, die an und für sich sehr klein ist; nennt man also diese Größe T ; so hat man für jede der veränderlichen Größen $\xi, \eta, \zeta, \text{etc.}$ diese Grenzen

$$\pm \sqrt{\frac{T}{2f}}, \pm \sqrt{\frac{T}{2g}}, \pm \sqrt{\frac{T}{2h}} \text{ etc.};$$

wozwischen sie nothwendig eingeschlossen seyn werden; woraus folgt, daß in diesem Falle das System sich nur sehr wenig von seinem Zustande des Gleichgewichts entfernen kann, und daß es nur sehr kleine Oscillationen, und zwar von einem bestimmten Umfange wird machen können.

2) Daß im Falle, daß Φ ein maximum ist, worinn die Coefficienten $f, g, h, \text{etc.}$ alle negativ sind, die allezeit positive Größe $- 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 \text{ etc.}$ ins unendliche wachsen kann, und daß sich auf diese Art das System immer mehr von seinem Zustande des Gleichgewichts entfernen kann.

Wenigstens zeigt die obige Gleichung, daß in diesem Falle nichts hindere, daß die veränderlichen Größen $\xi, \eta, \zeta, \text{etc.}$ immer mehr zunehmen; jedoch folgt daraus nicht, daß sie in der That immer zunehmen müssen, diesen letztern Satz werden wir noch im fünften Abschnitt der Dynamik erweisen.

 Vierter Abschnitt.

Eine sehr einfache Methode die nöthigen Gleichungen für das Gleichgewicht eines Systems von Körpern zu finden, die als Punkte oder als endliche Massen angesehen sind, und durch gegebene Kräfte gezogen werden.

1) Diejenigen, die bisher über das Gesetz des Bestrebens nach Geschwindigkeit geschrieben haben, bemühten sich mehr die Wahrheit dieses Gesetzes durch die Uebereinstimmung seiner Resultate mit denen der gewöhnlichen Grundsätze der Statik zu beweisen, als den Nutzen zu zeigen den man davon machen kann, um die Aufgaben dieser Wissenschaft direkt aufzulösen. Wir haben uns vorgesezt dies letztere mit aller der Allgemeinheit zu erfüllen, als die Sache fähig ist aus diesem Gesetz analytische Formeln herzuleiten, die die Auflösung aller Aufgaben enthalten, die nur beim Gleichgewichte der Körper vorkommen können; eben so beinahe wie die Formeln der Subtangenten, der Radien Oseuli u. a. die Bestimmung dieser Linien in allen krummen Linien in sich einschließen.

2) Die im ersten Abschnitt gezeigte Methode ist in allen Fällen anwendbar und erfordert, wie man gesehen hat, ganz allein analytische Operationen; allein man stößt oft, wenn man die veränderlichen Größen und ihre Differentialien sogleich durch die Bedingungsgleichungen wegschaffen will, auf sehr zweifelhafte und verwickelte Calculs; wir wollen daher dieselbe Methode noch unter einer einfachern Form darstellen, und in dieser Absicht alle Fälle auf den eines völlig freien Systems zurückbringen.

3) Es seyen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc. die verschiedenen Bedingungsgleichungen, die durch die Natur des Systems gegeben sind; die Größen L , M , N , etc. mögen gewisse endliche Funktionen der veränderlichen Größen x , y , z , x' , y' , z' , etc. ausdrücken. Differentiirt man diese

diese Gleichungen; so bekommt man folgende: $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, etc. und diese geben das Verhältniß an, welches zwischen den Differentialien der veränderlichen Größen statt findet. Ueberhaupt werden wir unter $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$ etc. die Bedingungsgleichungen zwischen diesen Differentialien anzeigen, es mögen diese Gleichungen nun selbst entweder vollständige Differentialien seyn oder nicht, in dem sich die Differentialien hier nur auf Linien beziehen.

Diese Gleichungen sollen nur dazu dienen eine gleiche Anzahl von Differentialien in der Gleichung des Bestrebens nach Geschwindigkeit wegzuschaffen, und alsdann muß jeder der Coefficienten der übrig bleibenden Differentialien, $= 0$ seyn. Es ist daher nicht schwer aus der Theorie dieser auf Linien sich beziehenden Gleichungen es zu beweisen, daß man dieselben Resultate erhalten wird, wenn man nur zur Gleichung des Bestrebens nach Geschwindigkeit die verschiedenen Bedingungsgleichungen $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, etc. jede durch einen unbestimmten Coefficienten multiplicirt addirt, und hernach alle Glieder, die durch einerley Differential multiplicirt sind $= 0$ setzt; dies giebt nemlich soviel einzelne Gleichungen als Differentialien vorhanden sind; endlich schaffe man aus diesen letztern Gleichungen die unbestimmten Coefficienten weg, wodurch man die Bedingungsgleichungen multiplicirt hat.

4) Hieraus erwächst dann die sehr einfache Regel, um die Bedingungen des Gleichgewichts für ein gewisses System zu finden:

Man nehme die Summe der Momente aller Kräfte, die im Gleichgewicht seyn sollen (1 Abschn. 5.), und addire dazu die verschiedenen Differentialfunktionen, die Null seyn müssen, nach den Bedingungen der Aufgaben, jede dieser Funktionen multiplicire man durch einen unbestimmten Coefficienten und setze alles $= 0$; so erhält man eine Differentialgleichung, die man wie eine gewöhnliche Gleichung de maximis et minimis behandeln muß, und woraus man so viele einzelne endliche Gleichungen zieht, als veränderliche Größen vorhanden sind; befreit man endlich diese Gleichungen von den unbestimmten Coefficienten; so werden sie alle für das Gleichgewicht nöthige Bedingungen geben.

5) Die

5) Die gesuchte Differentialgleichung wird daher die Form haben:

$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} + RdL + \mu dM + \nu dN + \text{etc.} = 0$,
 wo R, μ, ν unbestimmte Größen sind, wir werden sie in der Folge allgemeine Gleichung des Gleichgewichts nennen.

Diese Gleichung wird für jede Coordinate als x von jedem der Körper des Systems eine Gleichung von folgender Gestalt geben:

$$P \frac{dp}{dx} + Q \frac{dq}{dx} + R \frac{dr}{dx} + \text{etc.} + \lambda \frac{dL}{dx} \\ + \mu \frac{dM}{dx} + \nu \frac{dN}{dx} + \text{etc.} = 0,$$

so daß die Zahl dieser Gleichungen der Zahl aller Coordinaten der Körper gleich ist. Wir werden diese besondere Gleichungen des Gleichgewichts nennen.

6) Alle Schwierigkeit besteht daher darin, die unbestimmten Größen $R, \mu, \nu, \text{etc.}$ aus diesen letztern Gleichungen wegzuschaffen, dies kann nun zwar jederzeit durch die bekannten Methoden geschehen, allein man muß ja immer diejenigen hiezu wählen, die zu den einfachsten Resultaten führen können. Die endlichen Gleichungen enthalten alle für's Gleichgewicht nöthige Bedingungen; und da die Zahl dieser Gleichungen der Zahl aller Coordinaten der Körper des Systems weniger der der unbestimmten Größen $R, \mu, \nu, \text{etc.}$, die man hat wegschaffen müssen, gleich ist, und überdies eben diese unbestimmte Größen an Zahl den endlichen Bedingungengleichungen $L = 0, M = 0, N = 0, \text{etc.}$ gleich ist; so müssen auch die genannten Gleichungen mit diesen letztern verbunden, jederzeit mit den Coordinaten aller Körper von gleicher Zahl seyn, sie reichen also dazu hin, diese Coordinaten zu bestimmen, und die Lage bekannt zu machen, die jeder Körper annehmen muß, um mit den übrigen im Gleichgewicht zu seyn.

7) Ich bemerke jetzt, daß die Glieder $RdL, \mu dM, \nu dN, \text{etc.}$ der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht, auch als solche angesehen werden

fen können, die die Momente der verschiedenen am System angebrachten Kräfte vorstellen.

Denn weil dL eine Differentialfunktion der veränderlichen Größen $x', y', z', x'', y'',$ etc. ist, die zu Coordinaten der verschiedenen Körpern des Systems dienen; so ist diese Funktion aus verschiedenen Theilen zusammengesetzt, die ich durch $dL', dL'',$ etc. andeuten will, so daß $dL = dL' + dL'' + \text{etc.}$; wo dL' nur solche Glieder in sich einschließt, worin dx', dy', dz' vorkommt, dL'' aber nur solche, die dx'', dy'', dz'' enthalten, u. s. w.

Auf diese Art wird das Glied RdL der allgemeinen Gleichung aus den Gliedern RdL', RdL'' etc. zusammengesetzt seyn. Giebt man also dem Gliede RdL' die Form:

$$R \sqrt{\left[\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right]}$$

$$\times \sqrt{\left[\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right]}$$

so ist klar (2 Abschn. 8), daß diese Größe das Moment einer Kraft

$$= R \sqrt{\left[\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right]}$$

vorstellen kann, die an einem Körper angebracht ist, dessen Coordinaten x', y', z' sind, und die senkrecht auf der Fläche ist, deren Gleichung $dL' = 0$ ist, wenn man nur x', y', z' als variabel ansieht. Auf gleiche Art kann das Glied RdL'' das Moment einer Kraft vorstellen, die

$$= R \sqrt{\left[\left(\frac{dL''}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL''}{dz''}\right)^2\right]}$$

ist; die an einem Körper angebracht ist, dessen Coordinaten x'', y'', z'' sind, und die senkrecht auf die krumme Fläche ist, deren Gleichung $dL'' = 0$ ist, wenn man nur x'', y'', z'' als variabel betrachtet u. s. w.

Allgemein also wird das Glied RdL die Wirkung verschiedener Kräfte ausdrücken können, die

$$= R \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]}$$

$$R \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right]} \text{ etc.}$$

sind, und die an die Körper angebracht sind, wozu die Coordinaten x', y', z, x'', y'', z'' etc. gehören nach den senkrechten Directionen auf verschiedene krumme Flächen, die durch die Gleichung $dL =$ vorgestellt wird, wenn man zuerst x', y', z' und hernach x'', y'', z'' als veränderlich annimmt u. s. w.

8) Hieraus ergibt sich, daß jede Bedingungsgleichung zu einer oder mehreren Kräften gehört, die am System nach gegebenen Directionen angebracht sind, so daß dasselbe im Gleichgewicht bleiben wird, man mag nun entweder auf diese Kräfte, oder auf die Bedingungsgleichungen Rücksicht nehmen.

Gegentheils können diese Kräfte statt den Bedingungsgleichungen dienen, die aus der Natur des gegebenen Systems herfließen, so daß wenn man diese Kräfte anwendet, man die Körper als ganz frey und ohne eine Verbindung unter einander ansehen kann. Und hieraus ersieht man den metaphysischen Grund, warum die Einführung der Glieder $RdL + \mu dM +$ etc. in die allgemeine Gleichung fürs Gleichgewicht macht, daß man hernach diese Gleichung so behandeln kann, als wenn alle Körper des Systems völlig frey wären, worinn dann der Geist der gegenwärtigen Methode besteht.

Um eigentlicher zu reden, so vertreten die genannten Kräfte die Stelle der Widerstände, die die Körper wegen ihrer gegenseitigen Verbindung erleiden müßten oder der Hindernisse, die nach der Natur des Systems ihrer Bewegung sich entgegensetzen könnten, oder vielmehr diese Kräfte sind nichts anders als die Kräfte dieser Widerstände selbst, die einander gleich und dem von den Körpern verübten Druck gerade entgegen sind.

Unsre

Unsre Methode giebt, wie man sieht, das Mittel an die Hand, diese Kräfte und Widerstände zu bestimmen, und dies ist nicht ein geringer Vorzug derselben vor andern.

9) Bisher haben wir die Körper nur als Punkte betrachtet, und gesehen, wie man die Gesetze des Gleichgewichts dieser Punkte bestimmt, ihre Anzahl mag auch so groß seyn, und die Kräfte die auf sie wirken von einer Beschaffenheit seyn, wie sie wollen. Ein Körper von einem gewissen Volumen und Figur aber ist nichts anders als die Vereinigung unzähliger materieller Theile oder Punkte, und man sieht also hieraus, daß man durch Anwendung der vorhergehenden Grundsätze auch die Gesetze des Gleichgewichts für Körper von einer gewissen Figur bestimmen kann.

In der That besteht die gewöhnliche Art mechanische Aufgaben, die Körper von endlichen Massen betreffen, aufzulösen, darin, daß man anfangs nur eine gewisse Anzahl von Punkten, die in endlichen Entfernungen sich von einander befinden, betrachtet und die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung derselben aufsucht; hierauf aber diese Untersuchung auf eine unbestimmte Anzahl von Punkten erstreckt, und endlich gar die Anzahl dieser Punkte unendlich groß, ihre Entfernungen von einander aber zugleich unendlich klein, annimmt, zugleich aber auch die für eine endliche Anzahl von Punkten gefundene Formeln gehörig verändert, sowie es der Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen erfordert.

Dies Verfahren ist wie man sieht den geometrischen und analytischen Methoden gleich, die der Infinitesimal-Rechnung vorher giengen, und hat dieser Calcul vor andern den Vorzug auf eine erstaunenswürdige Art die Auflösung der Aufgaben, die die krummen Linien betreffen, zu erleichtern und zu vereinfachen; so besteht derselbe nur darin, daß er die krummen Linien als wirklich krumm betrachtet, ohne nöthig zu haben sie zuerst als Polygone, und dann erst als krumm anzusehen. Fast denselben Vortheil hat man also bey der Behandlung mechanischer Aufgaben, wenn man eine direkte Auflösung verlangt und sogleich die Körper, die endliche Massen haben, als eine Vereinigung von einer unendlichen Menge von Punkten oder Körperchen betrachtet, wovon auf jedes gewisse gegebene Kräfte

würken. Durch diese Betrachtung ist nichts leichter als die eben vorhin vorgetrugene allgemeine Methode zu vereinfachen und zu verändern.

10) Man bemerke aber ja vor allen andern, daß bey der Anwendung dieser Methode auf Körper von einer endlichen Masse, wovon jeder Punkt durch gewisse Kräfte getrieben wird, zwei Arten von Differentialgrößen vorkommen, die man ja gut zu unterscheiden hat. Die einen beziehen sich auf die verschiedenen Punkte, die die Körper ausmachen; die andern hängen gar nicht von der gegenseitigen Lage dieser Punkte ab, sondern stellen nur die unendlich kleinen Räume vor, die jeder Punkt beschreiben kann; indem man seht, die Lage des Körpers erleide eine unendlich kleine Veränderung.

Wir hatten bisher nur Differentialien von dieser letztern Art zu betrachten, und sie durch das gewöhnliche Zeichen d angezeigt; jezt aber müssen wir zugleich auf zwei Arten von Differentialien sehen, und daher noch ein neues Zeichen einführen; wir wollen daher durch d ins künftige Differentialgrößen von der erstern Art andeuten, die mit denen übereinkommen, welche man gewöhnlich in der Geometrie betrachtet, die Differentialgrößen von der 2ten Art aber, die dem Gegenstand, den wir hier abhandeln, eigen sind, wollen wir durch δ andeuten, welches Zeichens wir uns ehemals schon bey dem Variations-Calcul bedient haben, womit der gegenwärtige ganz übereinkommen muß.

Eben aus dieser Ursache wollen wir auch die Differentialgrößen die durch δ angedeutet werden, Variationen nennen, Differentialien aber sollen diejenigen heißen, deren Kennzeichen d ist; übrigens werden dieselben Formeln, die die gewöhnlichen Differentialien geben, auch die Variationen geben, wenn man nur statt d , δ substituirt.

11) Zulezt bemerke ich noch, daß man anstatt eine gegebene Masse als eine unendliche Menge von Punkten zu betrachten, wovon einer immer auf den andern folgt, nach dem Geist der Infinitesimalrechnung sie vielmehr als aus unendlich kleinen Elementen zusammengesetzt sich vorstellen kann, die von derselben Dimension als die ganze Masse selbst seyen. Um nun die Kräfte zu erhalten, die auf jedes dieser Elemente würken; so muß

muß man die Kräfte P, Q, R etc., die man auf jeden Punkt dieser Elemente angebracht seht, und die man als mit denen analog ansieht, die von der Wirkung der Schwere entstehen, mit diesen Elementen selbst multipliciren.

12) Nennen wir daher m die ganze Masse, dm einen ihrer Elemente; so drücken Pdm, Qdm, Rdm etc. die Kräfte aus, die auf's Element dm wirken, nach den Direktionen der Linien p, q, r etc. Multiplicirt man daher wiederum diese Kräfte durch die Variationen dp, dq, dr etc.; so erhält man ihre Momente, deren Summe für jedes Element dm durch die Formel

$(Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}) dm$ ausgedrückt werden können. Um nun die Summe der Momente aller Kräfte des Systems zu erhalten, braucht man nur diese Formel mit Rücksicht auf die ganze gegebene Masse zu integriren.

Diese ganzen Integrale d. h. in Ansehung des Umfangs der ganzen Masse, wollen wir durch den großen Buchstaben S andeuten, das gewöhnliche Zeichen I aber dazu gebrauchen, die einzelnen und unbestimmten Integrale dadurch anzuzeigen.

13) Auf diese Art erhalten wir für die Summe der Momente aller Kräfte des Systems die Integralsformel:

$$S (Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}) dm;$$

und diese Größe müsse überhaupt $= 0$ im Zustande des Gleichgewichts seyn.

Nach der Natur des Systems aber giebt es nothwendig gegebene Verhältnisse zwischen den verschiedenen Variationen dp, dq, dr etc., die sich auf jeden Punkt der Masse beziehen; man muß sie daher auf eine gewisse Anzahl von unabhängigen und unbestimmten Variationen bringen; alsdann werden die durch diese letztern Variationen multiplicirte Glieder $= 0$ seyn, und man bekömmt auf diese Art die einzelnen Gleichungen für's Gleichgewicht. Diese Reduktionen aber können oft sehr verwickelt

seyn; man muß sie daher vermittelst der Methode, die wir in diesem Abschnitte gegeben haben, zu vermeiden suchen.

14) Um diese Methode aber auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden, wollen wir annehmen, $L = 0$, $M = 0$ etc. seyen die Bedingungsgleichungen, die nach der Natur der Aufgabe statt finden müssen in Ansehung jedes Punktes der Masse, und wir wollen sie unbestimmte Bedingungsgleichungen nennen.

Differentiirt man diese Gleichungen nach dem Zeichen δ so erhält man diese: $\delta L = 0$, $\delta M = 0$, etc. Man multiplicire die Größen δL , δM etc. durch die unbestimmten Größen R_μ etc.; und nehme das ganze Integrael davon, welches ist

$$S (R \delta L + \mu \delta M + \text{etc.});$$

man addire hierauf dieses Integrale zu dem des vorhergehenden Artikels; so bekommt man die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht.

Uebrigens ist zu bemerken, daß es nicht nothwendig ist, daß δL , δM etc. vollkommene Variationen der Funktionen x , y , z , dx , dy , etc. sind, sondern, daß es genug ist, wenn nur $\delta L = 0$, $\delta M = 0$ etc. die unbestimmten Bedingungsgleichungen zwischen den Variationen von x , y , z , dx , dy etc. (3) sind.

15) Um aber die Sache so allgemein als möglich zu machen; so bemerke man, daß es gar wohl möglich ist, daß auffer den Kräften, die überhaupt auf alle Punkte der Masse wirken, einige noch vorhanden seyen, die nur auf bestimmte Punkte dieser Masse wirken, und diese Punkte sind gewöhnlich diejenigen, die sich an den Enden der gegebenen Masse befinden, d. h. die im Anfang und am Ende des mit S bezeichneten Integrals sind.

Auf gleiche Art können auch einzelne Bedingungsgleichungen dieser Punkte statt finden, und diese wollen wir bestimmte Bedingungsgleichungen nennen, um sie von denen zu unterscheiden, die bei dem ganzen Umfange der Masse überhaupt statt finden, und wir wollen sie durch $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, etc. oder vielmehr durch $SA = 0$, $SB = 0$, $SC = 0$, etc. bezeichnen.

Wir

Wir wollen mit einem kleinen Strich oder mit zweien dreien, etc. alle Größen andeuten, die sich auf bestimmte Punkte der Masse beziehen, und insbesondere wollen wir durch einen Strich diejenigen anzeigen, die sich auf den Anfang des durch S bezeichneten Integrals beziehen, mit zweien Strichen aber diejenigen, die sich auf's Ende dieses Integrals beziehen, mit dreien und mehrern, die zu den dazwischen liegenden Punkten gehören.

Man muß also zum Integrale S ($P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$) dm die Größe $P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \text{etc.} + P''\delta p'' + Q''\delta q'' + R''\delta r'' + \text{etc.}$ hinzuaddiren, und zum Integrale S ($\lambda\delta L + \mu\delta M + \text{etc.}$) die Größe $\alpha\delta A + \beta\delta B + \gamma\delta C + \text{etc.}$

Auf diese Art erhält die allgemeine Formel für's Gleichgewicht folgende Form:

$$S (P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}) dm + S (\lambda\delta L + \mu\delta M + \text{etc.}) + P'\delta p' + Q'\delta q' + R'\delta r' + \text{etc.} + P''\delta p'' + Q''\delta q'' + R''\delta r'' + \text{etc.} + \alpha\delta A + \beta\delta B + \gamma\delta C + \text{etc.} = 0.$$

16) Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe von $\delta p, \delta q, \delta r,$ etc.; $\delta L, \delta M,$ etc. in $\delta x, \delta y, \delta z, \delta dx, \delta dy,$ etc., eben so wie die von $\delta p', \delta p'', \text{etc.}; \delta q', \delta q'', \text{etc.}, \delta A, \delta B,$ etc. in $x', x'', \text{etc.}, dx', dx'', \delta x'', \text{etc.}, \delta dx', \text{etc.},$ die aus einzelnen Umständen jeder Aufgabe hergeleitet werden; so erhält man allezeit eine Form, die denen, die der Variations-Calcul zur Bestimmung der maxima und minima der Integralformeln giebt, analog ist; man hat also nur die bekannten Regeln dieses Calculs hier anzuwenden. Man wird daher erwägen, daß, da die Zeichen d und δ zwei Arten von Differentialgrößen andeuten, die völlig von einander unabhängig sind, es einerley auch ist, wenn sie sich zusammen befinden, in welcher Ordnung sie genommen werden, denn wenn man annimmt, ein Größe leide auf zwei ganz verschiedene Arten eine Veränderung; so bekommt man stets dasselbe Resultat, man mag diese Ver-

änder

Änderungen in einer Ordnung nehmen als man will. Also wird $\delta dx = d\delta x$ und $d^2 \delta x = \delta d^2 x$ *) u. f. w.

Man kann also jederzeit nach Gefallen die Ordnung dieser Zeichen verändern, ohne doch den Werth der Differentialgrößen zu verändern; für unsre Absicht wird es aber thunlicher seyn, das Zeichen d vor δ zu setzen, damit die vorgegebene Gleichung nur Variationen der Coordinaten und die Differentialien derselben enthalte. Hierinn besteht der erste Fundamentalsatz des Variations-Calculus.

17) Die Differentialien δdx , δdy , δdz , $d^2 \delta x$, etc., die sich unter dem Zeichen S befinden, können aber durch das bekannte Verfahren der partiellen Integrationen weggeschafft werden; denn es ist allgemein

$$S \Omega d \delta x = \Omega \delta x - S \delta x d \Omega,$$

$$S \Omega d^2 \delta x = \Omega d \delta x - d \Omega \delta x + S \delta x d^2 \Omega \text{ u. f. f.}$$

wo zu bemerken ist, daß die ausserhalb des Zeichens S sich befindenden Größen natürlich zu den letzten Punkten der Integralien gehören, aber daß man um diese Integralien vollkommen zu machen, nothwendig die Werthe eben dieser Größen ausserhalb des Zeichens, die zu den ersten Punkten der Integralien gehören, davon abziehen muß, damit alles in diesen Punkten verschwinde; welches aus der Theorie der Integrationen klar ist.

Bezeichnet man also mit einem Strich die Größen die sich auf den Anfang der ganzen durch S bezeichneten Integralien beziehen, und durch zwei Striche diejenigen, die sich auf das Ende derselben beziehen; so hat man folgende Reduktionen:

$$S \Omega d \delta x = \Omega'' \delta x'' - \Omega' \delta x' - S \delta x d \Omega$$

$$S \Omega d^2 \delta x = \Omega'' d \delta x'' - d \Omega'' \delta x'' - \Omega' d \delta x'$$

$$+ d \Omega' \delta x' + S \delta x d^2 \Omega \text{ etc.}$$

und diese können dazu dienen, alle Differentialien wegzuschaffen, die sich unter

*) Im Französischen steht hier wieder $d^2 \delta x$, ein Beweis, daß das Original nicht ganz von Druck- oder Schreibfehlern frey ist. 17.

unter dem Zeichen S befinden. Diese Reduktionen machen den 2ten Fundamentalsatz des Variations-Calculus aus.

18) Auf diese Art wird also die allgemeine Formel für's Gleichgewicht auf folgende Form gebracht:

$$S(\Pi \delta x + \Sigma \delta y + \Psi \delta z) + \Delta = 0$$

wo Π , Σ , Ψ Funktionen von x , y , z und ihren Differentialen sind, und wo Δ die Glieder enthält, worinn $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, etc. und ihre Differentialien vorkommen.

Damit also diese Gleichung statt finde, und zwar unabhängig von den Variationen der verschiedenen Coordinaten; so müssen erstlich Π , Σ , $\Psi = 0$ nach dem ganzen Umfang des Integrals S , d. h. in jedem Punkte der Masse seyn. Zweitens aber muß auch jedes Glied von $\Delta = 0$ seyn.

Die unbestimmten Gleichungen $\Pi = 0$, $\Sigma = 0$, $\Psi = 0$, werden überhaupt das Verhältniß geben, das zwischen den veränderlichen Größen x , y , z ; Platz finden muß; aber alsdann müßte man die unbestimmten veränderlichen Größen λ , μ , ν , etc., deren Anzahl eben so groß ist, als die der unbestimmten Bedingungsgleichungen $L = 0$, $M = 0$, etc. (14), daraus wegschaffen.

Sch bemerke aber, daß die Zahl dieser Gleichungen nicht über drei steigen darf, denn da es die unbestimmten Gleichungen zwischen den 3 veränderlichen Größen x , y , z und ihren Differentialien seyn sollen; so ist klar, daß wenn ihrer mehr wie 3 wären, man mehrere Gleichungen als veränderliche Größen hätte, und alsdann müßte die 4te eine nothwendige Folge aus den 3 erstern seyn, und so auch mit den andern. Nie werden also mehr wie 3 unbestimmte Größen λ , μ , ν , wegzuschaffen seyn; so daß man allezeit die Werthe dieser unbestimmten Größen in Funktionen von x , y , z finden kann.

Uebrigens werden die Gleichungen, die durch diese Wegschaffungen verschwinden, durch die Bedingungsgleichungen selbst wieder ersetzt werden, und durch dies Mittel kann man jederzeit die Werthe von x , y , z erhalten, die bey'm Gleichgewicht des ganzen Systems statt finden müssen.

In Ansehung der andern Gleichungen, die von den verschiedenen Stellen der Größe Δ herkommen, müssen nur einzelne Gleichungen bei bestimmten Punkten der Masse statt finden, die vorzüglich dazu dienen, die beliebigen beständigen Größen zu bestimmen, die die Ausdrücke von x, y, z die aus den vorhergehenden Gleichungen hergeleitet sind, enthalten können. Um Gebrauch von diesen Gleichungen zu machen, so substituirt man darinn die gefundenen Werthe von λ, μ , etc., schaffe hierauf die unbestimmten Größen α, β , etc. weg, und verbinde damit die Bedingungsgleichungen $A = 0, B = 0$, etc., die dazu dienen werden, die Stelle derselben zu ersehen, die die eben genaunte Wegschaffung der unbestimmten Größen, verschwinden gemacht hat.

19) Endlich ist hier in Ansehung der rechtwinklichten Coordinaten dieselbe Anmerkung zu machen, die wir schon am Ende des 2ten Abschnitts gemacht haben, indem man auf die Variationen dx, dy, dz , das anwendet, was wir in Ansehung der Differentialien dx, dy, dz gesagt haben; was aber diese letztern hier anbetriefft, so ist es nicht erlaubt, an ihre Stelle andere Differentialien zu setzen, es sey denn, daß sie von der Differentiation der endlichen Ausdrücke von x, y, z herkommen.

Fünfter Abschnitt.

Auflösung verschiedener statischen Aufgaben.

Wir wollen nun den Gebrauch unserer Methoden in verschiedenen Aufgaben über das Gleichgewicht der Körper zeigen; man wird aus der Einfachheit und der Schnelligkeit, wodurch sie zur Auflösung führen, leicht erkennen, wie sehr sie denen vorzuziehen sind, die man bisher in der Statik gebraucht hat.

§. I.

Ueber das Gleichgewicht mehrerer auf einem Punkt angebrachten Kräfte und von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

1) Gesezt man wollte die Geseze des Gleichgewichts von soviel Kräften, als man will, $P, Q, R,$ etc. finden, wenn alle auf einem Punkt angebracht sind, und nach gegebenen Punkten ihre Richtungen haben.

Nennt man $p, q, r,$ etc. die geradlinigten Entfernungen zwischen dem gemeinschaftlichen Punkt, wo diese Kräfte angebracht sind, und den Punkten, wornach sie ihre Richtungen haben; so erhält man die Formel

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.},$$

für die Summe der Momente aller Kräfte, und diese muß im Zustande des Gleichgewichts $= 0$ seyn.

2) Es seyen $x, y, z,$ die 3 rechtwinklichten Coordinaten des Punkts, worauf alle Kräfte angebracht sind; ferner $a, b, c,$ die rechtwinklichten Coordinaten für den Punkt, wohin die Kraft P ihre Richtung hat; $f, g, h,$ diejenigen des Punkts, wohin die Kraft Q ; $l, m, n,$ aber diejenigen wohin die Kraft R ihre Richtung hat u. s. f. Beziehet man nun diese Coordinaten alle auf dieselben festen Achsen im Raume; so erhält man

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$q = \sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2}$$

$$r = \sqrt{(x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2}$$

etc.

und die Größe $Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ verwandelt sich in folgende:

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

worin

$$X = \frac{x-a}{p} P + \frac{x-f}{q} Q + \frac{x-l}{r} R + \text{etc.}$$

$$Y = \frac{y-b}{p} P + \frac{y-g}{q} Q + \frac{y-m}{r} R + \text{etc.}$$

$$Z = \frac{z-c}{p} P + \frac{z-h}{q} Q + \frac{z-n}{r} R + \text{etc.}$$

Es ist nicht unnütz zu bemerken, daß in diesen Ausdrückungen die Größen $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ den Cosinussen der Winkel gleich sind, die die Linie p d. h. die Direction der Kraft P mit den Achsen der x , y , z macht; daß ferner $\frac{x-f}{q}$, $\frac{y-g}{q}$, $\frac{z-h}{q}$ den Cosinussen der Winkel gleich ist, die die Direction der Kraft Q mit eben diesen Achsen bildet u. s. f. (2 Abschn. S. 7.)

3) Dies vorausgesetzt wollen wir zuerst annehmen, der Körper oder Punkt, auf dem die Kräfte P , Q , R , etc. angebracht sind, sey völlig frey; alsdann wird gar keine Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten x , y , z statt finden; und die Größe $Xdx + Ydy + Zdz$ wird $= 0$ seyn müssen
unab

unabhängig von den Werthen von dx , dy , dz (2 Abschn. 9); dies giebt sogleich

$$X = 0, y = 0, Z = 0,$$

diese Gleichungen schliessen also die Gesetze des Gleichgewichts von so vielen Kräften in sich ein, als man will, die alle von einem Punkt ausgehen.

4) Setzt man in den Ausdrücken von X , Y , Z , $P = p$, $Q = q$, $R = r$ (welches hier geschehen kann, weil es gleichgültig ist, auf welche Punkte man annimmt, daß sie wirken, wenn sie nur in den Richtungen der Kräfte liegen); so bekommt man folgende Gleichungen:

$$x - a + x - f + x - l + \text{etc.} = 0$$

$$y - b + y - g + y - m + \text{etc.} = 0$$

$$z - c + z - h + z - n + \text{etc.} = 0$$

woraus man zieht, wenn man annimmt die Zahl der Kräfte P , Q , R , etc. sey $= \mu$:

$$x = \frac{a + f + l + \text{etc.}}{\mu}$$

$$y = \frac{b + g + m + \text{etc.}}{\mu}$$

$$z = \frac{c + h + n + \text{etc.}}{\mu}$$

und diese Ausdrücke von x , y , z , zeigen, daß der Punkt, worauf die Kräfte angebracht sind, in den Schwerpunkt der Punkte, worauf diese Kräfte wirken, fällt.

Hieraus folgt denn Leibnizens Lehrsatz, daß, wenn soviel Kräfte als man will in einem Punkte im Gleichgewicht sind, und man zieht von diesem Punkte gerade Linien, die sowohl die Größe als Richtung jeder Kraft andeuten; so ist dieser Punkt der Schwerpunkt aller Punkte, worinn diese Linien sich endigen.

Sind daher nur vier Kräfte vorhanden, und man stellt sich eine Pyramide vor, deren vier Winkel in den Enden der geraden Linien seyen, die die Kräfte vorstellen; so wird ein Gleichgewicht zwischen diesen 4 Kräften statt finden, wenn der Punkt, worauf sie wirken, im Schwerpunkte der Pyramide ist; denn aus der Geometrie weiß man, daß der Schwerpunkt jeder Pyramide mit dem von 4 Körpern zusammenfällt, die einander gleich und in den 4 Winkeln derselben gesetzt sind. Man verdankt dieses letztere Theorem dem Roberval.

5) Betrachtet man die Gleichung

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} - Xdx - Ydy - Zdz = 0$$

welche mit (2) einerley ist, und folglich allgemein statt finden muß, die Differentialien dx , dy , dz mögen auch beschaffen seyn, wie sie wollen; so ist klar, daß man sie als die Gleichung für's Gleichgewicht zwischen den Kräften P , Q , R , etc. ansehen kann, die nach den Linien p , q , r ihre Richtungen haben, und den Kräften X , Y , Z , deren Richtungen die Linien $-x$, $-y$, $-z$ sind, wenn man annimmt, daß alle diese Kräfte auf ein und denselben Punkt angebracht sind. Die 3 Kräfte X , Y , Z sind also im Gleichgewicht mit den Kräften P , Q , R , etc.; allein es ist klar, daß die Kräfte X , Y , Z , wenn ihre Richtungen die Linien x , y , z sind, mit eben diesen Kräften X , Y , Z im Gleichgewicht seyn werden, wenn ihre Richtungen die Linien $-x$, $-y$, $-z$ sind; folglich werden werden auch diese mit den Kräften P , Q , R , etc. im Gleichgewicht seyn. Hieraus folgt, daß die Größen X , Y , Z nichts anders als die Werthe der Kräfte P , Q , R , etc. sind, die auf die Direktionen der 3 rechtwinklichten Coordinaten gebracht sind, und die diese Coordinaten zu verkleinern trachten. Die Formeln (2) geben also ein sehr einfaches Mittel an die Hand, diese Reduktion zu bewerkstelligen, d. h. die Resultate von soviel Kräften als man will, die in einem Punkt zusammentreffen und die gewisse Direktionen haben.

6) Ueberhaupt wenn gewisse Kräfte P , Q , R , etc., deren Richtungen die Linien p , q , r , etc. sind, auf ein und eben denselben Punkt wirken, und man will alle diese Kräfte auf drei andere bringen, Ξ , Π , Σ , deren Richtungen die Linien ζ , π , σ seyn sollen; so hat man nur das Gleichgewicht

gewicht der Kräfte $P, Q, R, \text{etc.}$ und Ξ, Π, Σ , die auf demselben Punkt angebracht sind, und nach den Linien $p, q, r, \text{etc.}$, $\Omega, \zeta, -\pi, -\sigma$ ihre Richtungen haben, zu betrachten; hierdurch wird man dann die Gleichung erhalten:

$$Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.} - \Xi d\zeta - \Pi d\pi - \Sigma d\sigma = 0$$

welche statt finden muß, auf welche Art man auch die Lage des Punktes, wo alle Kräfte zusammentreffen, verändere. Die ζ, π, σ mögen nun aber beschaffen seyn, wie sie wollen; so ist klar, daß, indem sie sich nicht alle in einer Ebene befinden, sie dazu hinreichen, die Lage dieses Punktes zu bestimmen; man kann folglich allezeit die Linien $p, q, r, \text{etc.}$ durch Funktionen von ζ, π, σ ausdrücken, und die vorhergehende Gleichung wird in Ansehung der Variationen jeder dieser 3 Größen besonders statt finden; man wird also haben:

$$\Xi = P \frac{dp}{d\zeta} + Q \frac{dq}{d\zeta} + R \frac{dr}{d\zeta} + \text{etc.}$$

$$\Pi = P \frac{dp}{d\pi} + Q \frac{dq}{d\pi} + R \frac{dr}{d\pi} + \text{etc.}$$

$$\Sigma = P \frac{dp}{d\sigma} + Q \frac{dq}{d\sigma} + R \frac{dr}{d\sigma} + \text{etc.}$$

Diese Formeln können in mehrern Fällen von großem Nutzen seyn, besonders wenn man die Resultate von einer unendlichen Menge von Kräften zu suchen hat, die auf einen Punkt wirken, sowie die Anziehung eines Körpers von einer gewissen Figur etc.

7) Verlangt man, daß die Direktionen der Kräfte durch gegebene Punkte gehen, und man nennt α, β, γ die rechtwinklichten Coordinaten des Punktes, worauf die Kraft Ξ wirken soll, ferner ϵ, ζ, η und λ, μ, ν die rechtwinklichten Coordinaten der Punkte, worauf die Kräfte Π und Σ wirken; so wird man machen

$$\zeta = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}$$

$$\pi = \sqrt{(x - \epsilon)^2 + (y - \zeta)^2 + (z - \eta)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{(x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2 + (z - \nu)^2}$$

Ans

Aus diesen Gleichungen ziehe man denn die Werthe von x, y, z , in ζ, π, σ und substituire diese hierauf in den Ausdrücken von p, q, r , etc. (2).

Man könnte auch die Größen p, q, r , etc. ζ, π, σ als Funktionen von x, y, z gleich ansehen, und indem man jede dieser 3 Größen besonders eine Veränderung erleiden läßt; so erhält man diese Gleichungen:

$$\text{I} \quad \frac{d\zeta}{dx} + \Pi \frac{d\pi}{dx} + \Sigma \frac{d\sigma}{dx} = P \frac{dp}{dx} + Q \frac{dq}{dx} + R \frac{dr}{dx} + \text{etc.}$$

$$\text{II} \quad \frac{d\zeta}{dy} + \Pi \frac{d\pi}{dy} + \Sigma \frac{d\sigma}{dy} = P \frac{dp}{dy} + Q \frac{dq}{dy} + R \frac{dr}{dy} + \text{etc.}$$

$$\text{III} \quad \frac{d\zeta}{dz} + \Pi \frac{d\pi}{dz} + \Sigma \frac{d\sigma}{dz} = P \frac{dp}{dz} + Q \frac{dq}{dz} + R \frac{dr}{dz} + \text{etc.}$$

wodurch man die 3 Kräfte Ξ, Π, Σ , kennen lernt.

Sollte die Kraft Ξ wie vorhin nach einem gewissen festen Punkt gerichtet seyn, die beiden andern Kräfte Π und Σ aber in gegebenen Ebenen auf diese senkrecht stehen; so könnte man statt π und σ , die Bogen eines Kreises nehmen, der mit dem Radius ζ in den eben genannten Ebenen beschrieben ist; man sieht daher die gerade Linie ζ als einen Radius Vector an, und es ist klar, daß, wenn man ψ, ϕ die Winkel nennt, die dieser Radius mit den auf den gegebenen senkrechten Ebenen macht, man erhält $d\pi = \zeta d\psi$, $d\sigma = \zeta d\phi$. Sonst könnte man allezeit durch die 3 veränderlichen Größen ζ, ψ und ϕ die Lage des Punktes bestimmen, worauf die Kräfte angebracht sind; Man kann also die Linien p, q, r , etc. durch Funktionen eben dieser veränderlichen Größen ausdrücken; denn man hat alsdann nur die rechtwinklichten Coordinaten x, y, z in ζ, ψ, ϕ auszudrücken und hernach diese Ausdrücke in die von p, q, r , etc. zu substituiren.

Betrachtet man daher die Größen ζ, ψ und ϕ als veränderlich; so erhält man folgende 3 Gleichungen:

$\Xi =$

$$\Xi = P \frac{dp}{dz} + Q \frac{dq}{dz} + R \frac{dr}{dz} + \text{etc.}$$

$$\Pi = P \frac{dp}{z d\psi} + Q \frac{dq}{z d\psi} + R \frac{dr}{z d\psi} + \text{etc.}$$

$$\Sigma = P \frac{dp}{z d\phi} + Q \frac{dq}{z d\phi} + R \frac{dr}{z d\phi} + \text{etc.}$$

Hieraus sieht man, wie man in allen ähnlichen Fällen verfahren muß, und wie sehr die vorhergehende Methode dazu dient, die Resultate von soviel Kräften als man nur will zu finden, und sie auf gegebene Direktionen zu bringen.

8) Wir wollen nun die Formeln (2) wieder vornehmen und zweitens annehmen, der Körper oder Punkt, worauf die Kräfte P, Q, R, etc. wirken, sey nicht ganz frey, sondern er sey gezwungen, sich auf einer gegebenen Oberfläche oder Linie zu bewegen; man erhält alsdann zwischen den Coordinaten x, y, z, eine oder zwey Bedingungsleichungen, die nichts anders als die Gleichungen der genannten Fläche oder Linie selbst sind.

Es sey daher $L = 0$ die Gleichung für die Fläche, worauf der Körper nur herabrutschen kann; man addire zur Summe der Momente der Kräfte $Xdx + Ydy + Zdz$ das Glied λdL (4 Abschn. S. 4. 5.); so bekommt man zur allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht:

$$Xdx + Ydy + Zdz + \lambda dL = 0$$

wo λ eine unbestimmte Größe ist.

L aber ist eine bekannte Funktion von x, y, z, man erhält daher durch die Differentiation:

$$dL = \frac{dL}{dx} dx + \frac{dL}{dy} dy + \frac{dL}{dz} dz;$$

Verrichtet man nun die gehörigen Substitutionen, und setzt hernach immer jede Summe der Glieder, wovon jedes durch eine der Differentialgrößen

stälgrößen dx , dy , dz , multiplieirt ist $= 0$; so erhält man folgende 3 besondere Gleichungen für's Gleichgewicht:

$$X + \lambda \frac{dL}{dx} = 0,$$

$$Y + \lambda \frac{dL}{dy} = 0,$$

$$Z + \lambda \frac{dL}{dz} = 0.$$

Bringt man hieraus die unbestimmte Größe λ weg; so hat man diese beiden Gleichungen:

$$Y \frac{dL}{dx} - X \frac{dL}{dy} = 0$$

$$Z \frac{dL}{dx} - X \frac{dL}{dz} = 0$$

welche folglich die gesuchten Bedingungen für's Gleichgewicht des Körpers auf der vorgegebenen Oberfläche enthalten.

9) Wendet man nun hier die im 4ten Abschn. Art. 7. vorgetragene Theorie an; so wird man hieraus den Schluß ziehen, daß die Fläche dem Körper einen Widerstand entgegenseßen wird,

$$\text{der} = \lambda \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]}$$

ist und dessen Richtung die auf der Fläche senkrechte Linie ist, deren Gleichung $dL = 0$ ist, d. h. die senkrecht auf derselben Fläche ist, worauf der Körper gesetzt ist; man hat aber (8)

$$\lambda \frac{dL}{dx} = -X,$$

$$\lambda \frac{dL}{dy} = -Y,$$

$$\lambda \frac{dL}{dz} = -Z$$

folglich ist der Druck des Körpers auf die Fläche (welcher allezeit gleich und gerade entgegengesetzt dem Widerstand der Fläche seyn muß) $= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ und seine Richtung ist senkrecht auf diese Fläche. Nur unter dieser Bedingung können die zwei vorhin gefundenen Gleichungen für's Gleichgewicht des Körpers statt finden; wie man sich durch die Methode der Zusammensetzung der Kräfte versichern kann.

10) Uebrigens findet man in dem Falle, daß nur ein Körper durch gegebene Kräfte gezogen werde, noch einfacher die Bedingungen des Gleichgewichts. Denn substituirt man sogleich in der Gleichung $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ an die Stelle des Differentialis dz dessen Werth

$$-\frac{\frac{dL}{dx} dx + \frac{dL}{dy} dy}{\frac{dL}{dz}},$$

welchen man aus der Differentialgleichung

der gegebenen Fläche, worauf der Körper wegrutschen kann, gezogen hat, und man setzt nun die Coefficienten der Differentialien dx und dy , die unbestimmt sind, nach der allgemeinen Methode (2 Abschn. 10.) $= 0$; so hat man sogleich die 2 Gleichungen:

$$X - Z \frac{\frac{dL}{dx}}{\frac{dL}{dz}} = 0$$

$$Y - Z \frac{\frac{dL}{dy}}{\frac{dL}{dz}} = 0$$

Die mit denen oben gefundenen (8) übereinkommen.

Eben so wäre der Körper gezwungen, sich auf einer Linie von einer gegebenen Figur, deren Gleichungen $dy = pdx$, $dz = qdx$ wären, zu bewegen; so hätte man nur diese Werthe von dy und dz in die allgemeine Gleichung $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ zu substituiren, und man erhielte, nachdem man mit dx dividirt hat:

$$X + Yp + Zq = 0$$

für die Bedingung des Gleichgewichts.

Aber in allen Fällen, wo mehrere Körper im Gleichgewicht sind, wird die Methode der unbestimmten Coefficienten (4 Abschn.) immer den Vorzug sowohl wegen der Leichtigkeit als Einfachheit und Gleichförmigkeit des Calculs haben.

§. II.

Vom Gleichgewicht mehrerer bey einem System von Körpern, die als Punkte betrachtet werden, und durch Fäden oder Stangen unter einander verbunden sind, angebrachten Kräfte.

11) Die auf jeden Körper wirkende Kräfte mögen auch beschaffen seyn, wie sie wollen; so haben wir oben (2, 5) gesehen, wie man sie immer auf 3 X, Y, Z bringen kann, deren Richtungen die 3 rechtwinklichten Coordinaten x, y, z , eben dieses Körpers sind, und die diese Coordinaten zu verkleinern streben. Wir wollen daher um mehrerer Einfachheit hier und in der Folge immer voraussetzen, daß alle auf einen Punkt wirkende äussere Kräfte auf 3, X, Y, Z gebracht seyen. Die Summe der Momente dieser Kräfte wird also jederzeit durch die Formel $Xdx + Ydy + Zdz$ ausgedrückt; folglich wird die Summe der Momente aller Kräfte des Systems durch die Summe von so vielen ähnlichen Formeln ausgedrückt, als bewegliche Körper oder Punkte vorhanden sind, indem man durch ein, zwei, drei u. m. Striche die Größen bezeichnet, die sich auf die verschiedenen Körper, die wir mit den Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. bezeichnen wollen, beziehen.

Auf diese Art erhält man für die Summe der Momente der Kräfte, die auf 3 oder auf eine noch größere Anzahl von Körpern wirken die Größe:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' \\ + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \text{etc.}$$

Man hat daher nur noch die Bedingungsgleichungen $L=0$, $M=0$, $N=0$, etc., die aus der Natur der Aufgabe folgen, zu suchen.

Da man L , M , N , etc. oder nur ihre Differentialien in Funktionen von x' , y' , z' , x'' etc. hat, und man nimmt die unbestimmten Coefficienten λ , μ , ν , etc. an; so hat man zur vorhergehenden Größe die Glieder $\lambda dL + \mu dM + \nu dN + \text{etc.}$ zu addiren, und hierauf die Glieder, worin jede der Differentialien dx' , dy' , dz' , dx'' , etc. vorkommt, einzeln $= 0$ zu setzen. (4 Abschn. 5).

12) Wir wollen zuerst 3 Körper betrachten, die fest an einen undehnbaren Faden gebunden seyen. Die Bedingungen der Aufgabe sind alsdenn, daß die Distanzen zwischen dem ersten und 2ten Körper, und zwischen dem 2ten und 3ten unveränderlich seyen, indem sie Längen der zwischen dem Körpern enthaltenen Theile des Fadens sind. Nennt man nun f die erstere dieser Distanzen, g die 2te; so sind die Bedingungsgleichungen $df=0$, $dg=0$; folglich $dL=df$; $dM=dg$ und die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht dieser drei Körper ist:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' \\ + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' \\ + \lambda df + \mu dg = 0.$$

Man siehet aber leicht, daß

$$f = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}$$

$$g = \sqrt{(x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2}$$

folglich, wenn man differentiiert:

§ 3

df =

$$df = \frac{(x'' - x') (dx'' - dx') + (y'' - y') (dy'' - dy') + (z'' - z') (dz'' - dz')}{f}$$

$$dg = \frac{(x''' - x'') (dx''' - dx'') + (y''' - y'') (dy''' - dy'') + (z''' - z'') (dz''' - dz'')}{g}$$

Substituirt man diese Werthe; (so bekommt man folgende allgemeine Gleichung als Bedingung des Gleichgewichts der 3 Körper:

$$X' dx' + Y' dy' + Z' dz' + X'' dx'' + Y'' dy'' + Z'' dz'' + X''' dx''' + Y''' dy''' + Z''' dz'''$$

$$\begin{aligned} & + \lambda \frac{(x'' - x') (dx'' - dx')}{f} + \lambda \frac{(y'' - y') (dy'' - dy')}{f} \\ & + \lambda \frac{(z'' - z') (dz'' - dz')}{f} + \mu \frac{(x''' - x'') (dx''' - dx'')}{g} \\ & + \mu \frac{(y''' - y'') (dy''' - dy'')}{g} + \mu \frac{(z''' - z'') (dz''' - dz'')}{g} \\ & = \left[X' - \lambda \frac{(x'' - x')}{f} \right] dx' + \left[Y' - \lambda \frac{(y'' - y')}{f} \right] \\ & dy' + \left[Z' - \lambda \frac{(z'' - z')}{f} \right] dz' + \left[X'' + \lambda \frac{(x'' - x')}{f} \right. \\ & \left. - \mu \frac{(x''' - x'')}{g} \right] dx'' + \left[Y'' + \lambda \frac{(y'' - y')}{f} \right. \\ & \left. - \mu \frac{(y''' - y'')}{g} \right] dy'' + \left[Z'' + \lambda \frac{(z'' - z')}{f} - \mu \frac{(z''' - z'')}{g} \right] \\ & dz'' + \left[X''' + \mu \frac{(x''' - x'')}{g} \right] dx''' + \left[Y''' + \mu \frac{(y''' - y'')}{g} \right] \\ & dy''' \end{aligned}$$

dy'''

$$dy''' + \left[Z''' + \mu \frac{(z''' - z'')}{f} \right] dz''' = 0.$$

Setzt man nun (nach Abschn. 2, 5 und Abschn. 5, II) die Glieder, deren Faktor eine der Differentialgrößen dx' , dy' , dz' , etc. ist, allemal $= 0$; M.) so bekommt man folgende 9 Gleichungen für die Bedingungen des Gleichgewichts des Fadens:

$$X' - \lambda \left(\frac{x'' - x'}{f} \right) = 0$$

$$Y' - \lambda \left(\frac{y'' - y'}{f} \right) = 0$$

$$Z' - \lambda \left(\frac{z'' - z'}{f} \right) = 0$$

$$X'' + \lambda \left(\frac{x'' - x'}{f} \right) - \mu \left(\frac{x''' - x''}{g} \right) = 0$$

$$Y'' + \lambda \left(\frac{y'' - y'}{f} \right) - \mu \left(\frac{y''' - y''}{g} \right) = 0$$

$$Z'' + \lambda \left(\frac{z'' - z'}{f} \right) - \mu \left(\frac{z''' - z''}{g} \right) = 0$$

$$X''' + \mu \left(\frac{x''' - x''}{g} \right) = 0$$

$$Y''' + \mu \left(\frac{y''' - y''}{g} \right) = 0$$

$$Z''' + \mu \left(\frac{z''' - z''}{g} \right) = 0.$$

Man hat nun also nichts weiter noch nöthig, als die beiden unbekanntenen Größen λ und μ wegzuschaffen; welches auf verschiedene Art geschehen kann, wodurch man auch verschiedene oder vielmehr unter verschiedenen

schiedener Form für's Gleichgewicht zer an einem Faden festgemachten Körper vorgestellte Gleichungen erhalten wird; wir wollen diejenige Methode wählen, die am einfachsten scheint.

Man sieht sogleich leicht ein, daß wenn man die 3 ersten Gleichungen zu den 3 folgenden addirt und eben so auch zu den 3 letzten, man diese 3 von den unbekanntnen Größen λ und μ befreit erhält; (und man bekommt folgende 3 Gleichungen. M)

$$X' + X'' + X''' = 0 \quad (\text{I.})$$

$$Y' + Y'' + Y''' = 0 \quad (\text{II.})$$

$$Z' + Z'' + Z''' = 0 \quad (\text{III.})$$

(indem alle andere Glieder sich gegen einander aufheben. M). Hieraus ersieht man also, daß die Summe aller jeder der 3 Achsen der Coordinaten parallelen Kräfte = 0 seyn muß.

Es ist nun also nur noch übrig 4 andere Gleichungen zu finden; in dieser Hinsicht addire ich, ohne mich um die 3 ersten Gleichungen zu bekümmern, die 3 mitlern zu den 3 letztern, und ich bekomme dadurch folgende, worinn μ sich nicht mehr findet:

$$X'' + X''' + \frac{\lambda}{f} (x'' - x') = 0$$

$$Y'' + Y''' + \frac{\lambda}{f} (y'' - y') = 0$$

$$Z'' + Z''' + \frac{\lambda}{f} (z'' - z') = 0$$

(Aus der erstern Gleichung ziehet man

$$\frac{\lambda}{f} = - \left(\frac{X'' + X'''}{x'' - x'} \right)$$

aus der 2ten

$$\frac{\lambda}{f} = - \left(\frac{Y'' + Y'''}{y'' - y'} \right)$$

und

und aus der 3ten

$$\frac{\lambda}{f} = - \left(\frac{Z'' + Z'''}{z'' - z'} \right)$$

Setzt man nun 2 solcher Werthe von $\frac{\lambda}{f}$ einander gleich; so erhält man wieder andere Gleichungen, worinn sich $\frac{\lambda}{f}$ nicht mehr befindet. M)

Durch die Wegschaffung von λ gelangt man also zu den 2 folgenden Gleichungen:

$$(IV.) Y'' + Y''' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (X'' + X''') = 0$$

$$(V.) Z'' + Z''' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'} (X'' + X''') = 0.$$

Betrachtet man endlich die 3 letzten Gleichungen, die μ allein enthalten, und man schafft dies μ weg; so bekommt man (durch ein dem vorigen völlig ähnliches Verfahren M), diese beiden andern Gleichungen:

$$(VI.) Y''' - \frac{y''' - y''}{x''' - x''} X''' = 0$$

$$(VII.) Z''' - \frac{z''' - z''}{x''' - x''} X''' = 0.$$

Diese sieben Gleichungen schließen alle für's Gleichgewicht der 3 Körper nöthige Bedingungen in sich ein.

13) Wäre der Faden, den wir immer als undehnbar annehmen, von 4 Körpern beschwert, die von den Kräften $X', Y', Z', X'', Y'', Z'', X'''$ etc. nach den Direktionen der drei Achsen der rechtwinklichten Coordinaten gezogen würden; so fände man durch ein dem vorigen ähnliches

R

Wer:

Verfahren, welches ich für unnöthig halte zu wiederholen, folgende 9 Gleichungen für's Gleichgewicht dieser 4 Körper:

$$(I) X' + X'' + X''' + X'''' = 0$$

$$(II) Y' + Y'' + Y''' + Y'''' = 0$$

$$(III) Z' + Z'' + Z''' + Z'''' = 0$$

$$(IV) Y'' + Y''' + Y'''' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (X'' + X''' + X''') = 0$$

$$(V) Z'' + Z''' + Z'''' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'} (X'' + X''' + X''') = 0$$

$$(VI) Y''' + Y'''' - \frac{y''' - y''}{x''' - x''} (X''' + X''') = 0$$

$$(VII) Z''' + Z'''' - \frac{z''' - z''}{x''' - x''} (X''' + X''') = 0$$

$$(VIII) Y'''' - \frac{y'''' - y'''}{x'''' - x'''} X'''' = 0$$

$$(IX) Z'''' - \frac{z'''' - z'''}{x'''' - x'''} X'''' = 0.$$

Es ist leicht, diese Auflösung auf eine so große Anzahl von Körpern zu erstrecken, als man nur wünscht, und selbst auf die Kettenlinie; doch wir werden diesen Fall noch besonders durch die am Ende des vorhergehenden Abschnitts gelehrt Methode betrachten.

14) Wollte man, daß der erste Körper fest sey, so würden die Differentialgrößen $dx', dy', dz' = 0$ seyn, und die Glieder, worin diese Differentialgrößen vorkommen, würden in der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht von selbst verschwinden.

Also würden die 3 erstern Gleichungen nämlich:

$$X'' - \frac{\lambda}{f} (x'' - x') = 0$$

$$Y'' - \frac{\lambda}{f} (y'' - y') = 0$$

$$Z'' - \frac{\lambda}{f} (z'' - z') = 0$$

nicht mehr statt finden; alsdann aber würden auch die Gleichungen

$$X' + X'' + X''' + \text{etc.} = 0$$

$$Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = 0$$

$$Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.} = 0$$

nicht mehr statt finden können, alle andere aber würden unverändert bleiben. Dies ist, wie man sieht, der Fall, wo der Faden mit einem seiner Ende fest ist.

Wäre er aber mit seinen 2 Enden fest; alsdann hätte man nicht nur $dx' = 0$, $dy' = 0$, $dz' = 0$; sondern auch $dx''' \text{ etc.} = 0$, $dy''' \text{ etc.} = 0$, $dz''' \text{ etc.} = 0$; und die Glieder, worinn diese 6 Differentialgrößen in der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht vorkommen, würden verschwinden, und folglich auch die 6 davon abhängenden besondern Gleichungen verschwinden machen.

15) Ueberhaupt wenn die 2 Enden des Fadens nicht völlig frey, sondern nach einem gegebenen Gesetze an bewegliche Punkte fest gemacht wären; so würde dieses Gesetz analytisch ausgedrückt, eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Differentialien dx' , dy' , dz' , die sich auf den ersten Körper beziehen, und den Differentialien $dx''' \text{ etc.}$, $dy''' \text{ etc.}$, $dz''' \text{ etc.}$, die zum letzten gehören, verschaffen; und man müßte diese Gleichungen, wenn man jede durch einen neuen unbestimmten Coefficienten multiplicirt, zur allgemeinen oben gefundenen Gleichung für's Gleichgewicht addiren, oder vielmehr man müßte in dieser allgemeinen Gleichung den Werth eines oder mehrerer dieser Differentialgrößen, welchen man aus den genannten Gleichungen gezogen hat, in dieser allgemeinen Gleichung substituiren, und hierauf den Coefficienten von jeder die übrig geblieben ist, $= 0$ setzen, wie oben (9) geschehen ist. Da dies keine Schwierigkeit hat, so halten wir uns nicht weiter dabey auf.

16) Verlangte man die Kräfte kennen zu lernen, die von der Reaktion des Fadens auf die verschiedenen Körper herkommen; so hätte man sich nur der im vorhergehenden Abschnitt S. 7. gegebenen Methode zu bedienen.

Man erwäge daher, daß man im gegenwärtigen Falle hat:

$$dL = df = \frac{(x'' - x')(dx'' - dx') + (y'' - y')(dy'' - dy') + (z'' - z')(dz'' - dz')}{f}$$

$$dM = dg = \frac{(x''' - x'')(dx''' - dx'') + (y''' - y'')(dy''' - dy'') + (z''' - z'')(dz''' - dz'')}{g}$$

etc.

Man hat also in Ansehung des ersten Körpers, dessen Coordinaten

$$x', y', z' \text{ sind } \frac{dL}{dx'} = - \frac{x'' - x'}{f},$$

$$\frac{dL}{dy'} = - \frac{y'' - y'}{f},$$

$$\frac{dL}{dz'} = - \frac{z'' - z'}{f};$$

$$\begin{aligned} \text{folglich } \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2\right]} \\ = \sqrt{\frac{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}{f}} \\ = 1. \end{aligned}$$

Auf diese Art wird der erste Körper durch die Wirkung der andern eine Kraft = λ erhalten, deren Direction auf der durch die Gleichung $dL = df = 0$ wenn man nur x', y', z' als veränderlich annimmt, vorgestellten Fläche senkrecht seyn wird.

Nun

Nun aber ist leicht einzusehen, daß diese Fläche nichts anders ist als eine Kugel, deren Radius = f ist und deren Mittelpunkt sich auf die Coordinaten x'' y'' z'' beziehet; folglich wird die Kraft λ nach eben diesen Radius ihre Richtung haben, d. h. nach der Länge des Fadens, der den ersten und 2ten Körper verbindet.

2) Eben so hat man in Ansehung des 2ten Körpers, dessen Coordinaten sind x'' , y'' , z'' , die Gleichungen

$$\frac{dL}{dx''} = \frac{x'' - x'}{f} \quad *)$$

$$\frac{dL}{dy''} = \frac{y'' - y'}{f}$$

$$\frac{dL}{dz''} = \frac{z'' - z'}{f}$$

folglich $\sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2\right]} =$

$$\sqrt{\frac{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}{f}} = \lambda$$

Hieraus folgt, daß der 2te Körper auch eine Kraft λ erhalten wird, die senkrecht auf der Fläche steht, deren Gleichung $dL = df = 0$ ist, wenn man x'' , y'' , z'' als veränderlich annimmt; allein diese Fläche ist von neuem eine Kugel, deren Radius f ist, deren Mittelpunkt aber sich auf die Coordinaten x' , y' , z' des ersten Körpers beziehet; die Kraft λ , die auf den 2ten Körper wirkt, wird also auch ihre Richtung nach den Faden f haben, der diesen Körper mit dem 2ten verbindet.

3) Fer-

*) Im Original steht: $\frac{z'' - z'}{df}$, welches vermuthlich ein Druckfehler ist.

3) Ferner hat man in Ansehung des 2ten Körpers

$$\frac{dM}{dx''} = - \frac{x''' - x''}{g},$$

$$\frac{dM}{dy''} = - \frac{y''' - y''}{g},$$

$$\frac{dM}{dz''} = - \frac{z''' - z''}{g}, \text{ folglich}$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dM}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dz''}\right)^2\right]} = 1.$$

Der 2te Körper wird also auch durch eine Kraft $= \mu$ getrieben werden, deren Direktion senkrecht auf der durch die Gleichung $dg = 0$, wenn man x'' , y'' , z'' als veränderlich ansieht, vorgestellten Fläche ist. Diese Fläche aber ist nichts anders als eine Kugel, deren Radius $= g$ ist; es folgt also, daß die Direktion der Kraft μ nach diesem Radius seyn wird, d. h. nach den Faden, der dem 2ten Körper mit dem 3ten verbindet.

Eben diese Schlüsse wird man bey den andern Körpern machen, und ähnliche Resultate daraus herleiten.

17) Es ist offenbahr, daß die Kraft λ , die beim ersten Körper nach der Direktion des Fadens hervorgebracht wird, der diesen Körper mit dem folgenden verbindet, und die Kraft λ die der vorigen gleich aber ihr gerade entgegengesetzt ist, und die nach der Direktion desselben Fadens auf den andern Körper würkt, dieselben Kräfte mit denen seyn müssen, die von der Reaktion eben dieses Fadens auf 2 Körpern herkommen, d. h. von der Spannung, welche der zwischen dem ersten und 2ten Körper enthaltene Theil des Fadens leidet; so daß der Coefficient λ die Größe dieser Spannung ausdrückt. Eben so wird der Coefficient μ die Spannung des Theils des Fadens ausdrücken, der zwischen dem 2ten und 3ten Körper enthalten ist, u. s. f.

Uebrigens hat man bey der Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe stillschweigend vorausgesetzt, daß jeder Theil des Fadens nicht nur unauz-

dehnt

behnbar sondern auch unbiegsam sey, so daß er immer die nämliche Länge behält; die Kräfte λ μ etc. drücken also die Spannungen nur in so fern aus, als sie die Körper näher an einander zu bringen suchen; Streben sie, sie von einander zu entfernen; so würden sie vielmehr die Widerstände ausdrücken, die der Faden vermöge seiner Unbiegsamkeit oder Unzusammenrückbarkeit dem Körper entgegensetzen kann.

18) Um das was wir eben bewiesen haben zu bestätigen, und zugleich eine neue Anwendung unserer Methoden zu geben; so wollen wir annehmen, daß der Faden, woran die Körper fest gemacht sind, elastisch und einer Ausdehnung und Zusammenziehung fähig sey; ferner seyen F , G , etc. die Zusammenziehungskräfte der Theile t , g , etc. des Fadens, die zwischen dem 1ten und 2ten und dem 2ten und 3ten Körper enthalten sind. Alsdann ist (aus 2 Abschn. 5.) klar, daß die Kräfte F , G , etc. die Momente $Fdf + Gdg$ etc. geben werden. Diese Momente muß man also zu denen addiren, die von der Wirkung der fremden Kräfte, die, wie wir (10) gesehen haben, durch die Formel $X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' +$ etc. ausgedrückt werden, herkommen; und dadurch erhält man die ganze Summe der Momente des Systems. Sonst ist keine andere besondere Bedingung zu erfüllen, welche auf die Lage der Körper Beziehung hätte, man hat daher die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht, indem man die angeführte Summe $= 0$ setzt; also erhält man:

$$\begin{aligned} X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' \\ + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \text{etc.} \\ + Fdf + Gdg + \text{etc.} = 0. \end{aligned}$$

Substituirt man nun die (11) gefundene Werthe von df , dg , etc. und setzt allemal die Summe der Glieder, worin jede der Differentialgrößen dx' , dy' , etc. vorkommt $= 0$; so hat man folgende Gleichungen für's Gleichgewicht des Fadens für den gegenwärtigen Fall:

$$X' = -F \frac{(x'' - x')}{f} = 0$$

$$Y' = -F \frac{(y'' - y')}{f} = 0$$

$$Z' = -F \frac{(z'' - z')}{f} = 0$$

$$X'' + F \frac{(x'' - x')}{f} - G \frac{(x''' - x'')}{g} = 0$$

$$Y'' + F \frac{(y'' - y')}{f} - G \frac{(y''' - y'')}{g} = 0$$

$$Z'' + F \frac{(z'' - z')}{f} - G \frac{(z''' - z'')}{g} = 0$$

$$X''' + G \frac{(x''' - x'')}{g} = 0$$

$$Y''' + G \frac{(y''' - y'')}{g} = 0$$

$$Z''' + G \frac{(z''' - z'')}{g} = 0$$

sie sind, wie man sieht, denen analog, die wir für den Fall, wo der Faden unausdehnbar ist, (11) gefunden haben, wenn man nur $\lambda = F$, $\mu = G$ etc. setzt. Man ersieht also hieraus, daß die Größen F , G , etc. die hier die Kräfte der Faden unter der Voraussetzung, daß sie elastisch sind, ausdrücken, einerley mit denen sind, die wir (16), um eben diese Kräfte der Faden unter der Voraussetzung, daß sie unausdehnbar seyen, gefunden haben.

19) Wir wollen noch einmal den Fall vornehmen, wo der Faden unausdehnbar und mit 3 Körpern beschwert ist; aber wir wollen zugleich voraussetzen, der Körper könne von der Mitte an nach der Länge des Fadens

dens rutschen; in diesem Falle wird also die Bedingung der Aufgabe seyn, daß die Summe der Distanzen zwischen dem 1ten und 2ten und zwischen dem 2ten und 3ten Körper beständig sey. Nennt man also wie oben f und g diese Entfernungen; so ist $f + g = \text{Const.}$ und folglich

$$df + dg = 0.$$

Man muß daher die Differentialgröße $df + dg$ durch einen unbestimmten Coefficienten λ multipliciren, und zur Summe der Momente der verschiedenen Kräfte, die, wie man angenommen hat, auf den Körper wirken, addiren; dies giebt folgende Gleichung für's Gleichgewicht:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda(df + dg) = 0.$$

Substituirt man hier wieder die Werthe von df und dg und setzt die Summe der Glieder, worin jede der Differentialgrößen dx' , dy' , etc. vorkommen, jederzeit $= 0$; so erhält man folgende Gleichungen für's Gleichgewicht des Fadens:

$$X' - \lambda \left(\frac{x'' - x'}{f} \right) = 0$$

$$Y' - \lambda \left(\frac{y'' - y'}{f} \right) = 0$$

$$Z' - \lambda \left(\frac{z'' - z'}{f} \right) = 0$$

$$X'' + \lambda \left(\frac{x'' - x'}{f} - \frac{x''' - x''}{g} \right) = 0$$

$$Y'' + \lambda \left(\frac{y'' - y'}{f} - \frac{y''' - y''}{g} \right) = 0$$

$$Z'' + \lambda \left(\frac{z'' - z'}{f} - \frac{z''' - z''}{g} \right) = 0$$

$$X''' + \lambda \left(\frac{x'''' - x''}{g} \right) = 0$$

$$Y''' + \lambda \left(\frac{y'''' - y''}{g} \right) = 0$$

$$Z''' + \lambda \left(\frac{z'''' - z''}{g} \right) = 0$$

wo man nur noch die unbekante Größe λ wegzuschaffen hat.

Man siehet hieraus, wie man zu verfahren habe, wenn eine größere Anzahl von Körpern vorhanden wäre, wovon einige fest an einem Faden wären, die anderen aber frey darauf wegrutschen könnten.

20) Wir wollen jetzt annehmen, die 3 Körper seyen durch eine unbtogsame Ruthe mit einander verbunden, so daß sie immer einerley Distanzen unter einander behalten müßten; in diesem Falle müßte nicht allein $df = 0$, und $dg = 0$ seyn, sondern auch das Differential der Distanz zwischen dem ersten und 2ten Körper, welche wir durch h bezeichnen, müßte $= 0$ seyn; nehmen wir daher die 3 unbestimmten Coefficienten λ, μ, ν , an; so erhält man diese allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda df + \mu dg + \nu dh = 0.$$

Was die Werthe von df, dg betrifft; so haben wir sie schon oben gefunden, was dh anlangt so ist klar, daß

$$h = \sqrt{(x'''' - x'')^2 + (y'''' - y'')^2 + (z'''' - z'')^2}$$

$$\text{und folglich } dh = \frac{(x'''' - x'')(dx'''' - dx'') + (y'''' - y'')(dy'''' - dy'') + (z'''' - z'')(dz'''' - dz'')}{h}$$

Macht man diese Substitutionen und setzt man die Summe der Alles der, wovon jede der Differentialgrößen $dx', dy', \text{etc.}$ ein Factor ist, jederzeit $= 0$; so hat man diese 9 besondern Gleichungen:

$$X' - \lambda \frac{(x'' - x')}{f} - \nu \frac{(x''' - x')}{h} = 0$$

$$Y' - \lambda \frac{(y'' - y')}{f} - \nu \frac{(y''' - y')}{h} = 0$$

$$Z' - \lambda \frac{(z'' - z')}{f} - \nu \frac{(z''' - z')}{h} = 0$$

$$X'' + \lambda \frac{(x'' - x')}{f} - \mu \frac{(x''' - x'')}{g} = 0$$

$$Y'' + \lambda \frac{(y'' - y')}{f} - \mu \frac{(y''' - y'')}{g} = 0$$

$$Z'' + \lambda \frac{(z'' - z')}{f} - \mu \frac{(z''' - z'')}{g} = 0$$

$$X''' + \mu \frac{(x''' - x'')}{g} + \nu \frac{(x''' - x')}{h} = 0$$

$$Y''' + \mu \frac{(y''' - y'')}{g} + \nu \frac{(y''' - y')}{h} = 0$$

$$Z''' + \mu \frac{(z''' - z'')}{g} + \nu \frac{(z''' - z')}{h} = 0$$

woraus man die 3 unbekanntten und unbestimmten Größen λ , μ , ν weg schaffen muß, und dadurch wird die Zahl der Bedingungsgleichungen für's Gleichgewicht sich auf 6 bringen lassen.

21) Man sieht leicht, selbst aus der Form dieser Gleichungen, daß, wenn man die 3 erstern zu den 3 folgenden und hernach zu den 3 letztern addirt, man sogleich 3 Gleichungen bekommt, worin λ , μ , ν , nicht mehr vorkommen, nämlich:

$$X' + X'' + X''' = 0$$

$$Y' + Y'' + Y''' = 0$$

$$Z' + Z'' + Z''' = 0$$

Nichts ist leichter als noch 3 andere Gleichungen durch die Wegschöpfung von λ , μ , ν zu erhalten; um aber hierzu auf die einfachste und allgemeinste Art zu gelangen; so ziehe ich zuerst aus den obigen Gleichungen folgende 9 veränderte:

$$X'y' - Y'x' - \lambda \frac{(y'x'' - x'y'')}{f} - \nu \frac{(y'x''' - x'y''')}{h} = 0$$

$$X'z' - Z'x' - \lambda \frac{(z'x'' - x'z'')}{f} - \nu \frac{(z'x''' - x'z''')}{h} = 0$$

$$Y'z' - Z'y' - \lambda \frac{(z'y'' - y'z'')}{f} - \nu \frac{(z'y''' - y'z''')}{h} = 0$$

$$X''y'' - Z''x'' + \lambda \frac{(y'x'' - x'y'')}{f} - \mu \frac{(y''x''' - x''y''')^*)}{g} = 0$$

$$X''z'' - Y''x'' + \lambda \frac{(z'x'' - x'z'')}{f} - \mu \frac{(z''x''' - x''z''')}{g} = 0$$

$$Y''z'' - Z''y'' + \lambda \frac{(y'y'' - y'x'')}{f} - \mu \frac{(z''y''' - y''z''')}{g} = 0$$

$$X'''y''' - Y''x''' + \mu \frac{(y''x''' - x''y''')}{g} + \nu \frac{(y'x''' - x'y''')}{h} = 0$$

$$X'''z''' - Z''x''' + \mu \frac{(z''x''' - x''z''')}{g} + \nu \frac{(z'x''' - x'z''')}{h} = 0$$

$$Y'''z''' - Z'y''' + \mu \frac{(z'y''' - y''y''')}{g} + \nu \frac{(z'y''' - y'z''')}{h} = 0.$$

Diese Gleichungen sind mit ihren ursprünglichen analog, und geben daher auf eben die Weise durch die simple Addition folgende drei *):

X/y'

*) Im Original steht $-\mu \frac{(y''x''' - y''')}{g}$. III.

**) Ich halte es für unnöthig, hier wieder von neuem zu zeigen, wie diese Gleich.

$$X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' = 0$$

$$X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' = 0$$

$$Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' = 0$$

Die 3 erstern Gleichungen zeigen, daß die Summe der jeder der 3 Achsen der Coordinaten parallelen Kräfte = 0 seyn muß; die 3 letztern aber enthalten den bekannten Grundsatz der Momente; (indem man unter Moment das Produkt der Kraft in den Hebelarm versteht,) vermöge dem die Summe der Momente aller Kräfte = 0 seyn muß, wenn das System sich um jede der 3 Achsen drehen soll.

22) Wäre der erste Körper fest; so würden die Differentialgrößen $dx', dy', dz' = 0$ seyn, und die 3 erstern der 9 Gleichungen (20) würden nicht mehr statt finden; alsdann hätte man also nur noch 6 Gleichungen, die durch Wegschaffung der 3 unbekanntenen Größen λ, μ, ν sich auf drei bringen ließen. Um zu diesen 3 Gleichungen zu gelangen, kann man auf eine mit derjenigen analogen Methode verfahren, deren man sich bedient hat, die 3 letztern Gleichungen (21) zu finden, wenn man nur dergestalt zu Werke geht, daß die veränderten Gleichungen nicht die unbestimmten Größen λ und ν , die in den 3 erstern vorkommen, und die man jetzt außer Acht lassen muß, enthalten. Durch diese Combinationen bekommt man also

$$X''(y'' - y') - Y''(x'' - x') - \mu \left[\frac{(y'' - y')(x''' - x'') - (x'' - x')(y''' - y'')}{(x'' - x')(y''' - y'')} \right] = 0$$

$$X''(z'' - z') - Z''(x'' - x') - \mu \left[\frac{(z'' - z')(x''' - x'') - (x'' - x')(z''' - z'')}{-x'(z''' - z'')} \right] = 0$$

$$Y''(z'' - z') - Z''(y'' - y') - \mu \left[\frac{(z'' - z')(y''' - y'') - (y'' - y')(z''' - z'')}{-y'(z''' - z'')} \right] = 0^*$$

§ 3

X''

Gleichungen aus den vorlägen entstehen, indem das Verfahren mit dem vorhin schon mehrmals gebrauchten das nemliche ist. M.
*) Das g im Divisor dieser 3ten Gleichung fehlt im französischen Original ganz. M.

$$X''' (y''' - y') - Y''' (x''' - x') + \mu \frac{\begin{bmatrix} (y''' - y') (x''' - x') \\ -(x''' - x') (y''' - y') \end{bmatrix}}{g} = 0$$

$$X''' (z''' - z') - Z''' (x''' - x') + \mu \frac{\begin{bmatrix} (z''' - z') (x''' - x') \\ -(x''' - x') (z''' - z') \end{bmatrix}}{g} = 0$$

und addirt man die 3 erstern dieser veränderten Gleichungen zu den 3 letztern; so erhält man sogleich folgende 3:

$$X'' (y'' - y') - Y'' (x'' - x') + X''' (y''' - y') - Y''' (x''' - x') = 0$$

$$X'' (z'' - z') - Z'' (x'' - x') + X''' (z''' - z') - Z''' (x''' - x') = 0$$

$$Y'' (z'' - z') - Z'' (y'' - y') + Y''' (z''' - z') - Z''' (y''' - y') = 0$$

welche allezeit statt finden werden, wie auch der Zustand des ersten Körpers beschaffen seyn mag, indem sie gar nicht von den auf diesen Körper sich beziehenden Gleichungen abhängen. Diese Gleichungen enthalten, wie man sieht, den nemlichen Grundsatz der Momente jedoch in Beziehung auf die Achsen, die durch den ersten Körper gehen.

23) Wir wollen jetzt annehmen, es wäre noch ein 4ter Körper an dieselbe unbiegsame Stange fest, dessen rechtwinklichte Coordinaten seyen: x'''' , y'''' , z'''' und die diesen Coordinaten parallele Kräfte X'''' , Y'''' , Z'''' .

Man müßte daher zur Summe der Momente der Kräfte die Größe $X'''' dx'''' + Y'''' dy'''' + Z'''' dz''''$ addiren; hierauf erhielte man, da die Distanzen zwischen allen den Körpern beständig bleiben müssen, nach den Bedingungen der Aufgabe nicht nur $df = 0$, $dg = 0$, $dh = 0$; wie im vorhergehenden Falle; sondern auch

$$dl = 0, \quad dm = 0, \quad dn = 0,$$

wenn man l , m , n die Distanzen des 4ten Körpers von den 3 vorhergehenden nennt. Die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht wird also in diesem Falle seyn

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + \\ X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + X''''dx'''' + Y''''dy'''' + \\ Z''''dz'''' + \lambda df + \mu dg + \nu dh + \pi dl + \rho dm + \sigma dn = 0$$

Die Werthe von df, dg, dh , sind die nemlichen mit den obigen (16, 20); was aber die von dl, dm, dn angeht; so ist offenbar daß

$$l = \sqrt{[(x'''' - x')^2 + (y'''' - y')^2 + (z'''' - z')^2]}$$

$$m = \sqrt{[(x'''' - x'')^2 + (y'''' - y'')^2 + (z'''' - z'')^2]}$$

$$n = \sqrt{[(x'''' - x''')^2 + (y'''' - y''')^2 + (z'''' - z''')^2]}$$

und folglich

$$dl = \frac{(x'''' - x')(dx'''' - dx') + (y'''' - y')(dy'''' - dy') + (z'''' - z')(dz'''' - dz')}{l}$$

$$dm = \frac{(x'''' - x'')(dx'''' - dx'') + (y'''' - y'')(dy'''' - dy'') + (z'''' - z'')(dz'''' - dz'')}{m}$$

$$dn = \frac{(x'''' - x''')(dx'''' - dx''') + (y'''' - y''')(dy'''' - dy''') + (z'''' - z''')(dz'''' - dz''')}{n}$$

Macht man diese Substitutionen, und setzt man die Summe der Glieder, worin jede der Differentialgrößen dy, dx , etc. vorkommt, $= 0$; so findet man 12 besondere Gleichungen, wovon die 9 ersten die nemlichen mit denen (20) sind, wenn man zu ihnen folgende Größen addirt:

$$-\pi \frac{(x'''' - x')}{l}, -\pi \frac{(y'''' - y')}{l}, -\pi \frac{(z'''' - z')}{l}$$

$$-\rho \frac{(x'''' - x'')}{m}, -\rho \frac{(y'''' - y'')}{m}, -\rho \frac{(z'''' - z'')}{m}$$

$$-\sigma \frac{(x'''' - x''')}{n}, -\sigma \frac{(y'''' - y''')}{n}, -\sigma \frac{(z'''' - z''')}{n}$$

(Man

(Man bekommt nemlich auf diese Art für diese 9 Gleichungen

$$X' - \lambda \frac{(x'' - x')}{f} - \nu \frac{(x''' - x')}{h} - \pi \frac{(x'''' - x')}{l} = 0$$

$$Y' - \lambda \frac{(y'' - y')}{f} - \nu \frac{(y''' - y')}{h} - \pi \frac{(y'''' - y')}{l} = 0$$

$$Z' - \lambda \frac{(z'' - z')}{f} - \nu \frac{(z''' - z')}{h} - \pi \frac{(z'''' - z')}{l} = 0$$

$$X'' + \lambda \frac{(x'' - x')}{f} - \mu \frac{(x''' - x'')}{g} - \rho \frac{(x'''' - x'')}{m} = 0$$

$$Y'' + \lambda \frac{(y'' - y')}{f} - \mu \frac{(y''' - y'')}{g} - \rho \frac{(y'''' - y'')}{m} = 0$$

$$Z'' + \lambda \frac{(z'' - z')}{f} - \mu \frac{(z''' - z'')}{g} - \rho \frac{(z'''' - z'')}{m} = 0$$

$$X''' + \mu \frac{(x''' - x'')}{g} + \nu \frac{(x'''' - x''')}{h} - \sigma \frac{(x''''' - x''')}{n} = 0$$

$$Y''' + \mu \frac{(y''' - y'')}{g} + \nu \frac{(y'''' - y''')}{h} - \sigma \frac{(y''''' - y''')}{n} = 0$$

$$Z''' + \mu \frac{(z''' - z'')}{g} + \nu \frac{(z'''' - z''')}{h} - \sigma \frac{(z''''' - z''')}{n} = 0$$

M.)

Die 3 letzten aber sind

$$X'''' + \pi \frac{(x'''' - x''')}{l} + \rho \frac{(x''''' - x''')}{m} + \sigma \frac{(x'''''' - x''')}{n} = 0$$

$$Y'''' + \pi \frac{(y'''' - y''')}{l} + \rho \frac{(y''''' - y''')}{m} + \sigma \frac{(y'''''' - y''')}{n} = 0$$

$$Z'''' + \pi \frac{(z'''' - z''')}{l} + \rho \frac{(z''''' - z''')}{m} + \sigma \frac{(z'''''' - z''')}{n} = 0$$

24) Da man 12 Gleichungen und 6 unbestimmte Größen $l, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma$ wegzuschaffen hat, so bleiben für die Bedingungen des Gleichgewichts nur 6 Hauptgleichungen für den Fall von 3 Körpern übrig, und man findet auf eben die Art wie (21) folgende 6, denen (20) analoge Gleichungen:

$$\begin{aligned} X' + X'' + X''' + X'''' &= 0 \\ Y' + Y'' + Y''' + Y'''' &= 0 \\ Z' + Z'' + Z''' + Z'''' &= 0 \\ X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' + X''''y'''' - Y''''x'''' &= 0 \\ X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' + X''''z'''' - Z''''x'''' &= 0 \\ Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' + Y''''z'''' - Z''''y'''' &= 0 \end{aligned}$$

Anstatt der 3 letzten kann man auch die 3 folgenden Gleichungen substituiren, die man durch die (22) vorgetragene Methode findet, und die, indem sie gar nicht von den Gleichungen, die sich auf den ersten Körper beziehen, abhängen, noch den Vorzug haben, daß sie immer statt finden, wie auch der Zustand dieses Körpers beschaffen seyn mag:

$$\begin{aligned} X''(y'' - y') - Y''(x'' - x') + X'''(y''' - y'') - Y'''(x''' - x'') &= 0 \\ X''(z'' - z') - Z''(x'' - x') + X'''(z''' - z'') - Z'''(x''' - x'') &= 0 \\ Y''(z'' - z') - Z''(y'' - y') + Y'''(z''' - z'') - Z'''(y''' - y'') &= 0 \end{aligned}$$

25) Man sieht hieraus, wie man verfahren müßte, wenn man die Bedingungen des Gleichgewichts einer gewissen an einer unbtegfamen Stange oder Hebel angebrachten Zahl von Körpern finden wollte. Ueberhaupt leuchtet es ein, daß, damit die respektive Lage der Körper unverändert bleibe, die Distanzen der 3 ersten Körper unter einander beständig seyn müssen, und daß eben dies der Fall auch mit jedem der andern Körpern von diesen

diesen breiten sey, indem die Lage eines Punkts allezeit durch die Distanzen von 3 andern gegebenen Punkten bestimmt ist. Für jeden neuen Körper, den man noch auf dem Hebel anbringt, hat man also dieselben Schlüsse und dasselbe Verfahren anzuwenden, als (23) in Aufsehung des 4ten Körpers geschehen ist; jeder derselben veranlaßt 3 neue Gleichungen, so daß die Hauptgleichungen an Zahl immer denen bey 3 Körpern gleich sind; auch haben sie die nämliche Form, wie die (24) gefundenen.

Uebrigens lassen sich diese Gleichungen offenbar auf diejenigen bringen, welche wir (3 Abschn. 3, 6.) überhaupt für's Gleichgewicht eines gewissen freyen Systems gefunden haben. Denn da wegen der Unbiegsamkeit der Stange die Entfernungen der Körper von einander unveränderlich sind; so folgt daraus, daß das Gleichgewicht statt finden muß, wenn alle fortrückende und drehende Bewegungen aufgehoben worden sind. Man hätte also durch diese einzige Betrachtung das vorhergehende Problem nach den Formeln der angeführten Artikel auflösen können; wir hielten es aber nicht für unnütz, eine direkte und aus den besondern Bedingungen der Aufgabe gezogene Auflösung davon zu geben.

26) Wir wollen nun von neuem den Fall der 3 durch eine Stange verbundenen Körper betrachten und annehmen, sie sey in dem Punkt, worin sich der 2te Körper befindet, elastisch, so daß die Entfernungen dieses Körpers vom ersten und letzten beständig seyen, der Winkel aber, der durch die Linie dieser Entfernungen gebildet wird, sey veränderlich, und die Wirkung der Elasticität bestehe darin, diesen Winkel größer zu machen, und folglich den äußern durch eine der Seiten und die verlängerte andere gemachten Winkel zu verkleinern.

Wir wollen die Kraft der Elasticität E nennen, und der äußere Winkel, nachdem sie sich wirksam beweiset, sey e; so ist leicht zu schließen, was wir im 2ten Abschnitt festgesetzt haben, daß das Moment der Kraft E durch Ede ausgedrückt werden müsse, so daß die Summe der Momente aller Kräfte des Systems sey:

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + Ede$$

Die

Die Bedingungen der Aufgabe sind hier die nemlichen, als (11), d. h. $df = 0$ und $dg = 0$; folglich hat man folgende allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht:

$$X' dx' + Y' dy' + Z' dz' + X'' dx'' + Y'' dy'' + Z'' dz'' + X''' dx''' + Y''' dy''' + Z''' dz''' + \lambda df + \mu dg = 0.$$

Man hat also nur die Werthe von de , df , dg zu substituiren, die von df und dg sind dieselben als in (11); und um den Werth von de zu finden; so bemerke man, daß in dem Dreieck, dessen 3 Seiten f , g , h , sind (20) der der Seite h entgegengesetzte Winkel $180^\circ - e$ ist, so daß man nach

dem bekannten Theorem hat $\text{Cos } e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg}$, woraus man

durch die Differentiation den Werth von de zieht. Man hat aber nach den Bedingungen der Aufgabe $df = 0$ und $dg = 0$; man braucht daher nur e und h als veränderlich anzunehmen, welches giebt

$$de = \frac{hdh}{fg \sin e}.$$

Substituirt man nun diesen Werth in der vor-

hergehenden Gleichung; so ist klar, daß sie dieselbe Form bekommen wird, als die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht in dem Falle (20), wenn

man nur in dieser $v = \frac{Eh}{fg \sin e}$ setzt. Die besondern Gleichungen sind

folglich in beiden Fällen einerley, nur mit dem Unterschied, daß in (20) die Größe v unbestimmt ist, und folglich weggeschafft werden muß; da im gegenwärtigen Falle diese Größe völlig bekannt ist, und man nur die 2 unbestimmten Größen λ , μ wegzuschaffen hat, so daß eine Hauptgleichung mehr übrig bleiben muß, als im angeführten Falle, d. h. 7 Hauptgleichungen anstatt 6. Da aber nichts hindert, die Größe v mag bekannt oder nicht seyn, sie nebst den beiden andern λ , μ , wegzuschaffen, so ist klar, daß man auch im gegenwärtigen Falle dieselben Gleichungen hat, die (21, 22) gefunden worden sind, und um die 7te zu finden, hat man nur λ in den 3 erstern und μ in den 3 letztern der 9 besondern Gleichungen

(21) wegzuschaffen, und für ν seinen Werth $\frac{Eh}{fg \sin. e}$ zu substituiren.

27) Hätte man übrigens in dem Werthe von dg nicht df und $dg = 0$ setzen wollen; so würde man einen Ausdruck von der Form

$$de = \frac{hdh}{fg \sin. e} + Adf + Bdg \text{ bekommen haben, wo } A \text{ und}$$

B Funktionen von $f, g, h \sin e$ sind; alsdenn würden die 3 Glieder $Ede + \lambda df + \mu dg$ der allgemeinen Gleichung sich in

$$\frac{Eh}{fg \sin. e} dh + (FA + \lambda) df + (EB + \mu) dg \text{ verwandelt haben; aber}$$

λ und μ sind 2 unbestimmte Größen, man kann also offenbar an ihre Stelle $\lambda = EA, \mu = EB$; setzen, wodurch die vorgegebene Größe sich in

$$\frac{Eh}{fg \sin. e} dh + \lambda df + \mu dg \text{ verwandelt, eben so als wenn } f \text{ und } g \text{ in dem}$$

Ausdruck von de beständig gewesen wären.

28) Wären mehrere Körper unter einander durch elastische Ruthen verbunden; so fände man auf gleiche Art die für's Gleichgewicht dieser Körper nöthige Gleichungen und überhaupt giebt unsre Methode allezeit mit eben der Leichtigkeit die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Körpern, die auf eine gewisse Art unter einander verbunden sind, und von gewissen beliebigen äussern Kräften getrieben werden, an die Hand. Der Calcul geht, wie man siehet, immer einen Weg, und das hat man in der That unter die ersten Vorzüge dieser Methode zu rechnen.

§. III.

Vom Gleichgewicht eines Fadens, wovon alle Punkte von gewissen Kräften gezogen werden, und den man entweder vollkommen biegsam oder unbiegsam, oder elastisch und zugleich ausdehnbar oder nicht annimmt.

29) Es ist hier der Ort die Methode anzuwenden, die wir im 4ten Abschn. 9 u. f. vorgetragen haben.

Wir wollen um mehrerer Einfachheit willen immer voraussetzen, alle äussere auf jeden Punkt des Fadens wirkende Kräfte seyen auf 3 X, Y, Z gebracht, die nach den rechtwinklichten Coordinaten x, y, z dieses Punkts ihre Richtungen hätten. Nennen wir daher dm das Element des Fadens; so haben wir für die Summe der Momente aller dieser Kräfte in Ansehung der ganzen Länge des Fadens diese Integralformel (13. Art.) 4.:

$$\int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm.$$

30) Wir wollen den Fall eines vollkommen biegsamen und unausdehnbaren Fadens betrachten; nennen wir ds das Element der krummen Linie dieses Fadens, das durch $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ausgedrückt wird; so muß wegen der Bedingung der Unausdehnbarkeit ds eine unveränderliche Grösse seyn, und folglich hätte man in Ansehung jedes Elements des Fadens diese unbestimmte Bedingungsgleichung $\delta ds = 0$.

Multipliziert man daher δds durch eine unbestimmte Grösse λ und nimmt das ganze Integrale; so hat man $\int \lambda \delta ds$; und ist weiter keine Bedingungsgleichung vorhanden; so hat man die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts, wenn man die Summe der eben gefundenen Integrale $= 0$ setzt.

$$\text{Da nun } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

so bekommt man, wenn man nach S differentiirt

$$\delta ds = \frac{dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz}{ds}$$

$$\text{folglich } \int \lambda \delta ds = \int S \frac{\lambda dx}{ds} \delta dx + \int S \frac{\lambda dy}{ds} \delta dy + \int S \frac{\lambda dz}{ds} \delta dz;$$

Wendert

*) Im französischen steht hier $\int S \frac{\lambda dx}{dx} \delta dx$ m.

Verändert man nun δd in $d\delta$ um und integriert theilweise um d vor δ wegzubringen, nach denen (4. Abschn. 17.) gegebenen Regeln; so erhält man, (wenn man wie im angeführten Orte mit einem Strich die Größen bezeichnet, die sich auf den Anfang der ganzen durch S angedeuteten Integrale beziehen, und durch 2 Striche die sich auf das Ende derselben beziehen. *M.*):

$$S \frac{\lambda dx}{ds} \delta dx = \frac{\lambda'' dx''}{ds''} \delta x'' - \frac{\lambda' dx'}{ds'} \delta x' - S d \frac{\lambda dx}{ds} + \delta y,$$

$$S \frac{\lambda dy}{ds} \delta dy = \frac{\lambda'' dy''}{ds''} \delta y'' - \frac{\lambda' dy'}{ds'} \delta y' - S d \frac{\lambda dy}{ds} + \delta y$$

$$S \frac{\lambda dz}{ds} \delta dz = \frac{\lambda'' dz''}{ds''} \delta z'' - \frac{\lambda' dz'}{ds'} \delta z' - S d \frac{\lambda dz}{ds} + \delta z.$$

(Im gegenwärtigen Falle ist nämlich

$$\Omega \text{ (4 Abschn. 17.)} = \frac{\lambda dx}{ds} \text{ oder } \frac{\lambda dy}{ds} \text{ oder } \frac{\lambda dz}{ds}$$

$$\Omega' = \frac{\lambda' dx'}{ds'} \text{ oder } \frac{\lambda' dy'}{ds'} \text{ oder } \frac{\lambda' dz'}{ds'}$$

$$\Omega'' = \frac{\lambda'' dx''}{ds''} \text{ oder } \frac{\lambda'' dy''}{ds''} \text{ oder } \frac{\lambda'' dz''}{ds''}$$

und es ist immer

$$S \Omega d \delta x = \Omega'' \delta x'' - \Omega' \delta z' - S \delta x d \Omega \text{ (M.)}$$

Die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht wird also:

$$(S (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm$$

$$+ \frac{\lambda'' dx''}{ds''} \delta x'' - \frac{\lambda dx'}{ds'} \delta x' - S d \frac{\lambda dx}{ds} \delta x$$

$$+ \frac{\lambda'' dy''}{ds''} \delta y'' - \frac{\lambda dy'}{ds'} \delta y' - S d \frac{\lambda dy}{ds} \delta y$$

+

$$+ \frac{\lambda'' dz''}{ds''} \delta z'' - \frac{\lambda dz'}{ds'} \delta z' - S d. \frac{\lambda dz}{ds} \delta z$$

M.)

$$S \left[\left(X_{dm} - d. \frac{\lambda dx}{dx} \right) \delta x + \left(Y_{dm} - d. \frac{\lambda dy}{dy} \right) \right.$$

$$\left. \delta y + \left(Z_{dm} - d. \frac{\lambda dz}{ds} \right) \delta z \right] +$$

$$\frac{\lambda'' dx''}{ds''} \delta x'' + \frac{\lambda'' dy''}{ds''} \delta y'' + \frac{\lambda'' dz''}{ds''} \delta z'' *)$$

$$- \frac{\lambda' dx'}{ds'} \delta x' - \frac{\lambda' dy'}{ds'} \delta y' - \frac{\lambda' dz'}{ds'} \delta z' **) = 0.$$

31) Man setze nun nach (4. Abschn. 18.) die Coefficienten von δx , δy , δz unter dem Zeichen $S = 0$; so bekommt man folgende 3 besondere unbestimmte Gleichungen:

$$X_{dm} - d. \frac{\lambda dx}{ds} = 0,$$

$$Y_{dm} - d. \frac{\lambda dy}{ds} = 0,$$

$$Z_{dm} - d. \frac{\lambda dz}{ds} = 0.$$

Schafft

*) Im Original steht hier $\frac{\lambda'' dx''}{ds''} \delta z''$. M.

**) Hier ist wieder als ein Druckfehler $\frac{\lambda' dz'}{dz'} \delta z'$ statt $\frac{\lambda' dz'}{ds'} \delta z'$ im fransösischen. M.

Schafft man hieraus die unbestimmte Größe λ weg; so bleiben noch 2 Gleichungen übrig, die dazu dienen, die krumme Linie des Fadens zu bestimmen.

Diese Wegschaffung kann aber auf eine sehr leichte Art geschehen, denn man braucht nur die vorhergehenden Gleichungen zu integrieren; so erhält man folgende:

$$\frac{\lambda dx}{ds} = A + fX dm$$

$$\frac{\lambda dy}{ds} = B + fY dm$$

$$\frac{\lambda dz}{ds} = C + fZ dm$$

wo A, B, C, beliebige beständige Größen sind.

Wirft man nun hieraus λ (nach der schon oft gebrauchten Methode. M) weg; so hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + fY dm}{A + fX dm}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C + fZ dm}{A + fX dm}$$

welche Gleichungen mit den bekannten Formeln der Kettenlinie übereinkommen.

32) Will man direkte zu reinen Differentialgleichungen, worin das Zeichen f nicht vorkomme, gelangen; so bringe man die gefundenen Gleichungen auf folgende Forme:

$$X dm - \lambda d. \frac{dx}{ds} - d\lambda \frac{dx}{ds} = 0$$

$$Y dm - \lambda d. \frac{dy}{ds} - d\lambda \frac{dy}{ds} = 0$$

Z dm

$$Zdm - \lambda d \frac{dz}{ds} - d\lambda \frac{dz}{ds} = 0$$

woraus man durch Wegschaffung von $d\lambda$ folgende beide Gleichungen ziehet:

$$\frac{Xdy - Ydx}{ds} dm = \lambda \left[\frac{dy}{ds} d \frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d \frac{dy}{ds} \right]$$

$$\frac{Xdz - Zdxd}{ds} dm = \lambda \left[\frac{dz}{ds} d \frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d \frac{dz}{ds} \right];$$

$$\text{Aber } \frac{dx}{ds} d \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d \frac{dz}{ds} =$$

$$\frac{1}{2} d \left[\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} \right] = 0$$

Multipliziert man daher die vorhergehenden Gleichungen durch

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}; \text{ so ist}$$

$$\frac{Xdx + Ydy + Zdxd}{ds} dm = d\lambda$$

und man hat nur noch in dieser letzten Gleichung die aus den vorhergehenden gezogene Werthe von λ zu substituiren.

33) Wir wollen nun die Glieder der allgemeinen Gleichung betrachten, die außer dem Zeichen S sind, und wir wollen zuerst annehmen, der Faden sey völlig frey; in diesem Falle werden die Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ und $\delta x''$ *, $\delta y''$, $\delta z''$, die sich auf die beiden äußern Punkte des Fadens beziehen, unbestimmt und willkürlich seyn, folglich muß jedes Glied, worin eine dieser Variationen vorkömmt, an und für sich $= 0$ seyn. Man hat folglich $\lambda'' = 0$, $\lambda' = 0$; d. h. der Werth von λ muß im Anfang und am Ende des Fadens $= 0$ seyn. Man erfüllet diese Bedingung durch

*) Im Original steht hier statt $\delta x''$, $\delta z''$. M.

beständige Größen. Die 3 ersten Integralgleichungen (32) aber geben für den ersten Punkt des Fadens, wo die Größen, die ein l vor sich haben $= 0$ werden

$$\frac{\lambda' dx'}{ds'} = A, \quad \frac{\lambda' dy'}{ds'} = B, \quad \frac{\lambda' dz'}{ds'} = C,$$

und für den letzten Punkt des Fadens, wo l sich in S verwandelt:

$$\frac{\lambda'' dx''}{ds''} = A + SXdm,$$

$$\frac{\lambda'' dy''}{ds''} = B + SYdm,$$

$$\frac{\lambda'' dz''}{ds''} = C + SZdm.$$

Man hat also im gegenwärtigen Falle

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

$$SXdm = 0, \quad SYdm = 0, \quad SZdm = 0.$$

Diese 3 letzten Gleichungen kommen, wie man sieht, mit den 3 ersten (12) überein.

34) Wir wollen nun ztens annehmen, der Faden sey mit einem seiner Enden oder mit allen beiden fest. Ist der Faden mit dem ersten seiner Enden fest; so sind die Variationen $\delta x', \delta y', \delta z' = 0$, und man hat nur die Coefficienten von $\delta x'', \delta y'', \delta z''$, auch $= 0$ zu setzen, d. h. man muß $\lambda'' = 0$ machen. Aus gleicher Ursache hat man, wenn das 2te Ende fest ist $\lambda' = 0$. Wären aber beide Enden zugleich fest; so hätte man keine besondere Bedingung zu erfüllen, indem in diesem Falle die Variationen $\delta x', \delta y', \delta z', \delta x'', \delta y'', \delta z''$ insgesammt $= 0$ wären.

35) Gesezt nun ztens die Enden des Fadens wären an krumme Linien oder Flächen fest gemacht, und sie könnten der Länge derselben nach frey wegrutschen; $dz' = a'dx' + b'dy'$, $dz'' = a''dx'' + b''dy''$ seyen z. B. die Differentialgleichungen der Flächen, woran der erste und letzte

letzte Punkt des Fadens fest gemacht sey; so erhält man, wenn man statt d δ setzt

$$\delta z' = a' \delta x' + b' \delta y', \quad \delta z'' = a'' \delta x'' + b'' \delta y'';$$

Man substituirt daher diese Werthe in den vorgegebenen Gliedern wie vorhin und setze darauf die Coefficienten von $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$, = 0.

Ueberhaupt aber behandle man den Theil, der außerhalb des Zeichens in der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht sich befindet, eben so, als wenn er allein stünde, und die Gleichung für's Gleichgewicht zweier Körper vorstellte, die von einander getrennet und an den Enden des Fadens fest wären.

36) Wir wollen sehen, der Faden sey z. B. mit seinen 2 Enden an den äußersten Enden eines um einen festen Punkt beweglichen Hebels fest gemacht. Es seyen a , b , c die 3 rechtwinklichten Coordinaten, die im Raume die Lage dieses festen Punkts, d. h. des Ruhepunkts des Hebels bestimmen, und es sey ferner f die Distanz zwischen diesem Ruhepunkt und dem Ende des Hebels, woran das erste Ende des Fadens festgemacht ist, g die Distanz zwischen eben diesem Ruhepunkt und dem andern Ende des Hebels, woran das 2te Ende des Fadens fest gemacht ist, h die Distanz zwischen den beiden Enden des Hebels, und folglich auch zwischen den beiden Enden des Fadens; so ist klar, daß diese 6 Größen a , b , c , f , g , h , durch die Natur des Problems gegeben sind. Zugleich sieht man, daß, wenn x' , y' , z' , die Coordinaten für den Anfang der Krümmung des Fadens und x'' , y'' , z'' die Coordinaten für das Ende eben dieser Krümmung sind, man hat

$$f = \sqrt{[(a - x')^2 + (b - y')^2 + (c - z')^2]}$$

$$g = \sqrt{[(a - x'')^2 + (b - y'')^2 + (c - z'')^2]}$$

$$h = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}$$

Diese Größen f , g , h , aber sind unveränderlich, differentirt man also nach δ ; so erhält man diese 3 bestimmte Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (a - x') \delta x' + (b - y') \delta y' + (c - z') \delta z' &= 0 \\ (a - x'') \delta x'' + (b - y'') \delta y'' + (c - z'') \delta z'' &= 0 \\ (x'' - x') (\delta x'' - \delta x') + (y'' - y') (\delta y'' - \delta y') + (z'' - z') (\delta z'' - \delta z') &= 0. \end{aligned}$$

Man multiplicire jede durch einen unbestimmten Coefficienten und addire sie zur allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht. Nimmt man alsdann α, β, γ für diese 3 Coefficienten an, und setzt die Coefficienten der 6 Variationen $\delta x', \delta y', \delta z', \delta x'', \delta y'', \delta z'' = 0$; so erhält man ebensoviele besondere bestimmte Gleichungen, als:

$$\alpha (a - x') - \gamma (x'' - x') - \frac{\lambda' dx'}{ds'} = 0$$

$$\alpha (b - y') - \gamma (y'' - y') - \frac{\lambda' dy'}{ds'} = 0$$

$$\alpha (c - z') - \gamma (z'' - z') - \frac{\lambda' dz'}{ds'} = 0$$

$$\beta (a - x'') + \gamma (x'' - x') + \frac{\lambda'' dx''}{ds''} = 0$$

$$\beta (b - y'') + \gamma (y'' - y') + \frac{\lambda'' dy''}{ds''} = 0$$

$$\beta (c - z'') + \gamma (z'' - z') + \frac{\lambda'' dz''}{ds''} = 0$$

welche durch Wegschaffung der α, β, γ sich auf 3 bringen lassen.

Verbindet man hterauf diese 3 Gleichungen mit den obigen 3 Bedingungsgleichungen; so ist man im Stande die Lage des Hebels zu bestimmen. Man wird hieraus leicht abnehmen können, wie man sich in ähnlichen Fällen zu verhalten habe.

37) Gäbe es überdies noch auffer den Kräften, die jeden Punkt des Fadens ziehen, besondere an den beiden Enden des Fadens angebrachte,
und

und durch X', Y', Z' für das erste Ende des Fadens, und durch X'', Y'', Z'' für das letzte Ende desselben vorgestellte Kräfte; so gäben diese Kräfte die Momente:

$$X' \delta x' + Y' \delta y' + Z' \delta z' + X'' \delta x'' + Y'' \delta y'' + Z'' \delta z''$$

und man müßte diese Größe noch zum ersten Glied der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht hinzuaddiren, nemlich zu dem Theil der außer dem Zeichen ist, und der dadurch wird:

$$\begin{aligned} & \left(X'' + \frac{\lambda'' dx''}{ds''} \right) \delta x'' + \left(Y'' + \frac{\lambda'' dy''}{ds''} \right) \delta y'' + \\ & \left(Z'' + \frac{\lambda'' dz''}{ds''} \right) \delta z'' + \left(X' - \frac{\lambda' dx'}{ds'} \right) \delta x' \\ & + \left(Y' - \frac{\lambda' dy'}{ds'} \right) \delta y' + \left(Z' - \frac{\lambda' dz'}{ds'} \right) \delta z' \end{aligned}$$

Mit diesem Ausdruck würde man in den verschiedenen Fällen, wie wir eben gesehen haben, so verfahren, wie in den vorhergehenden Artikeln.

38) Man nehme jetzt an, der in allen seinen Punkten durch dieselben Kräfte X, Y, Z getriebene und noch überdies durch die Kräfte $X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ an seinen beiden Enden gezogene Faden, solle auf einer gegebenen krummen Fläche liegen, deren Gleichung $dz = p dx + q dy$ sey, und man verlange die Figur und Lage dieses Fadens zu wissen, wenn er im Gleichgewicht seyn soll.

Diese Aufgabe, die vielleicht nach den gewöhnlichen Grundsätzen der Mechanik sehr schwer zu behandeln seyn würde, wird durch unsre Methode und Formeln leicht aufgelöst. Denn verändert man d in δ ; so wird aus der Gleichung der gegebenen Fläche $\delta z = p \delta x + q \delta y$; man hat also nur diesen Werth von δz in den Gliedern, die sich unter dem Zeichen der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht des Fadens befinden, (30) zu substituiren, und hernach die Größen, worin δx und δy vorkommen = 0 zu setzen. Hiedurch gelangt man zu folgenden beiden unbestimmten Gleichungen:

$$Xdm - d. \frac{\lambda dx}{ds} + p (Zdm - d. \frac{\lambda dz}{ds}) = 0$$

$$Ydm - d. \frac{\lambda dy}{ds} + q (Zdm - d. \frac{\lambda dz}{ds}) = 0$$

welche dazu dienen, die Krümmung des Fadens zu bestimmen, indem man sie mit der Gleichung der Fläche $dz = p dx + q dy$ verbindet, und die unbestimmte Größe λ wegschaft.

39) Da man ferner voraussetzt, der Faden sey mit seiner ganzen Länge an diese Fläche fest; so hat man auch für seine beiden äußersten Punkte:

$$\delta z' = p' \delta x' + q' \delta y', \quad \delta z'' = p'' \delta x'' + q'' \delta y''.$$

Man substituirt daher auch diese Werthe in die Glieder, die sich ausserhalb des Zeichens der allgemeinen Gleichung befinden, oder vielmehr in der (37) gegebenen Formel, worin man auch auf die Kräfte $X' Y'$ etc. Rücksicht genommen hat, hierauf aber setze man die Größen, wovon jede der übrigen 4 Variationen $\delta x', \delta y', \delta x'', \delta y''$ vorkommen $= 0$, wodurch man diese 4 neuen bestimmten Gleichungen erhält:

$$X' - \frac{\lambda' dx'}{ds'} + p' (Z' - \frac{\lambda' dz'}{ds'}) = 0$$

$$Y' - \frac{\lambda' dy'}{ds'} + q' (Z' - \frac{\lambda' dz'}{ds'}) = 0$$

$$X'' + \frac{\lambda'' dx''}{ds''} + p'' (Z'' + \frac{\lambda'' dz''}{ds''}) = 0$$

$$Y'' + \frac{\lambda'' dy''}{ds''} + q'' (Z'' + \frac{\lambda'' dz''}{ds''}) = 0$$

wozu man noch gewisse beständige Größen addiren muß.

40) Aber anstatt, wie wir eben gethan haben, den Werth von δz in δx und δy , den man aus der Gleichung $\delta z - p \delta x - q \delta y = 0$ gezogen

gen hat, zu substituiren; könnte man eben diese Gleichung als eine neue unbestimmte Bedingungsgleichung ansehen, alsdann müßte man diese Gleichung durch einen andern unbestimmten Coefficienten multipliciren, das ganze Integrale davon nehmen, und zur allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts addiren (30).

Hiedurch wird der Theil unter dem Zeichen

$$S \left[(Xdm - d. \frac{\lambda dx}{ds} - \mu p) dx + (Ydm - d. \frac{\lambda dy}{ds} - \mu q) dy \right. \\ \left. + (Zdm - d. \frac{\lambda dz}{ds} + \mu) dz \right]$$

und man erhält also sogleich diese 3 unbestimmte Gleichungen:

$$Xdm - d. \frac{\lambda dx}{ds} - \mu p = 0$$

$$Ydm - d. \frac{\lambda dy}{ds} - \mu q = 0$$

$$Zdm - d. \frac{\lambda dz}{ds} - \mu = 0$$

welche durch Wegschaffung der Größe μ die (38) gefundene Gleichungen geben. Diese letztern aber haben noch den Vortheil zugleich den Druck zu erkennen zu geben, den jedes Element des Fadens auf die Fläche nach der (4 Abschn. 7.) gegebenen Theorie ausübt.

41) In der That ist es leicht aus dieser Theorie herzuleiten, daß die Glieder $\mu (dz - p dx - q dy)$, die aus der Bedingungsgleichung $dz - p dx - q dy = 0$ entspringen, die Wirkung einer Kraft $= \mu \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ andeuten können, die an jedem Element dm des Fadens in einer auf der Oberfläche, deren Gleichung ist $dz - p dx - q dy = 0$ oder vielmehr $dz - p dx - q dy = 0$ d. h. auf derselben Oberfläche, worauf wir den Faden liegend angenommen haben, senkrechten Richtung. Diese Fläche thut daher die Wirkung der erwähnten Kraft, die folglich dem durch den Faden

Faden auf eben dieser Fläche ausgeübten Drucke gleich und entgegengesetzt ist (4 Abschn. 8.). Der Druck jedes Punktes des Fadens wird daher

seyn $= \frac{\mu \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}{dm}$ oder wenn man die Werthe von μ ,

μp , μq , die aus den obigen Gleichungen gezogen werden, substituirt

$$= \sqrt{\left[\left(X - \frac{1}{dm} \cdot d. \frac{\lambda dx}{ds} \right)^2 + \left(Y - \frac{1}{dm} \cdot d. \frac{\lambda dy}{ds} \right)^2 + \left(Z - \frac{1}{dm} + d. \frac{\lambda dz}{ds} \right)^2 \right]}.$$

Eben diese Schlüsse wird man bei dem Theile der allgemeinen Gleichung anwenden, die auffer dem Zeichen S ist, und man wird auch den vorhergehenden analoge Folgerungen daraus ziehen.

42) Bisher haben wir angenommen, der Faden sey unausdehnbar; jetzt wollen wir ihn, als elastisch und der Ausdehnung und Zusammenziehung fähig betrachten. Es sey daher F die Kraft, womit jedes Element ds der Krümmung des Fadens sich zusammenzuziehen strebt; alsdann erhält man wie (18) (indem man ds an die Stelle von f setzt, und d in s umändert) Fds für das Moment dieser Kraft und SFds für die Summe der Momente aller Zusammenziehungskräfte, die auf die ganze Länge des Fadens wirken. Man addire daher dieses Integrale SFds zu dem Integrale S (Xdx + Ydy + Zdz), welches die Summe der Momente aller äussern Kräfte ausdrückt, die auf den Faden wirken (29). Setzt man nun das Ganze = 0; so erhält man die allgemeine Gleichung für's Gleichgewicht des elastischen Fadens.

Man siehet aber leicht, daß diese Gleichung von derselben Form seyn wird, als die (30) für den Fall eines unausdehnbaren Fadens, und daß, wenn man F in λ verwandelt, die beiden Gleichungen sogar einerley werden werden. Man hat daher im gegenwärtigen Falle dieselben besondern Gleichungen für's Gleichgewicht des Fadens, als man in dem Falle (31) gefunden hat, wenn man nur in dieser F an die Stelle des λ setzt. Da aber die Größe F als bekannt vorausgesetzt wird; so hat man nicht nöthig

nöthig sie wegzuschaffen; man hat also hier eine Gleichung mehr für's Gleichgewicht des Fadens als im angeführten Falle; weil aber sonst die Wegschaffung einer Größe allezeit erlaubt ist; so folgt hieraus, daß die aus dieser Wegschaffung entspringenden Gleichungen gleichfalls bey einem unausdehnbaren Faden sowie bey einem ausdehnbaren und elastischen statt finden werden.

Man kann hieraus den Schluß ziehen, daß die unbestimmte Größe λ der Auflösung (31), eigentlich nur die Kraft ausdrückt, womit jedes Element des Fadens der Wirkung der äussern Kräfte widersteht, die ihn zu verlängern streben, d. h. was man gewöhnlich Spannung des Fadens nennet. Eben dies hätte man auch direkte durch die Theorie (4 Abschn. 7.) finden können, so wie wir dies in Ansehung des durch den Faden auf eine Fläche ausgeübten Drucks gethan haben (41).

43) Man setze jetzt von neuem, der Faden sey unausdehnbar, aber anstatt ihn zugleich als vollkommen biegsam, wie bisher geschehen ist, anzusehen, setze man, er sey elastisch, so daß er in jedem Punkte eine Kraft habe, die ich E nennen will, die sich der Biegung des Fadens entgegen setze, und die folglich strebt den Berührungswinkel zu vermindern. Nennen wir diesen Winkel e ; so haben wir wie (26) (wenn wir nur d in δ umändern) Ede für das Moment jeder Kraft E ; folglich ist $SEde$ die Summe der Momente aller Kräfte der Elasticität, die in der ganzen Länge des Fadens wirken, welche folglich zum ersten Gliede der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht, in dem Falle, daß der Faden unausdehnbar und vollkommen biegsam sey (30) hinzuaddirt werden muß. Die ganze Schwierigkeit besteht also darin, das Integrale $SEde$ auf eine schickliche Form zu bringen; in dieser Absicht suche man zuerst den Werth von e ;

Wir haben aber (26) gefunden, daß

$$\text{Cof. } e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg}$$

☉

woraus

woraus man zieht

$$\left(\text{da } \sin^2 e = 1 - \text{Cof}^2 e = 1 - \frac{(f^2 + g^2 - h^2)^2}{4fg} \right) \quad \text{M.}$$

$$\sin^2 e = \frac{4fg - (f^2 + g^2 - h^2)^2}{4f^2g^2}$$

Um diese Formel auf den gegenwärtigen Fall anzuwenden, hat man nur nöthig zu bemerken, daß die Coordinaten $x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z'''$ wodurch wir die Größen f, g, h (11, 20) ausgedrückt haben, sich in $x, y, z; x + dx, y + dy, z + dz; x + 2dx + d^2x, y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z$; hier verwandeln so daß man hat

$$f^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

$$\begin{aligned} g^2 &= (dx + d^2x)^2 + (dy + d^2y)^2 + (dz + d^2z)^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z) + d^2x^2 \\ &\quad + d^2y^2 + d^2z^2 \end{aligned}$$

$$= ds^2 + 2ds d^2s + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2;$$

$$h^2 = (2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2$$

$$= 4ds^2 + 4ds d^2s + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2$$

$$\text{folglich } f^2 + g^2 - h^2 = -2ds^2 - 2ds d^2s$$

$$\text{und } 4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2 = 4ds^4 + 8ds^3 d^2s + 4ds^2 (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - 4(ds^2 + ds d^2s)^2$$

$$= 4ds^2 (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)$$

$$\text{folglich } \sin^2 e = \frac{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}{ds^2}$$

Da dieser Werth von $\sin^2 e$ ein unendlich kleines von der 2ten Ordnung ist; so folgt daraus, daß $\sin e$ und daher auch der Winkel e ein unendlich kleines 1ter Ordnung sey; so daß

e =

$$e = \frac{\sqrt{d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2 - d^2 s^2}}{ds}$$

und dies ist der Ausdruck für den Berührungswinkel e in einer krummen Linie von doppelter Krümmung.

44) Man differentire jetzt nach δ , um den Werth von δe zu erhalten, und da man vermöge der Bedingung der Unausdehnbarkeit des Fadens schon hat $\delta ds = 0$ (21) und folglich auch $\delta \delta s = \delta d^2 s = 0$; so kann man bey der eben genannten Differentiation ds und $d^2 s$ als beständig annehmen; auf diese Art erhält man

$$\delta e = \frac{d^2 x \delta d^2 x + d^2 y \delta d^2 y + d^2 z \delta d^2 z}{ds \sqrt{(d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2 - d^2 s^2)}}$$

Substituirt man diesen Werth von δe in $SE \delta e$ und man setzt Kürze halber

$$J = \frac{E}{ds \sqrt{(d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2 - d^2 s^2)}}$$

so hat man

$$SE \delta e = S I d^2 x \delta d^2 x + S I d^2 y \delta d^2 y + S I d^2 z \delta d^2 z.$$

Behandelt man diese Ausdrücke nach den gegebenen Regeln (4 Abschn. 17.), indem man zuerst δd in $d \delta$ verwandelt, und theilweise hernach integriert um d vor δ wegzuschaffen; so erhält man folgende veränderte Gleichungen:

$$S J d^2 x \delta d^2 x = J'' d^2 x'' d \delta x'' - d. (J'' d^2 x'') \delta x'' \\ - J' d^2 x' d \delta x' + d. (J' d^2 x') \delta x' + S d^2 (J d^2 x) \delta x$$

$$S J d^2 y \delta d^2 y = J'' d^2 y'' d \delta y'' - d. (J'' d^2 y'') \delta y'' \\ - J' d^2 y' d \delta y' + d. (J' d^2 y') \delta y' + S d^2 (J d^2 y) \delta y$$

$$S J d^2 z \delta d^2 z = J'' d^2 z'' d \delta z'' - d. (J'' d^2 z'') \delta z'' \\ - J' d^2 z' d \delta z' + d. (J' d^2 z') \delta z' + S d^2 (J d^2 z) \delta z.$$

Man addire daher diese verschiedenen Glieder zu denen, die das erste Glied der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts (30) ausmachen; und man erhält die Gleichung für's Gleichgewicht eines unausdehnbaren und elastischen Fadens.

45) Setzt man die Coefficienten der Variationen δx , δy , δz , die sich unter dem Zeichen S befinden $= 0$; so erhält man diese 3 unbestimmten Gleichungen:

$$Xdm - d \frac{\lambda dx}{ds} + d^2 (J d^2 x) = 0$$

$$Ydm - d \frac{\lambda dy}{ds} + d^2 (J d^2 y) = 0$$

$$Zdm - d \frac{\lambda dz}{ds} + d^2 (J d^2 z) = 0$$

woraus man die unbestimmte Größe λ wegschaffen muß, welches sie auf 2 bringt, die dazu hinreichen, die Krümmung des Fadens zu bestimmen.

Die erste Integration giebt

$$\frac{\lambda dx}{ds} - d (J d^2 x) = A + \int Xdm$$

$$\frac{\lambda dy}{ds} - d (J d^2 y) = B + \int Ydm$$

$$\frac{\lambda dz}{ds} - d (J d^2 z) = C + \int Zdm$$

wo A, B, C gewisse beliebige beständige Größen sind; bringt man λ weg; so hat man

$$dx d. (J d^2 y) - dy d. (J d^2 x) = [A + \int Xdm] dy \\ - [B + \int Ydm] dx$$

$$dx d. (J d^2 z) - dz d. (J d^2 x) = [A + \int Xdm] dz \\ - [C + \int Zdm] dx$$

dy d.

$$dy d. (Id^2z) - dz d. (Id^2y) = [B + fYdm] dz \\ - [C + fZdm] dy;$$

wovon die letzte Gleichung in den beiden erstern schon enthalten ist.

Diese Gleichungen sind von neuem integrabel und man erhält dadurch

$$J (dx d^2y - dy d^2x) = F + f[A + fXdm] dy \\ - f[B + fYdm] dx$$

$$J (dx d^2z - dz d^2x) = G + f[A + fXdm] dz \\ - f[C + fZdm] dx$$

$$J (dy d^2z - dz d^2y) = H + f[B + fYdm] dz \\ - f[C + fZdm] dy$$

wo F, G, H, neue beständige Größen sind.

Wir haben aber (44) angenommen

$$I = \frac{E}{ds \sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}$$

Das Quadrat des Nenners dieser Größe ist

$$= ds^2 [d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2] - ds^2 d^2s^2 \\ = [dx^2 + dy^2 + dz^2] [d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2] - [dx d^2x \\ + dy d^2y + dz d^2z]^2 \\ = (dx d^2y - dy d^2x)^2 + (dx d^2z - dz d^2x)^2 + (dy d^2z \\ - dz d^2y)^2.$$

Addirt man also die Quadrate der 3 vorhergehenden Gleichungen; so bekommt man

$$E^2 = [F + f(A + fXdm) dy - f(B + fYdm) dx]^2 \\ + [G + f(A + fXdm) dz - f(C + fZdm) dx]^2 \\ + [H + f(B + fYdm) dz - f(C + fZdm) dy]^2$$

und dividirt man zwei dieser Gleichungen mit einander; so erhält man folgende, worin die Elasticität E nicht mehr vorkömmt:

$$\frac{dx d^2 z - dz d^2 x}{dx d^2 y - dy d^2 x} = \frac{G + f(A + fXdm) dz - f(C + fZdm) dz}{F + f(A + fXdm) dy - f(B + fYdm) dx}$$

Diese beiden Gleichungen dienen auf die einfachste Art die elastische Krümmung zu bestimmen, indem man auf die doppelte Krümmung Rücksicht nimmt.

46) Wir wollen jetzt die Glieder der allgemeinen Gleichung betrachten, die ausserhalb des Zeichens S liegen; sie sind

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\lambda'' dx''}{ds''} - d. (J'' d^2 x'') \right] \delta x'' + J'' d^2 x'' d \delta x'' \\ & + \left[\frac{\lambda'' dy''}{ds''} - d. (J'' d^2 y'') \right] \delta y'' + J'' d^2 y'' d \delta y'' \\ & + \left[\frac{\lambda'' dz''}{ds''} - d. (J'' d^2 z'') \right] \delta z'' + J'' d^2 z'' d \delta z'' \\ & - \left[\frac{\lambda' dx'}{ds'} - d. (J' d^2 x') \right] \delta x' - J' d^2 x' d \delta x' \\ & - \left[\frac{\lambda' dy'}{ds'} - d. (J' d^2 y') \right] \delta y' - J' d^2 y' d \delta y' \\ & - \left[\frac{\lambda' dz'}{ds'} - d. (J' d^2 z') \right] \delta z' - J' d^2 z' d \delta z'; \end{aligned}$$

und man muß sie unabhängig von den Werthen von $\delta x''$, $\delta y''$, etc. verschwinden machen.

1) also, wenn der Faden völlig frey ist, müssen die Coefficienten der 12 Größen $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d \delta x''$, $d \delta y''$, $d \delta z''$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $d \delta x'$, $d \delta y'$, $d \delta z'$ jeder ins besonders, = 0 seyn.

Aus den ersten Integralgleichungen (45) aber sieht man, daß wenn man die Integrationen beim ersten Punkt des Fadens anfangen läßt, die Coefficienten $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ den Größen A, B, C, gleich sind, und die Coefficienten von $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ werden, $A + \int X dm$, $B + \int Y dm$, $C + \int Z dm$. Im gegenwärtigen Falle muß man also haben $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ und $\int X dm = 0$, $\int Y dm = 0$, $\int Z dm = 0$. Es muß aber auch seyn $\int d^2 x'' = 0$, $\int d^2 y'' = 0$, $\int d^2 z'' = 0$ und $\int d^2 x' = 0$, $\int d^2 y' = 0$, $\int d^2 z' = 0$ damit die Glieder, worin $d\delta x''$, $d\delta y''$, etc. vorkommen, verschwinden; auch ist klar, daß die 2ten Integralgleichungen (45) geben werden:

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0; \quad S (\int X dm. dy - \int Y dm. dx) = 0, \\ S (\int X dm. dz - \int Z dm. dx) = 0, \quad S (\int Y dm. dz - \int Z dm. dy) = 0.$$

2) Wenn das erste Ende des Fadens fest ist; so ist

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta z' = 0;$$

folglich werden A, B, C, nicht = 0 seyn; aber die Bedingung, daß die Coefficienten von $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z'' = 0$ seyen, giebt

$$A = - \int X dm$$

$$B = - \int Y dm$$

$$C = - \int Z dm;$$

und wäre die Lage der Tangente gegen dieses Ende auch gegeben; so hätte man ferner $d\delta x' = 0$, $d\delta y' = 0$, $d\delta z' = 0$ folglich F, G, H nicht = 0, aber die Bedingung, daß die Coefficienten von $d\delta x''$, $d\delta y''$, $d\delta z'' = 0$ seyen, giebt

$$F = S [(B + \int Y dm) dx - (A + \int X dm) dy]$$

$$G = S [(C + \int Z dm) dx - (A + \int X dm) dz]$$

$$H = S [(C + \int Z dm) dy - (B + \int Y dm) dz].$$

Eben diese Schlüsse wird man in Ansehung des Zustandes des 2ten Endes des Fadens machen können.

3) Gabe

3) Gäbe es endlich auſſer den Kräften, die auf alle Punkte des Fadens wirkten, beſondere $X', Y', Z', Y'', X'', Z''$, die an beiden Enden angebracht wären; ſo hätte man nur noch zu den obigen Gliedern folgende hinzuzuaddiren

$$X' \delta x' + Y' \delta y' + Z' \delta z' + X'' \delta x'' + Y'' \delta y'' + Z'' \delta z'',$$

und wären noch andere Bedingungen die ſich auf den Zuſtand dieſer Enden bezögen, vorhanden; ſo würde man immer auf dieſelbe Art und nach einerley Grundſätzen zu Werke gehen.

47) Wollte man, daß der Faden auf eine doppelte Art elastiſch ſey, nemlich ſowohl in Anſehung der Ausdehnbarkeit als in Anſehung der Biegsamkeit; ſo hätte man in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts anſtatt des Glieds $S \lambda ds$ das Glied $S F ds$ d. h. nur F ſtatt λ , wenn man F die Kraft der Elastiſität nennt, die der Ausdehnung des Fadens widerſteht (42). Allein in dieſem Falle müßte man auſſerdem noch ds als veränderlich in der Ausdrückung von de annehmen; ſolglich müßte man zum Werth von de (44) dieſe 2 Glieder hinzuzuaddiren, worin ich Kürze halber ſetze $\sqrt{(d^2 x^2 + d^2 y^2 + d^2 z^2 - d^2 s^2)} = \sigma$

$$- \frac{\sigma \delta ds}{ds^2}, - \frac{d^2 s \delta d^2 s^*}{\sigma ds};$$

zum Werth von S Ede eben dieſes Artikels würde man alſo die Glieder

$$- S \frac{E \sigma}{ds^2} \delta ds, - S \frac{E d^2 s}{\sigma ds}, \delta d^2 s$$

hinzuaddiren müſſen, wovon das letzte nach (4 Abſchn. 17.) ſo ausgedrückt werden kann:

$$- \frac{E'' d^2 s''}{\sigma'' ds''} d \delta s'' + \frac{E' d^2 s'}{\sigma' ds'} d \delta s' + S d. \frac{E d^2 s}{\sigma ds} \delta ds;$$

Zum Werthe von $S E de$ müſſen alſo noch die Glieder

*) Im franz. Original ſteht $-\frac{de^2 \delta ds}{\sigma ds}$, welches offenbar falſch iſt. 117.

$$-\frac{E''d^2s''}{\sigma''ds''} d\delta s'' + \frac{E'd^2s'}{\sigma'ds'} d\delta s' + S \left(d \cdot \frac{Ed^2s}{\sigma ds} - \frac{E\sigma}{ds^2} \right) \delta ds$$

hinzubaddirt werden. Das letzte Glied dieses Ausdrucks ist dem Gliede $SF\delta ds$ analog, und ist folglich ähnlicher Reduktionen fähig; in Ansehung der beiden andern hat man nur für $d\delta s$ dessen Werth

$$\frac{dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz}{ds}$$

zu substituiren, indem man alle Buchstaben mit einem oder zweien Strichen bezeichnet.

Hieraus ist leicht abzunehmen, daß man für die Auflösung des gegenwärtigen Falles eben die Formeln erhalten wird als (31, 32), wenn man nur

$$F + d \cdot \frac{Ed^2s}{\sigma ds} - \frac{E\sigma}{ds^2}$$

an die Stelle des λ setzt, und zu den Coefficienten $d\delta x'', d\delta y'', d\delta z'', d\delta x', d\delta y', d\delta z'$, die Größen $\omega'' dx'', \omega'' dy'', \omega'' dz'', \omega' dx', \omega' dy', \omega' dz'$ addirt, wo $\omega = -\frac{Ed^2s}{\sigma ds^2}$.

48) Wir kommen endlich zu dem Fall, wo der Faden unausdehnbar und unbiegsam ist; man erhält da für die Summe der Momente der Kräfte dieselbe Integral-Formel als in dem Fall (30) nemlich $S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dm$; endlich giebt die Bedingung, daß der Faden unausdehnbar sey, wie a. a. D., $\delta ds = 0$ und die der Unbiegsamkeit $\delta e = 0$, weil der Berührungswinkel unveränderlich seyn muß; aber diese beiden Bedingungen sind in dem Falle, wo die krumme Linie von doppelter Krümmung ist, wie wir bald sehen werden, nicht zu reichend.

49) Um die vorgegebene Frage auf die einfachste und direkteste Art zu behandeln; so merke ich an, daß alles darauf hinausgeht, daß die verschiedenen Punkte der Krümmung des Fadens unter einander immer
 einer

einerley Distanzen behalten. Betrachtet man nun mehrere auf einander folgende Punkte, deren Coordinaten seyen

$$x, y, z, x + dx, y + dy, z + dz$$

$$x + 2dx + d^2x, y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z; \text{ etc.}$$

so ist klar, daß die Quadrate der Distanzen zwischen dem ersten dieser Punkte und den folgenden durch die Größen $dx^2 + dy^2 + dz^2$, $(2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2$, $(3dx + 3d^2x + d^3x)^2 + (3dy + 3d^2y + d^3y)^2 + (3dz + 3d^2z + d^3z)^2$ etc. ausgedrückt werden müssen.

Wir wollen Kürze halber setzen

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha$$

$$d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 = \beta$$

$$d^3x^2 + d^3y^2 + d^3z^2 = \gamma.$$

etc.

Alsdann wird aus den vorhergehenden Größen werden

$$\alpha, 4\alpha + 2d\alpha + \beta, 9\alpha + 9d\alpha + 9\beta + 3(d^2\alpha - 2\beta) + 3d\beta + \gamma \text{ etc.}$$

Die Variationen dieser Größen müssen daher im ganzen Umfange der Krümmung = 0 seyn, wodurch man zu folgenden Gleichungen gelangt:

$$\delta\alpha = 0, 4\delta\alpha + 2\delta d\alpha + \delta\beta = 0,$$

$$9\delta\alpha + 9\delta d\alpha + 3\delta\beta + 3\delta d^2\alpha + 3\delta\beta + \delta\gamma = 0$$

etc.

Aber wenn $\delta\alpha = 0$; so ist auch $d\delta\alpha = \delta d\alpha = 0$;

folglich auch $\delta\beta = 0$ und daher auch

$$d^2\delta\alpha = \delta d^2\alpha = 0, d\delta\beta = \delta d\beta = 0;$$

folglich $\delta\gamma = 0$; u. s. w.

Die

Die Bedingungsgleichungen für die Unausdehnbarkeit und Unbiegsamkeit des Fadens sind also:

$\delta x = 0, \delta y = 0, \delta z = 0$, etc. d. h. wenn man differentiiert und δd in $d\delta$ verwandelt:

$$dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z = 0$$

$$d^2 x d^2 \delta x + d^2 y d^2 \delta y + d^2 z d^2 \delta z = 0$$

$$d^3 x d^3 \delta x + d^3 y d^3 \delta y + d^3 z d^3 \delta z = 0$$

etc.

Es ist klar, daß man nur 3 dieser Gleichungen nöthig hat, um die 3 Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ zu bestimmen; woraus man sogleich schließen kann, daß wenn man den 3 ersten genug gethan hat, alle andere, die man bis ins unendliche finden könnte, vor sich statt finden werden; hiervon kann man sich auch durch den Kalkül selbst überzeugen, wie man unten (55) sehen wird.

50) Man erhält also durch unsre Methode diese allgemeine Gleichung des Gleichgewichts:

$$0 = S (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dm + S \lambda (dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z) + S \mu (d^2 x d^2 \delta x + d^2 y d^2 \delta y + d^2 z d^2 \delta z) + S \nu (d^3 x d^3 \delta x + d^3 y d^3 \delta y + d^3 z d^3 \delta z)$$

welche durch die angezeigten Transformationen auf folgende Form sich bringen läßt:

$$0 = S [X dm - d(\lambda dx) + d^2(\mu d^2 x) - d^3(\nu d^3 x)] \delta x + S [Y dm - d(\lambda dy) + d^2(\mu d^2 y) - d^3(\nu d^3 y)] \delta y + S [Z dm - d(\lambda dz) + d^2(\mu d^2 z) - d^3(\nu d^3 z)] \delta z + [\lambda'' \delta x'' - d(\mu'' d^2 x'') + d^2(\nu'' d^3 x'')] \delta x''$$

$$\begin{aligned}
& + [\mu'' d^2 x'' - d(\nu'' d^3 x'')] d \delta x'' + \nu'' d^3 x'' d^2 \delta x'' \\
& + [\lambda'' dy'' - d(\mu'' d^2 y'')] + d^2(\nu'' d^3 y'')] \delta y'' \\
& + [\mu'' d^2 y'' - d(\nu'' d^3 y'')] d \delta y'' + \nu'' d^3 y'' d^2 \delta y'' \\
& + [\lambda'' dz'' - d(\mu'' d^2 z'')] + d^2(\nu'' d^3 z'')] \delta z'' \\
& + [\mu'' d^2 z'' - d(\nu'' d^3 z'')] d \delta z'' + \nu'' d^3 z'' d^2 \delta z'' \\
& - [\lambda' dx' - d(\mu' d^2 x')] + d^2(\nu' d^3 x')] \delta x' \\
& - [\mu' d^2 x' - d(\nu' d^3 x')] d \delta x' - \nu' d^3 x' d^2 \delta x' \\
& - [\lambda' dy' - d(\mu' d^2 y')] + d^2(\nu' d^3 y')] \delta y' \\
& - [\mu' d^2 y' - d(\nu' d^3 y')] d \delta y' - \nu' d^3 y' d^2 \delta y' \\
& - [\lambda' dz' - d(\mu' d^2 z')] + d^2(\nu' d^3 z')] \delta z' \\
& - [\mu' d^2 z' - d(\nu' d^3 z')] d \delta z' - \nu' d^3 z' d^2 \delta z'.
\end{aligned}$$

51) Setzt man die Coefficienten von δx , δy , δz unter dem Zeichen $S = 0$; so bekommt man folgende unbestimmte 3 Gleichungen:

$$Xdm - d(\lambda dx) + d^2(\mu d^2 x) - d^3(\nu d^3 x) = 0$$

$$Ydm - d(\lambda dy) + d^2(\mu d^2 y) - d^3(\nu d^3 y) = 0$$

$$Zdm - d(\lambda dz) + d^2(\mu d^2 z) - d^3(\nu d^3 z) = 0$$

welche 3 unbestimmte Größen λ , μ , ν enthalten, und daher nur dazu dienen diese 3 Größen zu bestimmen, so daß keine unbestimmte Gleichung zwischen den verschiedenen Kräften X , Y , Z , die man an alle Punkte der Kuthe sich angebracht denkt, statt findet.

Um die genannten Größen zu bestimmen, ist es klar, daß man die vorhergehenden Gleichungen integriren muß. Dies ist sehr leicht, und man erhält folgende 3:

fXdm

$$X dm - \lambda dx + d(\mu d^2 x) - d^2(\nu d^3 x) = A$$

$$f Y dm - \lambda dy + d(\mu d^2 y) - d^2(\nu d^3 y) = B$$

$$f Z dm - \lambda dz + d(\mu d^2 z) - d^2(\nu d^3 z) = C$$

wo A, B, C gewisse willkürliche beständige Größen sind.

Ich bemerke ferner, daß, wenn man die erstere durch dy oder dz multiplicirt, und davon die 2te oder 3te abzieht, nachdem man sie vorher mit dx multiplicirt hat, um λ aus diesen 3 Gleichungen wegzuschaffen; man erhält:

$$\begin{aligned} dy f X dm - dx f Y dm + dy d(\mu d^2 x) - dx d(\mu d^2 y) \\ - dy d^2(\nu d^3 x) + dx d^2(\nu d^3 y) = \lambda dy - B dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz f X dm - dx f Z dm + dz d(\mu d^2 x) - dx d(\mu d^2 z) \\ - dz d^2(\nu d^3 x) + dx d^2(\nu d^3 z) = \lambda dz - C dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz f Y dm - dy f Z dm + dz d(\mu d^2 y) - dy d(\mu d^2 z) \\ - dz d^2(\nu d^3 y) + dy d^2(\nu d^3 z) = B dz - C dy; \end{aligned}$$

welche Gleichungen auch integrabel sind, und deren Integralien sind:

$$\begin{aligned} y f X dm - x f Y dm - f(Xy - Yx) dm \\ + \mu(dy d^2 x - dx d^2 y) - dy d(\nu d^3 x) + dx d(\nu d^3 y) \\ + \nu(d^2 y d^3 x - d^2 x d^3 y) = \lambda y - Bx + F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z f X dm - x f Z dm - f(Xz - Zx) dm \\ + \mu(dz d^2 x - dx d^2 z) - dz d(\nu d^3 x) + dx d(\nu d^3 z) \\ + \nu(d^2 z d^3 x - d^2 x d^3 z) = \lambda z - Cx + G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z f Y dm - y f Z dm - f(Yz - Zy) dm \\ + \mu(dz d^2 y - dy d^2 z) - dz d(\nu d^3 y) + dy d(\nu d^3 z) \\ + \nu(dz d^3 y - d^2 y d^3 z) = Bz - Cy + H \end{aligned}$$

wo F, G, H neue beliebige beständige Größen sind.

Diese 3 letztern Gleichungen dienen die 3 Größen μ , ν und dv zu bestimmen, und die 3 ersten Integralgleichungen geben die Werthe von λ , $d\mu$, $d^2\nu$. Man hat also alle unbekante Größen, die in den Gliedern der allgemeinen Gleichung (50), die ausserhalb des Zeichens S liegen, vorkommen. Man hat zu dieser Absicht nichts weiter nöthig, als in den 6 ersten Gleichungen, die man eben gefunden hat, alle Buchstaben mit einem oder mit 2 Strichen, zu bezeichnen, ausser gewissen willkürlichen beständigen Größen, indem man im ersten Falle die Größen, die das Zeichen l vor sich haben $= 0$ setzt, welche am ersten Punkt des Fadens anfangen sollen, und indem man im 2ten Falle l in S bey eben diesen Größen verwanbelt, um sie auf den letzten Punkt des Fadens zu beziehen.

52) Dies vorausgesetzt, wollen wir jetzt die Bedingungen sehen, die aus dem Verschwinden der in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts (50) ausserhalb des Zeichens S befindlichen Glieder entspringen. Setzt man zuerst die Stange völlig frey; so werden die Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta \delta x'$, $\delta \delta y'$, $\delta \delta z'$, $d^2 \delta x'$, $d^2 \delta y'$, $d^2 \delta z'$, und $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $\delta \delta x''$, etc. alle unbestimmt seyn, folglich muß man jeden ihrer Coefficienten $= 0$ setzen, und es ist offenbar, daß alsdann die Größen λ' , μ' , ν' , $d\mu'$, $d\nu'$, $d^2\nu'$ sowie auch λ'' , μ'' , ν'' , $d\mu''$, $d\nu''$, $d^2\nu''$, auch alle $= 0$ seyn müssen.

Die 3 ersten Integralgleichungen (51) geben also diese Bedingungen:
 $0 = A$, $0 = B$, $0 = C$, $S X dm = A$, $S Y dm = *) B$,
 $S Z dm = C$

und die 3 letzten geben diese

$$0 = A y' - B x' + F$$

$$0 = A z' - C x' + G$$

$$0 = B z' - C y' + H$$

$$y'' S X dm - x'' S Y dm - S (X y - Y x) dm =$$

$$A y'' - B x'' + F,$$

*) Im franz. steht $S Y dm$, $S Z dm = C$. 117.

$$z''SXdm - x''SZdm - S(Xz - Zx) dm = \\ Az'' - Cx'' + G.$$

$$z''SYdm - y''SZdm - S(Yz - Zy) dm = \\ Bz'' - Cy'' + H.$$

$$\text{Folglich } A = 0, B = 0, C = 0, \\ F = 0, G = 0, H = 0,$$

daher auch

$$SXdm = 0, SYdm = 0, SZdm = 0,$$

$$S(Xy - Yx) dm = 0,$$

$$S(Xz - Zx) dm = 0,$$

$$S(Yz - Zy) dm = 0.$$

Diese 6 Bedingungen sind folglich allein zum Gleichgewicht einer un-
 beweglichen Stange nöthig, wenn kein fester Punkt vorhanden ist; und dies
 stimmt mit dem sehr gut überein, was wir oben (25) gesagt haben, man
 hätte es auch gleich aus der im 3ten Abschn. gegebenen Theorie, so wie
 wir auch a. a. D. bemerkt haben, herleiten können.

53) Wir wollen jetzt annehmen, es gäbe in der Stange ein
 fester Punkt, und es sey dieser Punkt das erste Ende derselben; in die-
 sem Falle hat man $\delta x' = 0, \delta y' = 0, \delta z' = 0$; so daß die Glieder,
 worin diese Variationen vorkommen, vor sich verschwinden. Man hat
 daher nur die Coefficienten von $d\delta x', d\delta y', d\delta z', d^2 \delta x', d^2 \delta y', d^2 \delta z'$
 so wie die Coefficienten von $\delta x'', \delta y'', \delta z'', d\delta x'', d\delta y'', \text{etc.} = 0$ zu
 setzen.

Es ist aber leicht einzusehen, daß man in dieser Hinsicht nur $\mu' = 0,$
 $\nu' = 0, d\nu' = 0$ und hierauf auch $\lambda'' = 0, \mu'' = 0, \nu'' = 0,$
 $d\mu'' = 0, d\nu'' = 0, d^2 \nu'' = 0$ wie im vorhergehenden Falle zu setzen
 hat;

hat; und man wird die nämlichen Bedingungen als im vorhergehenden Artikel finden, außer daß hier A, B, C nicht = 0 sind.

$$\text{Man hat daher } A = SX dm, B = SY dm, C = SZ dm, \\ \text{und } F = Bx' - Ay', G = Cx' - Az', H = Cy' - Bz'$$

und die 3 letztern Gleichungen verwandeln sich in folgende:

$$- S (Xy - Yx) dm = Bx' - Ay'$$

$$- S (Xz - Zx) dm = Cx' - Az'$$

$$- S (Yz - Zy) dm = Cy' - Bz';$$

$$\text{d. h. } S (Xy - Yx) dm + x' SY dm - y' SX dm = 0$$

$$S (Xz - Zx) dm + x' SZ dm - z' SX dm = 0$$

$$S (Yz - Zy) dm + y' SZ dm - z' SY dm = 0$$

oder

$$S (X(y - y') - Y(x - x')) dm = 0$$

$$S (X(z - z') - Z(x - x')) dm = 0$$

$$S (Y(z - z') - Z(y - y')) dm = 0.$$

Dies sind die einzigen zum Gleichgewicht nöthigen Bedingungen und es ist klar, daß sie mit denen übereinkommen, die man (24) gefunden hat.

54) Wäre die Ruthe mit ihrem ersten Ende fest, so daß nicht nur der erste Punkt der krummen Linie, sondern auch die Tangente an diesem ersten Punkte fest sey, so erhielte man $\delta x' = 0$, $\delta y' = 0$, $\delta z' = 0$, und $\delta \delta x' = \delta \delta y' = 0$, $\delta \delta y' = \delta \delta y' = 0$, $\delta \delta z' = \delta \delta z' = 0$; folglich werden alle Glieder, worin diese Größen vorkommen, von sich selbst verschwinden, und es ist nichts weiter übrig als daß auch die Glieder, worin $d^2 \delta x'$, $d^2 \delta y'$, $d^2 \delta z'$ und $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $\delta \delta x''$, $\delta \delta y''$, etc. vorkommen, verschwinden.

In diesem Falle hat man also diese Bedingungen
 $\mu' = 0, \lambda'' = 0, \mu'' = 0, \nu' = 0, d\mu' = 0, d\nu'' = 0, d^2\nu'' = 0.$
 Folglich wird $A = SX dm, B = SY dm, C = SZ dm.$

Reducirt man endlich die 3 letztern Gleichungen (51) auf den letzten Punkt der Stange; so hat man

$$F = S(Yx - Xy) dm$$

$$G = S(Zx - Xz) dm$$

$$H = S(Zy - Yz) dm$$

und wenn man eben diese Gleichungen auf den ersten Punkt anwendet; so hat man:

$$\mu' (dy' ddx' - dx' ddy') - d\nu' (dy' d^2x' - dx' d^2y') = Ay' - Bx' + F$$

$$\mu' (dz' ddx' - dx' d dz') - d\nu' (dz' d^2x' - dx' d^2z') = Az' - Cx' + G$$

$$\mu' (dz' ddy' - dy' d dz') - d\nu' (dz' d^2y' - dy' d^2z') = Bz' - Cy' + H.$$

Schafft man hieraus μ' und $d\nu'$ weg; so erhält man diese Bedingung für's Gleichgewicht:

$$A(y' dz' - z' dy') + B(z' dx' - x' dz') + C(x' dy' - y' dx') + Fdz' - Gdy' + Hdx' = 0.$$

Einen ähnlichen Fall sehe man (59).

Auf eben die Art könnte man alle die andern Fälle auflösen und besonders den eines Körpers von einer beliebigen Figur. Doch diese letztere Aufgabe verdient sorgfältiger und auf eine noch einfachere Art als die vorhergehende ist, betrachtet zu werden.

§. IV.

Vom Gleichgewicht eines festen Körpers von einer merklichen Größe und einer gewissen Figur, wovon alle Punkte durch gewisse Kräfte gezogen werden.

§ 3) Weil die beygefügte Bedingung der Solidität des Körpers darin besteht, daß alle seine Punkte beständig unter einander einerley Lage und Distanz behalten; so hat man zwischen den Variationen δx , δy , δz , dieselben Bedingungsgleichungen als (49); vermittelt derselben kann man also die Werthe dieser Variationen sogleich bestimmen. Ich bemerke daher, daß, indem man zu den Differentialgrößen der 2ten Ordnung übergeht, man allezeit eine der Differentialgrößen der 1ten Ordnung als beständig annehmen kann; man nehme daher $dx = \text{Const.}$ und folglich

$$d^2 x = 0, \quad d^1 x = 0 \text{ etc.}$$

Hiedurch wird die 2te und 3te Gleichung (49)

$$d^2 y d^2 \delta y + d^2 z d^2 \delta z = 0$$

$$d^3 y d^1 \delta y + d^3 z d^1 \delta z = 0$$

Die erstere giebt sogleich

$$d^2 \delta y = - \frac{d^2 z}{d^2 y} d^2 \delta z \text{ und wenn man differentiiert}$$

$$d^3 \delta y = - \frac{d^2 z}{d^2 y} d^3 \delta z - \left(\frac{d^3 z}{d^2 y} - \frac{d^2 z d^1 y}{d^2 y^2} \right) d^2 \delta z;$$

Dieser Werth in der 2ten Gleichung substituirt

(giebt

$$d^3 z d^1 \delta z - \frac{d^1 y d^2 z}{d^2 y} d^3 \delta z - \left(\frac{d^3 z}{d^2 y} - \frac{d^2 z d^1 y}{d^2 y^2} \right) d^2 \delta z = 0$$

oder

oder

$$\left(d^1 z - \frac{d^1 y d^2 z}{d^2 y} \right) d^1 \delta z - \left(d^1 z - \frac{d^2 z d^1 y}{d^2 y} \right) \frac{d^1 y}{d^2 y} d^2 \delta z \quad \text{M.)}$$

dieser Ausdruck aber kann durch $d^1 z - \frac{d^1 y d^2 z}{d^2 y}$ dividirt werden, und man bekommt nach der Division

$$d^1 \delta z - \frac{d^1 y}{d^2 y} d^2 \delta z = 0$$

woraus man durch die Integration zieht

$$d^2 \delta z = \delta L d^2 y, \text{ wo } \delta L \text{ eine gewisse beständige Größe ist.}$$

Hat man $d^2 \delta z$; so findet man $d^2 \delta y = -\delta L d^2 z$; folglich wenn man von neuen integriert und die beständigen Größen $-\delta M dx$ $+$ $\delta N dx$ hinzuaddirt:

$$d \delta z = \delta L dy - \delta M dx$$

$$d \delta y = -\delta L dz + \delta N dx;$$

und diese Werthe in die erste Bedingungsgleichung substituirt nämlich in

$$dx d \delta x + dy d \delta y + dz d \delta z = 0$$

$$\text{gibt } d \delta x = -\delta N dy + \delta M dz.$$

Endlich erhält man durch eine 3te Integration und durch die Addition neuer beständiger Größen

$$\delta \lambda, \delta \mu, \delta \nu:$$

$$\delta x = \delta \lambda - y \delta N + z \delta M$$

$$\delta y = \delta \mu + x \delta N - z \delta L$$

$$\delta z = \delta \nu - x \delta M + y \delta L.$$

Es ist leicht, sich davon zu überzeugen, daß diese Ausdrücke nicht nur den 3 ersten Bedingungsgleichungen (49) genug thun, sondern auch allen

allen andern, die man bis ins Unendliche finden könnte, und die alle in dieser allgemeinen Gleichung enthalten sind:

$$d^n x \, d^n \delta x + d^n y \, d^n \delta y + d^n z \, d^n \delta z = 0.$$

Dies sind folglich die Werthe von δx , δy , δz für ein gewisses System von Punkten, die unter einander so verbunden sind, daß sie immer einerley Distanzen von einander behalten; diese Werthe dienen daher nicht nur für den Fall einer gewissen beweglichen, und in ihrer Figur unveränderlichen krummen Linie, sondern auch für den Fall eines festen Körpers von irgend einer Figur.

56) Da also schon die vorhergehenden Werthe von δx , δy , δz den Bedingungsgleichungen der Aufgabe genug thun; so ist klar, daß man sie nur in der Formel

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \, dm$$

zu substituiren und zu machen hat, daß sie $= 0$ unabhängig von den Größen $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, δL , δM , δN werde, welches die einzigen unbestimmten Größen sind, die noch übrig sind.

Da nun aber diese Größen für alle Punkte des Körpers einerley sind; so muß man sie bey der Substitution ausserhalb des Zeichens S bringen; hiedurch erhält man diese allgemeine Gleichung des Gleichgewichts eines Körpers von einer gewissen Figur:

$$\delta\lambda SX \, dm + \delta\mu SY \, dm + \delta\nu SZ \, dm$$

$$+ \delta NS(Yx - Xy) \, dm + \delta MS(Xz - Zx) \, dm$$

$$+ \delta LS(Zy - Yz) \, dm = 0$$

woraus man die besondern Gleichungen für's Gleichgewicht erhält, indem man auf die Bedingungen der Aufgabe Rücksicht nimmt.

57) Sehen wir nun zuerst, der Körper sey völlig frey, so sind die 6 Variationen $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, δL , δM , δN , alle unbestimmt, und man muß die Größen $= 0$ setzen, womit sie multiplicirt sind, hiedurch gelangt man zu folgenden schon bekannten Gleichungen:

$$SX \, dm$$

$$S X dm = 0, S Y dm = 0, S Z dm = 0,$$

$$S (Yx - Xy) dm = 0$$

$$S (Xz - Zx) dm = 0$$

$$S (Zy - Yz) dm = 0.$$

58) Gäbe es zweitens bey dem Körper einen festen Punkt, um den er nur die Freiheit hätte sich nach allen Richtungen drehen zu können, und man nennte a, b, c die Werthe der Coordinaten x, y, z für diesen Punkt; so müßte man haben

$$\delta a = 0, \delta b = 0, \delta c = 0;$$

folglich $\delta \lambda - b \delta N + c \delta M = 0,$

$$\delta \mu + a \delta N - c \delta L = 0,$$

$$\delta \nu - a \delta M - b \delta L = 0;$$

woraus man zieht

$$\delta \lambda = b \delta N - c \delta M$$

$$\delta \mu = c \delta L - a \delta N$$

$$\delta \nu = a \delta M - b \delta L.$$

Man substituire diese Werthe in der allgemeinen Gleichung (57) und bringe unter das Zeichen S die Größen a, b, c, die in Ansehung der verschiedenen Punkte des Körpers beständig sind, man erhält dadurch folgende veränderte Gleichung

$$\delta NS (Y(x-a) - X(y-b)) dm +$$

$$\delta MS (X(z-c) - Z(x-a)) dm +$$

$$\delta LS (Z(y-b) - Y(z-c)) dm = 0$$

woraus nur folgende 3 Gleichungen entstehen

$$S (Y(x-a) - X(y-b)) dm = 0$$

$$S (X(z-c) - Z(x-a)) dm = 0$$

$$S (Z(y-b) - Y(z-c)) dm = 0.$$

59) Gibt es ztens bey dem Körper 2 feste Punkte und sind f, g, h die Werthe von x, y, z , für den 2ten dieser Punkte; so hat man noch

$$\delta \lambda = g \delta N - h \delta M$$

$$\delta \mu = h \delta L - f \delta N$$

$$\delta \nu = f \delta M - g \delta L$$

vergleicht man daher diese Werthe von $\delta \lambda, \delta \mu, \delta \nu$, mit denen (58); so hat man

$$(g - b) \delta N - (h - c) \delta M = 0$$

$$(f - a) \delta N - (h - c) \delta L = 0$$

$$(f - a) \delta M - (g - b) \delta L = 0.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen geben

$$\delta L = \frac{f - a}{h - c} \delta N, \quad \delta M = \frac{g - b}{h - c} \delta N$$

und da diese Werthe auch der 3ten Gleichung genug thun; so folgt, daß die Variation δN unbestimmt bleibt.

Berichtet man diese Substitutionen in der veränderten Gleichung (58); so erhält man

$$\begin{aligned} \delta N [(h - c) S (Y (x - a) - X (y - b)) dm + \\ (g - b) S (X (z - c) - Z (x - a)) dm + \\ (f - a) S (Z (y - b) - Y (z - c)) dm] = 0. \end{aligned}$$

Die Bedingungen des Gleichgewichts werden also in dieser einzigen Gleichung enthalten seyn:

$$\begin{aligned} (h - c) S (Y (x - a) - X (y - b)) dm + \\ (g - b) S (X (z - c) - Z (x - a)) dm + \\ (f - a) S (Z (y - b) - Y (z - c)) dm = 0. \end{aligned}$$

60) Ueberhaupt wären die beiden Punkte des Körpers, die wir eben als fest angenommen haben, es nicht, sondern auf gegebenen Linien oder Flächen beweglich, oder selbst auf eine gewisse Art mit einander verbunden; so hätte man alsdann eine oder mehrere Differentialgleichungen zwischen den Variationen der Coordinaten a, b, c, f, g, h , die zu diesen Punkten gehören, und setzt man an die Stelle dieser Variationen ihre Werthe in $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu, \delta L, \delta M, \delta N$, nach den allgemeinen Formeln (55); so hat man eben so viele Gleichungen zwischen diesen letztern Variationen, durch deren Hülfe man einige dieser Variationen durch die andern bestimmt. Substituirt man hernach diese Werthe in der allgemeinen Gleichung, und setzt jeden der Coefficienten der übrigen Variationen $= 0$; so erhält man alle zum Gleichgewicht nöthige Gleichungen.

Man geht hier, wie man sieht, mit dem Calcul immer einerley Weg, und dies muß man für einen der Hauptvorteile der gegenwärtigen Methode erkennen.

61) Uebrigens zeigen die (55) gefundenen Ausdrücke der Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$, daß dieselben nichts als die Resultate der fortrückenden und drehenden Bewegungen sind; die wir im allgemeinen im 3ten Abschn. betrachtet haben.

In der That sieht man, daß die Glieder $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$, die allen Punkten des Körpers gemein sind, die kleinen Räume die der Körper nach den Richtungen der Coordinaten x, y, z , durch eine gewisse fortrückende Bewegung durchlaufen hat, vorstellen; auch erkennt man aus den Formeln (3 Abschn. 3.), daß die Glieder

$$z\delta M - y\delta N, x\delta N - z\delta L, y\delta L - x\delta M$$

die kleinen Räume ausdrücken, die durch jeden Punkt des Körpers nach eben diesen Richtungen durch 3 drehende Bewegungen $\delta L, \delta M, \delta N$ um die 3 Achsen der x, y, z durchlaufen worden sind, wo diese Größen $\delta L, \delta M, \delta N$ den Größen $d\psi, d\omega, d\phi$, a. a. D. entsprechen. Man hätte also die gegenwärtigen Ausdrücke sogleich aus der bloßen Betrachtung dieser Bewegungen herleiten können, welches zwar einfacher jedoch weniger direct gewesen seyn würde. Die vorhergehende Analyse führt ganz natürlich auf diese

Aus.

Ausdrückungen, und beweist dadurch auf eine allgemeine und direkte Art, daß, wenn die verschiedenen Punkte eines Systems ihre respektive Lage immer beibehalten, das System nur in jedem Augenblicke fortrückende Bewegungen im Raume und drehende Bewegungen um die 3 auf einander senkrechten Achsen haben kann.

Sechster Abschnitt.

Von den Grundlehren der Hydrostatik.

Shnerachtet wir die innere Beschaffenheit der flüssigen Körper nicht kennen; so können wir dennoch nicht daran zweifeln, daß die Theile, woraus sie bestehen, materiel sind, und daß aus dieser Ursache die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts ihnen eben so zukommen, wie den festen Körpern. In der That besteht auch die vornehmste Eigenschaft der flüssigen Körper, die allein sie von den festen unterscheidet, darin, daß alle ihre Theile dem geringsten Drucke weichen, und mit der größten Leichtigkeit sich unter einander bewegen können, die Verbindung und gegenseitige Wirkung dieser Theile mag übrigens beschaffen seyn, wie sie will. Da nun diese Eigenschaft leicht sich durch den Kalkul ausdrücken läßt; so folgt, daß die Gesetze des Gleichgewichts der flüssigen Körper keine besondere Theorie erfordern, sondern daß sie nur ein besonderer Fall der allgemeinen Theorie der Statik seyn müssen. Unter diesem Gesichtspunkt wollen auch wir sie betrachten; aber wir glauben damit den Anfang machen zu müssen, daß wir kurz die verschiedenen Grundsätze hererzählen, die bis jetzt in diesem Theile der Statik, den man gemeinlich Hydrostatik nennt, angewandt worden sind.

Archimedes ist der älteste Schriftsteller, der uns einige Grundsätze über das Gleichgewicht der flüssigen Massen hinterlassen hat. Sein Traktat

Traktat *de insidentibus humido* ist nie griechisch gefunden worden, man hatte auch nur eine sehr fehlerhafte lateinische Uebersetzung davon bis Commendin es unternahm, ihn wieder herzustellen und durch Noten zu erläutern; er erschien durch die Sorgfalt dieses geschickten Commentators im Jahr 1565. unter dem Titel *de Fis quae vehuntur in aqua*. Dies Werk, das man als ein der kostbarsten Reste des Alterthums ansehen kann, ist in 2 Bücher abgetheilt. Im ersten setzt Archimedes folgende 2 Grundsätze fest, die er als Erfahrungssätze annimmt, und worauf er seine ganze Theorie baut: 1) daß die Natur der flüssigen Körper so beschaffen ist, daß die weniger gedrückten Theile durch die mehr gedrückten weggetrieben werden, und daß jeder Theil jederzeit durch das Gewicht der Säule gedrückt wird, die ihm vertikal entspricht. 2) daß alles, was durch eine flüssige Masse in die Höhe getrieben wird, nach einer senkrechten Linie in die Höhe getrieben wird, die durch dessen Schwerpunkt geht.

Aus dem ersten Satze schließt Archimedes sogleich, daß die Oberfläche einer flüssigen Masse, deren Theile alle gegen den Mittelpunkt der Erde schwer angenommen werden, eine sphärische Gestalt haben müsse, wenn die flüssige Masse im Gleichgewicht seyn soll. Hierauf zeigt er, daß ein Körper, der eben so schwer als ein gleiches Volumen der flüssigen Masse ist, darin völlig unter sinken muß, denn wenn man 2 gleiche Pyramiden der flüssigen Masse betrachtet, die um das Centrum der Erde im Gleichgewicht seyen; so würde diejenige, worin der Körper nur zum Theil eingesunken wäre, einen geringern Druck auf das Centrum der Erde oder überhaupt auf eine gewisse sphärische Oberfläche, die man sich um dies Centrum denkt, ausüben, als die andere. Auf gleiche Art beweist er, daß Körper die leichter als ein gleiches Volumen der flüssigen Masse sind, nur soweit niedersinken können, bis daß der niedergesunkene Theil die Stelle eines Volumens der flüssigen Masse einnimmt, das eben so schwer ist, als der ganze Körper; hieraus leitet er denn diese beiden hydrostatischen Theoreme her, daß Körper, die leichter sind als gleiche Volumina der flüssigen Masse, wenn sie darin eingetaucht werden, mit einer Kraft von unten in die Höhe getrieben werden, die dem Ueberschuß des Gewichts der flüssigen Masse, die aus der Stelle getrieben ist, über das Gewicht des eingetauchten Körpers gleich ist, und daß die schwerern Körper darinn

einen Theil ihres Gewichts verlieren, der dem Gewichte der aus der Stelle getriebenen flüssigen Masse gleich ist.

Archimedes bedient sich hierauf seines 2ten Grundsatzes, um die Gesetze des Gleichgewichts der Körper, die auf einer flüssigen Masse schwimmen, festzusetzen; er erweist, daß jeder Kugelschnitt, der leichter ist als ein gleiches Volumen der flüssigen Masse, wenn er darinn eingetaucht wird, nothwendig eine solche Lage annehmen muß, daß die Basis horizontal sey; sein Beweis besteht darin, daß er zeigt, daß wenn die Basis geneigt wäre, das ganze Gewicht des Körpers, das man im Schwerpunkt sich vereinigt vorstellen kann, und die Kraft, vermöge der die flüssige Masse alles vertikal in die Höhe zu treiben strebt, und die man sich auch im Schwerpunkt gleichsam concentrirt denken kann, allezeit so lange dem Körper eine drehende Bewegung mittheilen würden, bis daß seine Basis horizontal geworden wäre.

Dies ist der Inhalt des ersten Buchs. Im 2ten giebt Archimedes nach eben diesen Grundsätzen die Gesetze des Gleichgewichts verschiedener durch die Umwälzung der Kegelschnitte gebildeter Körper an, wenn sie in flüssige Massen eingetaucht werden, die schwerer als diese Körper selbst sind; er betrachtet den Fall, wo diese Conoïden darin geneigt seyn können, diejenigen, wo sie sich aufrecht erhalten müssen, und diejenigen, wo sie sich umkehren oder sich wieder aufrichten müssen. Dies Buch ist eins der schönsten Monumente des Genies des Archimedes, und enthält eine Theorie der schwimmenden Körper, wozu die Neuern nur wenig hinzugefügt haben.

So leicht es auch nach dem was Archimedes gezeigt hatte, war, den Druck einer flüssigen Masse auf den Boden oder die Seitenwände des Gefäßes, worin sie verschlossen ist, zu bestimmen; so ist doch Stevin der erste, der diese Untersuchung unternahm, und der das hydrostatische Paradox erfand, daß eine flüssige Masse einen weit größeren Druck ausüben kann, als ihr eigen Gewicht ist. Diese hydrostatische Theorie Stevin's findet sich im 2ten Tom. der *Hypomnemata Mathematica*, die Snellius aus dem holländischen übersezt und 1608 zu Leyden herausgegeben hat. Nachdem er erwiesen hat, daß ein fester Körper von einer gewissen Figur
und

und von derselben Schwere als das Wasser, darin in jeder Lage bleiben kann, weil er immer einerley Platz einnimmt, und so viel wiegt als wenn es Wasser wäre; so stellt er sich ein rechtwinklichtes mit Wasser angefülltes Gefäß vor, und zeigt leicht, daß sein Boden das ganze Gewicht des Wassers tragen muß, welches das Gefäß erfüllet. Er nimmt hierauf an, daß man in dies Gefäß einen festen Körper von irgend einer Figur und von einerley Schwere mit dem Wasser tauche; alsdann ist klar, daß der Druck derselbe bleiben wird; so daß, wenn man dem eingetauchten festen Körper eine solche Figur gäbe, daß er nur eine Röhre der flüssigen Masse von irgend einer Figur bleibe, der Druck dieser Röhre auf die Grundfläche noch immer derselbe, und folglich dem Gewichte einer vertikalen Säule von Wasser von eben der Grundfläche gleich seyn wird. Nun bemerkt Stevin, daß wenn man diesen festen Körper fest an einer Stelle sich vorstellt, keine Veränderung in der Wirkung des Wassers auf den Boden des Gefäßes erfolgen kann; der Druck auf diesen Boden wird also immer dem Gewichte eben dieser Wassersäule gleich seyn, die Figur des Gefäßes mag auch auf irgend eine Art beschaffen seyn. Stevin geht hierauf weiter und bestimmt den Druck des Wassers auf senkrechte oder geneigte Wände, er theilt ihre Oberfläche durch horizontale Linien in mehrere kleine Theile, und zeigt, daß jeder Theil mehr gedrückt wird, als wenn er horizontal und in der Höhe des obern Randes wäre, und daß er zugleich weniger gedrückt wird, als wenn er horizontal in der Höhe des untern Randes wäre. Er verringert nun die Breite der Theile immer mehr, vermehrt aber zugleich ihre Zahl bis ins Unendliche, und beweist durch die Methode der Grenzen, daß der Druck auf eine geneigte ebene Seitenwand dem Gewicht einer Säule gleich ist, davon diese Seitenwand die Grundfläche und deren Höhe der halben Höhe des Gefäßes gleich ist. Endlich bestimmt er den Druck auf einen gewissen Theil einer ebenen geneigten Seitenwand, und findet, daß er dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, die entsteht, wenn man an jedem Punkte dieses Theiles gerade Linien senkrecht anbringt, die der Tiefe dieses Punktes unter dem Wasser gleich sind. Nachdem dieses Theorem für gewisse Ebenen, wie auch ihre Lage beschaffen seyn mag, erwiesen ist; so ist es leicht, es auf gewisse krumme Flächen zu erstrecken und daraus den Schluß zu ziehen, daß der durch ein schweres Fluidum gegen irgend eine Fläche ausgeübte Druck das

Gewicht einer Säule von eben diesem Fluido zum Maaße hat, welche dieselbe Fläche zur Basis hat, die, wenn es nöthig ist, in eine ebene Fläche verwandelt werden könne, und deren Höhen, die den verschiedenen Punkten der Grundfläche entsprechen, den Distanzen der correspondirenden Punkte der Oberfläche von der horizontalen Linie des Fluidums gleich sind, oder, welches auf eins hinauskommt, dieser Druck wird von dem Gewichte einer Säule gemessen werden, die zur Grundfläche die gedrückte Fläche und zur Höhe die vertikale Distanz des Schwerpunkts eben dieser Fläche von der oberen Fläche des Fluidum's hat.

Die vorhergehenden Theorien des Gleichgewichts und des Drucks der flüssigen Masse hängen, wie man sieht, nicht im geringsten von den allgemeinen Principien der Statik ab; sie gründen sich vielmehr völlig auf Erfahrungssätze, die den flüssigen Massen allein eigen sind. Diese Methode die Gesetze der Hydrostatik zu erweisen, indem man aus einer auf die Erfahrung sich gründenden Erkenntniß einiger dieser Gesetze die aller andern herleitet, ist von den meisten neuern Schriftstellern angenommen worden, und hat aus der Hydrostatik eine von der Statik ganz verschiedene und unabhängige Wissenschaft gemacht.

Es war jedoch von Wichtigkeit diese beiden Wissenschaften zu verbinden, und beide von einem und eben demselben Princip abhängen zu lassen. Unter den verschiedenen Principien, die der Statik zur Basis dienen können, und wovon wir eine kurze Erzählung im ersten Abschnitt gegeben haben, sieht man, ist keins als das Princip des Bestrebens nach Geschwindigkeit, das sich eben so natürlich beim Gleichgewicht flüssiger Körper anwenden läßt. Auch hat sich Galiläus, der Urheber dieses Principis, desselben auf gleiche Weise bedient die vornehmsten Lehrsätze sowohl der Statik als Hydrostatik zu erweisen. In seiner Unterredung *intorno alle cose che stanno in su l'acqua o che in quella si muovono* leitet er sogleich aus diesem Princip das Gleichgewicht des Wassers in einem Heber her, indem er zeigt, daß wenn man die flüssige Masse von einerley Höhe in den beiden Armen annimmt, sie weder in dem einen fallen, noch in dem andern steigen kann, wenn nicht die Momente in dem Theil des Fluidums der fällt, und in demjenigen, der steigt, gleich sind. Auf eine ähnliche Art erweist

erweist Galiläus das Gleichgewicht der flüssigen Massen mit den fester Körpern, die darin eingetaucht werden; und ohneachtet seine Beweise die gehörige Strenge, die man hier erwarten konnte, nicht zu haben scheinen; so ist es doch leicht sie hier anzubringen, wenn man nur das genannte Princip in seiner ganzen Allgemeinheit betrachtet, wie dies nachher auch der Abt Grandi in seinen Notizen zu eben diesem Traktat des Galiläus gethan hat. Des Cartes und Pascal wendeten eben dies Princip des Bestrebens nach Geschwindigkeit ebenfalls in der Hydrostatik an, besonders bediente sich letzterer desselben sehr in seinem Traktat *de l'équilibre des liqueurs*, und bewies dadurch die vornehmste Eigenschaft der flüssigen Körper; nemlich daß irgend ein an einem Punkte ihrer Oberfläche angebrachter Druck sich gleichförmig nach allen andern Punkten verbreitet *).

So sehr dieses Princip aber vor andern den Vorzug hat, daß es einfach und doch allgemein ist sowohl für das Gleichgewicht der flüssigen Körper als für das der festen Körper, so ist es dem ungeachtet doch von den meisten neuern Schriftstellern, die über die Hydrostatik geschrieben haben besonders aber von denjenigen hindangesezt worden, welche es unternahmen die Grenzen dieser Wissenschaft zu erweitern, und die Gesetze des Gleichgewichts heterogener Flüssigkeiten zu suchen, deren Theile insgesammt durch gewisse Kräfte getrieben werden; diese Untersuchung ist besonders deswegen sehr wichtig, weil sie mit dem berühmten Problem der Figur der Erde in Verbindung steht.

R 3

Zuy

*) Es ist dies die nämliche Eigenschaft die nachher unter andern besonders Hr. Euler zur Grundlage für die Theorie flüssiger Körper angenommen hat. *Quaelibet pressio*, sagt er im 13. Bande der neuen Petersburgischen Commentarien, *fluidis applicata per totam eorum massam ita diffunditur, ut omnes eorum partes eandem sentiant pressionem, quatenus scilicet fluidum in aequilibris persistit*. Eben diese Eigenschaft nahm er auch in vielen andern Orten so wie auch in mehreren Abhandlungen in den Schriften der Petersburger und Berliner Akademie zur Grundlage an. Eben dies that auch d'Allembert in *son traité d'équilibre et du mouvement des fluides*. Uebrigens sind derartigen Eigenschaften an sich nicht geschickt genug, unmittelbar auf eine Gleichung zu führen, allen sie sind vorzüglich geschickt dem Calcul zur Grundlage zu dienen, indem sie die damit versehenen Körper vorzüglich bezeichnen. M.

Suyghens nahm bey dieser Untersuchung zum Grundsatz des Gleichgewichts an, daß die Schwere auf die Oberfläche senkrecht sey. Newton gieng von dem Grundsatz der Gleichheit der Gewichte centraler Säulen aus. Bruguer merkte hierauf an, daß oft diese beiden Grundsätze nicht einerlei Resultat gäben, und schloß daraus, daß, wenn das Gleichgewicht einer flüssigen Masse statt finden sollte, beide Grundsätze zugleich statt haben, und sich vereinigen müßten der Oberfläche des Fluidum's einerley Gestalt zu geben. Aber der verstorbene Hr. Clairaut bewies, daß es Fälle geben könne, wo auch diese Uebereinstimmung statt finde, und wo dennoch kein Gleichgewicht vorhanden wäre. Maclaurin machte Newtons Princyp noch allgemeiner, indem er festsetzte, daß bey einer flüssigen im Gleichgewicht sich befindenden Masse jeder Theil durch alle geradlinigte Säulen des Fluidums gleich gedrückt werde, welche auf diesen Theil sich stützen und an der Oberfläche sich endigen. Herr Clairaut machte diesen Grundsatz noch allgemeiner, indem er zeigte, daß das Gleichgewicht einer flüssigen Masse es erfodere, daß die Kräfte aller Theile des Fluidum's, die in einer gewissen Röhre eingeschlossen sind, bey der Oberfläche sich endigen oder in sich selbst zurückkehren und sich so gegenseitig aufheben. Endlich leitete er auch zuerst aus diesem Grundsätze die wahren Fundamentalgesetze des Gleichgewichts einer flüssigen Masse her, deren Theile durch gewisse Kräfte getrieben werden, und fand die Gleichungen in partiellen Differentialien, wodurch man diese Gesetze ausdrücken kann. Diese Entdeckung gab der Hydrostatik ein ganz anderes Ansehen, und schuf sie gleichsam zu einer neuen Wissenschaft um.

Der Grundsatz des Hrn. Clairaut ist nur eine nothwendige Folge von dem Grundsatz der Gleichheit des Drucks nach allen Seiten. Auch hat Hr. D'Alembert sogleich aus diesem Grundsätze die nämlichen Differentialgleichungen hergeleitet, die Hr. Clairaut durch den seinigen gefunden hatte. In der That muß man auch gestehen, daß dieser Grundsatz die einfachste und allgemeinste Eigenschaft enthält, die die Erfahrung beim Gleichgewicht der flüssigen Körper hat wahrnehmen können. Aber ist die Erkenntniß dieser Eigenschaft bey der Untersuchung der Gesetze des Gleichgewichts flüssiger Körper wohl nothwendig? Kann man diese Gesetze wohl nicht aus der Natur der flüssigen Körper selbst herleiten, indem

Indem man sie als eine Menge von Theilchen betrachtet, die sehr wenig unter einander verbunden sind, gar nicht von einander abhängen, und nach allen Richtungen vollkommen beweglich sind? Dies will ich in den folgenden Abschnitten zu thun suchen, und nur das allgemeine Grundgesetz des Gleichgewichts dabey anwenden, dessen ich mich schon bey den festen Körpern bedient habe. Dieser Theil meiner Arbeit wird nicht nur eine der schönsten Anwendungen dieses Princips geben, sondern auch dazu dienen, in einigen Stücken die Theorie der Hydrostatik zu vereinfachen.

Bekanntlich werden die flüssigen Körper in 2 Arten eingetheilt: in unpressbare (fluides incompressibles), deren Theile zwar ihre Figur verändern können, ohne jedoch ihr Volumen zu verändern, und in pressbare (fluides compressibles) oder elastische, deren Theile zugleich an Figur und Volumen eine Aenderung leiden können, und allezeit mit einer bekannsten Kraft sich auszubreiten streben, die man gewöhnlich einer Funktion der Dichtigkeit proportional annimmt.

Das Wasser, das Quecksilber u. s. w. gehören zur erstern Art; die Luft, der Dampf des kochenden Wassers u. s. w. aber zur 2ten Art *).

Wir

*) Die Natur kennt freilich den Unterschied zwischen pressbaren und unpressbaren flüssigen Massen wahrscheinlich eben so wenig als sie völlig harte und völlig weiche Körper kennt; ein Ding besitzt eine Eigenschaft immer in einem höhern Grade als ein anderes, und so giebt es eine unendliche Verschiedenheit. Aber der Mensch, dem es um Eigenschaften zu thun ist, die in die Sinne fallen, und wodurch er im Stande ist eins vom andern zu unterscheiden, spricht einem Dinge eine Eigenschaft ab, die es in einem zu geringen Grade besitzt, als daß er sie mit seinen schwachen Sinneswerkzeugen bemerke, und auf gleiche Weise schreibt er einem Dinge eine Eigenschaft ohne Einschränkung zu, wo er nur nicht im Stande ist, diese Einschränkung wahrzunehmen. So ist die Luft weder unbearbeitet elastisch, noch das Wasser völlig unpressbar oder der Zusammendrückung unfähig. Vom erstern haben uns zwar noch zur Zeit keine Versuche überzeugt, allein wir können aus andern Gründen mit der größten Wahrscheinlichkeit schließen, daß es sowohl eine Grenze für die Verdichtung gebe, bey der die Luft keiner fernern Verminderung ihres Volumens mehr fähig ist, als
auch

Wir wollen zuerst vom Gleichgewicht der unpressbaren Flüssigkeiten handeln, und hierauf von dem der pressbaren oder elastischen.

auch ein gewisser Grad der Ausbreitung oder Verdünnung statt findet, bey der ihr die Elasticität entgeht. Vom andern aber sind wir auch a posteriori überzeugt, denn geschweige daß die Verminderung und Zunahme des Volumens beim Wasser sehr in die Augen fallend bey der Aenderung der Wärme und Kälte erfolgt, wovon uns ein mit Wasser angefülltes Thermometer hinlänglich überzeugen kann, so ist es auch einigen Physikern geglückt, durch eine sehr große Gewalt das Wasser um eine geringe Größe, die aber darum doch eine Größe bleibt, zusammenzudrücken. Wir haben das Wasser und die Luft hier besonders angeführt, weil sie am bekanntesten sind, allein was wir von ihnen gesagt haben, gilt eben so gut von andern, und wir glauben dreiste behaupten zu können, es gäbe kein Fluidum, das nicht in einem gewissen Grade elastisch sey, und wo diese Elasticität nicht eine gewisse Grenze habe. 17.

Siebenter Abschnitt.

Vom Gewicht der unpreßbaren flüssigen Massen.

1) Es sey in eine flüssige Masse, wovon alle Punkte durch die Schwere oder durch gewisse Kräfte $P, Q, R, \text{etc.}$, deren Richtungen die Linien $p, q, r, \text{etc.}$ sind, getrieben werden, alsdenn erhält man nach (4 Abschn. 12.), wenn man die daselbst gebrauchten Benennungen beibehält, für die Summe der Momente aller Kräfte die Integralsformel

$$S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}) dm$$

welche = 0 überhaupt seyn muß, wenn das Fluidum im Gleichgewicht seyn soll.

2) Wir wollen zuerst das Fluidum in eine Röhre, die unendlich eng und von einer gegebenen Figur ist, uns eingeschlossen denken, und es uns in unendlich kleine Schichten oder Theile eingetheilt vorstellen, deren Höhe ds und die Breite = ω ist; man könnte alsdann $dm = \omega ds$ setzen, weil die Breite der Röhre ω als unendlich klein angenommen worden ist, und ds das Element der Krümmung der Röhre ist. Stellen wir uns nun vor, die flüssige Masse erhalte eine kleine Bewegung und verändere unendlich wenig ihre Stelle in der Röhre, und es sey ds der kleine Raum den die Schichte oder das Theilchen dm in der Röhre durchläuft; so ist klar, daß ωds die Größe der flüssigen Masse seyn wird, die zu gleicher Zeit durch jede der Schnitte ω der Röhre gehen wird. Wegen der Unpreßbarkeit der flüssigen Masse aber muß diese Größe überall einerley seyn, setzt man also $\omega ds = \alpha$; so wird die Größe α in Ansehung der Krümmung der Röhre beständig seyn.

Man hat aber $\omega = \frac{\alpha}{ds}$ und folglich $dm = \frac{\alpha ds}{ds}$. Setzt man also

S

die

die beständige Größe α ausserhalb des Integralzeichens S so wird aus der Formel, die die Summe der Momente der Kräfte ausdrückt:

$$\alpha S (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.}) \frac{ds}{ds}$$

Man sieht aber leicht, daß weil δp , δq , δr die Variationen der Linien P , q , r , etc. sind, die von der Variation ds herkommen, sie dieselben Verhältnisse haben müssen, als die Differentialien dp , dq , dr , etc. ds wegen der gegebenen Figur der Röhre.

$$\text{Man hat also } \frac{\delta p}{ds} = \frac{dp}{ds}, \quad \frac{\delta q}{ds} = \frac{dq}{ds},$$

$$\frac{\delta r}{ds} = \frac{dr}{ds} \text{ etc.}$$

Es wird daher aus der vorhergehenden Formel:

$$\alpha S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.})$$

wo die Differentialien dp , dq , dr , etc. sich auf die Krümmung der Röhre beziehen, und wo das Zeichen S ein Integral andeutet, das nach den ganzen Umfang der Röhre genommen ist. Setzt man daher diese Größe $= 0$ so hat man

$$S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}) = 0$$

welche Gleichung das allgemeine Gesetz des Gleichgewichts einer flüssigen Masse enthält, die in einer Röhre von einer gewissen Figur eingeschlossen ist.

3) Gäbe es ausser den Kräften P , Q , R , etc., die auf jeden Punkt der flüssigen Masse wirken, noch eine äussere Kraft Π' an einem der Enden der Röhre die mit Hilfe eines Stempels auf die Fläche des Fluidums und senkrecht auf die Seitenwände der Röhre wirkte; und bezeichnen wir alsdenn durch δ' den kleinen Raum, den die Schichte des Fluidums, das nach der Voraussetzung von der Kraft Π' gedrückt worden ist, durchläuft, während daß die andern Schichten die verschiedenen Räume ds durchlaufen;

so

so müßte man zur Summe der Momente der Kräfte P, Q, R, etc. das Moment der Kraft Π' welches durch $\Pi' \delta s'$ vorgestellt wird, addiren. Nennt man daher ω' den Schnitt der Röhre an dem Ort, wo die Kraft Π' wirkt; so hat man $\omega' \delta s'$ für die Größe der flüssigen Masse, die durch den Schnitt ω' geht, während daß durch einen andern Schnitt ω die Größe der flüssigen Masse $\omega \delta s$ geht.

Die Unpressbarkeit des Fluidum's aber erfordert, daß diese Größen überall einerlei seyen; hat man daher $\omega \delta s = \alpha$ gesetzt; so hat man auch

$\omega' \delta s' = \alpha$; folglich $\delta s' = \frac{\alpha}{\omega'}$. Folglich wird die ganze Summe der Mo-

mente der Kräfte die auf die flüssige Masse wirken, durch die Formel

$\alpha \left(\frac{\Pi'}{\omega'} + S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}) \right)$ ausgedrückt werden

können, so daß die Gleichung für's Gleichgewicht seyn wird

$$\frac{\Pi'}{\omega'} + S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}) = 0.$$

4) Es ist offenbar, daß im Zustande des Gleichgewichts die Kraft Π' durch den Druck der flüssigen Masse auf den Stempel aufgehalten wird, dessen Breite $= \omega'$ ist; dieser Druck wird folglich $= - \Pi'$ seyn, und folglich $= \omega' S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.})$.

Daher wird überhaupt der Druck der flüssigen Masse auf jeden Punkt des Stempels durch die Integralsformel

$$S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.})$$

ausgedrückt, wenn man dieses Integrale für die ganze Länge der Röhre annimmt. Dieser Druck wird auch der nämliche seyn, wenn man anstatt eines beweglichen Stempels einen unbeweglichen Boden annimmt, der die Röhre auf einer Seite verschließt.

5) Wäre am andern Ende der Röhre eine andere Kraft Π'' angebracht, die ebenfals mittelst eines Stempels wirkte; so fände man

auf gleiche Weise, wenn man ω'' den Schnitt der Röhre an diesem Orte nennete, die Gleichung:

$$\frac{\Pi'}{\omega'} + \frac{\Pi''}{\omega''} + S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}) = 0$$

für das Gleichgewicht der flüssigen Masse.

6) Wird also das Fluidum nur durch die beiden äussern Kräfte Π' Π'' gedrückt, die an den Flächen ω' und ω'' angebracht sind; so müßte man für's Gleichgewicht haben $\frac{\Pi'}{\omega'} + \frac{\Pi''}{\omega''} = 0$; woraus man sieht,

daß die beiden Kräfte Π' Π'' entgegengesetzte Richtungen haben müssen, und zu gleicher Zeit umgekehrt den Flächen ω' , ω'' , worauf sie wirken, proportional seyn müssen. Diesen Satz sieht man gemeinlich bloß als einen Erfahrungssatz an, oder wenigstens als eine Folge der Gleichheit des Drucks nach allen Seiten, worin der größte Theil der Schriftsteller der Hydrostatik die Natur der flüssigen Körper sehen.

7) Sind die Gesetze des Gleichgewichts einer in einer sehr engen Röhre von einer gewissen Figur eingeschlossnen flüssigen Masse bekannt; so ist es nicht schwer die Gesetze des Gleichgewichts einer flüssigen Masse herzuleiten, sie mag nun entweder in einem Gefäße eingeschlossen seyn oder nicht.

Denn es ist offenbar, daß, wenn eine flüssige Masse im Gleichgewicht ist, und man sich eine gewisse Röhre vorstellt, die mitten durch dieselbe geht, die in dieser Röhre enthaltene flüssige Masse auch im Gleichgewicht von selbst d. h. unabhängig von allen übrigen Theilen des Fluidums seyn wird. Man hat also für das Gleichgewicht dieser Röhre, wenn man auf die äussern Kräfte keine Rücksicht nimmt (10)

$$S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}) = 0$$

und da die Figur der Röhre unbestimmt seyn muß; so muß die vorhergehende Gleichung immer statt finden, indem man dieser Figur eine gewisse Veränderung giebt.

Wir

Wir wollen durch Φ überhaupt den Werth des Integrals

$$S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}),$$

welches für die ganze Länge der Röhre genommen ist, ausdrücken, so daß die Gleichung für's Gleichgewicht der Röhre seyn wird: $\Phi = 0$ und wenn man die Variationen durch das Zeichen δ ausdrückt; so wird man allgemein haben: $\delta \Phi = 0$.

$$\text{Aber } \delta \Phi = \delta S (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.})$$

$$= S \delta (P dp + Q dq + R dr + \text{etc.})$$

$$= S (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.})$$

$$+ \delta P dp + \delta Q dq + \delta R dr + \text{etc.}).$$

Berwandelt man nun δd in $d\delta$ und läßt hernach das doppelte Zeichen $d\delta$ durch Integrationen, die man theilweise verrichtet, nach den bekannten Grundsätzen des Variations-Calculus verschwinden; so hat man

$$\delta \Phi = P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \text{etc.}$$

$$+ S (\delta P dp - dP \delta p + \delta Q dq - dQ \delta q$$

$$+ \delta R dr - dR \delta r + \text{etc.}).$$

wo die Glieder, die sich außerhalb des Zeichens S befinden, sich auf die Enden des durch dies Zeichen angedeuteten Integrals beziehen, und folglich der Oberfläche der flüssigen Masse entsprechen.

Da nun die Größen $P, Q, R, \text{etc.}$, die die Kräfte andeuten, immer als Funktionen von $p, q, r, \text{etc.}$ angesehen werden können; so ist klar, daß der Theil von $\delta \Phi$ der das Zeichen S vor sich hat, keiner Reduktion mehr fähig ist, damit man also im allgemeinen habe $\delta \Phi = 0$, muß 1) dieser Theil an sich $= 0$ seyn, und man muß also für jeden Punkt der flüssigen Masse die identische Gleichung haben:

$$\delta P dp - dP \delta p + \delta Q dq - dQ \delta q +$$

$$\delta R dr - dR \delta r + \text{etc.} = 0,$$

2) Muß man für die äußere Oberfläche des flüssigen Körpers haben

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.} = 0,$$

wo man annimmt, daß die Differentialien δp , δq , δr etc. sich auf diese Oberfläche beziehen.

Die erstere Eigenschaft wird dazu dienen, die Natur der Kräfte P , Q , R etc. zu bestimmen, wodurch das Fluidum im Gleichgewicht seyn kann, und die 2te wird die Figur selbst angeben, die das Fluidum wegen dieser Kräfte annehmen muß.

8) Wir wollen setzen, die Größen P , Q , R etc. seyen so beschaffen, daß die erstere Bedingung statt hat, in diesem Fall hat man sehr einfach

$$\delta\Phi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$$

Nun ist $\delta\Phi$ offenbar ein vollkommenes Differential in Ansehung des Zeichens δ ; folglich ist auch $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc.}$ ein vollkommenes Differential; verwandelt man also δ in d ; so hat man das vollkommene Differential: $Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ wovon Φ das Integrale ist.

Wiederum ist $Pdq + Qdq + Rdr + \text{etc.}$ ein vollkommenes Differential; so muß die erstere Bedingung nothwendig statt finden. Denn alsdann wird das Integrale Φ dieser Größe eine Funktion von p , q , r etc. seyn, so daß, wenn man differentiirt, man hat:

$$d\Phi = Pdq + Qdq + Rdr + \text{etc. und}$$

$$\delta\Phi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{etc. folglich}$$

$$\delta d\Phi = P\delta p + \delta Qdq + \delta Rdr + \text{etc.}$$

$$+ P\delta dp + Q\delta dq + R\delta dr + \text{etc. und}$$

$$d\delta\Phi = dP\delta p + dQ\delta q + dR\delta r + \text{etc.}$$

$$+ P\delta dp + Q\delta dq + R\delta dr + \text{etc.}$$

Aber

Aber nach den Grundsätzen des Variations-Calculus ist $\delta d = d\delta$;
folglich ist auch

$$\begin{aligned} \delta d\Phi - d\delta\Phi &= \delta P dp + \delta Q dq + \delta R dr + \text{etc.} \\ &= dP\delta p - dQ\delta q - dR\delta r - \text{etc.} = 0, \end{aligned}$$

welches die gesuchte Bedingung ist. Diese Bedingung besteht also darin, daß die Kräfte P, Q, R etc. so beschaffen sind, daß $P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$ eine integrabele Größe ist.

Nennen wir also Φ das Integrale dieser Größe, so ist die 2te Bedingung des Gleichgewichts $\delta\Phi = 0$ oder vielmehr $d\Phi = 0$ für die äußere Fläche des flüssigen Körpers; so daß, wenn man integriert erhält: $\Phi = \text{Const}$ für die Gleichung dieser Fläche.

9) Betrachtet man nun die (7) gefundene Gleichung:

$$\begin{aligned} \delta P dp - dP\delta p + \delta Q dq - dQ\delta q + \delta R dr - dR\delta r \\ + \text{etc.} = 0, \end{aligned}$$

so kann man daraus die analytischen Bedingungen herleiten, die zwischen den Ausdrücken der Kräfte P, Q, R etc. statt finden; denn sieht man diese Ausdrücke als gewisse Funktionen von p, q, r etc. an; so erhält man bekanntermaßen

$$dP = \frac{dP}{dp} dp + \frac{dP}{dq} dq + \frac{dP}{dr} dr + \text{etc.}$$

$$\text{und } \delta P = \frac{dP}{dp} \delta p + \frac{dP}{dq} \delta q + \frac{dP}{dr} \delta r + \text{etc.}$$

und eben so geht es mit den andern Differentialien; substituirt man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung und ordnet die Glieder; so bekommt sie diese Form:

$$\left(\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp} \right) (\delta q dp - dq \delta p) +$$

(dP

$$\left(\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp}\right) (\delta r dp - dr \delta p) +$$

$$\left(\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq}\right) (\delta r dq - dr \delta q) + \text{etc.} = 0;$$

und sie muß unabhängig von den Differentialen dp , dq , dr etc. δp , δq , δr etc. statt finden.

10) Ist also keine gewisse Verhältniß zwischen den Variablen p , q , r , etc. angegeben; so muß man einzeln sehen:

$$\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp} = 0,$$

$$\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp} = 0,$$

$$\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq} = 0,$$

etc.

Dies sind die bekannten Bedingungsgleichungen für die Integrabilität der Formel:

$$P dp + Q dq + R dr + \text{etc.}$$

Ginge aber z. B. die variable Größe r , von den beiden variablen Größen p und q ab; so daß

$$dr = A dp + B dq,$$

so hätte man ebenfalls

$$\delta r = A \delta p + B \delta q;$$

folglich $\delta r dp - dp \delta r = B (\delta q dp - dq \delta p)$,

$$\delta r dq - dr \delta q = A (\delta p dq - dp \delta q);$$

Sub

Substituirt man also diese Werthe in der allgemeinen Gleichung, und setzt den Coefficienten von $\delta q \delta p - dq \delta p = 0$; so erhalte man die Gleichung

$$\frac{dP}{dq} - \frac{dQ}{dp} + B \left(\frac{dP}{dr} - \frac{dR}{dp} \right) - \Delta \left(\frac{dQ}{dr} - \frac{dR}{dq} \right) = 0,$$

welche statt der 3 ersten Bedingungsgleichungen dienen kann u. s. w.

11) Hat die flüssige Masse nur 2 Dimensionen; so hängt die Lage jedes Punktes derselben nur von 2 variablen Größen ab; die verschiedenen variablen Größen p, q, r , können also immer nur auf 2 gebracht werden, und alsdann findet nur eine Bedingungsgleichung statt. Hat aber flüssige Masse 3 Dimensionen; so hängt die Lage ihrer Punkte überhaupt von 3 veränderlichen Größen ab; alle verschiedene variablen Größen p, q, r etc. lassen sich also auf 3 bringen, und man erhält auch 3 Bedingungsgleichungen.

12) Bisher haben wir die Dichtigkeit der flüssigen Masse außer Acht gelassen, oder wir haben sie vielmehr als beständig und $= 1$ angesehen; wollte man sie aber ebenfalls veränderlich setzen; so erhalte man, wenn man Δ die Dichtigkeit eines gewissen Theilchens dm nennte (2)

$dm = \Delta \omega ds$; hiedurch fände man also die Größen P, Q, R etc. inösesamt durch Δ multiplicirt.

Man erhält alsdann für das Gleichgewicht der flüssigen Massen von veränderlicher Dichtigkeit, dieselben Gesetze als für das Gleichgewicht der Flüssigkeiten von einerley Dichtigkeit, wenn man nur die verschiedenen Kräfte durch die Dichtigkeit des Punktes multiplicirt, worauf sie wirken d. h. indem man nur $\Delta P, \Delta Q, \Delta R$ etc. an die Stelle von P, Q, R , setzt.

13) Wir haben angefangen die Gesetze des Gleichgewichts einer in einer unendlich engen Röhre eingeschlossenen flüssigen Masse zu suchen, und daraus die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts einer gewissen flüssigen Masse hergeleitet. Indessen kann man auch unmittelbar zu diesen letztern Gesetzen

Geseßen gelangen, wenn man die Aufgabe sogleich in ihrer ganzen Allgemeinheit betrachtet, und die im 4ten Abschnitt vorgetragene Methode dabei anwendet.

Wir wollen um mehrerer Einfachheit annehmen, alle auf die Theilchen des flüssigen Körpers wirkende Kräfte seyen auf 3 gebracht, die unter X , Y , Z vorgestellt werden, und die ihre Richtungen nach den rechtwinklichten Coordinaten x , y , z haben, d. h. die diese zu verringern streben. Wir haben (5 Abschn. 5) die allgemeinen Formeln für diese Reduktion gegeben. Nennt man dm die Masse eines gewissen Theilchens; so erhält man für die Summe der Momente der Kräfte X , Y , Z die Integralformel $\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dm$.

Das Volumen des Theilchens dm aber kann durch dx , dy , dz ausgedrückt werden; bedeutet also Δ die Dichtigkeit, so ist klar, daß man hat $dm = \Delta dx, dy, dz$; und das Integrationszeichen \int wird zugleich zugleich zu den 3 veränderlichen Größen x , y , z gehören.

Man muß aber ferner auf die aus der Unpreßbarkeit des Fluidums entspringende Bedingungsgleichungen Rücksicht nehmen, welche unter $L = 0$ vorgestellt wird. Differentirt man daher nach δ , multiplicirt durch einen unbestimmten Coefficienten λ und integrirt; so erhält man die Formel $\int \lambda \delta L$, die man zur vorhergehenden hinzu addiren muß. Sind gar keine beschleunigende auf die Oberfläche der flüssigen Masse wirkende Kräfte, und auch keine besondere Bedingungen in Ansehung dieser Oberfläche vorhanden; so hat man für's Gleichgewicht folgende einfache Gleichung:

$$\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dm + \int \lambda \delta L = 0,$$

wo man das Integrale mit Rücksicht auf die ganze Masse des Fluidum's nehmen muß.

14) Wir wollen jetzt die Werthe von L und dessen Variation δL suchen. Es ist offenbar, daß die Bedingung der Unpreßbarkeit darin besteht, daß das Volumen jedes Theilchens eine beständige Größe sey; hat man also dieses Volumen durch dx , dy , dz ausgedrückt; so hat man $dx, dy, dz = \text{Const}$ für die Bedingungsgleichung; folglich wird

$$L =$$

$$L = dx, dy, dz \text{ — Const und}$$

$$\delta L = \delta (dx, dy, dz \text{ — Const seyn.}$$

Um die Variation δ , (dx, dy, dz) zu erhalten; so sollte man denken hätte man weiter nichts nöthig als dx, dy, dz nach δ zu differenzieren; allein man hat hier noch eine besondere Betrachtung anzustellen, ohne die der Calcul unmöglich die gehörige Strenge erlangen würde. Die Größe dx, dy, dz drückt nemlich das Volumen eines Theilchens nur in so weit aus, als man annimmt, die Figur dieses Theilchens sey ein rechtwinkliches Parallelepipedum, dessen Seiten den Achsen der x, y, z parallel seyen. Diese Voraussetzung kann immer gar wohl gestattet werden, weil man sich das Fluidum in unendlich kleine Theile von jeder Figur getheilet vorstellen kann.

Es drückt $\delta (dx, dy, dz)$ die Variation aus, die dies Volumen leidet, wenn das Theilchen eine unendlich geringe Veränderung in seiner Lage bekommt, in dem seine Coordinaten x, y, z werden $x \pm dx, y \pm dy, z \pm dz$, und es ist klar, daß wenn bei dieser Veränderung des Orts das Theilchen auch in Ansehung seiner Figur und seiner Lage in Beziehung auf die Achsen der x, y, z eine Veränderung erlitt, man sein Volumen nicht mehr durch das Produkt der Differentialien $d(x \pm dx), d(y \pm dy), d(z \pm dz)$ seiner Coordinaten wird ausdrücken können. Um also die genaue Veränderung des Volumens zu erhalten, muß man zugleich auf die Veränderungen, die das Theilchen in Ansehung seiner Lage und Figur leidet, sehen.

Man muß daher die Coordinaten, die zu den Winkeln des Parallelepipedum's dx, dy, dz in seinem ersten und in seinem veränderten Zustande gehören, betrachten. Im ersten Zustande sind diese Coordinaten offenbar x, y, z ;

$$x + dx, y, z;$$

$$x, y + dy, z;$$

$$x, y, z + dz;$$

$$x + dx, y + dy, z;$$

$$x + dx, y, z + dz,$$

$$x, y + dy, z + dz,$$

$$x + dx, y + dy, z + dz,$$

Nimmt man nun die Wurzeln der Summe der Quadrate der Differentialien der Coordinaten für 2 gewisse Winkel; so erhält man die gerade Linie die diese Winkel verbindet, und die entweder eine Seite oder eine Diagonallinie des Parallelepipedum's seyn wird; man findet so also dx , dy , dz für die Seiten, und $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $\sqrt{(dx^2 + dz^2)}$, $\sqrt{(dy^2 + dz^2)}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ für die Diagonallinien. Wir wollen jetzt sehen, die Coordinaten x , y , z verwandelten sich in $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, und δx , δy , δz , als gewisse Funktionen von x , y , z ansehen; läßt man nach und nach die x , y , z , und dx , dy , dz sich verändern, so findet man, welche Veränderung die andern Coordinaten $x + dx$, y , z ; x , $y + dy$, z ; etc. erleiden.

Läßt man daher x sich nur um dx verändern; so bekommt man

$$x + dx + \delta x + \frac{d\delta y}{dx} dx, \quad y + \delta y + \frac{d\delta y}{dx} dx,$$

$$z + \delta z + \frac{d\delta z}{dx} dx \text{ für die Veränderungen, die die Coordinaten}$$

$x + dx$, y , z leiden. Läßt man y um dy sich verändern; so hat man

$$x + \delta x + \frac{d\delta x}{dy} dy, \quad y + dy + \delta y + \frac{d\delta y}{dy} dy,$$

$$z + \delta z + \frac{d\delta z}{dy} dy \text{ für die Veränderungen von } x, y + dy, z;$$

und läßt man endlich z eine Veränderung $= dz$ leiden; so hat man

$$x + \delta x + \frac{d\delta x}{dz} dz, \quad y + \delta y + \frac{d\delta y}{dz} dz,$$

$$z + dz + \delta z + \frac{d\delta z}{dz} dz \text{ für das was aus } x, y, z + dz \text{ wird.}$$

Eben so läßt man zugleich x um dx und y um dy sich verändern;
 so hat man $x + dx + \delta x + \frac{d\delta x}{dx} dx + \frac{d\delta x}{dy} dy$,

$$y + dy + \delta y + \frac{d\delta y}{dx} dx + \frac{d\delta y}{dy} dy,$$

$$z + dz + \frac{d\delta z}{dx} dx + \frac{d\delta z}{dy} dy \text{ für das was aus}$$

$$x + dx, y + dy, z, \text{ wird u. s. f.}$$

Nimmt man also die Wurzel von der Summe der Quadrate der Differentialien dieser neuen Coordinaten für z gewisse Winkel des Rhomboid's, worin sich das Parallelepipedum dx, dy, dz verwandelt hat; so findet man bis auf unendlich kleine Größen von der 3ten Ordnung folgende Ausdrücke für die Seiten:

$$dx + \frac{d\delta x}{dx} dx,$$

$$dy + \frac{d\delta y}{dy} dy,$$

$$dz + \frac{d\delta z}{dz} dz,$$

und diese für die Diagonallinien

$$\sqrt{\left[\left(dx + \frac{d\delta x}{dx} dx \right)^2 + \left(dy + \frac{d\delta y}{dy} dy \right)^2 \right]}$$

$$\sqrt{\left[\left(dx + \frac{d\delta x}{dx} dx \right)^2 + \left(dz + \frac{d\delta z}{dz} dz \right)^2 \right]}$$

$$\sqrt{\left[\left(dy + \frac{d\delta y}{dy} dy \right)^2 + \left(dz + \frac{d\delta z}{dz} dz \right)^2 \right]}$$

$$\sqrt{\left[\left(dx + \frac{d\delta x}{dx} dx \right)^2 + \left(dy + \frac{d\delta y}{dy} dy \right)^2 + \left(dz + \frac{d\delta z}{dz} dz \right)^2 \right]}$$

woraus leicht zu schließen ist, daß dies Rhomboïd wiederum ein rechtwinkliches Parallelepipedum ist, und daß folglich sein Inhalt durch das Produkt der Seiten,

$$dx \left(1 + \frac{d\delta x}{dx} \right), dy \left(1 + \frac{d\delta y}{dy} \right), dz \left(1 + \frac{d\delta z}{dz} \right)$$

ausgedrückt werden kann.

Die Variation des Volumens des ersten Parallelepipedum's d. h. der Werth von $\delta(dx, dy, dz)$ wird also durch

$$dx, dy, dz \left(1 + \frac{d\delta x}{dx} \right) \left(1 + \frac{d\delta y}{dy} \right) \left(1 + \frac{d\delta z}{dz} \right) - dx dy dz$$

folglich hat man, wenn man die angezeigten Multiplicationen wirklich verrichtet, und die unendlich kleinen Größen der höhern Ordnungen vernachlässigt:

$$\delta(dx dy dz) = dx dy dz \left(\frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz} \right)$$

und dies ist der Werth von δL , den man in der Gleichung (13) substituiren muß.

15) Setzt man in dieser Gleichung für dm dessen Werth $\Delta dx dy dz$; so hat man

$$S(\Delta X \delta x + \Delta Y \delta y + \Delta Z \delta z + \lambda \frac{d\delta x}{dx} + \lambda \frac{d\delta y}{dy} + \lambda \frac{d\delta z}{dz}) dx dy dz = 0.$$

Man

Man hat jetzt nur noch die doppelten Zeichen $d\delta$ nach (4 Abschn. 17.) wegzubringen.

Man betrachte in dieser Absicht zuerst die Größe

$S \lambda \frac{d\delta x}{dx} dx dy dz$, wo das Zeichen S ein dreifaches Integral in Anse-

hung der Größen x, y, z bedeutet; es ist klar, daß, da dies Differentiale von δx nur sich auf die Variation von x bezieht, man, um es zum verschwinden zu bringen, nur auf die Integration in Beziehung auf x zu sehen hat; man braucht dieser Größe daher nur

die Form $S dy dz, S \lambda \frac{d\delta x}{dx}$ zu geben, und das einfache Integral

$$S \lambda \frac{d\delta x}{dx} dx \text{ in } \lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x' - S \frac{d\lambda}{dx} \delta x dx$$

zu verwandeln, wo die mit einem Strich bezeichneten Größen sich auf den Anfang der Integration beziehen, und die mit 2 bezeichneten zu den Punkten gehören, wo sie sich endigt nach dem (4 Abschn. 17.) angenommenen Bedeutungen. Die vorige Größe verwandelt sich also in folgende:

$$S dy dz (\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') - S dy dz S \frac{d\lambda}{dx} \delta x dx,$$

oder, welches einerley ist

$$S (\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') dy dz - S \frac{d\lambda}{dx} \delta x dx dy dz.$$

Durch ein gleiches Verfahren und durch ähnliche Schlüsse verwandelt man auch die Größen

$$S \lambda \frac{d\delta y}{dy} dx dy dz \text{ und } S \lambda \frac{d\delta z}{dz} dx dy dz \text{ in diese}$$

$$S (\lambda'' \delta y'' - \lambda' \delta y') dx dz - S \frac{d\lambda}{dy} \delta y dx dy dz \text{ und}$$

$S (\lambda''$

$$S (\lambda'' \delta z'' - \lambda' \delta z') dx dy - S \frac{d\lambda}{dz} \delta z dx dy dz.$$

Berichtet man nun diese Substitutionen, so erhält man für das Gleichgewicht der flüssigen Masse diese allgemeine Gleichung:

$$\begin{aligned} S \left[\left(\Delta X - \frac{d\lambda}{dx} \right) \delta x + \left(\Delta Y - \frac{d\lambda}{dy} \right) \delta y + \right. \\ \left. \left(\Delta Z - \frac{d\lambda}{dz} \right) \delta z \right] dx dy dz + \\ S (\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') dy dz + \\ S (\lambda'' \delta y'' - \lambda' \delta y') dx dz + \\ S (\lambda'' \delta z'' - \lambda' \delta z') dx dy = 0. \end{aligned}$$

Man hat nun nur noch die Coefficienten der unbestimmten Variationen δx , δy , δz (4 Abschn. 8.) = 0 zu setzen.

16) Man erhält also sogleich diese 3 unbestimmte Gleichungen

$$\Delta X - \frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

$$\Delta Y - \frac{d\lambda}{dy} = 0,$$

$$\Delta Z - \frac{d\lambda}{dz} = 0,$$

welche für alle Punkte der flüssigen Massen statt finden müssen.

Ist endlich die flüssige Masse von allen Seiten frey; so würden die Variationen $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, die sich auf die Punkte der Oberfläche der flüssigen Masse beziehen, auch unbestimmt seyn, und sogleich müßte man

man alsdann noch ihre Coefficienten besonders $\equiv 0$ setzen; dies gäbe $\lambda' \equiv 0$, $\lambda'' \equiv 0$ d. h. überhaupt $\lambda \equiv 0$ für alle Punkte der Oberfläche des Fluidum's; und diese Gleichung wird dazu dienen, die Figur dieser Fläche zu bestimmen.

Eben dies wird, wenn der flüssige Körper in einem Gefäße eingeschlossen ist, in Ansehung des Theils der Oberfläche, wo das Gefäß offen ist, statt finden; in Ansehung des Theils aber, der an die Seitenwände stößt, ist klar, daß die Variationen dx' , dy' , dz' , dx'' , dy'' , dz'' , unter einander Verhältnisse haben müssen, die durch die Figur dieser Seitenwände gegeben werden, weil der flüssige Körper nur nach ihrer Direction fließen kann. Wir werden aber unten erweisen, (20, 21.), daß, wie auch ihre Figur beschaffen seyn mag, die Glieder, die die erwähnten Variationen enthalten, jederzeit von selbst $= 0$ seyn werden, so daß es keine Bedingung in Ansehung dieses Theils der Oberfläche des flüssigen Körpers geben wird.

17) Die 3 eben gefundenen Gleichungen für die Bedingungen des Gleichgewichts des flüssigen Körpers geben

$$\frac{d\lambda}{dx} \equiv \Delta X, \quad \frac{d\lambda}{dy} \equiv \Delta Y, \quad \frac{d\lambda}{dz} \equiv \Delta Z.$$

$$\text{Aber } d\lambda \equiv \frac{d\lambda}{dx} dx + \frac{d\lambda}{dy} dy + \frac{d\lambda}{dz} dz;$$

folglich hat man $d\lambda = \Delta (Xdx + Ydy + Zdz)$; woraus man sieht, daß die Größe

$$\Delta (Xdx + Ydy + Zdz)$$

ein vollkommenes Differential in x , y , z seyn muß, und diese einzige Bedingung schließt allein die Gesetze des Gleichgewichts der flüssigen Körper in sich.

Man sieht auch, daß sie mit dem übereinkommt, was wir oben (8, II.) gefunden haben; denn wir haben (5 Abschn. 5.) gezeigt, daß allgemein ist:

$$Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

u

Bringt

Bringt man die Größe λ aus eben diesen Gleichungen weg; so erhält man folgende:

$$\frac{d, \Delta X}{dy} = \frac{d, \Delta Y}{dx},$$

$$\frac{d, \Delta X}{dz} = \frac{d, \Delta Z}{dx},$$

$$\frac{d, \Delta Y}{dz} = \frac{d, \Delta Z}{dy}.$$

Diese Gleichungen sind von einander verschieden, und die eine könnte nicht als eine Folge der beiden andern angesehen werden.

Diese Bedingungen sind also in Ansehung der Kräfte X, Y, Z notwendig, wenn die flüssige Masse im Gleichgewicht seyn soll. Finden sie vermöge der Natur dieser Kräfte statt; so ist man davon versichert, daß das Gleichgewicht möglich ist, und man hat jetzt nur die Figur, die die flüssige Masse annehmen muß, um im Gleichgewicht zu seyn, d. h. die Gleichung für die äußere Fläche des flüssigen Körpers zu finden. Wir haben aber (16) gesehen, daß man in jedem Punkte dieser Oberfläche haben muß $\lambda = 0$. Da nun $d\lambda = \Delta(Xdx + Ydy + Zdz)$; so erhält man durch die Integration

$$\lambda = \int \Delta(Xdx + Ydy + Zdz) + \text{const.};$$

folglich wird die Gleichung für die äußere Fläche seyn:

$$\int \Delta(Xdx + Ydy + Zdz) = K$$

wo K eine gewisse beständige Größe ist, und diese Gleichung wird allezeit aus endlichen Gliedern bestehen, weil die Größe $\Delta(Xdx + Ydy + Zdz)$ als ein vollkommenes Differential angenommen worden ist.

18) Ist die Größe $Xdx + Ydy + Zdz$ selbst ein vollkommenes Differential, welches allezeit statt findet, wenn die Kräfte X, Y, Z das Resultat einer oder mehrern Anziehungen sind, die gewissen Funktionen

nen der Distanzen von den Mittelpunkten gleich sind, weil man überhaupt (5 Abschn. 5.) hat

$$Xdx + Ydy + Zdz = Pdp + Qdq + Rdr + \text{etc.}$$

und man nennt diese Größe $d\phi$; so hat man

$$d\lambda = \Delta d\phi;$$

Δ muß also eine Funktion von ϕ seyn, damit $d\lambda$ ein vollkommenes Differential sey. Es wird also auch $\lambda = \int \Delta d\phi$ eine Funktion von ϕ seyn.

Man hat also in diesem Falle für die Figur der Oberfläche die Gleichung:

$$\text{funct. } \phi = K \text{ d. h. } \phi = \text{Const.};$$

Eben dies fände statt, wenn die Dichtigkeit der flüssigen Masse überall gleichförmig wäre. Weil ferner ϕ auf der Oberfläche beständig ist, und $\Delta = \text{funct. } \phi$; so muß auch die Dichtigkeit Δ in allen Punkten der äussern Oberfläche einer im Gleichgewicht sich befindenden flüssigen Masse einerley seyn.

Im Innern der flüssigen Masse kann die Dichtigkeit auf eine gewisse Art zwar verschieden seyn, aber sie muß allezeit eine Funktion von ϕ bleiben; sie muß folglich beständig überall da seyn, wo ϕ beständig ist, so daß $\phi = h$ überhaupt die Gleichung für Schichten von einerley Dichtigkeit seyn wird, wenn h eine gewisse beständige Größe bedeutet. Differenziert man also; so erhält man $d\phi = 0$ oder

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

für die allgemeine Gleichung dieser Schichten, und man sieht leicht, daß diese Gleichung zu Oberflächen gehört, worauf die Richtung der vereinigten Wirkung der Kräfte X, Y, Z senkrecht ist, und die Herr Clairaut Wasserpaß-Ebenen nennt. Hieraus folgt, daß die Dichtigkeit in jeder Schichte des Wasserpasses, die durch 2 solcher unendlich nahe an einander liegenden Wasserpaß-Ebenen gebildet wird gleichförmig seyn muß. Dieses Geseß muß sowohl bey der Erde als bey den Planeten statt finden, wenn man annimmt, daß diese Körper Anfang's flüssig gewesen seyen, und indem sie sich ver-

härteten, die Form beibehalten hatten, die sie vermöge der Attraktion ihrer Theile in Verbindung mit der Centrifugal-Kraft, annahmen.

19) Die Gleichung $\int \Delta (X dx + Y dy + Z dz) = K$ für die Fläche der im Gleichgewicht sich befindenden flüssigen Körper findet gleichfalls bey solchen flüssigen Körpern statt, die von allen Seiten frey, und für solche die in Gefäßen eingeschlossen sind, wenigstens in Ansehung des Theils ihrer Oberfläche, der den Oefnungen des Gefäßes entspricht (17).

Was die zusammenhängende Fläche an den Seitenwänden des Gefäßes betrifft; so ist klar, daß sie dieselbe Figur haben muß als diese Seitenwände, so daß, wenn das Gefäß unbiegsam ist, diese Figur gegeben ist, und gar nicht von den Bedingungen des Gleichgewichts abhängt. In Ansehung dieses Theiles der Oberfläche des flüssigen Körpers müssen also die Glieder der allgemeinen Gleichung für's Gleichgewicht, die die Variationen $\delta x', \delta y', \delta z', \delta x'', \delta y'', \delta z''$ enthalten, von selbst verschwinden, weil man sie durch keine besondere Bedingung zum Verschwinden bringen könnte; es ist dies gut zu untersuchen, damit nichts übrig bleibe, was einen Zweifel wegen der Richtigkeit und Allgemeinheit unserer Methoden erregen könnte.

20) Wir wollen jetzt irgend einen Punkt der Oberfläche an den Seitenwänden des unbiegsam und von einer gegebenen Figur angenommenen Gefäßes zusammenhängenden flüssigen Masse betrachten; dieser Punkt entspricht nothwendig dem Anfang oder dem Ende jeder der Integrationen in Beziehung auf x, y, z , oder dem Anfang der einen und dem Ende der beiden andern, und so umgekehrt (15). Wir wollen zuerst sehen, er gehöre zum Ende jeder der 3 Integrationen; alsdenn werden die Variationen von x, y, z , in Ansehung dieses Punktes seyn: $\delta x'', \delta y'', \delta z''$ und die Glieder, worinn diese Variationen vorkommen: $\lambda'' \delta x'', \delta y, \delta z, \lambda'' \delta y \delta x, \lambda'' \delta z'' dx dy$. Auf diese Art erhält man für alle ähnliche Punkte der Oberfläche der flüssigen Körper die Integralien $\int \lambda'' \delta x'' dy dz, \int \lambda'' \delta y'' dx dz, \int \lambda'' \delta z'' dx dy$ *), wovon das erstere so genommen werden muß,

*) Im Original steht hier $\int \lambda'' dz dx dy$. M.

muß, daß y z jedes besonders veränderlich ist, nachdem man für x dessen Werth in y und z , der durch die Natur der Fläche oder der Wand des Gefäßes gegeben ist, substituirt hat; das 2te aber muß so genommen werden, daß man jedes besonders x und z veränderlich annimmt, und für y dessen Werth, der in x und z durch die nämliche Fläche gegeben ist, substituirt; das 3te endlich muß ebenfalls so genommen werden, daß man nach und nach sowohl x als y variabel annimmt, und statt z dessen Werth, der in x und y durch die nämliche Fläche gegeben ist, substituirt.

Man sieht aber leicht, daß man diese 3 Integralien auf einerlei Form bringen kann, wenn man nur in den beiden erstern an die Stelle des z dessen Werth in x und y substituirt, und hierauf in der erstern x und in der 2ten y anstatt des z variabel annimmt.

Stellt man also unter $dz = p dx + q dy$ die Gleichung der gegebenen Oberfläche vor; so hat man nur in dem Integral $\int \lambda'' \delta x'' dy dz$, $p dx$ an die Stelle von dz und im Integral $\int \lambda'' \delta y'' dx dy$, $q dy$ an die Stelle der dz zu setzen, und hernach beide in Beziehung auf z und auf y zu integriren.

Man bemerke aber ja, daß die Differentialien dx , dy , dz immer positiv angenommen werden müssen, weil sie in dem rechtwinklichten Parallelepipedum dx , dy , dz , welches das Volumen des Theilchens dm ausdrückt, und das also der Beschaffenheit der Sache nach nicht negativ werden kann, vorkommen. Folglich muß man auch bei den Substitutionen von $p dx$ und $q dy$ an die Stelle des dz allezeit p und q positiv annehmen.

Setzen wir daher überhaupt, daß die Gleichung für die Seitenwände des Gefäßes durch $dz = \pm p dx \pm q dy$ ausgedrückt werde, worin p und q jederzeit positive Größen sind; so werden wir statt der 3 Integrale:

$$\int \lambda'' \delta x'' dy dz, \int \lambda'' \delta y'' dx dz, \int \lambda'' \delta z'' dx dy;$$

dieses einzige bekommen:

$$\int \lambda'' (p \delta x'' + q \delta y'' + \delta z'') dx, dy.$$

Wir haben aber vorausgesetzt, daß die Punkte, die wir von der Oberfläche der flüssigen Masse betrachtet haben, zum Ende von jeder der 3 Integrationen in Beziehung auf x , y , z gehören, jetzt ist es leicht sich davon zu überzeugen, daß diese Voraussetzung nur alsdann statt finden kann, wenn die Coordinaten x , y , z dieser Punkte alle auf eine Seite der erwähnten Oberfläche d. h. auf die nämliche Seite der Ebenen fallen, die diese Fläche in eben diesen Punkten berühren.

Soll dies aber statt finden; so muß die Differentialgleichung der Oberfläche nothwendig in diesen Punkten seyn: $dz = -p dx - q dy$ damit wenn x und y wachsen, z abnimmt. Aber $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ sind (per hyp.) die Variationen von x , y , z in eben diesen Punkten, folglich müssen sie auch dieselben Verhältnisse unter einander haben als die Differentialien dx , dy , dz , wenigstens in so fern man die Figur der Oberfläche als unveränderlich ansiehet. Man hat daher $\delta z'' = -p \delta x'' - q \delta y''$. Dieser Werth in das obige Integral substituirt, macht es offenbar $= 0$.

21) Gehörten die erwähnten Punkte anstatt zum Ende der 3 Integrationen in Beziehung auf x , y , z zum Anfang derselben; so hätte man in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts (15) in Beziehung auf diese Punkte die 3 Integrale $- \int \lambda' \delta x' dy dz - \int \lambda' \delta y' dx dz - \int \lambda' \delta z' dx dy$ die sich in diese einzige verwandeln würden

$$- \int \lambda' (p \delta x' + q \delta y' + \delta z') dx dy;$$

und auch in diesem Falle hätte man:

$$dz = -p dx - q dy,$$

und folglich auch

$$\delta z' = -p \delta x' - q \delta y';$$

welches gleichfalls dies Integral $= 0$ machen würde. Gehörten aber diese Punkte z. B. zum Anfang der Integration in Beziehung auf x und zum Ende der beiden Integrationen in Beziehung auf y und z ; alsdann würden die Variationen der Coordinaten x , y , z für diese Punkte seyn, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ und die correspondirenden Integrale

— $\int \lambda' \delta x' dy dz + \int \lambda'' \delta y'' dx dz + \int \lambda''' \delta z''' dx dy$
 worin λ' einerley seyn würde mit λ'' . Hiedurch verwandeln diese Integrale sich also in folgende:

$$\int \lambda'' (-p \delta x'' + q \delta y'' + \delta z'') dx dy.$$

Es ist aber leicht zu begreifen, daß, wenn dieser Fall eintreten soll, die beiden Coordinaten y und z sich auf einer Seite und die Coordinate x sich auf der andern Seite von jeder Ebene, die die Oberfläche in den erwähnten Punkten berührt, befinden müssen. Die Gleichung der Oberfläche muß also für diese Punkte von der Form

$$dz = p dx - q dy \text{ seyn, so daß man auch hat}$$

$$\delta z'' = p \delta x'' - q \delta y''.$$

Substituirt man nun dies in das vorhergehende Integral, so wird es daselbe auch $= 0$ machen.

Eben dies Resultat findet man für die andern Fälle, worin man Punkte betrachtet in Beziehung auf den Anfang der Integrale nach x und y , und auf das Ende der Integration nach z , oder auf den Anfang der Integrationen nach x und z , und auf das Ende der Integration nach y oder etc.

22) Aus dem was wir eben in Beziehung auf verschiedene Fälle erwiesen haben, kann man den Schluß ziehen, daß, wenn man mit einem Strich die Größen andeutet, die sich auf den Anfang der Integration in Rücksicht auf z beziehen, d. h. die Größen, die zum vordern Theile der Fläche des flüssigen Körpers in Ansehung der Ebene der x und y gehören, und mit 2 Strichen die Größen, die dem Ende der nämlichen Integration nach z entsprechen, bezeichnet, d. h. die Größen in Ansehung der nämlichen Ebene der x und y ; und hierauf überhaupt durch $dz + p dx + q dy = 0$ die Differentialgleichung der Oberfläche des flüssigen Körpers vorstellt, (wo p, q positiv oder negativ seyn können) man allezeit die 3 Integralausdrücke

$$\int (\lambda'' \delta x'' - \lambda' \delta x') dy dz + \int (\lambda'' \delta y'' - \lambda' \delta y') dx dz$$

$$+ \int (\lambda'' \delta z'' - \lambda' \delta z') dx dy$$

der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts (15) auf folgende 2 bringen kann:

$$\int \lambda''$$

$$\int \lambda'' (\delta z'' + p'' \delta x'' + q'' \delta y'') dx dy - \int \lambda' (\delta z' + p' \delta x' + q' \delta y') dx dy.$$

Es ist aber $dz + p dx + q dy = 0$ die Gleichung einer krummen Oberfläche, folglich wird es nach der bekannten Theorie ein Multiplikator r geben, der diese Gleichung integrabel macht, so daß man immer haben wird

$$r (dz + p dx + q dy) = du$$

wo du das vollkommene Differential der Größe u ist, die eine Funktion von x, y, z ist.

Verwandelt man also d in δ bei der Differentiation von u ; so hat man auch

$$r (dz + p \delta x + q \delta y) = \delta u;$$

$$\text{folglich } \delta z + p \delta x + q \delta y = \frac{\delta u}{r}.$$

Bezeichnet man also alle Größen mit einem oder 2 Strichen in Beziehung auf die vordere oder hintere Fläche des flüssigen Körpers, und substituirt dieselben in den obigen Integralausdrücken; so werden diese

$$\int \frac{\lambda'' \delta u''}{r''} dx dy - \int \frac{\lambda' \delta u'}{r'} dx dy.$$

23) Es sey jetzt ds das Element der Fläche des flüssigen Körpers, dessen allgemeine Gleichung ist:

$$dz + p dx + q dy = 0$$

so hat man bekanntlich

$$ds = dx dy \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

Sieht man also u als eine Funktion von x, y, z an; so hat man der bekannten Bezeichnung gemäß

$$r = \frac{du}{dz}, \quad rp = \frac{du}{dx}, \quad rq = \frac{du}{dy};$$

$$\text{folglich } \frac{dx \, dy}{r} = \frac{ds}{r \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$$

$$= \frac{ds}{\sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]}}$$

Setzt man also Kürze halber

$$v = \sqrt{\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right]}$$

und bezeichnet man alle Größen mit einem oder zweien Strichen, um sie auf die vordere oder hintere Oberfläche des flüssigen Körpers zu beziehen; so kann man den vorigen Integralausdrücken folgende Form geben:

$$S \frac{\lambda'' \, \delta u''}{v''} \, ds'' - S \frac{\lambda' \, \delta u'}{v'} \, ds'$$

Nach dem aber was (2 Abschn. 8) gesagt ist, sieht man, daß die Größe $\lambda ds + \frac{\delta u}{v}$ das Moment einer Kraft vorstellen kann, die $= \lambda ds$ und an dem Element ds der Oberfläche des flüssigen Körpers senkrecht auf dieser Oberfläche angebracht ist, deren Gleichung wir δu oder $du = 0$ angenommen haben (22).

Der Integralausdruck $S \frac{\lambda'' \, \delta u''}{v''} \, ds''$ wird also die Summe der Momente der Kräfte λ'' vorstellen, die auf jeden Punkt der hintern Oberfläche der flüssigen Masse in senkrechten Richtungen auf diese Oberfläche wirken.

Eben so wird Integralausdruck $S \frac{\lambda' \, \delta u'}{v'} \, ds'$ die Summe der Momente der Kräfte λ' , die auf jeden Punkt der Oberfläche ebenfalls nach

nach senkrechten Richtungen wirken, vorstellen; also wird $\int \frac{\lambda' du'}{V'}$ ds' die Summe der Momente dieser letztern Kräfte im entgegengesetzten Sinn seyn, d. h. wenn man ihre Richtungen den Richtungen der Kräfte λ'' in Beziehung auf die Ebene der x und y entgegengesetzt annimmt; welches mit dem einerlei ist, daß alle auf die Oberfläche der flüssigen Masse angebrachte Kräfte senkrecht auf dieser Oberfläche ihre Richtungen haben, und entweder vom Innern ins äussere oder vom äussern ins innere wirken.

24) Weil also die Integralausdrücke die in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts einer unpressbaren flüssigen Masse wirken, und die zu den Punkten der Oberfläche dieser Masse gehören, der Summe der Momente einer unendlichen Menge von Kräften λ gleich sind, die senkrecht auf alle Punkte dieser Oberfläche angebracht sind; so folgt, daß diese Kräfte bey der Oberfläche des flüssigen Körpers wirklich statt finden müssen, und man sieht leicht ein, daß sie nichts anders sind als der Druck, den der flüssige Körper in allen Punkten der Oberfläche, vermöge der auf seine ganze Masse wirkenden Kräfte ausübt.

25) Dieser Druck wird daher überhaupt durch die Größe λ oder durch die Formel $\int \Delta (Xdx + Ydy + Zdz)$, die zur Oberfläche des flüssigen Körpers gehört, ausgedrückt werden können. Es ist aber klar, daß überall, wo der flüssige Körper frey ist, sie im Zustande des Gleichgewichts $= 0$ seyn muß, und daß wo die Oberfläche des flüssigen Körpers auf die Oberfläche irgend eines festen Körpers stößt, dieser Körper die Wirkung der auf der Oberfläche angebrachten Kräfte λ aufhalten muß. Hieraus ist's nun leicht, die Gesetze des Gleichgewichts der flüssigen Körper mit den festen, die sie einschließen, oder die darin eingetaucht sind, herzuleiten. Sie sind aber nur allzu bekannt, als daß wir nöthig hätten uns damit aufzuhalten, sie weiter auseinander zu setzen. Wir enthalten uns auch besondere Anwendungen der allgemeinen Theorie des Gleichgewichts der unpressbaren flüssigen Körper zu geben, in dem wir nichts zu dem hinzuzusetzen wissen, was andere Schriftsteller schon davon gesagt haben.

Ueher Abschnitt.

Vom Gleichgewicht der unpressbaren und elastischen Flüssigkeiten.

1) Es seyen wie (7 Abschn. 13) X, Y, Z die Kräfte, die auf jedem Punkt der flüssigen Masse wirken, die auf die Directionen der Coordinaten x, y, z gebracht sind, und diese Coordinaten zu verringern streben: so hat man sogleich:

$$S (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm$$

für die Summe ihrer Momente.

Bei den elastischen Flüssigkeiten giebt es aber noch außerdem eine innere Kraft, die man Elasticität nennt, und sie auszubreiten oder ihr Volumen zu vermehren strebt. Es sey daher ϵ die Elasticität eines gewissen Theilchens dm . Diese Kraft wird also, da sie das Volumen dx, dy, dz eben dieses Theilchens zu vermehren strebt, die Größe $-dx, dy, dz$ zu vermindern trachten. Sie wird also zum Moment die Größe $-\epsilon \delta (dx, dy, dz)$ haben, oder man kann sie wenigstens so ansehen. Alsdann ist also die Summe der Momente, die von der Elasticität der ganzen flüssigen Masse herkommen $= -S \epsilon \delta (dx, dy, dz)$ folglich ist die ganze Summe der Momente der Kräfte, die auf den flüssigen Körper wirken:

$$S (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) dm - S \epsilon \delta (dx, dy, dz)$$

und da hier weiter keine besondere Bedingung zu erfüllen ist; so wird man die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts bekommen, wenn man diese Summe $= 0$ setzt.

2) Man erhält also auf diese Art für das Gleichgewicht der elastischen flüssigen Körper eine Gleichung von der nämlichen Form, als wir (7 Abschn. 13.) für's Gleichgewicht unpressbarer Flüssigkeiten gefunden haben

haben, weil nämlich in dieser $\delta L = \delta (dx dy dz)$ (14); so wird dadurch das Glied $S \lambda \delta L$, welches von der Bedingung der Unpressbarkeit herkommt, dem Gliede $S \epsilon \delta (dx dy dz)$, welches zu den Momenten der elastischen Kräfte gehört, völlig ähnlich.

3) Es folgt also hieraus, daß die für's Gleichgewicht der unpressbaren Flüssigkeiten gefundene Formeln sich sogleich und ohne weitere Einschränkung auf das Gleichgewicht elastischer Flüssigkeiten anwenden lassen, wenn man nur den Coefficient λ in $-\epsilon$ verwandelt, d. h. wenn man annimmt, daß die Größe λ negativ genommen, die Kraft der Elasticität jedes Elements des flüssigen Körpers ausdrückt. Man hat hier also nur alles das zu wiederholen, was wir im vorhergehenden Abschnitt vom 14 Artikel an bis ans Ende gezeigt haben.

4) Man setzt gewöhnlich die Elasticität der Dichtigkeit, oder überhaupt einer gewissen Funktion der Dichtigkeit proportional. Man hat daher $\epsilon = -\lambda = \phi \Delta$ (wenn man Δ die Dichtigkeit nennt); die Bestimmung von Δ hängt folglich von folgender Gleichung ab (7 Abschn. 17.):

$$d. \phi \Delta = \Delta (X dx + Y dy + Z dz)$$

welches giebt

$$\frac{d. \phi \Delta}{\Delta} = X dx + Y dy + Z dz.$$

Nun ist $\frac{d. \phi \Delta}{\Delta}$ ein vollkommenes Differential einer Funktion

von Δ ; folglich muß auch $X dx + Y dy + Z dz$ ein vollkommenes Differential seyn; anders kann kein Gleichgewicht statt finden. Man hat also den Fall (7 Abschn. 18.), woraus man auch die nämlichen Folgerungen zu ziehen hat.

Ende des ersten Theils der analytischen Mechanik.