

www.e-rara.ch

Cours de mathématiques, à l'usage de la marine et de l'artillerie

Arithmétique

Bézout, Étienne

A Avignon, 1811

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5601

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-21889>

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

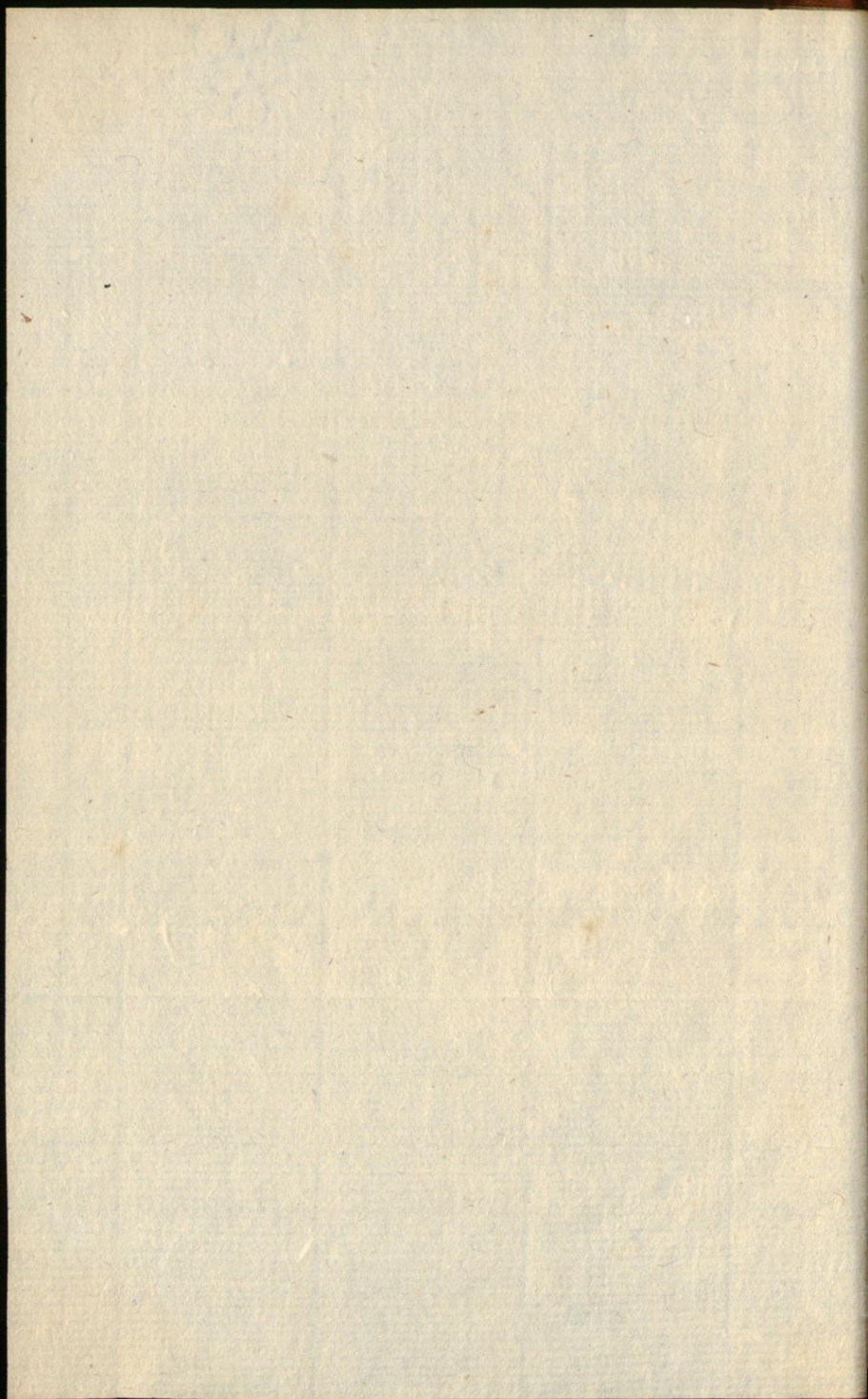
Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

102

~~49107 (Rare)~~

Rar 5601:1





ARITHMÉTIQUE.



LIBRARY

COURS
DE
MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DE LA MARINE ET DE L'ARTILLERIE ;
PAR BEZOUT.

Nouvelle édition considérablement augmentée, et
renfermant toutes les connoissances mathématiques
nécessaires pour l'admission à l'*École polytechnique*.

PREMIÈRE PARTIE.

ARITHMÉTIQUE.

A AVIGNON,
Chez SEGUIN FRÈRES, Imprimeurs-Libraires,
rue Bouquerie.

1811.



COURT

OF

COMMONS

IN PARLIAMENT ASSEMBLED

THE PETITION OF

THE LORDS OF THE MANOR OF

ST. MARTIN'S, IN THE COUNTY OF MIDDLESEX, PETITIONERS

SHUNTHAT

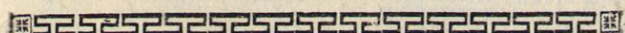
THEY HAVE SHOWN AND PROVED

TO THE HONOURABLE

THE COMMONS OF GREAT BRITAIN IN PARLIAMENT ASSEMBLED

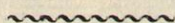
THAT

THEY



TABLE

DES MATIERES.



N OTIONS préliminaires sur la nature et les différentes espèces de Nombres.	page 1
De la Numération et des Décimales.	2
Des Opérations de l'Arithmétique.	11
De l'Addition des Nombres entiers et des Parties décimales.	ibid.
De la Soustraction des Nombres entiers et des Parties décimales.	14
De la preuve de l'Addition et de la Soustraction.	18
De la Multiplication.	20
De la Multiplication par un nombre d'un seul chiffre.	24
De la Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres.	25
De la Multiplication des Parties décimales.	28
Sur quelques usages de la Multiplication.	33
De la Division des Nombres entiers, et des Parties décimales.	35
De la division d'un nombre composé de plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.	36
De la Division par un nombre de plusieurs chiffres.	41
Moyens d'abrégier la Méthode précédente.	45
De la Division des Parties décimales.	48
Preuve de la Multiplication et de la Division.	56
Preuve par 9.	57

<i>Quelques usages de la Règle précédente.</i>	60
<i>Des Fractions.</i>	63
<i>Des Entiers considérés sous la forme de Fraction.</i>	65
<i>Des changemens qu'on peut faire subir aux deux termes d'une Fraction sans changer sa valeur.</i>	66
<i>Réduction des Fractions à un même dénominateur.</i>	67
<i>Réduction des Fractions à leur plus simple expression.</i>	70
<i>Différentes manières dont on peut envisager une fraction, et conséquences qu'on peut en tirer.</i>	74
<i>Des opérations de l'Arithmétique sur les Fractions.</i>	75
<i>De l'addition des Fractions.</i>	76
<i>De la soustraction des Fractions.</i>	ibid.
<i>De la multiplication des Fractions.</i>	77
<i>De la Division des Fractions.</i>	78
<i>Quelques applications des Règles précédentes.</i>	80
<i>Des Nombres complexes.</i>	86
<i>Table des Unités de quelques espèces, et caractères par lesquels on représente ces différentes unités.</i>	87
<i>Addition des Nombres complexes.</i>	90
<i>Soustraction des Nombres complexes.</i>	91
<i>Multiplication des Nombres complexes.</i>	92
<i>Division d'un Nombre complexe par un Nombre incomplex.</i>	100
<i>Division d'un Nombre complexe par un Nombre complexe.</i>	102
<i>De la formation des Nombres quarrés, et de l'extraction de leur racine.</i>	104
<i>De la formation des Nombres cubes, et de l'extraction de leur racine.</i>	120

T A B L E.

vij

<i>Des Raisons , Proportions et Progressions , et de quelques règles qui en dépendent.</i>	132
<i>Propriété des Proportions Arithmétiques.</i>	136
<i>Propriétés des Proportions Géométriques.</i>	137
<i>Usage des propositions précédentes.</i>	146
<i>De la Règle de Trois directe et simple.</i>	ibid.
<i>De la Règle de Trois inverse et simple.</i>	149
<i>De la Règle de Trois composée.</i>	151
<i>De la Règle de Société.</i>	155
<i>Remarque au sujet de la Règle précédente.</i>	160
<i>De quelques autres Règles dépendantes des Proportions.</i>	161
<i>« Règle d'Intérêt. »</i>	169
<i>« Règle de Change. »</i>	171
<i>« Règle d'Escompte. »</i>	173
<i>De la Règle d'Alliage.</i>	174
<i>« Des Échanges. »</i>	177
<i>Des Progressions Arithmétiques.</i>	178
<i>Des Progressions Géométriques.</i>	182
<i>Des Logarithmes.</i>	187
<i>Table des Logarithmes des Nombres naturels depuis 1 jusqu'à 1080.</i>	191
<i>Propriétés des Logarithmes.</i>	196
<i>Usages des Logarithmes.</i>	198
<i>Des Nombres dont les Logarithmes ne se trouvent point dans les Tables.</i>	201
<i>Des Logarithmes dont les Nombres ne se trouvent point dans les Tables.</i>	205
<i>REMARQUE.</i>	211
<i>TABLE des Principes.</i>	217

Fin de la Table des Matières.

AVERTISSEMENT.

Les Nombres que l'on trouve entre deux parenthèses , dans plusieurs endroits de ce Livre , sont destinés à indiquer à quel numéro on doit aller chercher la démonstration de la proposition sur laquelle on s'appuye dans ces endroits. A l'égard des numéros , ils sont au commencement des *alinéa*.

On a placé , à la fin du Volume , l'*Exposition abrégée du Nouveau Système des Poids et Mesures*, d'après le *Mètre définitif*, suivie d'un *Précis des Calculs* qui leur sont relatifs.



É L É M E N S

D'ARITHMÉTIQUE.



Notions préliminaires sur la nature et les différentes espèces de Nombres.

1. ON appelle, en général, *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc. sont des quantités. Tout ce qui est quantité est l'objet des Mathématiques ; mais l'Arithmétique, qui fait partie de ces Sciences, ne considère les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres.

2. l'Arithmétique est donc la science des nombres : elle en considère la nature et les propriétés ; et son but est de donner des moyens faciles, tant pour représenter les nombres, que pour les composer et décomposer, ce qu'on appelle *calculer*.

3. Pour se former une idée exacte des nombres, il faut d'abord savoir ce qu'on entend par *unité*.

4. L'unité est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour servir de terme de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce : ainsi, lorsqu'on dit, un tel corps pèse *cinq livres*, la livre est l'unité, c'est la quantité à laquelle on compare le poids de ce corps ; on auroit pu également prendre l'once pour unité, et alors le poids de ce corps eût été marqué par quatre-vingt.

Arithmétique.

A

5. Le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties d'unité, une quantité est composée. Si la quantité est composée d'unités entières, le nombre qui l'exprime s'appelle *nombre entier* : et si elle est composée d'unités entières, et de parties de l'unité, ou simplement de parties de l'unité, alors le nombre est dit *fractionnaire* ou *fraction* ; *trois et demi* font un nombre fractionnaire : *trois quarts* font une fraction.

6. Un nombre qu'on énonce sans désigner l'espèce des unités, comme quand on dit simplement *trois* ou *trois fois*, *quatre* ou *quatre fois*, s'appelle un *nombre abstrait* ; et lorsqu'on énonce en même temps l'espèce des unités, comme quand on dit *quatre livres*, *cent tonneaux*, on l'appelle *nombre concret*.

Nous définirons les autres espèces de nombres, à mesure qu'il en sera question.

De la Numération et des Décimales.

7. La numération est l'art d'exprimer tous les nombres, par une quantité limitée de noms et de caractères. Ces caractères s'appellent *chiffres*.

Nous nous dispenserons de donner ici les noms des nombres ; c'est une connoissance familière à tout le monde.

Quant à la manière de représenter les nombres par des chiffres, plusieurs raisons nous engagent à en exposer les principes.

8. Les caractères dont on fait usage dans la numération actuelle, et les noms des nombres qu'ils représentent, sont tels qu'on les voit ici.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zéro	un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf

Pour exprimer tous les autres nombres avec ces

caractères, on est convenu que de dix unités on en feroit une seule, à laquelle on donneroit le nom de *dizaine*, et que l'on compteroit par dizaines, comme on compte par unités, c'est-à-dire, que l'on compteroit deux dizaines, trois dizaines, etc. jusqu'à neuf: que pour représenter ces nouvelles unités, on emploiroit les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les distingueroit par la place qu'on leur feroit occuper, en les mettant à la gauche des unités simples.

Ainsi, pour représenter *cinquante-quatre* qui renferment cinq dizaines et quatre unités, on est convenu d'écrire 54. Pour représenter *soixante*, qui contiennent un nombre exact de dizaines et point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro qui marque qu'il n'y a point d'unités simples, et détermine le chiffre 6, à marquer un nombre de dizaines. On peut par ce moyen, compter jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf* inclusivement.

9. Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle; savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il étoit seul.

10. Depuis 99 on peut compter jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, par une convention semblable. De dix dizaines, on composera une seule unité qu'on nommera *centaine*, parce que dix fois dix font cent; on comptera ces centaines depuis un jusqu'à neuf, et on les représentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dizaines.

Ainsi pour marquer *huit cent cinquante-neuf*, qui contiennent huit centaines, cinq dizaines, et neuf unités, on écrira 859. Si l'on avoit *huit cent neuf*,

qui contiennent huit centaines, point de dizaines, et neuf unités, on écrirait 809 ; c'est-à-dire, que l'on mettroit un zéro pour tenir la place des dizaines qui manquent. Si les unités manquoient aussi, on mettroit deux zéros : ainsi pour marquer *huit cents*, on écrirait 800.

11. Remarquons encore, qu'en vertu de cette convention, un chiffre suivi de deux autres, ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il étoit seul.

12. Depuis *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, on peut compter, par le même artifice, jusqu'à *neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, en formant de dix centaines, une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille, comptant ces unités comme ci-devant, et les représentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainsi, pour marquer *sept mille huit cent cinquante-neuf*, on écrira 7859 ; pour marquer *sept mille neuf*, on écrira 7009 ; et pour *sept mille* ; on écrira 7000 ; où l'on voit qu'un chiffre suivi de trois autres, ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il étoit seul.

13. En continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés vers la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme et avec dix caractères seulement, tous les nombres entiers imaginables. (*)

(*) « Pour représenter tous les nombres possibles avec dix caractères, on est convenu qu'en allant de droite à gauche, les unités des chiffres seroient de dix en dix fois plus grandes, ou, ce qui revient au même, on est convenu qu'en allant

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la pensée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche : on donnera à chaque tranche les noms suivans, en partant de la droite, *unités, mille, millions, billions, trillions, quadrillions, quintillions, sextillions*, etc. Le premier chiffre de chaque tranche (en partant toujours de la droite) aura le nom de la tranche, le second celui de dizaines, et le troisième celui de centaines.

Ainsi, en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche, comme si elle étoit la seule, et l'on prononcera à la fin de chacune le nom de cette même tranche ; par exemple, pour énoncer le nombre suivant :

quadrillions,	trillions,	billions,	millions,	mille,	unités.
23,	456,	789,	234,	565,	456.

On dira vingt-trois *quadrillions*, quatre cent cinquante-six *trillions*, sept cent quatre-vingt-neuf *billions*, deux cent trente-quatre *millions*, cinq cent

de droite à gauche, les unités des chiffres formeroient une progression géométrique dont la raison seroit dix.

Dans tout autre système de numération, on seroit convenu qu'en allant de droite à gauche, les unités des chiffres formeroient une progression géométrique dont la raison seroit le nombre des caractères. Dans l'arithmétique binaire, les unités des chiffres seroient de deux en deux fois plus grandes ; dans l'arithmétique duodécimale, ces unités seroient de douze en douze fois plus grandes, etc.

Il est inutile d'observer que dans tout système de numération, il seroit indispensable d'imaginer des noms pour représenter certaines collections d'unités. Dans le système duodécimal, par exemple, il faudroit imaginer des noms pour représenter les nombres 12, 144, 1928, etc. »

soixante et cinq *mille*, quatre cent cinquante-six *unités*.

15. De la numération que nous venons d'exposer et qui est purement de convention, il résulte qu'à mesure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre est composé, sont de dix en dix fois plus grandes, et que par conséquent pour rendre un nombre, dix fois, cent fois, mille fois plus grand, il suffit de mettre à la suite du chiffre de ses unités, un, deux, trois, etc. zéros : au contraire, à mesure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités sont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle est la numération actuelle : elle est la base de toutes les autres manières de compter, quoique dans plusieurs arts on ne s'assujettisse pas toujours à compter uniquement par dizaines, par dizaines de dizaines, etc.

17. Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité qu'on a choisie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites. Le nombre en est indifférent en lui-même, il suffit qu'il puisse mesurer les quantités qu'on a dessein de mesurer ; mais ce qu'on doit avoir principalement en vue dans ces sortes de divisions, c'est de rendre les calculs les plus commodes qu'il sera possible ; c'est pour cette raison, qu'au lieu de partager d'abord l'unité en un grand nombre de parties, afin de pouvoir évaluer les plus petites, on ne la partage d'abord qu'en un certain nombre de parties, et qu'on subdivise celles-ci en d'autres, et ces nouvelles, encore en d'autres plus petites. C'est ainsi que dans les monnoies on partage la livre en 20 parties qu'on appelle *sols*, le sol en 12 parties qu'on appelle *deniers*. De même dans les mesures de poids, on partage la livre en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*,

Ponce en 8 *gros*, etc. ; ensorte que dans le premier cas on compte par vingtaines et par douzaines, dans le second, par douzaines et par huitaines, etc.

18. Un nombre qui est composé de parties rapportées, ainsi, à différentes unités, est ce qu'on appelle un nombre *complexe*, et par opposition, celui qui ne renferme qu'une seule espèce d'unités, s'appelle *nombre in complexe*. 8^l. ou 8 livres sont un nombre in complexe. 8^l. 17^s. 8^d. ou 8 livres 17 sols 8 deniers, sont un nombre complexe.

19. Chaque art subdivise à sa manière l'unité principale qu'il s'est choisie. Les subdivisions de la toise sont différentes de celles de la livre ; celle de la livre, différentes de celles du jour, de l'heure ; celles-ci différentes de celles du marc, et ainsi de suite : nous les ferons connoître, lorsque nous traiterons des nombres complexes.

20. Mais de toutes les divisions et subdivisions qu'on peut faire de l'unité, celle qui se fait par décimales, c'est-à-dire, en partageant l'unité en parties de dix en dix fois plus petites, est incontestablement la plus commode dans tous les calculs. Elle est fort en usage dans la pratique des Mathématiques ; la formation et le calcul des décimales sont absolument les mêmes que pour les nombres ordinaires ou entiers : nous allons les faire connoître.

21. Pour évaluer en décimales les parties les plus petites que l'unité, on conçoit que cette unité, telle qu'elle soit, livres, toises, etc. est composée de 10 parties, comme on imagine la dizaine composée de dix unités simples, ou comme on imagine la livre composée de 20 sols. Ces nouvelles unités, par opposition aux dizaines, sont nommées *dixièmes* ; on les représente par les mêmes chiffres que les unités sim-

ples; et comme elles sont dix fois plus petites que celles-ci, on les place à la droite du chiffre qui représente les unités simples.

Mais pour prévenir l'équivoque, et ne point donner lieu de prendre ces dixièmes pour des unités simples, on est convenu en même temps de fixer, une fois pour toutes, la place des unités, par une marque particulière; celle qui est le plus en usage, est une virgule que l'on met à la droite du chiffre qui représente les unités, ou, ce qui est la même chose, entre les unités et les *dixièmes*. Ainsi, pour marquer *vingt-quatre unités et trois dixièmes*, on écrira 24,3.

22. On peut, de même, regarder actuellement les *dixièmes*, comme des unités qui ont été formées de dix autres, chacune dix fois plus petites que les *dixièmes*, et par la même raison d'analogie, les placer à la droite des *dixièmes*. Ces nouvelles unités dix fois plus petites que les *dixièmes*, seront cent fois plus petites que les unités principales, et pour cette raison seront nommées *centièmes*. Ainsi pour marquer *vingt-quatre unités, trois dixièmes et cinq centièmes*, on écrira 24,35.

23. Concevons pareillement les *centièmes*, comme formés de dix parties; ces parties seront mille fois plus petites que l'unité principale, et pour cette raison seront nommées *millièmes*; et comme dix fois plus petites que les *centièmes*, on les placera à la droite de celles-ci.

En continuant de subdiviser ainsi de dix en dix, on formera de nouvelles unités qu'on nommera successivement des *dix-millièmes*, *cent-millièmes*, *millionièmes*, *dix-millionièmes*, *cent-millionièmes*, *billionièmes*, etc. et qu'on placera dans des rangs de plus en plus reculés sur la droite de la virgule.

24. Les parties de l'unité que nous venons de décrire, sont ce que l'on appelle les *décimales*.

25. Quant à la manière de les énoncer, elle est la même que pour les autres nombres. Après avoir énoncé les chiffres qui sont à la gauche de la virgule, on énonce les décimales de la même manière; mais on ajoute à la fin, les noms des unités décimales de la dernière espèce; ainsi pour énoncer ce nombre 34,572, on diroit trente-quatre unités et cinq cent soixante et douze *millièmes*; si c'étoient des toises, par exemple, on diroit trente-quatre toises et cinq cent soixante et douze *millièmes* de toises.

La raison en est facile à apercevoir, si l'on fait attention que dans le nombre 34,572, le chiffre 5 peut indifféremment être rendu ou par cinq *dixièmes*, ou par cinq cent *millièmes*, puisque le *dixième*, (22) valant 10 *centièmes*, et le *centième* (23) valant 10 *millièmes*, le *dixième* contiendra dix fois dix *millièmes* ou 100 *millièmes*; ainsi les cinq *dixièmes* valent 500 *millièmes*. Par une raison semblable, le chiffre 7 pourra s'énoncer en disant, soixante et dix *millièmes*, puisque (23) chaque *centième* vaut 10 *millièmes*.

26. A l'égard de l'espèce des unités du dernier chiffre, on la trouvera toujours facilement en comptant successivement de gauche à droite sur chaque chiffre depuis la virgule, les noms suivans..... *dixièmes*, *centièmes*, *millièmes*, *dix-millièmes*, etc.

27. Si l'on n'avoit point d'unités entières, mais seulement des parties de l'unité, on mettroit un zéro pour tenir la place des unités; ainsi pour marquer 125 *millièmes*; on écriroit 0,125. Si l'on vouloit marquer 25 *millièmes*, on écriroit 0,025, en mettant un zéro entre la virgule et les autres chiffres, tant

pour marquer qu'il n'y a point de *dixièmes*, que pour donner aux parties suivantes leur véritable valeur. Par la même raison, pour marquer 6 *dix-millièmes*, on écrirait 0,0006.

28. Examinons, maintenant, les changemens qu'on peut faire naître dans un nombre, par le déplacement de la virgule.

Puisque la virgule détermine la place des unités, et que tous les autres chiffres ont des valeurs dépendantes de leurs distances à cette même virgule; si l'on avance la virgule d'une, deux, trois, etc. places sur la gauche, on rend le nombre 10, 100, 1000, etc. fois plus petit; et au contraire on le rend 10, 100, 1000, etc. fois plus grand, si l'on recule la virgule d'une, deux, trois, etc. places sur la droite.

En effet, si l'on a 4327,5264, et qu'en avançant la virgule d'une place sur la gauche, on écrive 432,75264; il est visible que les mille du premier nombre sont des centaines dans le nouveau; les centaines, sont des dizaines; les dizaines, des unités; les unités, des dixièmes; les dixièmes, des centièmes, et ainsi de suite. Donc chaque partie du premier nombre est devenue dix fois plus petite par ce déplacement. Si au contraire, en reculant la virgule d'une place sur la droite, on eût écrit 43275,264, les mille du premier nombre se trouveroient changés en dizaines de mille, les centaines en mille, les dizaines en centaines, les unités en dizaines, les dixièmes en unités, et ainsi de suite. Donc le nouveau nombre est 10 fois plus grand que le premier.

29. Un raisonnement semblable fait voir qu'en avançant la virgule sur la gauche, de deux ou de trois places, on rendroit le nombre, 100 ou 1000 fois plus petit; et au contraire, 100 ou 1000 fois

plus grand, en reculant la virgule de deux ou de trois places sur la droite.

30. La dernière observation que nous ferons sur les décimales, est qu'on n'en change point la valeur en mettant à la suite du dernier chiffre décimal, tel nombre de zéros qu'on voudra. Ainsi 43,25 est la même chose que 43,250, ou que 43,2500, ou que 43,25000, etc.

Car chaque *centième* valant 18 *millièmes* ou 100 *dix-millièmes* etc. les 25 *centièmes* vaudront 250 *millièmes* ou 2500 *dix-millièmes*, etc. En un mot, c'est la même chose que lorsqu'au lieu de dire 25 pistoles, on dit 250 livres, ou lorsqu'au lieu de dire 25 quintaux, on dit 2500 livres.

Des Opérations de l'Arithmétique.

31. Ajouter, soustraire, multiplier et diviser, sont les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. Toutes les questions qu'on peut proposer sur les nombres se réduisent à pratiquer quelques-unes de ces opérations, ou toutes ces opérations. Il est donc important de se les rendre familières, et d'en bien saisir l'esprit.

32. Le but de l'Arithmétique est, comme nous l'avons déjà dit, de donner des moyens de calculer facilement les nombres. Ces moyens consistent à réduire le calcul des nombres les plus composés, à celui des nombres plus simples, ou exprimés par le plus petit nombre de chiffres possibles. C'est ce qu'il s'agit d'exposer actuellement.

De l'Addition des Nombres entiers et des Parties décimales.

33. Exprimer la valeur totale de plusieurs nom-

bres par un seul, est ce qu'on appelle *faire une addition*.

Quand les nombres qu'on se propose d'ajouter n'ont qu'un seul chiffre, on n'a pas besoin de règle; mais lorsqu'ils ont plusieurs chiffres, on trouve leur valeur totale qu'on appelle *somme*, en observant la règle suivante.

Ecrivez les uns sous les autres, tous les nombres proposés, de manière que les chiffres des unités de chacun, soient dans une même colonne verticale; qu'il en soit de même des dizaines, de même des centaines, etc., soulignez le tout.

Ajoutez d'abord tous les nombres qui sont dans la colonne des unités; si la somme ne passe pas 9, écrivez-la au-dessous; si elle surpasse neuf, elle renfermera des dizaines; n'écrivez au-dessous, que l'excédant du nombre des dizaines: comptez ces dizaines pour autant d'unités, et ajoutez-les avec les nombres de la colonne suivante; observez à l'égard de la somme des nombres de cette seconde colonne, la même règle qu'à l'égard de la première, et continuez ainsi de colonne en colonne, jusqu'à la dernière, au-dessous de laquelle vous écrirez la somme telle que vous la trouverez. Eclaircissons cette règle par des exemples.

E X E M P L E I.

Qu'il soit question d'ajouter 54925 avec 2023 : j'écris ces deux nombres comme on le voit ici :

$$\begin{array}{r} 54925 \\ 2023 \\ \hline 56948 \text{ somme.} \end{array}$$

Et après avoir souligné le tout, je commence par

les unités, en disant 5 et 3 font 8, que j'écris sous cette même colonne.

Je passe à celle des dizaines, dans laquelle je dis 2 et 2 font 4, que j'écris au-dessous.

A la colonne des centaines, je dis 9 et 0 font 9, que j'écris sous cette même colonne.

Dans la colonne des mille, je dis 4 et 2 font 6, que j'écris sous cette colonne.

Enfin dans la colonne des dizaines de mille, je dis 5 et rien font 5, que j'écris de même au-dessous.

Le nombre 56948, trouvé par cette opération, est la somme des deux nombres proposés, puisqu'il en renferme les unités, les dizaines, les centaines, les mille, et les dizaines de mille, que nous avons rassemblés successivement.

E X E M P L E II.

On demande la somme des quatre nombres suivans..... 6903, 7854, 953, 7327; je les écris comme on le voit ici.

$$\begin{array}{r}
 6903 \\
 7854 \\
 953 \\
 7327 \\
 \hline
 23037 \text{ somme.}
 \end{array}$$

Et en commençant comme ci-dessus, par la droite, je dis 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17; j'écris les 7 unités sous la première colonne, et je retiens la dizaine pour la joindre, comme unité, aux nombres de la colonne suivante, qui sont aussi des dizaines.

Passant à cette seconde colonne, je dis, 1 que je retiens et 0 font 1, et 5 font 6, et 5 font 11, et

2 font 13; j'écris 3 sous la colonne actuelle, et je retiens pour la dizaine, une unité que j'ajoute à la colonne suivante, en disant 1 et 9 font 10, et 8 font 18, et 9 font 27, et 3 font 30 : je pose 0 sous cette colonne, et je retiens, pour les trois dizaines, trois unités que j'ajoute à la colonne suivante, en disant pareillement, 3 et 6 font 9, et 7 valent 16, et 7 font 23; j'écris 3 sous cette colonne, et comme il n'y a plus d'autre colonne, j'avance d'une place, les deux dizaines qui appartiendroient à la colonne suivante, s'il y en avoit une. Le nombre 23037 est la somme des quatre nombres proposés.

34. S'il y a des parties décimales, comme elles se comptent, ainsi que les autres nombres, par dizaines, à mesure qu'on avance de droite à gauche, la règle pour les ajouter est absolument la même, en observant de mettre toujours les unités de même ordre dans une même colonne.

Ainsi, si on propose d'ajouter les trois nombres 72,957.... 12,8.... 124,03; j'écrirai :

$$\begin{array}{r}
 72,957 \\
 12,8 \\
 124,03 \\
 \hline
 209,787 \text{ somme.}
 \end{array}$$

Et en suivant la règle ci-dessus, j'aurai 209,787 pour la somme.

De la Soustraction des nombres entiers et des parties décimales.

35. La soustraction est l'opération par laquelle on retranche un nombre, d'un autre nombre. Le résultat de cette opération s'appelle *reste* ou *excès* ou *différence*.

Pour faire cette opération, on écrira le nombre qu'on veut retrancher, au-dessous de l'autre, de la même manière que dans l'addition; et ayant souligné le tout, on retranchera, en allant de droite à gauche, chaque nombre inférieur, de son correspondant supérieur; c'est-à-dire, les unités des unités, les dizaines des dizaines, etc. On écrira chaque reste, au-dessous, dans le même ordre, et zéro lorsqu'il ne restera rien.

Lorsque le chiffre inférieur se trouvera plus grand que le chiffre supérieur correspondant, on ajoutera à celui-ci dix unités qu'on aura en empruntant, par la pensée, une unité sur son voisin à gauche, lequel doit, par cette raison, être regardé comme moindre d'une unité, dans l'opération suivante.

E X E M P L E I.

On propose de retrancher 5432 de 8954. J'écris ces deux nombres comme il suit.

$$\begin{array}{r} 8954 \\ 5432 \\ \hline 3522 \text{ reste.} \end{array}$$

Et en commençant par le chiffre des unités, je dis 2 ôté de 4, il reste 2 que j'écris au-dessous: puis passant aux dizaines, je dis 3 ôté de 5, il reste 2 que j'écris sous les dizaines. A la troisième colonne, je dis 4 ôté de 9, il reste 5, que j'écris sous cette colonne. Enfin à la quatrième, je dis 5 ôté de 8 il reste 3, que j'écris sous 5; et j'ai 3522 pour le reste de 5432 retranché de 8954.

E X E M P L E II.

On veut ôter 7987 de 27646.



$$\begin{array}{r}
 \text{On écrira.} \quad 27646 \\
 \quad \quad \quad 7987 \\
 \hline
 19659 \text{ reste.}
 \end{array}$$

Comme on ne peut ôter 7 de 6, on ajoutera à 6, dix unités qu'on empruntera en prenant une unité sur son voisin 4, et on dira 7 ôté de 16, il reste 9 qu'on écrira sous 7.

Passant aux dizaines, on ne dira plus 8 ôté de 4, mais 8 ôté de 3 seulement, parce que l'emprunt qu'on a fait, a diminué 4 d'une unité : comme on ne peut ôter 8 de 3, on ajoutera de même à 3, dix unités qu'on empruntera, en prenant une unité sur le chiffre 6 de la gauche ; et on dira 8 ôté de 13, il reste 5 qu'on écrira sous 8. Passant à la troisième colonne, on dira de même, 9 ôté de 5, ou plutôt 9 ôté de 15 (en empruntant comme ci-dessus) il reste 6 qu'on écrira sous 9. A la quatrième colonne, on dira, par la même raison, 7 ôté de 6, ou plutôt de 16, il reste 9 qu'on écrira sous 7, et comme il n'y a rien à retrancher dans la cinquième colonne, on écrira sous cette colonne, non pas 2, parce qu'on vient d'emprunter une unité sur ce 2, mais seulement 1, et on aura 19659, pour le reste.

36. Si le chiffre sur lequel on doit faire l'emprunt, étoit un zéro, l'emprunt se feroit, non pas sur ce zéro, mais sur le premier chiffre significatif qui viendrait après, or quoique ce soit, alors, emprunter 100 ou 1000 ou 10000, selon qu'il y a un, deux ou trois zéros consécutifs, on n'en opérera pas moins comme ci-dessus ; c'est-à-dire, qu'on ajoutera seulement 10 au chiffre pour lequel on emprunte, et comme ces dix sont censés pris sur les 100 ou 1000, etc. qu'on a empruntés,

empruntés, pour employer les 90 ou les 990, etc. qui restent, on comptera les zéros suivans pour autant de 9; c'est ce que l'exemple ci-après va éclaircir.

E X E M P L E I I I.

Si de	99	
	20064	
on veut retrancher	17489	
	2575	reste.

On dira d'abord, 9 ôté de 4, ou plutôt de 14 (en empruntant sur le chiffre suivant), il reste 5. Puis pour ôter 8 de 5, comme cela ne se peut, et qu'il n'est pas possible non plus d'emprunter sur le chiffre suivant qui est un zéro, on empruntera sur le 2, une unité, laquelle vaut mille à l'égard du chiffre sur lequel on opère. De ce mille on ne prendra que 10 unités qu'on ajoutera à 5, et on dira, 8 ôté de 15, il reste 7.

Comme on n'a employé que 10 unités sur mille qu'on a empruntées, on emploiera les 990 restantes, pour en retrancher les nombres qui répondent au-dessous des zéros; ce qui revient au même que de compter chaque zéro, comme s'il valoit 9: ainsi l'on dira 4 ôtez de 9, reste 5, puis 7 ôté de 9, reste 2; et enfin 1 ôté de 1, il ne reste rien.

37. S'il y a des parties décimales dans les nombres sur lesquels on veut opérer, on suivra absolument la même règle; mais pour éviter tout embarras dans l'application de cette règle, il n'y aura qu'à rendre le nombre des chiffres décimaux le même dans chacun des deux nombres proposés, en mettant un nombre suffisant de zéros à la suite de celui qui a le moins de

Arithmétique.

B

décimales ; cette préparation ne change rien à la valeur de ce nombre (30).

E X E M P L E I V.

De 5403,25
on veut ôter 385,6532

Je mets deux zéros à la suite des décimales du nombre supérieur ; après quoi, j'opère sur les deux nombres ainsi préparés, précisément selon l'énoncé de la règle donnée pour les nombres entiers. . . .

$$\begin{array}{r} 5403,2500 \\ 385,6532 \\ \hline \end{array}$$

et je trouve pour reste. . . . 5017,5968

« Au lieu de diminuer d'une unité le chiffre sur lequel on a emprunté, on peut, si l'on veut, le laisser tel qu'il est, et augmenter, au contraire, d'une unité celui que l'on doit en retrancher ; le reste sera toujours le même. »

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction.

38. Ce qu'on appelle preuve d'une opération arithmétique, est une autre opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude du résultat de la première.

La preuve de l'addition se fait en ajoutant de nouveau, par parties, mais en commençant par la gauche, les sommes qu'on a déjà ajoutées. On retranche la totalité de la première colonne, de la partie qui lui répond dans la somme inférieure : on écrit au-dessous, le reste, qu'on réduit par la pensée en dizaines, pour le joindre au chiffre suivant de cette même somme, et du total on retranche encore la totalité de la colonne supérieure ; on continue ainsi, jusqu'à la dernière colonne, dont la totalité étant retranchée, ne doit laisser aucun reste.

Ainsi, ayant trouvé ci-dessus que les quatre nombres

6903

7854

953

7327

ont pour somme. 23037

3220

Pour vérifier ce résultat, j'ajoute les mêmes nombres, en commençant par la gauche; et je dis, 6 et 7 font 13, et 7 font 20, lesquels ôtés de 23, il reste 3 ou 3 dizaines, qui, avec le chiffre suivant zéro, font 30. Je passe à la seconde colonne, et je dis, 9 et 8 font 17, et 9 font 26, et 3 font 29, que j'ôte de 30; il reste 1 ou une dizaine, qui, joint au chiffre suivant 3, fait 13. J'ajoute tous les nombres de la troisième colonne, en disant 5 et 5 font 10, et 2 font 12, qui, ôtés de 13, il reste 1 ou une dizaine, laquelle, ajoutée au chiffre suivant 7, fait 17; j'ajoute pareillement tous les nombres de la dernière colonne, en disant, 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17, qui ôtés de 17, il ne reste rien: d'où je conclus que la première opération est exacte.

On est fondé à conclure que la première opération a été bien faite, lorsqu'après cette preuve il ne reste rien; parce qu'ayant ôté successivement tous les mille, toutes les centaines, toutes les dizaines et toutes les unités dont on avoit composé la somme, il faut qu'à la fin il ne reste rien.

39. La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste trouvé par l'opération, avec le nombre retranché; si la première opération a été bien faite, on doit reproduire le nombre dont on a retranché.

Ainsi je vois que dans le troisième exemple que nous avons donné ci-dessus, l'opération a été bien faite, parce qu'en ajoutant 17489 (nombre retranché), avec le reste 2565, je reproduis 20054, nombre dont on a retranché.

$$\begin{array}{r}
 20054 \\
 17489 \\
 \hline
 2565 \\
 \hline
 20054
 \end{array}$$

De la Multiplication.

40. Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ces deux nombres, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'est prendre trois fois le nombre 4.

41. Le nombre qu'on doit multiplier, s'appelle *multiplicande*; celui par lequel on doit multiplier, s'appelle *multiplicateur*; et le résultat de l'opération s'appelle *produit*.

42. Le mot *produit* a communément une acception beaucoup plus étendue : mais nous avertissons expressément que nous ne l'emploierons que pour désigner le résultat de la multiplication.

Le multiplicande et le multiplicateur se nomment aussi les facteurs du produit; ainsi 3 et 4 sont les facteurs de 12, parce que 3 fois 4 font 12.

43. Suivant l'idée que nous venons de donner de la multiplication, on voit qu'on pourroit faire cette opération en écrivant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et faisant ensuite l'addition; par exemple, pour multiplier 7 par 3 on pourroit écrire.

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 7 \\
 7 \\
 \hline
 21
 \end{array}$$

Et la somme 21 résultante de cette addition seroit le produit.

Mais lorsque le multiplicateur est tant soit peu considérable , l'opération devient fort longue : ce que nous appelons proprement multiplication , est la méthode de parvenir à ce même résultat , par une voie plus courte.

44. Tant qu'on ne considère les nombres que d'une manière abstraite , c'est-à-dire , sans faire attention à la nature de leurs unités , il importe peu , lequel des deux nombres proposés pour la multiplication , on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur : par exemple , si on a 4 à multiplier par 3 , il est indifférent de multiplier 4 par 3 , ou 3 par 4 , le produit sera toujours 12 : en effet 3 fois 4 ne sont autre chose que le triple de 1 fois 4 , et 4 fois 3 sont le triple de 4 fois 1 : or il est évident que 1 fois 4 et 4 fois 1 sont la même chose ; et on peut appliquer le même raisonnement à tout autre nombre.

45. Mais lorsque , par l'énoncé de la question , le multiplicateur et le multiplicande sont des nombres concrets , il importe de distinguer le multiplicande du multiplicateur : cette attention est principalement nécessaire dans la multiplication des nombres complexes , dont nous parlerons par la suite.

Au reste , cela est toujours aisé à distinguer : la question qui conduit à la multiplication dont il s'agit , fait toujours connoître quelle est la quantité qu'il s'agit de répéter plusieurs fois , c'est-à-dire , le multipli-

cande ; et quelle est celle qui marque combien de fois on doit répéter le multiplicande ; c'est-à-dire , quel est le multiplicateur.

46. Comme le multiplicateur est destiné à marquer combien de fois on doit prendre le multiplicande , il est toujours un nombre abstrait : ainsi , quand on demande ce que doivent coûter 52 toises de bois à raison de 36 livres la toise , on voit que le multiplicande est 36 livres qu'il s'agit de répéter 52 fois ; soit que ce 52 marque de toises ou toute autre chose.

47. Le produit qui est formé de l'addition répétée du multiplicande , aura donc des unités de même nature que le multiplicande (*).

Après cette petite digression sur la nature des unités du produit et de ses facteurs , revenons à la méthode pour trouver ce produit.

48. Les règles de la multiplication des nombres les plus composés , se réduisent à multiplier un nombre d'un seul chiffre par un nombre d'un seul chiffre. Il faut donc s'exercer à trouver soi-même le produit des nombres exprimés par un seul chiffre , en ajoutant successivement un même nombre à lui-même. On peut aussi , si on le veut , faire usage de la Table suivante , qu'on attribue à Pythagore.

(*) Nous n'en exceptons pas même la multiplication géométrique , dont nous ne parlerons qu'en Géométrie , comme cela nous paroît assez naturel. Les unités du multiplicateur n'y sont jamais que des unités abstraites , comme dans toute autre multiplication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La première bande de cette Table se forme en ajoutant 1 à lui-même successivement.

La seconde, en ajoutant 2 de même.

La troisième, en ajoutant 3, et ainsi de suite.

49. Pour trouver, par le moyen de cette Table, le produit de deux nombres exprimés par un seul chiffre chacun ; on cherchera l'un de ces deux nombres, le multiplicande, par exemple, dans la bande supérieure ; et en partant de ce nombre, on descendra verticalement jusqu'à ce qu'on soit vis-à-vis du multiplicateur qu'on trouvera dans la première colonne. Le nombre sur lequel on se sera arrêté, sera le produit ; ainsi pour trouver, par exemple, le produit de 9 par 6, ou combien font 6 fois 9, je descends depuis 9, pris dans la première bande, jusques vis-à-vis de 6 pris dans la première colonne ; le nombre sur lequel je m'arrête, est 54 ; par conséquent 6 fois 9 font 54.

En voilà autant qu'il en faut pour passer à la multiplication des nombres exprimés par plusieurs chiffres.

De la Multiplication par un nombre d'un seul chiffre.

50. Ecrivez le multiplicateur, qu'on suppose ici d'un seul chiffre, sous le multiplicande; peu importe sous quel chiffre: mais pour fixer les idées, supposons que ce soit sous le chiffre des unités.

Multipliez d'abord le nombre des unités par votre multiplicateur, et si le produit ne contient que des unités, écrivez ce produit au-dessous; s'il contient des unités et des dizaines, écrivez seulement les unités, et comptant les dizaines pour autant d'unités, retenez celles-ci.

Multipliez, de même, le nombre des dizaines du multiplicande, et au produit ajoutez les unités que vous avez retenues; écrivez le tout au-dessous, s'il peut être marqué par un seul chiffre, sinon n'écrivez que les unités de ce produit, et retenez-en les dizaines, qui sont des centaines, pour les ajouter au produit suivant, qui sera pareillement des centaines.

Continuez de multiplier successivement, suivant la même règle, tous les chiffres du multiplicande; la suite des chiffres que vous aurez écrits marquera le produit.

E X E M P L E.

On demande combien 2864 toises valent de pieds? La toise est de 6 pieds. La question se réduit à prendre six pieds 2864 fois, ou ce qui revient au même (44) à prendre 2864 pieds, 6 fois.

J'écris donc. 2864 multiplicande.
6 multiplicateur.

17184 . . produit.

Et je dis, en commençant par les unités, 6 fois 4

font 24 ; j'écris 4 , et je retiens 2 unités pour les deux dizaines.

2°. 6 fois 6 , font 36 , et 2 que j'ai retenues font 38 ; je pose 8 et je retiens 3.

3°. 6 fois 8 , font 48 , et 3 que j'ai retenues font 51 , je pose 1 et je retiens 5.

4°. 6 fois 2 font 12 , et 5 que j'ai retenues font 17 que j'écris en entier , parce qu'il n'y a plus rien à multiplier. Le nombre 17184 est le produit demandé , ou le nombre de pieds que valent les 2864 toises , puisqu'il renferme 6 fois les 4 unités , 6 fois les 6 dizaines , 6 fois les 8 centaines , et 6 fois les 2 mille ; et par conséquent 6 fois le nombre 2864.

De la Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres.

51. Lorsque le multiplicateur a plusieurs chiffres , il faut faire successivement , avec chacun de ces chiffres , ce que l'on vient de prescrire lorsqu'il n'y en a qu'un , mais en commençant toujours par la droite. Ainsi on multipliera d'abord tous les chiffres du multiplicande , par le chiffre des unités du multiplicateur ; puis par celui des dizaines , et on écrira ce second produit sous le premier ; mais comme il doit être un nombre de dizaines , puisque c'est par des dizaines qu'on multiplie , on portera le premier chiffre de ce produit , sous les dizaines , et les autres chiffres toujours en avançant sous la gauche.

Le troisième produit , qui se fera en multipliant par les centaines , se placera de même sous le second , mais en avançant encore d'une place : on suivra la même loi pour les autres.

Toutes ces multiplications étant faites , on ajoutera

les produits particuliers qu'elles ont données , et la somme sera le produit total.

E X E M P L E.

On propose de multiplier

$$\begin{array}{r}
 65487 \\
 6958 \\
 \hline
 523896 \\
 327435 \\
 589383 \\
 392922 \\
 \hline
 455658546 \text{ produit.}
 \end{array}$$

Je multiplie d'abord 65487, par le nombre 8 des unités du multiplicateur, et j'écris successivement sous la barre, les chiffres du produit 523896 que je trouve en suivant la règle donnée pour le premier cas (50).

Je multiplie de même le nombre 65487, par le second chiffre 5 du multiplicateur, et j'écris le produit 327435, sous le premier produit, mais en plaçant le premier chiffre 5 sous les dizaines de ce premier produit.

Multipliant pareillement 65487, par le troisième chiffre 9, j'écris le produit 589383 sous le précédent, mais en plaçant le premier chiffre 3, au rang des centaines, parce que le nombre par lequel je multiplie est un nombre de centaines.

Enfin je multiplie 65487, par le dernier chiffre 6 du multiplicateur, et j'écris le produit 392922, sous le précédent, en avançant encore d'une place, afin que son dernier chiffre occupe la place des mille, parce que le chiffre par lequel on multiplie marque des mille : enfin j'ajoute tous ces produits, et j'ai 455658546 pour le produit de 65487 multiplié

par 6958, c'est-à-dire, pour la valeur de 65487, pris 6958 fois. En effet, on a pris 65487, 8 fois par la première opération, 50 fois par la seconde, 900 fois par la troisième, et 6000 fois par la quatrième.

52. Si le multiplicande ou le multiplicateur, ou tous les deux étoient terminés par des zéros, on abrégeroit l'opération, en multipliant comme si ces zéros n'y étoient point, mais on les mettroit ensuite tous à la suite du produit.

E X E M P L E.

On propose de multiplier	6500
par	350
	325
	195
	2275000

Je multiplie seulement 65 par 35, et je trouve 2275, à côté duquel j'écris les trois zéros qui se trouvent, en tout, à la suite du multiplicande et du multiplicateur.

En effet, le multiplicande 6500 représente 65 centaines : ainsi quand on multiplie 65, on doit sous-entendre que le produit est des centaines. Pareillement, le multiplicateur 350, marque 35 dizaines : ainsi quand on multiplie par 35, on doit sous-entendre que le produit sera des dizaines ; il sera donc des dizaines de centaines, c'est-à-dire, des mille ; il doit donc avoir 3 zéros : on appliquera un raisonnement semblable à tous les autres cas.

53. Lorsqu'il se trouve des zéros entre les chiffres du multiplicateur, comme la multiplication par ces zéros ne donneroit que des zéros, on se dispensera

d'écrire ceux-ci dans le produit, et passant tout de suite à la multiplication par le premier chiffre significatif qui vient après ces zéros, on en avancera le produit sur la gauche d'autant de places plus une, qu'il y a de zéros qui se suivent dans le multiplicateur, c'est-à-dire, de deux places s'il y a un zéro, de trois s'il y en a deux.

E X E M P L E.

Si l'on a.	42052
à multiplier par.	3006
	252312
	126156
	126408312

Après avoir multiplié par 6, et écrit le produit 252312, on multipliera tout de suite par trois; mais on écrira le produit 126156, de manière qu'il marque des mille; il faudra donc le reculer de trois places, c'est-à-dire, d'une place de plus qu'il n'y a de zéros interposés aux chiffres du multiplicateur.

De la Multiplication des Parties Décimales.

54. Pour multiplier les parties décimales, on observera la même règle que pour les nombres entiers, sans faire aucune attention à la virgule; mais après avoir trouvé le produit, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y a de décimales tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

E X E M P L E I.

On propose de multiplier	54,23
par.	8,3
	16269
	43384
	450,109

Je multiplierai 5423 par 83 ; le produit sera 450109 ; et comme il y a deux décimales dans le multiplicande , et une dans le multiplicateur , je séparerai trois chiffres sur la droite de ce produit , qui par-là deviendra 450,109 , tel qu'il doit être.

La raison de cette règle est facile à saisir , en observant que si le multiplicateur étoit 83 , le produit n'auroit en décimales que des *centièmes* , puisqu'on auroit répété 83 fois le multiplicande 54,23 , dont les décimales sont des centièmes ; mais comme le multiplicateur est 8,3 , c'est-à-dire (21) , dix fois plus petit que 83 , le produit doit donc avoir des unités dix fois plus petites que les centièmes ; le dernier chiffre de ces décimales doit donc (23) être des *millièmes* ; il doit donc y avoir trois chiffres décimaux dans ce produit , c'est-à-dire , autant qu'il y en a , tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

On peut appliquer un raisonnement semblable à tout autre cas.

E X E M P L E I I.

Si on avoit.	0,12
à multiplier par.	0,3
	0,036

On multiplieroit 12 par 3, ce qui donneroit 36 ; comme la règle prescrit de séparer ici trois chiffres, on pourroit être embarrassé à y satisfaire, puisque ce produit 36 n'en a que deux ; mais si on reprend le raisonnement que nous avons appliqué à l'exemple précédent, on verra facilement qu'il faut, comme on le voit ici, interposer un zéro entre 36 et la virgule. En effet, si l'on avoit 0,12 à multiplier par 3, il est évident qu'on auroit 0,36 ; mais comme on n'a à multiplier que par 0,3, c'est-à-dire, par un nombre dix fois plus petit que 3, on doit avoir un produit dix fois plus petit que 0,36, c'est-à-dire, des millièmes, et c'est ce qui a lieu (28) lorsqu'on écrit 0,036.

55. Comme on n'emploie ordinairement les décimales que dans la vue de faciliter les calculs, en substituant à un calcul rigoureux une approximation suffisante, mais prompte ; il n'est pas inutile d'exposer ici un moyen d'abrégier l'opération lorsqu'on n'a besoin d'avoir le produit que jusqu'à un degré d'exactitude proposé.

Supposons, par exemple, qu'ayant à multiplier..... 45,625957 par..... 28,635 ; je n'aie besoin d'avoir le produit qu'à moins d'un millième près. J'écris ces deux nombres comme on le voit ci-dessous, c'est-à-dire, qu'après avoir renversé l'ordre des chiffres de l'un des deux, je l'écris sous l'autre, en faisant répondre le chiffre de ses unités sous la décimale immédiatement inférieure de deux degrés à celui auquel je veux borner mon produit. Je fais ensuite la multiplication, en négligeant, dans le multiplicande, tous les chiffres qui se trouvent à la droite de celui par lequel je multiplie ; et à mesure que je change de chiffre dans le multiplicateur, je porte toujours le

premier chiffre du nouveau produit, sous le premier chiffre du premier. L'addition de tous ces produits étant faite, je supprime les deux derniers chiffres, en observant cependant d'augmenter le dernier de ceux qui restent, d'une unité, si les deux que je supprime passent 50; après quoi je place la virgule au rang fixe par l'espèce de décimales que je me proposois d'avoir.

E X E M P L E

Je veux multiplier..... 45,625957
 par 28,635
 mais je n'ai besoin d'avoir le produit qu'à un millième d'unités près.

J'écris ainsi ces deux nombres.... 45,625957
 53682

$$\begin{array}{r}
 91251914 \\
 36500760 \\
 2737554 \\
 136875 \\
 22810 \\
 \hline
 130649923
 \end{array}$$

produit. 1306,499

Et si l'on avoit fait la multiplication à l'ordinaire, on auroit eu 1306,499278695, qui s'accorde avec le précédent jusqu'à la troisième décimale, ainsi qu'on le demande.

S'il n'y avoit pas assez de chiffres décimaux dans le multiplicande, pour faire correspondre le chiffre des unités du multiplicateur, au chiffre auquel la règle prescrit de le faire correspondre, on y suppléeroit en mettant des zéros.

E X E M P L E

On doit multiplier..... 54,236
 par 532,27
 et l'on veut le produit à un centième d'unités près ;
 j'écris. 54,236000

$$\begin{array}{r}
 72235 \\
 \hline
 271180000 \\
 16270800 \\
 1084720 \\
 108472 \\
 37961 \\
 \hline
 288681953
 \end{array}$$

produit..... 28868,20, en ajoutant une unité au dernier chiffre, parce que les deux que l'on supprime, passent 50.

Pour troisième exemple, supposons qu'on ait à multiplier. 0,227538917
 par 0,5664178
 et l'on ne veut avoir que 7 décimales au produit ;
 on écrira. 0,227538917

$$\begin{array}{r}
 87146650 \\
 \hline
 0 \\
 113769455 \\
 13652334 \\
 1365228 \\
 91012 \\
 2275 \\
 1589 \\
 176 \\
 \hline
 128882069
 \end{array}$$

produit. 0,1288821

Sur

Sur quelques usages de la Multiplication.

56. Nous ne nous proposons pas de faire connoître tous les usages qu'on peut faire de la multiplication. Nous en indiquerons seulement quelques-uns qui mettront sur la voie pour les autres.

La multiplication sert à trouver , en général , la valeur totale de plusieurs unités , lorsqu'on connoît la valeur de chacune. Par exemple , 1°. combien doivent coûter 5842 toises , à raison de 54 liv. la toise ? Il faut multiplier 54 liv. par 5842 , ou (44) 5842 liv. par 54 , on aura 315468 liv. pour le prix total demandé. 2°. Combien 5954 pieds cubes (*) d'eau pèsent-ils , en supposant que le pied cube pèse 72 livres ? il faut multiplier 72^l par 5954 , ou 5954^l par 72 ; on aura 428688^l pour le poids des 5954 pieds cubes.

57. On emploie la multiplication pour convertir des unités d'une certaine espèce , en unités d'une espèce plus petite. Par exemple , pour réduire les livres en sols , et ceux-ci en deniers ; les toises en pieds , ceux-ci en pouces , ces derniers en lignes ; les jours en heures , celles-ci en minutes , ces dernières en secondes : on a souvent besoin de ces sortes de conversions. Nous en donnerons quelques exemples.

Si on demande de convertir 8^l 17^s 7^d en deniers ; comme la livre vaut 20^s , on multipliera les 8^l par 20 (52) , ce qui donnera 160^s , auxquels joignant les

(*) Le pied cube est une mesure d'un pied de long sur un pied de large et sur un pied de haut , avec laquelle on évalue la capacité des corps , ainsi qu'on le verra en Géométrie.

17^s, on aura 177^s, qu'on multipliera par 12, parce que chaque sol vaut 12 deniers; et on aura 2124 deniers, lesquels joints aux 7 deniers, donnent 2131 deniers pour la valeur de 8ⁱ 17^s 7^d convertis en deniers.

Si l'on demande combien une année commune ou 365 jours, 5 heures 48 minutes, ou 365ⁱ 5^h 48^m valent de minutes; comme le jour est de 24 heures, on multipliera 24^h par 365, au produit 8760^h on ajoutera 5^h, on multipliera le total 8765 par 60 (52), parce que l'heure contient 60 minutes, et on aura 525900 minutes, auxquelles ajoutant 48 minutes, on aura 525948 pour le nombre de minutes contenues dans une année commune.

Cette conversion des parties du temps est utile dans quelques opérations du *Pilotage*.

58. L'abréviation dont nous avons parlé (52), peut être employée pour réduire promptement en livres un certain nombre de *tonneaux*: comme le tonneau de poids pèse 2000 livres; si l'on a, par exemple, 854 tonneaux, il n'y a qu'à doubler 854 et mettre les trois zéros à la suite du produit; on aura 1708000 pour le nombre de livres que pèsent 854 tonneaux.

Avant de terminer ce qui regarde la multiplication, faisons observer aux commençans, que ces expressions *doubler*, *tripler*, *quadrupler*, etc. signifient la même chose que multiplier par 2, par 3, par 4, etc.

De la Division des Nombres entiers , et des Parties Décimales.

59. Diviser un nombre par un autre , c'est , en général , chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le second.

Le nombre qu'on doit diviser , s'appelle *Dividende* ; celui par lequel on doit diviser , *Diviseur* ; et celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur , s'appelle le *Quotient*.

On n'a pas toujours pour but , dans la division , de savoir combien de fois un nombre en contient un autre ; mais on fait l'opération dans tous les cas , comme si elle tendoit à ce but : c'est pourquoi on peut , dans tous les cas , la considérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviseur.

Il suit de là , que si on multiplie le diviseur par le quotient , on doit reproduire le dividende , puisque c'est prendre ce diviseur autant de fois qu'il est dans le dividende ; cela est général , soit que le quotient soit un nombre entier , soit qu'il soit un nombre fractionnaire.

Quant à l'espèce des unités du quotient , ce n'est ni par l'espèce de celles du dividende , ni par l'espèce de celles du diviseur , ni par l'une et l'autre qu'il faut en juger ; car le dividende et le diviseur restant les mêmes , le quotient qui sera aussi toujours le même numériquement , peut être fort différent pour la nature de ses unités , selon la question qui donne lieu à cette division.

Par exemple , s'il est question de savoir combien 8 liv. contiennent 4 liv. , le quotient sera un nombre

abstrait qui marquera 2 fois. Mais s'il est question de savoir combien pour 8 liv. on fera faire d'ouvrage à raison de 4 liv. la toise, le quotient sera 2 toises, qui est un nombre concret, et dont l'espèce n'a aucun rapport avec le dividende ni avec le diviseur.

Mais on voit, en même temps, que la question seule qui conduit à faire la division dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient.

De la Division d'un nombre composé de plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

60. L'opération que nous allons décrire, suppose qu'on sache trouver combien de fois un nombre de un ou deux chiffres contient un nombre d'un seul chiffre. C'est une connoissance déjà acquise, quand on sait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre. On peut aussi, pour y parvenir, faire usage de la Table que nous avons donnée ci-dessus (48). Par exemple, si je veux savoir combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviseur 9 dans la bande supérieure, et je descends verticalement jusqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74, c'est ici 72; alors le nombre 8 qui se trouve vis-à-vis 72, dans la première colonne, est le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.

Cela supposé, voici comment se fait la division d'un nombre qui a plusieurs chiffres par un nombre qui n'en a qu'un.

Ecrivez le diviseur à côté du dividende; séparez l'un de l'autre par un trait, et soulignez le diviseur sous lequel vous écrirez les chiffres du quotient, à mesure que vous les trouverez.

Prenez le premier chiffre sur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, si le premier ne contient pas le diviseur.

Cherchez combien ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le diviseur, écrivez ce nombre de fois sous le diviseur.

Multipliez le diviseur par le quotient que vous venez d'écrire, et portez le produit sous la partie du dividende que vous venez d'employer.

Enfin retranchez le produit, de la partie supérieure du dividende à laquelle il répond, et vous aurez un reste.

A côté de ce reste, abaissez le chiffre suivant du dividende principal; et vous aurez un second dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme sur le premier, plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déjà trouvé, multipliant de même le diviseur par ce quotient, écrivant et retranchant le produit comme ci-devant.

Vous abaisserez de même, à côté du reste de cette division, le chiffre du dividende qui suit celui que vous avez abaissé, et vous continuerez toujours de la même manière jusqu'au dernier inclusivement.

Cette règle va être éclaircie par l'exemple suivant.

E X E M P L E.

On propose de diviser 8769 par 7.

J'écris ces deux nombres comme on les voit ci-après.

dividende 8769	7 diviseur.
7	1252 $\frac{5}{7}$ quotient.
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Et commençant par la gauche du dividende, je devrois dire en 8 mille, combien de fois 7 ; mais je dis simplement en 8 combien de fois 7 ? Il y est une fois. Cet 1 est naturellement mille ; mais les chiffres qui viendront après, lui donneront sa véritable valeur ; c'est pourquoi j'écris simplement 1 sous le diviseur.

Je multiplie le diviseur 7 par le quotient 1, et je porte le produit 7 sous la partie 8 que je viens de diviser ; faisant la soustraction, j'ai pour reste 1.

Ce reste 1 est la partie de 8 qui n'a pas été divisée, et est une dizaine à l'égard du chiffre suivant 7 ; c'est pourquoi j'abaisse ce même chiffre 7, à côté, et je continue l'opération, en disant en 17, combien de fois 7 ? 2 fois. J'écris ce 2 à la droite du premier quotient 1 qu'a donné la première opération.

Je multiplie, comme dans la première opération, le diviseur 7 par le quotient 2 que je viens de trouver ; je porte le produit 14 sous mon dividende partiel 17,

et faisant la soustraction , il me reste 3 pour la partie qui n'a pu être divisée.

A côté de ce reste 3 , j'abaisse 6 , troisième chiffre du dividende , et je dis en 36 combien de fois 7 ? 5 fois ; j'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7 par 5 ; et ayant écrit le produit 35 sous mon nouveau dividende partiel , je l'en retranche ; et il me reste 1.

Enfin à côté de ce reste 1 , j'abaisse le chiffre 9 du dividende , et je dis en 19 combien de fois 7 ? 2 fois ; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7 , par ce nouveau quotient 2 , et ayant écrit le produit 14 sous mon dernier dividende partiel 19 , j'ai pour reste 5.

Je trouve donc que 8769 contiennent 7 , autant de fois que le marque le quotient que nous avons écrit , c'est-à-dire , 1252 fois , et qu'il reste 5.

A l'égard de ce reste , nous nous contenterons , pour le présent , de dire qu'on l'écrit à côté du quotient , comme on le voit dans cet exemple , c'est-à-dire , en écrivant le diviseur au-dessous de ce reste , et séparant l'un de l'autre par un trait ; et alors on prononce *cinq septièmes*. Nous expliquerons par la suite la nature de ces sortes de nombres.

61. Si dans la suite de l'opération , quelqu'un des dividendes partiels se trouvoit ne pas contenir le diviseur , on écrirait zéro au quotient , et omettant la multiplication , on abaisserait tout de suite un autre chiffre à côté de ce dividende partiel , et on continuerait la division.

E X E M P L E.

Il s'agit de diviser 14464 par 8.

$$\begin{array}{r}
 14464 \quad | \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 1808 \end{array} \\
 \hline
 8 \\
 \hline
 64 \\
 64 \\
 \hline
 064 \\
 64 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Je prends ici les deux premiers chiffres du dividende, parce que le premier ne contient pas le diviseur.

Je trouve que 14 contient 8, une fois, j'écris 1 au quotient; je multiplie 8 par 1, et je retranche le produit 8 de 14, ce qui me donne pour reste 6, à côté duquel j'abaisse le troisième chiffre 4 du dividende.

Je continue, en disant, en 64 combien de fois 8? huit fois; j'écris 8 au quotient, et faisant la multiplication; j'ai pour produit 64 que je retranche du dividende partiel 64, il me reste 0, à côté duquel j'abaisse 6, quatrième chiffre du dividende; et comme 6 ne contient pas 8, j'écris 0 au quotient, et j'abaisse tout de suite à côté de 6 le dernier chiffre du dividende qui est ici 4, pour dire en 64 combien de fois 8? il y est 8 fois: après avoir écrit 8 au quotient, je fais la multiplication, et je retranche le produit 64; et comme il ne reste rien, j'en conclus que 14464 contiennent 8, 1808 fois.

De la Division par un nombre de plusieurs chiffres.

62. Lorsque le diviseur aura plusieurs chiffres , on se conduira de la manière suivante.

Prenez sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il est nécessaire pour contenir le diviseur.

Cela posé , au lieu de chercher , comme ci-devant , combien la partie du dividende que vous avez prise , contient votre diviseur entier , cherchez seulement combien de fois le premier chiffre de votre diviseur est compris dans le premier chiffre de votre dividende , ou dans les deux premiers , si le premier ne suffit pas ; marquez ce quotient sous le diviseur comme ci-devant.

Multipliez successivement , selon la règle donnée (50) , tous les chiffres de votre diviseur , par ce quotient , et portez à mesure les chiffres du produit sous les chiffres correspondans de votre dividende partiel. Faites la soustraction , et à côté du reste abaissez le chiffre suivant du dividende , pour continuer l'opération de la même manière.

Nous allons éclaircir ceci par quelques exemples , et prévenir en même temps les cas qui peuvent causer quelque embarras.

E X E M P L E I.

On propose de diviser 75347 par 53.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 75347 \\ 53 \end{array} \overline{) \begin{array}{r} 53 \\ 1421 \frac{34}{53} \end{array}} \\
 \underline{223} \\
 212 \\
 \underline{114} \\
 106 \\
 \underline{87} \\
 53 \\
 \underline{34}
 \end{array}$$

Je prends seulement les deux premiers chiffres du dividende, parce qu'ils contiennent le diviseur, et au lieu de dire en 75 combien de fois 53, je cherche seulement combien les 7 dizaines de 75 contiennent les 5 dizaines de 53, c'est-à-dire, combien 7 contient 5 : je trouve 1 fois, que j'écris au quotient.

Je multiplie 53 par 1, et je porte le produit 53 sous 75 : la soustraction faite, il reste 22, à côté duquel j'abaisse le chiffre 3 du dividende, et je poursuis, en disant, pour plus de facilité : en 22 combien de fois 5 (au lieu de dire en 223 combien de fois 53) ; je trouve 4 fois que j'écris au quotient.

Je multiplie successivement par quatre les deux chiffres du diviseur, et porte le produit 212, sous mon dividende partiel 223 ; la soustraction faite, j'ai pour reste 11 ; j'abaisse à côté de ce reste, le chiffre 4 du dividende, et je dis simplement, comme ci-des-

sus, en 11 combien de fois 5 ? 2 fois ; je l'écris au quotient, et je multiplie 53 par 2, ce qui me donne 106, que j'écris sous le dividende partiel 114 ; faisant la soustraction, j'ai pour reste 8 à côté duquel j'abaisse le dernier chiffre 7 ; je divise de même 87, et continuant comme ci-dessus, je trouve 1 pour quotient, et 34 pour reste que j'écris à côté du quotient, de la manière qui a été indiquée plus haut (60).

63. On devroit, à la rigueur, chercher combien de fois chaque dividende partiel contient le diviseur entier ; mais comme cette recherche seroit souvent longue et pénible, on se contente, comme on vient de le voir, de chercher combien la partie la plus forte de ce dividende contient la partie la plus forte du diviseur. Le quotient qu'on trouve par cette voie, n'est pas toujours le véritable, parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'une estimation approchée ; mais outre que cette estimation met presque toujours sur le but, et que dans le cas où elle n'y met pas, elle en écarte peu, la multiplication qui vient ensuite, sert à redresser ce qu'il peut y avoir de defectueux dans ce jugement. En effet, si le dividende partiel contenoit réellement le diviseur trois fois, par exemple, et que par l'essai qu'on fait on eût trouvé qu'il le contient 4 fois, il est facile de voir qu'en faisant la multiplication par 4, on auroit un produit plus grand que le dividende, puisqu'on prendroit le diviseur plus de fois qu'il n'est réellement dans ce dividende, et par conséquent la soustraction deviendrait impossible ; alors on diminuera le quotient successivement d'une, deux, etc. unités, jusqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puisse retrancher : au contraire, si l'on n'avoit mis que 2 au quotient, le reste de la soustraction se trouveroit plus grand que

le diviseur; ce qui prouveroit que le diviseur y est encore contenu, et que par conséquent le quotient est trop foible.

Au reste, on acquiert en peu de temps l'usage de prévoir de combien on doit diminuer ou augmenter le quotient que donne la première épreuve.

E X E M P L E I I.

On propose de diviser 189492 par 375.

$$\begin{array}{r|l}
 189492 & 375 \\
 \underline{1875} & 505 \frac{117}{375} \\
 1992 & \\
 \underline{1875} & \\
 117 &
 \end{array}$$

Je prends les quatre premiers chiffres du dividende, parce que les trois premiers ne contiennent pas le diviseur.

Je dis ensuite, en 18 seulement, combien de fois 3 ? il y est réellement 6 fois; mais en multipliant 375 par 6, j'aurois plus que mon dividende 1894; c'est pourquoi j'écris seulement 5 au quotient. Je multiplie 375 par 5; et après avoir écrit le produit, sous 1894, je fais la soustraction, et j'ai pour reste 19.

J'abaisse, à côté de 19, le chiffre 9 du dividende; et comme 199, que j'ai alors, ne contient pas 375, je pose 0 au quotient, et j'abaisse à côté de 199, le chiffre 2 du dividende, ce qui me donne 1992, pour lequel je dis, en 19 seulement, combien de fois 3 ? 6 fois. Mais par la même raison que ci-dessus,

je n'écris au quotient que 5 , et après avoir opéré comme ci-devant , j'ai pour reste 117.

64. Voici une réflexion qui peut servir à éviter , dans un grand nombre de cas , les tentatives inutiles. On est principalement exposé à ces essais douteux , lorsque le second chiffre du diviseur est sensiblement plus grand que le premier. Dans ce cas , au lieu de chercher combien le premier chiffre du diviseur est contenu dans la partie correspondante du dividende , il faut chercher combien ce premier chiffre , augmenté d'une unité , se trouve contenu dans la partie correspondante du dividende : cette épreuve sera toujours beaucoup plus approchante que la première.

E X E M P L E I I I.

On propose de diviser 1832 par 288.

$$\begin{array}{r|l}
 1832 & 288 \\
 1728 & 6 \frac{104}{288} \\
 \hline
 & 104
 \end{array}$$

Au lieu de dire , en 18 combien de fois 2 , je dirai , en 18 combien de fois 3 , parce que le diviseur 288 approche beaucoup plus de 300 que de 200 ; je trouve 6 qui est le véritable quotient , au lieu que j'aurois trouvé 9 , et j'aurois par conséquent été obligé de faire trois essais inutiles.

Moyens d'abrégier la Méthode précédente.

65. C'est pour rendre la méthode plus facile à saisir , que nous avons prescrit d'écrire sous chaque dividende partiel , le produit qu'on trouve en mul-

tipliant le diviseur par le quotient ; mais comme le but de l'Arithmétique doit être d'abrégé les opérations , nous croyons devoir faire remarquer qu'on peut se dispenser d'écrire ces produits , et faire la soustraction à mesure qu'on a multiplié chaque chiffre du diviseur. L'exemple suivant suffira pour faire entendre comment se fait cette soustraction.

E X E M P L E.

On veut diviser 756984 par 932.

$$\begin{array}{r|l}
 756984 & 932 \\
 1138 & \\
 \hline
 2064 & 812 \frac{200}{932} \\
 \hline
 & 200 \\
 \hline
 \end{array}$$

Après avoir pris les quatre premiers chiffres du dividende , qui sont nécessaires pour contenir le diviseur , je trouve que 75 contient 9 , 8 fois , c'est pourquoi j'écris 8 au quotient ; et au lieu de porter sous 7569 , le produit de 932 par 8 , je multiplie d'abord 2 par 8 , ce qui me donne 16 ; mais comme je ne puis ôter 16 de 9 , j'emprunte sur le chiffre suivant 6 une dizaine , qui jointe à 9 me donne 19 , duquel ôtant 16 , il me reste 3 que j'écris au-dessous.

Pour tenir compte de cette dizaine empruntée , au lieu de diminuer d'une unité le chiffre 6 sur lequel j'ai emprunté , je retiens cette unité que je vais ajouter au produit suivant ; ainsi continuant la multiplication , je dis , 8 fois 3 font 24 , et 1 que j'ai retenu font 25 ; comme je ne puis ôter 25 de 6 , j'emprunte sur le chiffre suivant 5 du dividende , deux dizaines , qui jointes à 6 , me donnent 26 , desquelles j'ôte 25 ,

et il me reste 1 que j'écris sous 6 ; par-là j'ai tenu compte de la première dizaine dont j'aurois dû diminuer 6, parce que j'ai retranché une dizaine de plus. Je tiendrai, de même, compte des deux dizaines que je viens d'emprunter. Je continue donc, en disant 8 fois 9 font 72, et 2 que j'ai empruntés font 74 lesquels ôtés de 75, il reste 1.

J'abaisse à côté du reste 113 le chiffre 8 du dividende, et je continue de la même manière, en disant en 11 combien de fois 9 ? une fois ; puis 1 fois 2 fait 2, qui ôtés de 8, il reste 6 ; une fois 3 fait 3, qui ôtés de 3, il reste 0 ; une fois 9 est 9, qui ôtés de 11, il reste 2. J'abaisse le chiffre 4 à côté du reste 206, et je dis, en 20 combien de fois 9 ? 2 fois ; et faisant la multiplication, 2 fois 2 font 4, qui ôtés de 4, il reste 0 ; 2 fois 3 font 6, qui ôtés de 6, il reste 0 ; et enfin 2 fois 9 font 18, qui ôtés de 20, il reste 2.

66. Il peut arriver dans le cours de ces divisions partielles, que le dividende contienne le diviseur plus de 9 fois ; cependant on ne doit jamais mettre plus de 9 au quotient : car si l'on pouvoit seulement mettre 10, ce seroit une preuve que le quotient trouvé par l'opération précédente, seroit faux, puisque la dizaine qu'on trouveroit dans le quotient actuel, appartiendrait à ce premier quotient.

67. Si le dividende et le diviseur étoient suivis de zéros, on pourroit en ôter à l'un et à l'autre autant qu'il y en a à la suite de celui qui en a le moins. Par exemple, pour diviser 8000 par 400, je diviserais seulement 80 par 4 ; car il est évident que 80 centaines ne contiennent pas plus 4 centaines, que 80 unités ne contiennent 4 unités.

De la division des Parties Décimales.

68. Pour ne point nous arrêter à des distinctions superflues, nous réduirons l'opération de la division des décimales à cette règle seule.

Mettez à la suite de celui des deux nombres proposés, qui a le moins de décimales, un nombre de zéros suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun (cela ne changera rien à la valeur de ce nombre) (30); supprimez la virgule dans l'un et dans l'autre, et faites l'opération comme pour les nombres entiers; il n'y aura rien à changer au quotient que vous trouverez.

E X E M P L E.

On propose de diviser 12,52 par 4,3.

J'écris 12,52 | 4,3

Ou plutôt 12,52 | 4,30

en complétant le nombre des décimales.

Supprimant la virgule, j'ai 1252 à diviser par 430; faisant l'opération,

$$\begin{array}{r} 1252 \quad | \quad 430 \\ \underline{392} \\ 392 \end{array}$$

Je trouve 2 pour quotient, et 392 pour reste, c'est-à-dire, que le quotient est 2 et $\frac{392}{430}$.

Mais comme l'objet qu'on se propose, quand on se sert de décimales, est d'éviter les fractions ordinaires, au lieu d'écrire le reste 392 sous la forme de

de fraction , comme on vient de le faire , on continuera l'opération comme dans l'exemple suivant.

E X E M P L E.

$$\begin{array}{r}
 1252 \quad \bigg| \quad 430 \\
 \hline
 2,9116 \\
 \\
 3920 \\
 \quad 500 \\
 \quad \quad 700 \\
 \quad \quad 2700 \\
 \quad \quad \quad 120 \\
 \hline
 \end{array}$$

Après avoir trouvé le quotient en entier , qui est ici 2 , on mettra à côté du reste 392 , un zéro qui , à la vérité , rendra ce reste dix fois trop grand ; on continuera de diviser par 430 , et ayant trouvé qu'il faudroit mettre 9 au quotient , on l'y mettra en effet , mais après avoir marqué la place des unités entières , en mettant une virgule après le 2 ; par ce moyen le 9 ne marquera plus que des dixièmes : après la multiplication et la soustraction faites , on mettra à côté du reste 50 un zéro , ce qui est la même chose que si l'on en avoit mis d'abord deux à côté du dividende ; mais en mettant après 9 , le quotient 1 qu'on trouvera , on lui donnera par-là sa véritable valeur , puisqu'alors il marque des centièmes ; on continuera ainsi tant qu'on le jugera nécessaire. En s'en tenant à deux décimales , on a la valeur du quotient à moins d'un centième d'unité près ; en poussant jusqu'à trois chiffres , on a le quotient à moins d'un millième près , et ainsi de suite ; puisqu'on n'auroit

Arithmétique.

D

pas pu mettre une unité de plus ou de moins, sans rendre le quotient trop fort ou trop foible.

Tous les restes de division peuvent être réduits ainsi en décimales.

Il reste à expliquer pourquoi la suppression de la virgule dans le dividende et dans le diviseur ne change rien au quotient, lorsqu'on a rendu le nombre des décimales le même dans chacun de ces deux nombres : c'est ce qu'il est aisé d'apercevoir, parce que dans l'exemple ci-dessus, le dividende 12,52, et le diviseur 4,30 ne sont autre chose que 1252 centièmes, et 430 centièmes, puisque les unités entières valent des centaines de centièmes (22) ; or il est clair que 1252 centièmes ne contiennent pas autrement 430 centièmes que 1252 unités ne contiennent 430 unités ; donc la considération de la virgule est inutile quand on a complété le nombre des décimales.

69. Lorsqu'on n'a besoin de connoître le quotient d'une division, que jusqu'à un degré d'exactitude proposé, on peut abrégér le calcul par la méthode suivante. Nous supposons, d'abord, qu'on n'a besoin de connoître ce quotient qu'à une unité près : nous ferons voir ensuite comment on doit appliquer la méthode pour l'avoir aussi près qu'on voudra : voici la règle.

Supprimez, sur la droite du dividende, autant de chiffres, moins un, qu'il y en a dans le diviseur : faites ensuite la division comme à l'ordinaire : s'il n'y a point de reste, vous mettrez à la suite du quotient, autant de zéros que vous avez supprimé de chiffres dans le dividende. Mais s'il y a un reste, vous continuerez de diviser, non pas par le même diviseur qu'auparavant, ce qui n'est plus possible, mais par

ce diviseur dont vous auez supprimé le dernier chiffre de la droite : après cette division, vous diviserez le nouveau reste, par le diviseur précédent dont vous supprimerez le dernier chiffre sur la droite, et vous continuerez ainsi de diviser, en supprimant, à chaque division, un chiffre sur la droite du diviseur.

E X E M P L E.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8789236487, divisé par 64423. Je supprime les quatre derniers chiffres de la droite du dividende, et je divise 878923, par le diviseur proposé 64423.

$$\begin{array}{r|l}
 878923 & 64423 \\
 234693 & 136430 \\
 41424. & .6442 \\
 2772. & .644 \\
 196. & .64 \\
 4. & .6 \\
 \hline
 \end{array}$$

Je trouve, d'abord, 13 pour quotient, et 41424 pour reste ; je divise donc 41424, par 6442, en supprimant le dernier chiffre 3 du diviseur : j'ai pour quotient 6, que j'écris à la suite du premier quotient 13 ; et le reste est 2772, que je divise par 644, en supprimant encore un chiffre sur la droite du diviseur primitif : j'ai pour quotient 4, que j'écris à la suite du quotient principal 136, le reste est 196, que je divise par 64, en supprimant encore un chiffre dans le diviseur : le quotient est 3, et le reste, 4. Enfin, je divise par 6, et j'ai 0 pour quotient ; en sorte que le quotient de 8789236487, divisé par 64423, est

136430, à moins d'une unité près. En effet le quotient exact est $136430 \frac{6597}{64413}$.

Il n'est pas indispensable d'écrire, à chaque fois, comme nous l'avons fait, le nouveau diviseur; on peut se contenter de barrer, dans le diviseur primitif, chaque chiffre à mesure qu'on passe à une nouvelle division: ce n'a été que pour rendre l'opération plus sensible, que nous avons écrit ces diviseurs à côté des restes successifs.

70. Si le reste de la première division se trouvoit plus petit que n'est le diviseur après qu'on en a supprimé le dernier chiffre, on mettroit zéro au quotient; et il se trouvoit encore plus petit que ne seroit ce diviseur après qu'on en a encore ôté le dernier des chiffres restans, on mettroit encore un zéro au quotient, et ainsi de suite.

E X E M P L E.

Pour avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 55106054 divisé par 643; je divise, comme à l'ordinaire, la partie 551060 qui reste après la suppression des deux derniers chiffres du dividende proposé.

$$\begin{array}{r}
 551060 \quad | \quad 643 \\
 \underline{36660} \quad | \quad 85701 \\
 4510 \\
 009 \dots 64 \\
 9 \dots 6 \\
 \hline
 3
 \end{array}$$

J'ai pour quotient 857, et 9 pour reste: il faut donc diviser ce reste par 64 seulement; comme 9 ne contient pas ce diviseur, je mets 0 au quotient,

et j'ai encore pour reste, 9, que je divise par 6 seulement; en sorte que le quotient cherché, est 85701, à moins d'une unité près.

71. Si, lorsqu'au commencement de l'opération, on supprime sur la droite du dividende les chiffres que la règle prescrit de supprimer, il se trouve que les chiffres restans ne contiennent pas le diviseur, on supprimera tout de suite, sur la droite du diviseur, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le diviseur y soit contenu.

E X E M P L E.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 1611527 divisé par 64524.

Je supprime les quatre chiffres 1527 de la droite du dividende. Mais comme les chiffres restans 161 ne peuvent pas être divisés par 64524, je supprime dans ce diviseur, les trois derniers chiffres 524 qui doivent être supprimés pour que ce diviseur soit contenu dans le dividende restant 161; ainsi je divise 161 par 64, en opérant comme dans l'exemple précédent.

$$\begin{array}{r}
 161 \quad | \quad 64 \\
 33 \quad | \quad 25 \\
 \hline
 3
 \end{array}$$

et j'ai 25 pour le quotient de 1611527 divisé par 64524, à moins d'une unité près: en effet, le quotient exact est $24 \frac{62951}{64524}$, qui est beaucoup plus près de 25 que de 24.

72. A mesure qu'on supprime un chiffre dans le diviseur, il convient, pour plus d'exactitude, d'aug-

menter d'une unité, le dernier de ceux qui restent, si celui qu'on supprime est au-dessus de 5 ou égal à 5. On augmentera, de même, d'une unité, le dernier des chiffres qui restent dans le dividende, après la suppression que la règle prescrit, si ceux-ci surpassent ou 5, ou 50, ou 500, selon qu'il y en a 1, ou 2, ou 3, etc.

E X E M P L E.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8657627, divisé par 1987.

Je divise donc 8658 par 1987, comme il suit,

8658	1987
	4357
710 . .	199
113 . .	20
13 . .	2

C'est-à-dire, qu'au lieu de diviser le reste 710, par 198 seulement, je les divise par 199, parce que le dernier chiffre 7, que je supprime, est au-dessus de 5. Même raison pour la division suivante. Mais comme le dernier diviseur 2, qui est contenu 6 fois $\frac{1}{2}$ dans 13, est un peu trop fort, je mets 7 au quotient, pour compenser.

73. Maintenant il est facile de voir ce qu'il y a à faire, lorsqu'on veut avoir le quotient beaucoup plus exactement. Par exemple, si l'on vouloit avoir le quotient, à un dix-millième d'unité près; la question se réduiroit à mettre autant de zéros (ici, ce seroit quatre) à la suite du dividende, qu'on veut avoir de décimales au quotient; après quoi on fera

la division selon la méthode actuelle. Et lorsqu'on aura trouvé le quotient, à moins d'une unité près, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres, qu'on vouloit avoir de décimales.

E X E M P L E.

On veut avoir, à moins d'un dix-millième d'unité près, le quotient de 6927 divisé par 4532 : je mets quatre zéros à la suite de 6927, et la question se réduit à avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 69270000 divisé par 4532; c'est-à-dire, conformément à la règle ci-dessus, à diviser 69270 par 4532, comme il suit,

$$\begin{array}{r|l}
 69270 & 4532 \\
 23950 & \hline
 1290 & \dots 453 \\
 384 & \dots 45 \\
 24 & \dots 5
 \end{array}$$

Le quotient cherché est donc 1,5285, à moins d'un dix-millième d'unité près.

S'il y avoit des décimales dans le dividende, ou dans le diviseur, ou dans tous les deux, on les ramèneroit d'abord à n'en point avoir, selon ce qui a été dit (68); après quoi on opéreroit comme dans ce dernier exemple.

Donc si l'on vouloit réduire une fraction proposée, en décimales, on y parviendrait promptement par cette méthode, ayant égard à ce qui a été dit (71).

Ainsi, si l'on veut réduire $\frac{4253}{9678}$ en décimales, et en avoir la valeur à moins d'un millième d'unité près, on aura 4253000 à diviser par 9678; ce

qui (69) se réduira à diviser 4253 par 9678, ou (71) à diviser 4253 par 968, selon la méthode actuelle. On trouvera donc 439 ; en sorte qu'on aura 0,439 pour la valeur de $\frac{4253}{9678}$, à moins d'un millième près.

74. Il pourroit arriver néanmoins que le quotient trouvé d'après ces règles fût fautif de 1, 2 ou 3 unités dans le dernier chiffre. Quoique ce cas doive se rencontrer très-rarement, il n'est pas inutile de faire observer qu'on peut toujours le prévenir facilement, en ne séparant, au commencement de l'opération, sur la droite du dividende, qu'autant de chiffres moins deux qu'il y en a dans le diviseur, et opérant, du reste, comme ci-dessus. Lorsque le quotient sera trouvé, on en supprimera le dernier chiffre, en observant d'ajouter une unité au dernier de ceux qui resteront, si celui qu'on supprime est plus grand que 5.

Preuve de la Multiplication et de la Division.

75. On peut tirer de la définition même que nous avons donnée de chacune de ces deux opérations, le moyen d'en faire la preuve.

Puisque dans la multiplication on prend le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités, il s'ensuit que si l'on cherche combien de fois le produit contient le multiplicande, c'est-à-dire (59), si l'on divise le produit par le multiplicande, on doit trouver, pour quotient, le multiplicateur ; et comme on peut prendre le multiplicande pour le multiplicateur, et *vice versa*, en général, si l'on divise le produit d'une multiplication, par l'un de ses facteurs, on doit trouver, pour quotient, l'autre facteur.

Par exemple, ayant trouvé ci-dessus (50) que 2864 multiplié par 6 a donné 17184, je divise 17184 par 2864; je dois trouver et je trouve en effet, 6, pour quotient.

Pareillement, puisque le quotient d'une division marque combien de fois le dividende contient le diviseur, il s'ensuit que si l'on prend le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, c'est-à-dire, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende lorsque la division a été faite sans reste, et que dans le cas où il y a un reste, si l'on multiplie le diviseur par le quotient, et qu'au produit on ajoute le reste de la division, on doit reproduire le dividende.

Par exemple, nous avons trouvé ci-dessus (63) que 189492, divisé par 375, donnoit 505 pour quotient, et 117 pour reste; en multipliant 375 par 505, on trouve 189375, auquel ajoutant le reste 117, on retrouve le dividende 189492.

Ainsi la multiplication et la division peuvent se servir de preuve réciproquement.

Mais on peut vérifier ces opérations par un moyen plus prompt que nous allons exposer: il ne faut pas, pour cela, négliger les réflexions que nous venons de faire; elles seront utiles dans beaucoup d'autres occasions.

Preuve par 9.

76. Supposons qu'après avoir multiplié 65498 par 454, et trouvé que le produit est 29736092, on veuille éprouver si ce produit est exact.

On ajoutera tous les chiffres 6, 5, 4, 9, 8 du multiplicande, comme s'ils ne contenoient que des unités simples, et on retranchera 9, à mesure qu'il

se trouvera dans la somme ; on aura un reste qui sera ici 5.

On ajoutera pareillement les chiffres 4, 5, 4, du multiplicateur, et retranchant pareillement tous les 9 que produira cette addition, on aura pour reste 4.

On multipliera le reste 5 du multiplicande par le reste 4 du multiplicateur, et du produit 20, on retranchera les 9 qu'il peut renfermer ; il restera 2.

Si le produit est exact, il faut qu'ajoutant de même tous les chiffres 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2 de ce produit, et retranchant tous les 9, il ne reste aussi que 2 ; ce qui a lieu en effet.

Cette règle est fondée sur ce principe, que pour avoir le reste de la soustraction de tous les 9 qu'un nombre peut renfermer, il n'y a qu'à chercher le reste que ses chiffres ajoutés comme des unités simples, donneroient après la suppression des 9.

En effet, si d'un nombre exprimé par un seul chiffre suivi de plusieurs zéros, on retranche tous les 9, le reste sera exprimé par ce seul chiffre : si de 400, ou de 5000, ou de 60000, vous retranchez tous les 9, le reste sera 4, ou 5, ou 6, etc. ce qui est aisé à voir.

Donc le reste que donneroit, par la suppression des 9, un nombre tel que 65498 (qui est la même chose que 60000, plus 5000, plus 400, plus 90, plus 8), sera le même que celui que donneroient 6, plus 5, plus 4, plus 9, plus 8 ; c'est-à-dire, le même que si l'on ajoutoit ses chiffres comme contenant des unités simples.

En voici maintenant l'application à la preuve de la multiplication.

Puisque 65498 est composé d'un certain nombre de 9 et d'un reste 5, et que le multiplicateur 454 est

composé aussi d'un certain nombre de 9 et d'un reste 4, il ne peut s'en falloir que du produit de 5 par 4, ou 20, que le produit total ne soit divisible par 9, ou, en ôtant les 9, il ne doit s'en falloir que de 2, que le produit total ne soit divisible par 9 : donc il doit rester au produit la même quantité que dans le produit des deux restes après la suppression des 9 qu'il renferme.

On pourroit faire aussi cette preuve de la même manière par le nombre 3.

A l'égard de la division, elle devient facile à éprouver, après ce qui a été dit (70). Après avoir ôté du dividende, le reste qu'a donné la division, on regardera le résultat comme un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs; et par conséquent on y appliquera la preuve par 9, de la même manière qu'on vient de le faire.

A parler exactement, cette vérification n'est pas infallible, parce que, dans la multiplication, par exemple, si l'on s'étoit trompé de quelques unités sur quelque chiffre du produit, et qu'en même temps on eût fait une erreur égale, mais en sens contraire, sur quelque autre chiffre du même produit; comme cela ne changeroit rien au reste que l'on auroit après la suppression des 9, cette règle ne feroit point apercevoir l'erreur; mais comme il faut, ainsi qu'on le voit, au moins deux erreurs, et deux erreurs qui se compensent, ou qui ne diffèrent que d'un certain nombre de fois 9, les cas où cette vérification seroit fautive, seront très-rare dans l'usage.

Quelques usages de la Règle précédente.

77. La division sert non-seulement à trouver combien de fois un nombre en contient un autre, mais encore à partager un nombre en parties égales. Prendre la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, le vingtième, le trentième, etc. d'un nombre, c'est diviser ce nombre par 2, 3, 4, 5, 20, 30, etc. ou le partager en 2, 3, 4, 5, 20, 30, etc. parties égales, pour prendre une de ces parties.

« Entre plusieurs exemples de cet usage de la division, nous choisissons le cas où l'on veut trouver une quantité moyenne entre plusieurs autres. Supposons qu'ayant fait dix épreuves d'un même mortier, on ait eu les dix portées suivantes.

C O U P S.	P O R T É E S.
1	 1231 toises.
2	 1192
3	 1223
4	 1200
5	 1227
6	 1144
7	 1186
8	 1219
9	 1229
10	 1164
Somme des portées. 12015	
Portée moyenne. 1201 $\frac{5}{10}$	

Ce qu'on entend par une quantité moyenne, c'est ce que seroit chaque quantité, si leur valeur totale restant la même, elles étoient toutes égales. Or il est clair, que si elles étoient toutes égales, pour avoir la valeur de chacune, il faudroit

partager leur totalité en autant de parties qu'il y a de quantités. Il faut donc ici partager la somme 12015 en dix parties, c'est-à-dire, la diviser par 10 : le quotient $1201\frac{5}{10}$ est la quantité ou la portée moyenne que l'on appelle ainsi, parce qu'elle tient une espèce de milieu entre toutes les autres.

Dans les calculs ordinaires de la pratique, on rejette la fraction quand elle est au-dessous d'une demi-unité ; et lorsqu'au contraire elle est au-dessus, ou qu'elle vaut cette demi-unité, on compte une unité de plus. »

La division sert encore à convertir les unités d'une certaine espèce, en unités d'une espèce supérieure ; par exemple, un certain nombre de deniers en sols, et ceux-ci en livres. Pour réduire 5864 deniers en sols, on remarquera que puisqu'il faut 12 deniers pour faire un sol, autant de fois il y aura 12 deniers dans 5864 deniers, autant il y aura de sols ; il faut donc diviser par 12, et on trouvera 488 s. et 8 den. de reste. Pour réduire en livres les 488 sols, on divisera 488 par 20, puisqu'il faut 20 sols pour faire la livre, et on aura en total, 24 liv. 8 sols 8 deniers.

A l'occasion de cette division par 20, remarquons que quand on a à diviser par un nombre suivi de zéros, on peut abréger l'opération en séparant sur la droite du dividende autant de chiffres qu'il y a de zéros ; on divise la partie qui reste à gauche, par les chiffres significatifs du diviseur ; s'il y a un reste, on écrit à sa suite, les chiffres qu'on a séparés, ce qui donne le reste total. Par exemple, pour diviser 5834, par 20 ; je sépare le dernier chiffre 4, et je divise par 2 la partie restante 583, j'ai pour quotient 291, et 1 pour reste ; j'écris à côté de ce reste 1, le chiffre séparé 4, ce qui me donne 14 pour reste total ; en sorte que le quotient est $291\frac{14}{20}$.

Cette abréviation peut être appliquée à la réduction de la charge d'un navire en tonneaux de poids :

si l'on sait que la charge est de 2584954 livres, pour la réduire en tonneaux, c'est-à-dire, pour diviser par 2000, on séparera les trois derniers chiffres de la droite, et prenant la moitié des autres, on aura 1292 tonneaux et 954 livres.

Quand on veut évaluer en livres et sols le vingtième d'un nombre de livres proposé, il suit de cette règle, que l'opération se réduit à compter le dernier chiffre pour des sols, et prendre moitié des autres chiffres que l'on comptera pour des livres. Si, en prenant cette moitié, il reste une unité, on la comptera pour une dizaine de sols qu'on placera à la gauche du chiffre qu'on a séparé d'abord. Par exemple, si l'on veut avoir le vingtième de 54672 livres, on séparera le dernier chiffre 2 que l'on comptera pour 2 sols, et prenant la moitié de 5467, qui est 2733 avec une unité de reste, on écrira 2733 livres 12 sols : la raison de cette règle est évidente en faisant attention que 54672 liv. est 54660 livres plus 12 livres; or le vingtième de 54660 est évidemment 2733, et celui de 12 liv. est 12 sols, puisque le vingtième d'une livre est un sol. S'il y avoit des sols et deniers dans la somme proposée, on négligeroit les deniers, dont la vingtième partie ne peut jamais faire un denier. A l'égard des sols, on les tripleroit; et prenant le cinquième, on le porteroit aux deniers. Ainsi le vingtième de 54672 livres 17 sols 7 deniers, est 2733 livres 12 sols 10 deniers.

S'il s'agissoit d'avoir le dixième d'un nombre de livres, on sépareroit le dernier chiffre, et l'ayant doublé, on le compteroit pour des sols; et on compteroit comme des livres, tous les chiffres restans sur la gauche. Ainsi le dixième de 67987 livres est 6798 livres 14 sols. La raison pour laquelle on double

le dernier chiffre, est que le dixième d'une livre est 2 sols.

On a assez souvent besoin de prendre les quatre deniers pour livre, d'une somme proposée : cela se réduit à en prendre d'abord le vingtième comme il vient d'être dit ; puis prendre le tiers de ce vingtième. Ainsi pour avoir les quatre deniers pour livre de 8762 livres, j'en prends le vingtième qui est 438 livres 2 sols, dont le tiers 146 livres 0 sols 8 deniers forme les quatre deniers pour livre de 8762 livres. En effet, les quatre deniers pour livre, ne sont autre chose que le soixantième ; puisque 4 deniers sont contenus 60 fois dans la livre. Or le soixantième est le tiers du vingtième.

Des Fractions.

78. Les fractions considérées arithmétiquement sont des nombres par lesquels on exprime les quantités plus petites que l'unité.

Pour se faire une idée nette des fractions, il faut concevoir que la quantité qu'on a prise d'abord pour unité, est elle-même composée d'un certain nombre d'unités plus petites, comme l'on conçoit, par exemple, que la livre est composée de vingt parties ou de vingt unités plus petites qu'on appelle sols.

Une ou plusieurs de ces parties forment ce qu'on appelle une fraction de l'unité. On donne aussi ce nom aux nombres qui représentent ces parties.

79. Une fraction peut être exprimée en nombres, de deux manières qui sont chacune en usage.

La première manière consiste à représenter, comme les nombres entiers, les parties de l'unité que contient la quantité dont il s'agit ; mais alors on donne un nom particulier à ces parties ; ainsi pour marquer 7

parties dont on en conçoit 20 dans la livre, on emploieroit le chiffre 7, mais on prononceroit 7 sols, et on écrirait 7' : cette manière de marquer les parties de l'unité, a lieu dans les nombres complexes dont nous parlerons par la suite.

80. Mais comme il faudroit un signe particulier pour chaque division qu'on pourroit faire de l'unité, on évite cette multiplicité de signes en marquant une fraction par deux nombres placés l'un au-dessous de l'autre, et séparés par un trait. Ainsi, pour marquer les 7 parties dont il vient d'être question, on écrit $\frac{7}{10}$ c'est-à-dire, qu'en général, on écrit d'abord le nombre qui marque combien la quantité dont il s'agit contient de parties de l'unité; et on écrit au-dessous de ce nombre celui qui marque combien on conçoit de ces parties dans l'unité.

81. Et pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le nombre supérieur (qui s'appelle *le numérateur*); ensuite le nombre inférieur (qui s'appelle *le dénominateur*); mais on ajoute au nom de celui-ci la terminaison *ième* : par exemple, pour énoncer $\frac{7}{10}$, on prononcera *sept vingtièmes*. Pour énoncer $\frac{4}{5}$, on prononcera *quatre cinquièmes*; et par cette expression *quatre cinquièmes*, on doit entendre quatre parties, dont il en faudroit cinq pour composer l'unité.

Il faut seulement excepter de la terminaison générale, les fractions dont le dénominateur est 2, ou 3, ou 4, qui se prononcent, *moitiés* ou *demis*, *tiers*, *quarts*. Ainsi ces fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, se prononceroient *un demi*, *deux tiers*, *trois quarts*.

82. Le numérateur marque donc combien la quantité représentée par la fraction contient de parties de l'unité; et le dénominateur fait connoître de quelle valeur sont ces parties, en marquant combien il en faut

fait pour composer l'unité. On lui donne le nom de dénominateur, parce que c'est lui, en effet, qui donne le nom à la fraction, et qui fait que dans ces deux fractions, par exemple, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{7}$, les parties de la première s'appellent des *cinquièmes*, et les parties de la seconde des *septièmes*.

83. Le numérateur et le dénominateur s'appellent aussi, d'un nom commun, les deux *termes de la fraction*.

Des Entiers considérés sous la forme de fraction.

84. Les opérations qu'on fait sur les fractions, conduisent souvent à des résultats fractionnaires dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, par exemple, à des résultats tels que $\frac{8}{3}$, $\frac{27}{5}$, etc.

Ces sortes d'expressions ne sont pas des fractions proprement dites, mais ce sont des nombres entiers joints à des fractions.

85. Pour extraire les entiers qui s'y trouvent renfermés, il faut diviser le numérateur par le dénominateur. Le quotient marquera les entiers, et le reste de la division sera le numérateur de la fraction qui accompagne ces entiers. Ainsi $\frac{27}{5}$ donneront $5 \frac{2}{5}$, c'est-à-dire, cinq entiers et deux cinquièmes.

En effet, dans l'expression $\frac{27}{5}$, le dénominateur 5 fait connoître que l'unité est composée de 5 parties; donc autant de fois qu'il y aura 5 dans 27, autant il y aura d'unités entières dans la valeur de la fraction $\frac{27}{5}$.

86. Les multiplications et les divisions des nombres entiers joints aux fractions exigent, du moins pour la facilité, qu'on convertisse ces entiers en fractions.

On fait cette conversion en multipliant le nombre

Arithmétique.

entier, par le dénominateur de la fraction en laquelle on veut réduire cet entier. Par exemple, si on veut convertir 8 entiers en cinquièmes, on multipliera 8 par 5, et on aura $\frac{40}{5}$. En effet, lorsqu'on veut convertir 8 en cinquièmes, on regarde l'unité comme composée de 5 parties; les 8 unités en contiendront donc 40 : pareillement $7\frac{4}{9}$ convertis en neuvièmes, feront. $\frac{67}{9}$.

Des changemens qu'on peut faire subir aux deux termes d'une Fraction sans changer sa valeur.

87. Il est visible que plus on concevra de parties dans l'unité, et plus il faudra de ces parties pour composer une même quantité.

88. Donc on peut rendre le dénominateur d'une fraction, double, triple, quadruple, etc. sans rien changer à la valeur de la fraction, pourvu qu'en même temps on rende aussi le numérateur double, triple, quadruple, etc.

On peut donc dire en général qu'une fraction ne change point de valeur quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.

Ainsi, $\frac{3}{4}$ est la même chose que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ la même chose que $\frac{2}{4}$, que $\frac{3}{6}$, que $\frac{5}{10}$, etc.

89. Par un raisonnement semblable, on voit que moins on supposera de parties dans l'unité, moins il faudra de ces parties pour former une même quantité; que par conséquent on peut, sans changer une fraction, rendre son dénominateur 2, 3, 4, etc. fois plus petit, pourvu qu'en même temps on rende son numérateur 2, 3, 4, etc. fois plus petit; et en général, une fraction ne change point de valeur quand on divise ses deux termes par un même nombre.

Pour voir distinctement la vérité de ces deux propositions, il suffit de se rappeler ce que c'est que le dénominateur, et ce que c'est que le numérateur d'une fraction.

Remarquons donc que multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction par un même nombre, n'est point multiplier ou diviser la fraction; puisque, comme nous venons de le dire, elle ne change point de valeur par ces opérations.

Les deux principes que nous venons de poser, sont la base des deux réductions suivantes, qui sont d'un très-grand usage.

Réduction des Fractions à un même Dénominateur.

90. 1°. Pour réduire deux fractions à un même dénominateur, multipliez les deux termes de la première, chacun par le dénominateur de la seconde, et les deux termes de la seconde, chacun par le dénominateur de la première.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, je multiplie 2 et 3, qui sont les deux termes de la première fraction, chacun par 4, dénominateur de la seconde, et j'ai $\frac{8}{12}$, qui (88) est de même valeur que $\frac{2}{3}$.

Je multiplie de même les deux termes 3 et 4 de la seconde fraction, chacun par 3, dénominateur de la première, et j'ai $\frac{9}{12}$, qui est de même valeur que $\frac{3}{4}$; en sorte que les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont changées en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, qui sont respectivement de même valeur que celles-là, et qui ont le même dénominateur entr'elles.

Il est aisé de voir que par cette méthode le dénominateur sera toujours le même pour chacune des deux

nouvelles fractions, puisque dans chaque opération le nouveau dénominateur est formé de la multiplication des deux dénominateurs primitifs.

91. 2°. Si on a plus de deux fractions, on les réduira toutes au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune, par le produit résultant de la multiplication des dénominateurs des autres fractions.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, je multiplierai les deux termes 2 et 3 de la première, par le produit des trois dénominateurs 4, 5, 7 des autres fractions, produit que je trouve en disant : 4 fois 5 font 20, puis 7 fois 20 font 140; je multiplie donc 2 et 3, chacun par 140, et j'ai $\frac{280}{420}$, qui est de même valeur que $\frac{2}{3}$ (88).

Je multiplie pareillement les deux termes 3 et 4 de la seconde fraction, par le produit de 3, 5, 7, produit que je forme en disant : 3 fois 5 font 15, puis 7 fois 15 font 105; je multiplie donc 3 et 4 chacun par 105, ce qui me donne $\frac{315}{420}$, fraction de même valeur que $\frac{3}{4}$.

Passant à la troisième fraction, je multiplie ses deux termes 4 et 5 chacun par 84, produit des trois dénominateurs 3, 4 et 7, et j'ai $\frac{336}{420}$ au lieu de $\frac{4}{5}$.

Enfin pour la quatrième, je multiplierai 5 et 7, chacun par le produit 60 des dénominateurs 3, 4, 5 des trois premières fractions, et j'aurai $\frac{300}{420}$ au lieu de $\frac{5}{7}$; en sorte que les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ sont changées en $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, moins simples, à la vérité, que celles-là, mais de même valeur qu'elles, et plus susceptibles, par leur dénominateur commun, des opérations de l'addition et de la soustraction.

Remarquons que le dénominateur de chaque nouvelle fraction étant formé du produit de tous les dénominateurs primitifs, ce nouveau dénominateur ne peut manquer d'être le même pour chaque fraction.

« Cette règle peut être présentée sous un autre aspect, qui conduit à donner une expression plus simple des fractions réduites à un dénominateur commun, lorsque leurs dénominateurs actuels sont multiples les uns des autres, ou lorsqu'ils ont des diviseurs communs.

On prendra pour dénominateur commun, le plus petit nombre qui soit divisible exactement, par chacun des dénominateurs des fractions proposées; et pour avoir le numérateur qui, pour chaque fraction, conviendra à ce nouveau dénominateur, on multipliera le numérateur actuel de cette fraction, par le nombre de fois que son dénominateur actuel est contenu dans le dénominateur commun.

Par exemple, si j'avois les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$, à réduire à un même dénominateur, je prendrois pour dénominateur commun 24, qui est le plus petit nombre qui soit exactement divisible par tous ces dénominateurs; et comme 24 contient les dénominateurs 3, 4, 6, 8, 12 respectivement, autant de fois qu'il est exprimé par les nombres suivans 8, 6, 4, 3, 2, j'écris, comme on le voit ici, ces nombres, chacun sous la fraction correspondante.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{7}{12} \\ \hline 8 \quad 6 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \\ \hline \hline \end{array}$$

Et multipliant chaque numérateur par le terme correspondant de la suite inférieure, j'ai

$$\frac{16}{24} \quad \frac{18}{24} \quad \frac{12}{24} \quad \frac{9}{24} \quad \frac{14}{24}$$

pour les fractions réduites au dénominateur commun le plus simple. »

Réduction des Fractions à leur plus simple expression.

92. Une fraction est d'autant plus simple, que ses deux termes sont de plus petits nombres. Il est souvent possible d'amener une fraction proposée, à être exprimée par de moindres nombres, et cela lorsque son numérateur et son dénominateur peuvent être divisés par un même nombre; comme cette opération n'en change point la valeur (89), c'est une simplification qu'on ne doit pas négliger.

Voici le procédé qu'il faut suivre.

93. On divisera le numérateur et le dénominateur, chacun par 2, et on répétera cette division tant qu'elle pourra se faire exactement.

On divisera ensuite les deux termes par 3, et on continuera de diviser l'un et l'autre par 3, tant que cela pourra se faire.

On fera la même chose successivement avec les nombres 5, 7, 11, 13, 17, etc. c'est-à-dire, avec les nombres qui n'ont aucun diviseur qu'eux-mêmes, ou l'unité, et qu'on appelle *nombres premiers*.

Ainsi la seule difficulté qu'il y ait, est de savoir quand est-ce qu'on pourra diviser par 2, 3, 5, etc.

On pourra dans cette recherche s'aider des principes suivans.

94. Tout nombre qui finit par un chiffre pair est divisible par 2.

Tout nombre dont la somme des chiffres ajoutés ensemble comme s'ils étoient des unités simples, fera 3 ou un *multiple* de 3, c'est-à-dire, un nombre exact de fois 3, sera divisible par 3. Par exemple, 54231 est divisible par 3, parce que ses chiffres 5, 4, 2, 3, 1, font 15, qui est 5 fois 3.

La même chose a lieu pour le nombre 9, si les chiffres ajoutés ensemble font 9, ou un multiple de 9.

Cette propriété du nombre 3 se démontre comme celle du nombre 9 à très-peu de chose près, et l'un et l'autre se démontrent comme on l'a fait à la preuve de 9 (75).

Tout nombre terminé par un 5 ou par un zéro, est divisible par 5.

À l'égard du nombre 7 et des suivans, quoiqu'il soit facile de trouver de pareilles règles, comme l'examen qu'elles supposent est aussi long que la division, il faudra essayer la division.

Proposons-nous, pour exemple, de réduire la fraction $\frac{2016}{5796}$. Je divise les deux termes par 2, parce que les deux derniers chiffres de chacun sont pairs, et j'ai $\frac{1008}{2898}$. Je divise encore par 2, et j'ai $\frac{504}{1449}$. Ce qui a été dit ci-dessus, m'apprend que je puis diviser par 3; je divise en effet, et j'ai $\frac{168}{483}$; je divise encore par 3, ce qui me donne $\frac{56}{161}$; enfin j'essaye de diviser par 7; la division réussit et me donne $\frac{8}{23}$.

La raison pour laquelle nous prescrivons de ne tenter la division que par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc. c'est qu'après avoir épuisé la division par 2, par exemple, il est inutile de tenter de diviser par 4, puisque si celle-ci pouvoit réussir, à plus forte raison la division par 2 auroit-elle pu encore se faire.

95. De tous les moyens qu'on peut employer pour réduire une fraction à une expression plus simple, le plus direct est celui de diviser les deux termes par le plus grand diviseur commun qu'ils puissent avoir : voici la règle pour trouver ce plus grand diviseur commun.

Divisez le plus grand des deux termes par le plus petit; s'il n'y a point de reste, c'est le plus petit terme qui est le plus grand diviseur commun.

S'il y a un reste, divisez le plus petit terme par ce reste, et si la division se fait exactement, c'est ce premier reste qui est le plus grand diviseur commun.

Si cette seconde division donne un reste, divisez le premier reste par le second, et continuez toujours de diviser le reste précédent par le dernier reste, jusqu'à ce que vous arriviez à une division exacte. Alors le dernier diviseur que vous aurez employé, sera le plus grand diviseur des deux termes de la fraction.

Si le dernier diviseur se trouve être l'unité, c'est une preuve que la fraction ne peut être réduite.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{3760}{9024}$.

Je divise 9024 par 3760 : j'ai pour quotient 2, et pour reste 1504.

Je divise 3760 par 1504 : j'ai pour quotient 2, et pour reste 752.

Je divise le premier reste 1504 par le second reste 752 : la division réussit, et j'en conclus que 752 peut diviser les deux termes de la fraction $\frac{3760}{9024}$, et la réduire à sa plus simple expression qu'on trouve, en faisant l'opération, être $\frac{5}{12}$.

En effet, on a trouvé que 752 divise 1504; il doit donc diviser 3760 qu'on a vu être composé de deux fois 1504 et de 752; on voit de même, qu'il doit diviser 9024, puisque 9024 est composé de deux fois 3760, et de 1504.

On voit de plus, que 752 est le plus grand diviseur commun que puissent avoir 3760 et 9024; car il ne peut y avoir de diviseur commun entre 9024 et 3760 qui ne le soit en même temps de 3760 et 1504; et

entre ces deux-ci, il ne peut y en avoir un qui ne soit en même temps diviseur commun de 1504 et de 752 ; mais il est évident qu'entre ces deux-ci, il ne peut y avoir de diviseur commun plus grand que 752 ; donc, etc. (*).

(*) « La méthode proposée pour trouver le plus grand commun diviseur, est fondée sur les trois axiomes suivans :

1°. Tout diviseur exact d'une quantité est aussi diviseur exact de ses multiples. Si 4 est diviseur exact de 12, il est aussi diviseur exact de 3 fois 12, ou de 36.

2°. Un diviseur exact de deux parties d'une quantité, est aussi diviseur exact de cette quantité. Si 4 divise exactement 8 et 12, il divisera aussi exactement 20, dont les parties sont 8 et 12.

3°. Un diviseur exact d'une quantité et de l'une de ses parties, est aussi diviseur de l'autre partie. Si 4 divise exactement 20 et 12, 4 divisera exactement 8 qui est l'autre partie de 20.

Cela posé, soit la fraction $\frac{3760}{9024}$, dont on cherche le plus grand commun diviseur.

Je divise 9024 par 3760 ; je trouve 2 pour quotient, et pour reste 1504.

Je divise 3760 par 1504 ; j'ai pour quotient 2, et pour reste 752.

Je divise le premier reste 1504 par le second reste 752, la division réussit, et j'en conclus que 752 divise exactement les deux termes de la fraction $\frac{3760}{9024}$, et la réduit à sa plus simple expression.

En effet, puisque 752 divise exactement 1504, il doit d'après le premier axiome, diviser exactement deux fois 1504 ou 3008 ; mais 752 est diviseur de lui-même ; donc 752 divise exactement 3008 et 752, et par conséquent 3760 qui est composé de 3008 et de 752.

On prouvera de même que 752 divisera exactement 9024, qui est composé de deux fois 3760 et de 1504.

Je dis en second lieu, que 752 est le plus grand commun diviseur de 9024 et 3760.

En effet, le plus grand commun diviseur de 9024, et de

Différentes manières dont on peut envisager une fraction, et conséquences qu'on peut en tirer.

96. L'idée que nous avons donnée jusqu'ici d'une fraction, est que le dénominateur représente de combien de parties l'unité est composée ; et le numérateur, combien il y a de ces parties dans la quantité que la fraction exprime.

On peut encore envisager une fraction sous un autre point de vue : on peut considérer le numérateur comme représentant une certaine quantité qui doit être divisée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le dénominateur. Par exemple, dans $\frac{4}{5}$, on peut considérer 4 comme représentant quatre choses quelconques ; 4 livres, par exemple, qu'il s'agit de partager en cinq parties ; car il est évident que c'est la même chose de partager 4 livres en cinq parties pour prendre une de ces parties, ou de partager une livre en cinq parties pour prendre 4 de ces parties.

97. On peut donc considérer le numérateur d'une fraction comme un dividende, et le dénominateur comme un diviseur. On voit par-là, ce que signifient

3760, doit être diviseur exact de deux fois 3760, ou 7520, multiple de 3760 (premier axiome) ; il doit aussi être diviseur exact de 1504, puisque 9024 est composé de 7520 et de 1504 (troisième axiome). Cela posé, puisque le plus grand commun diviseur de 9024 et 3760 divise exactement 3760 et 1504, il doit, par les mêmes raisons, diviser exactement deux fois 1504 ou 3008, et par conséquent 752, puisque 3760 est composé de 3008 et de 752 ; d'où il suit que le plus grand commun diviseur de 9024 et de 3760, est diviseur de 752 ; mais le plus grand commun diviseur de 752 est 752 lui-même : donc 752 est le plus grand commun diviseur de 9024 et de 3760. »

les restes de division mis sous la forme que nous leur avons donnée (60).

98. Il suit de-là 1°. qu'un entier peut toujours être mis sous la forme d'une fraction, en faisant de cet entier le numérateur, et lui donnant l'unité pour dénominateur, ainsi 8 ou $\frac{8}{1}$ sont la même chose; 5 ou $\frac{5}{1}$ sont la même chose.

99. 2°. Que pour convertir une fraction quelconque en décimales; il n'y a qu'à considérer le numérateur comme un reste de division où le dénominateur étoit diviseur, et opérer par conséquent comme il a été dit (p. 49), en observant de mettre d'abord un zéro au quotient pour tenir la place des unités; c'est ainsi qu'on trouvera que $\frac{3}{5}$ valent en décimales 0,6, que $\frac{5}{9}$ valent 0,555, etc. que $\frac{1}{25}$ vaut 0,04, et ainsi de suite.

C'est ainsi qu'on peut réduire en décimales, tout nombre complexe proposé. Par exemple, s'il s'agit de réduire $3^T 5^P 8^P 7^1$ en décimales de la toise, de manière à ne pas négliger une demi-ligne: j'observe que la toise contient 864 lignes, et par conséquent 1728 demi-lignes; il faut donc, pour ne pas négliger les demi-lignes, porter l'exactitude au-delà des millièmes; c'est-à-dire, jusqu'aux dix-millièmes.

Cela posé, je réduis les $5^P 8^P 7^1$ tout en lignes; et j'ai 823 lignes ou $\frac{823}{864}$ de la toise: réduisant cette fraction en décimales, comme il vient d'être dit, on a 0,9525, et par conséquent $3^T,9525$, pour le nombre proposé.

*Des opérations de l'Arithmétique sur les
Fractions.*

100. On fait sur les fractions les mêmes opérations que sur les nombres entiers. Les deux premières

opérations, l'addition et la soustraction, exigent le plus souvent une opération préparatoire; les deux autres n'en exigent point.

De l'addition des Fractions.

101. Si les fractions ont le même dénominateur, on ajoutera tous les numérateurs, et on donnera à la somme, le dénominateur commun de ces fractions. Ainsi pour ajouter $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, j'ajoute les numérateurs 2, 3 et 5, j'ai par conséquent $\frac{10}{7}$ que je réduis à $1\frac{3}{7}$ (85).

102. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les y réduire par ce qui a été enseigné (90 et 91), après quoi on ajoutera ces nouvelles fractions de la manière qui vient d'être prescrite. Ainsi si l'on propose d'ajouter $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, je change ces trois fractions en ces trois autres $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, dont la somme est $\frac{133}{60}$ qui se réduit à $2\frac{13}{60}$ (85).

De la soustraction des Fractions.

103. Si les deux fractions proposées ont le même dénominateur, on retranchera le numérateur de l'une du numérateur de l'autre, et on donnera au reste, le dénominateur commun de ces deux fractions. S'il est question de retrancher $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, le reste sera $\frac{3}{9}$, qui se réduit à $\frac{1}{3}$ (93).

104. Si de $9\frac{5}{8}$ on vouloit retrancher $4\frac{7}{8}$; comme on ne peut ôter $\frac{7}{8}$ de $\frac{5}{8}$, on emprunteroit sur 9 une unité, laquelle réduite en huitièmes et ajoutée à $\frac{5}{8}$, feroit $\frac{13}{8}$, desquels ôtant $\frac{7}{8}$, il resteroit $\frac{6}{8}$; ôtant ensuite 4 de 8 qui restent après l'emprunt, il resteroit en tout $4\frac{6}{8}$ ou $4\frac{3}{4}$.

105. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on les y réduira (90 et 91), après quoi on

fera la soustraction comme il vient d'être dit. Ainsi pour ôter $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, je change ces fractions en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$; et retranchant 8 de 9, il me reste $\frac{1}{12}$.

De la multiplication des Fractions.

106. *Pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, et le dénominateur par le dénominateur.* Par exemple, pour multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, on multipliera 2 par 4, ce qui donnera 8 pour numérateur; multipliant pareillement 3 par 5, on aura 15 pour dénominateur, et par conséquent $\frac{8}{15}$ pour le produit.

Pour sentir la raison de cette règle, il faut se rappeler que multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités. Ainsi multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, c'est prendre $\frac{4}{5}$ de fois la fraction $\frac{2}{3}$, ou, plus exactement, c'est prendre 4 fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: or en multipliant le dénominateur 3 par 5, on change les tiers en quinzièmes, c'est-à-dire, en parties cinq fois plus petites; et en multipliant le numérateur 2 par 4, on prend ces nouvelles parties quatre fois; on prend donc quatre fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: on multiplie donc en effet $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

107. Si l'on avoit un entier à multiplier par une fraction, ou une fraction à multiplier par un entier, on mettroit l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur; par exemple, si j'ai 9 à multiplier par $\frac{4}{7}$, cela se réduit à multiplier $\frac{9}{1}$ par $\frac{4}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, produit $\frac{36}{7}$ qui se réduisent à $5\frac{1}{7}$.

On voit donc que pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, l'opération

se réduit à multiplier le numérateur de cette fraction, par l'entier.

108. S'il y avoit des entiers joints aux fractions, il faudroit avant de faire la multiplication, réduire ces entiers chacun en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne; par exemple, si l'on a $12\frac{3}{5}$ à multiplier par $9\frac{3}{4}$, je change (86) le multiplicande en $\frac{63}{5}$, et le multiplicateur en $\frac{39}{4}$; et je multiplie $\frac{63}{5}$ par $\frac{39}{4}$, selon la règle ci-dessus (106), ce qui me donne $\frac{2457}{20}$ qui valent $122\frac{17}{20}$.

« On pourroit encore faire cette même opération, en multipliant l'entier et la fraction du multiplicande, par l'entier du multiplicateur; puis par la fraction du même multiplicateur, en cette manière.

$$\begin{array}{rcl}
 & & 12\frac{3}{5} \\
 & & \underline{9\frac{3}{4}} \\
 \text{Produit de } 12 \text{ par } 9 & \dots & 108 \\
 \text{de } \frac{3}{5} \text{ par } 9 & \dots & 5\frac{3}{5} \dots \text{ou } \frac{8}{5} \\
 \text{de } 12 \text{ par } \frac{3}{4} & \dots & 9 \\
 \text{de } \frac{3}{5} \text{ par } \frac{3}{4} & \dots & \frac{9}{20} \dots \text{ou } \frac{9}{20} \\
 \hline
 & & 122\frac{17}{20}
 \end{array}$$

Mais cette manière d'opérer est en général moins simple que la première. »

Division des Fractions. ()*

109. *Pour diviser une fraction par une fraction, il faut renverser les deux termes de la fraction qui sert de diviseur, et multiplier la fraction dividende, par cette fraction ainsi renversée.*

(*) « On peut avoir un entier à diviser par une fraction, ou une fraction par un entier, ou enfin une fraction par une fraction. Dans les deux premiers cas, il faut réduire les entiers en fractions; et dans le troisième, réduire les fractions au même dénominateur, et diviser ensuite le numéra-

Par exemple, pour diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$; je renverse la fraction $\frac{2}{3}$, ce qui me donne $\frac{3}{2}$; je multiplie $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{2}$, selon la règle donnée (106), et j'ai $\frac{12}{10}$ ou $1\frac{2}{10}$ pour le quotient de $\frac{4}{5}$ divisé par $\frac{2}{3}$.

Pour apercevoir la raison de cette règle, il faut observer que diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, c'est chercher combien de fois $\frac{4}{5}$ contiennent $\frac{2}{3}$: or il est facile de voir que, puisque le diviseur est 2 tiers, il sera contenu dans le dividende trois fois autant que s'il étoit 2 entiers; donc il faut diviser d'abord par 2, et multiplier ensuite par 3, ce qui n'est autre chose que prendre trois fois la moitié du dividende, ou le multiplier par $\frac{3}{2}$ qui est la fraction diviseur renversée.

110. Si l'on avoit une fraction à diviser par un entier, ou un entier à diviser par une fraction, on

teur de la fraction dividende par le numérateur de la fraction diviseur.

Par exemple, pour diviser 5 par $\frac{2}{3}$, je réduis 5 en fraction, et j'ai $\frac{15}{3}$ à diviser par $\frac{2}{3}$ ce qui donne, suivant la règle, $\frac{15 \times 3}{2}$. En effet, 5 contient $\frac{2}{3}$ autant de fois que $\frac{15}{3}$ contient $\frac{2}{3}$, et $\frac{15}{3}$ contient $\frac{2}{3}$, autant de fois que 15 contient 2. Mais pour savoir combien de fois 15 contient 2, il faut diviser 15 par 2. Le raisonnement seroit le même pour démontrer les deux autres cas. Soit $\frac{4}{7}$ à diviser par $\frac{3}{5}$, je réduis ces deux fractions au même dénominateur, ce qui me donne $\frac{20}{35}$ et $\frac{21}{35}$, ou bien $\frac{4 \times 5}{5 \times 7}$ et $\frac{7 \times 3}{5 \times 7}$, et divisant le numérateur de la fraction dividende par le numérateur de la fraction diviseur, j'aurai $\frac{4 \times 5}{4 \times 3}$, ou bien $\frac{4}{3} \times \frac{5}{3}$; ce qui fait voir qu'en suivant cette règle, la fraction dividende est multipliée par la fraction diviseur renversée (*).

(*) Le signe $\times$ placé entre deux quantités, marque que ces deux quantités doivent être multipliées l'une par l'autre. Pour énoncer 5×3 , on dit 5 multiplié par 3, ou 5 multipliant 3.

commenceroit par mettre l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur : par exemple, si l'on a 12 à diviser par $\frac{5}{7}$, on réduira l'opération à diviser $\frac{12}{1}$ par $\frac{5}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, se réduit à multiplier $\frac{12}{1}$ par $\frac{7}{5}$, et donne $\frac{84}{5}$ ou $16\frac{4}{5}$. Pareillement, si l'on avoit $\frac{3}{4}$ à diviser par 5, on réduiroit l'opération à diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{1}$, c'est-à-dire, à multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{5}$, ce qui donne $\frac{3}{20}$.

On voit donc que lorsqu'on a une fraction à diviser par un entier, l'opération se réduit à multiplier le dénominateur par cet entier.

111. S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on réduiroit ces entiers chacun en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne : par exemple, si l'on avoit $54\frac{3}{5}$ à diviser par $12\frac{2}{3}$, on changeroit le dividende en $\frac{273}{5}$, et le diviseur en $\frac{38}{3}$, et l'opération seroit réduite à diviser $\frac{273}{5}$ par $\frac{38}{3}$, c'est-à-dire (109), à multiplier $\frac{273}{5}$ par $\frac{3}{38}$, ce qui donneroit $\frac{819}{190}$, ou $4\frac{59}{190}$.

Quelques applications des règles précédentes.

112. Après ce que nous avons dit (96), il est aisé de voir comment on peut évaluer une fraction. Qu'on demande, par exemple, ce que valent les $\frac{5}{7}$ d'une livre. Puisque les $\frac{5}{7}$ d'une livre sont la même chose (96) que le septième de 5 livres, je réduis les 5 livres en sols (57), et je divise les 100 sols qu'elles me donnent, par 7, ce qui me donne 14 sols pour quotient, et 2 sols de reste; je réduis ces 2 sols en deniers, et je divise 24 deniers par 7, j'ai 3 deniers $\frac{3}{7}$, ainsi les $\frac{5}{7}$ d'une livre, sont 14 sols 3 deniers et $\frac{3}{7}$ de denier.

Si l'on demandoit les $\frac{5}{7}$ de 24 livres, il est visible qu'on pourroit d'abord prendre, comme nous venons de

de le faire, les $\frac{5}{7}$ d'une livre, et multiplier ensuite par 24, ce qu'auroit donné cette opération; mais il est plus commode de multiplier d'abord $\frac{5}{7}$ par 24 livres, ce qui (107) donne $\frac{120}{7}$ livre, et d'évaluer ensuite cette dernière fraction qu'on trouvera valoir 17 livres 2 sols 10 deniers $\frac{2}{7}$.

« On a souvent besoin de savoir ce que produisent les 4 deniers ou les 6 deniers pour livre d'une somme proposée.

Pour les 4 deniers, on séparera le dernier chiffre du nombre des livres de la somme proposée, et on prendra le sixième des autres, que l'on comptera pour des livres. On joindra le reste, s'il y en a, au chiffre séparé; on en prendra le $\frac{1}{3}$, qui donnera les sous et deniers.

Si dans la somme proposée il entre des sous, on en prendra le cinquième que l'on comptera pour des deniers.

E X E M P L E.

On demande les 4 deniers pour livre de la somme de 3433^{ts} 13 s. 0 d.

Le sixième de 343 est. 57 0 0

Il reste 1 qui, joint comme dizaine au chiffre séparé 3, donne 13, dont le tiers est. 0 4 4

Enfin le cinquième de ~~13~~ sous, considérés comme deniers, est. 0 0 2 $\frac{3}{5}$

Total. 57^{ts} 4 s. 6 d. $\frac{3}{5}$

La raison de cette opération est fondée sur ce que les 4 deniers pour livre sont les $\frac{4}{240}$ ou le $\frac{1}{60}$ de la livre. Il faut donc diviser par 60, ce qui se réduit à ce que nous prescrivons: quant au reste, il faudroit le réduire en sous, en multipliant par 20, puis diviser par 60, ce qui revient à prendre le tiers. On voit de même que pour le soixantième des sous de la somme proposée, il faudroit réduire ces sous en deniers, en les multipliant par 12, puis diviser par 60, ce qui revient à multiplier par $\frac{12}{60}$ ou $\frac{1}{5}$, ou à prendre le $\frac{1}{5}$; et s'il y avoit des deniers dans la somme proposée, on les négligeroit, parce que le soixantième de ces deniers ne don-

neroit pas un denier.

Arithmétique.

F

Pour prendre les six deniers pour livre, on voit, en raisonnant de même, qu'il faut séparer le dernier chiffre des livres, prendre le quart des autres, que l'on comptera pour des livres, puis joignant le reste au chiffre séparé, prendre la moitié qui donnera les sous et deniers.

S'il y a des sous dans la somme proposée, on en prendra les $\frac{2}{10}$, que l'on comptera pour les deniers.

Quant aux deniers de la somme proposée, on les rejettera.

E X E M P L E.

On demande les six deniers pour livre de la somme de 1387th 13 s. 4 d.

Le quart de 138 est. 34 0 0

Il reste 2 qui, mis à côté du chiffre séparé 7, font 27, dont la moitié est. 0 13 6

Les $\frac{1}{10}$ de 13 sous, considérés comme deniers, sont. 0 0 3 $\frac{2}{10}$

Total. 34th 13 s. 10 d.»

113. Les fractions décimales n'ayant point de dénominateur, sont encore plus faciles à évaluer : si l'on demande, par exemple, combien valent 0,532 de toise; comme la toise est de 6 pieds, je multiplierai 0,532 par 6, ce qui me donnera 3,192 pieds; c'est-à-dire, 3^p et 0,192 de pied; multipliant cette dernière fraction par 12 pour évaluer en pouces, on aura 2,304 pouces, c'est-à-dire, 2^p et 0,304 de pouce; en multipliant celle-ci par 12 pour réduire en lignes, on aura 3,648 lignes, ou 3^l et 0,648 de ligne; c'est-à-dire, que la valeur de la fraction 0,532 de toise, sera 3^p 2^p 3^l et 0,648 de ligne.

« Réciproquement, pour convertir les sous-espèces d'un nombre complexe proposé, en parties décimales de l'unité principale, il faut, à commencer par les unités de la plus basse espèce, diviser successivement par le nombre qui marque combien de fois celles-ci sont contenues dans l'espèce immédiatement supérieure.

Ainsi, dans l'exemple précédent, si je voulois ramener $0^T 3^P 2^P 3^{1,648}$ à des parties décimales de la toise, je diviserois $3^{1,648}$ par 12, ce qui me donneroit $0^P 304$; j'aurois donc $0^T 3^P 2^P 304$; divisant maintenant $2^P 304$ par 12, j'aurois $0^P 192$; et en total, $0^T 3^P 192$; enfin, divisant celui-ci par 6, j'aurois $0^T 532$.

114. L'évaluation des fractions nous conduit naturellement à parler des *fractions de fractions* : on appelle ainsi une suite de fractions séparées les unes des autres par l'article *de* ; par exemple, $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, etc. sont des fractions de fractions. On les réduit à une seule fraction, en multipliant tous les numérateurs entr'eux, et tous les dénominateurs entr'eux ; en sorte que la fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ se réduit à $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$; la fraction $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ se réduit à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

En effet, il est facile de voir que prendre les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ n'est autre chose que multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, puisque c'est prendre $\frac{2}{3}$ de fois la fraction $\frac{3}{4}$. Pareillement prendre les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, revient à prendre les $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$ puisque $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ reviennent à $\frac{6}{12}$, et ce qu'on vient de dire, fait connoître que les $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$ reviennent à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

Si l'on demandoit les $\frac{3}{4}$ de $5 \frac{3}{8}$, on convertiroit l'entier 5 en huitièmes, et la question seroit réduite à évaluer la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ de $\frac{43}{8}$ qu'on trouveroit être $\frac{129}{32}$ ou $4 \frac{1}{32}$.

« Au reste, il n'est pas toujours nécessaire de ramener une fraction de fraction, à être exprimée par une seule fraction. On évalue quelquefois plus aisément la fraction de fraction, en la laissant sous sa forme actuelle, qu'en la réduisant. En voici un exemple :

Dans les pièces de campagne, la saillie de l'embase sur le renfort en avant, et joignant le tourillon, est de $\frac{1}{12}$, plus

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{12}$ du diamètre du boulet; si je veux savoir la valeur totale de cette saillie pour une pièce de 12, où le diamètre du boulet est de 4^{po} 4^l 9^{pts}, j'opère comme il suit :

Le $\frac{1}{12}$ du diamètre du boulet.	. . .	0 ^{po} 4 ^l 4 ^{pts} $\frac{3}{4}$
La moitié du $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{24}$ du $\frac{1}{12}$.	. . .	0 2 2 $\frac{3}{8}$
Donc la saillie est de	. . .	0 6 7 $\frac{3}{8}$

Ajoutons à tout ce que nous avons dit sur les fractions, un exemple qui renferme plusieurs des règles que nous avons établies.

Supposons qu'on veut construire un Vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$ de longueur; que les distances entre les sabords, en y comprenant l'espace entre le premier sabord et la rablure de l'étrave, et l'espace entre le dernier sabord et la rablure de l'étambot, fassent 108 $\frac{2}{3}$ pieds; on demande si l'on peut percer 12 sabords à la première batterie de chaque bord.

De 140 pieds $\frac{2}{3}$, je retranche 108 $\frac{2}{3}$ (103 et suiv.), il me reste 31 $\frac{11}{12}$ pour les sabords; je divise 31 $\frac{11}{12}$ par 12, c'est-à-dire, $\frac{383}{12}$ par $\frac{12}{1}$ (86) et (110), j'ai pour quotient $\frac{383}{144}$ de pied, qui valent 2 pieds et $\frac{95}{144}$, fraction qui, évaluée en pouces et lignes, vaut 7 pouces 11 lignes; ainsi il faudroit donner à chaque sabord 2 pieds 7 pouces 11 lignes, c'est-à-dire, 2 pieds 8 pouces à peu près, ce qui est une mesure convenable pour un Vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$.

115. Lorsqu'une fraction exprimée par des nombres un peu considérables, n'est pas réductible par la méthode donnée (95), et qu'on peut se contenter d'en avoir une valeur approchée, on peut y parvenir par la méthode suivante qui donne alternativement des fractions plus grandes et plus petites que la proposée, mais toujours de plus en plus approchées, en sorte qu'à la dernière opération, on retombe sur la

fraction proposée. Prenons, par exemple, la fraction $\frac{100000}{314159}$ qui, comme on le verra en Géométrie, exprime le rapport très-approché du diamètre à la circonférence ; et proposons-nous d'exprimer cette fraction par d'autres fractions moins exactes , à la vérité , mais exprimées par des nombres plus simples.

Divisez le numérateur et le dénominateur , par le numérateur ; vous aurez $\frac{1}{3\frac{314159}{100000}}$. Pour avoir une

première valeur approchée , négligez la fraction qui accompagne 3 , et vous aurez $\frac{1}{3}$ pour première valeur approchée , mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur plus approchée , divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction qui accompagne 3 , chacun par le numérateur de cette

fraction, et vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7\frac{1}{14159}}}$; négligez la frac-

tion qui accompagne 7 ; et vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou

(86) $\frac{1}{\frac{22}{7}}$, ou (109) $\frac{7}{12}$ pour seconde valeur , qui

est plus approchée que la première , mais un peu trop foible.

Pour avoir une valeur encore plus approchée , divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction qui accompagne 7 , chacun par le numérateur de cette fraction ; vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7\frac{1}{15\frac{1}{854}}}}}$; supprimez

la fraction qui accompagne 15 , et vous aurez $\frac{1}{3\frac{1}{7\frac{1}{854}}}$

$$\frac{1}{3} \text{ qui revient à } \frac{106}{333}, \text{ valeur plus approchée,}$$

$$\frac{1}{7} \frac{1}{15}$$

mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, divisez les deux termes de la fraction qui accompagne 15, chacun par le numérateur 854, et vous aurez

$$\frac{1}{3} \frac{1}{7} \frac{1}{15} \frac{1}{1} \frac{33}{854} \text{ ; négligeant la fraction } \frac{33}{854} \text{ vous aurez}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{7} \frac{1}{15} \frac{1}{1} \frac{33}{854}$$

pour valeur plus approchée, $\frac{113}{355}$, mais qui est un peu trop foible. On voit à présent comment on peut continuer.

Des Nombres complexes.

116. Quoique les règles que nous avons exposées jusqu'ici, puissent servir aussi à calculer les nombres complexes, nous croyons cependant devoir considérer ceux-ci d'une manière plus particulière, parce que la division qu'on y fait de l'unité principale, en facilite souvent le calcul.

Il y a plusieurs sortes de nombres complexes, et les règles pour les calculer tiennent beaucoup à la division qu'on a faite de l'unité : cependant il n'est pas nécessaire d'examiner toutes ces espèces pour être en état de les calculer ; mais il importe de savoir quels rapports leurs différentes parties ont, tant entr'elles qu'à l'égard de l'unité principale ; c'est par cette raison que nous donnons ici une Table des nombres complexes dont l'usage est le plus fréquent.

TABLE des Unités de quelques espèces, et caractères par lesquels on représente ces différentes unités.

POUR LES MONNOIES.

℥ signifie. livre. | 1 livre vaut... 20 sols.
 s sol. | 1 sol vaut... 12 deniers.

	sol.	deniers.
	1	12
livre.	sols.	deniers.
1	20	240

POUR LES POIDS.

℔ signifie. livre. | 1 livre (poids) vaut 2 marcs.
 M marc. | 1 marc. 8 onces.
 O ou 3 once. | 1 once. 8 gros.
 G ou 3 gros. | 1 gros 3 deniers ou scrupules.
 D ou 3... denier ou scrupule. | 1 denier. 24 grains.
 g grain.

				denier.	grains.
				1	24
			gros.	deniers.	grains.
			1	3	72
		once.	gros.	deniers.	grains.
		1	8	24	576
	marc.	onces.	gros.	deniers.	grains.
	1	8	64	192	4608
livre.	marcs.	onces.	gros.	deniers.	grains.
1	2	16	128	384	9216

POUR L'ÉTENDUE DES LIGNES.

T signifie . . .	toise.	1 toise vaut 6 pieds.
P	pied.	1 pied. . . 12 pouces.
p.	pouce.	1 pouce. . 12 lignes.
l.	ligne.	1 ligne . . 12 points.
pt.	point.	

			ligne.	points.
			1	12
		pouce.	lignes.	points.
		1	12	144
	pied.	pouces.	lignes.	points.
	1	12	144	1728
toise.	pieds.	pouces.	lignes.	points.
1	6	72	864	10368

POUR LE TEMPS.

J signifie. : : :	jour.	1 jour vaut.. 24 heures.
H.	heure.	1 heure. . . 60 minutes.
'	minute.	1 minute. . 60 secondes.
"	seconde.	1 seconde . 60 tierces.

		minute.	secondes.
		1	60
	heure.	minutes.	secondes.
	1	60	3600
jour.	heures.	minutes.	secondes.
1	24	1440	86400

POIDS ANGLAIS DE TROY.

« On se sert de ce poids en Angleterre pour les matières de petit volume et précieuses; l'once vaut $58\frac{5}{12}$ grains poids de Paris.

				grains.
			1 scrupule.	20
		1 dragme.	3	60
	1 marc.	8	24	480
1 livre.	12	96	288	5760

POIDS ANGLAIS AVOIR DU POIDS.

On se sert de ce poids en Angleterre pour les matières pesantes et de gros volume; on l'emploie dans l'artillerie: l'once vaut $533\frac{1}{3}$ grains poids de Paris.

			dragmes.
		1 once.	16
	1 livre.	16	256
1 quintal.	112	1792	28672

Chaque case de ces tables marque combien l'unité qui commence la même ligne horizontale, contient d'unités de l'espèce de celle qui répond verticalement au-dessus de cette même case.

Le pas ordinaire vaut. 2 pieds $\frac{1}{2}$.
 Le pas géométrique. 5 pieds.
 La brasse. 5 pieds.

L'aune de Paris.	3 ^P 7 ^P 10 ^l $\frac{4}{5}$
Le pied de roi étant divisé en . .	1440 parties.
Le pied de Londres en contient. .	1351,7
Le pied du Rhin.	1392 ⁷⁹

Nous donnerons en Géométrie les divisions des mesures relatives aux superficies et aux capacités des Corps.

Addition des Nombres complexes.

117. Pour faire cette opération, on écrit tous les nombres proposés, les uns au-dessous des autres, de manière que toutes les parties d'une même espèce se trouvent chacune dans une même colonne verticale; et après avoir souligné le tout, on commence l'addition par les parties de l'espèce la plus petite; si leur somme ne compose pas une unité de l'espèce immédiatement supérieure, on l'écrit sous les unités de son espèce; si elle renferme assez de parties pour composer une ou plusieurs unités de l'espèce immédiatement supérieure, on n'écrit au-dessous de cette colonne, que l'excédent d'un nombre juste d'unités de cette seconde espèce, et on retient celles-ci pour les ajouter avec leurs semblables sur lesquelles on procède de la même manière.

E X E M P L E I.

On propose d'ajouter....	227 ^l	14 ^s	8 ^d
	2549	18	5
	184	11	11
	17	10	7
	2979 ^l	15 ^s	7 ^d somme.

La somme des deniers est 31 qui renferme 2 douzaines de deniers ou 2 sols et 7 deniers; je

pose les 7 deniers et je retiens 2 sols que j'ajoute avec les unités de sols, ce qui donne 15 sols, dont je pose seulement le chiffre 5, et je retiens la dizaine pour l'ajouter aux dizaines, ce qui me donne 5; et comme il faut 2 dizaines de sols pour faire un livre, je prends la moitié de 5 qui est 2, avec 1 pour reste; je pose ce reste, et je porte les 2 livres à la colonne des livres que j'ajoute comme à l'ordinaire.

E X E M P L E I I.

$$\begin{array}{r}
 \text{On propose d'ajouter.....} \quad 54^T \quad 2^P \quad 3^P \quad 9^L \\
 \quad \quad \quad 12 \quad 5 \quad 4 \quad 11 \\
 \quad \quad \quad 9 \quad 4 \quad 11 \quad 11 \\
 \quad \quad \quad 8 \quad 2 \quad 9 \quad 10 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 85^T \quad 3^P \quad 6^P \quad 5^L
 \end{array}$$

La somme des lignes monte à 41, qui font 3 pouces 5 lignes; je pose 5 lignes et je retiens les 3 pouces que j'ajoute avec les pouces; le tout me donne 30 qui valent 2 pieds 6 pouces; je pose les 6 pouces et je retiens les 2 pieds, qui, ajoutés avec les pieds, me donnent 15 pieds qui valent 2^T 3^P; je pose les 3^P et j'ajoute les deux toises avec les toises; le tout monte à 85; en sorte que la somme est 85^T 3^P 6^P 5^L.

Soustraction des Nombres complexes.

118. Ecrivez les nombres proposés, comme dans l'addition, et commencez la soustraction par les unités de l'espèce la plus basse. Si le nombre inférieur peut être retranché du nombre supérieur, écrivez le reste au-dessous. S'il ne peut en être retranché, empruntez sur l'espèce immédiatement supérieure, une unité que vous réduirez à l'espèce

dont il s'agit, et que vous ajouterez au nombre dont vous ne pouvez retrancher. Faites la même chose pour chaque espèce; et lorsque vous aurez été obligé d'emprunter, diminuez d'une unité le nombre sur lequel vous avez fait cet emprunt. Enfin écrivez chaque reste, à mesure que vous le trouverez, au-dessous du nombre qui l'a donné.

E X E M P L E I.

$$\begin{array}{r}
 \text{De. } 143^1 \quad 17^s \quad 6^d \\
 \text{on veut ôter. . . . } 75^1 \quad 12^s \quad 9^d \\
 \hline
 68^1 \quad 4^s \quad 9^d
 \end{array}$$

Ne pouvant ôter 9^d de 6^d , j'emprunte 1^s qui vaut 12^d , et 6 font 18, desquels ôtant 9, il reste 9; j'ôte ensuite 12^s non pas de 17^s , mais de 16 qui restent après l'emprunt, et il reste 4; enfin je retranche 75^1 de 143^1 , et il me reste 68^1 .

E X E M P L E II.

$$\begin{array}{r}
 \text{De. } 163^1 \quad 0^s \quad 5^d \\
 \text{on veut ôter. . . . } 84^1 \quad 18^s \quad 9^d \\
 \hline
 78^1 \quad 1^s \quad 8^d \text{ reste.}
 \end{array}$$

Comme je ne puis ôter 9^d de 5^d , et que d'ailleurs il n'y a pas de sols sur lesquels je puisse emprunter, j'emprunte 1 livre sur 163 livres, mais j'en laisse, par la pensée, 19 sols à la place du zéro, après quoi j'opère comme ci-dessus.

Multiplication des Nombres complexes.

119. On peut réduire généralement la multiplication des nombres complexes, à la multiplication

d'une fraction par une fraction , multiplication dont nous avons donné la règle (106). Par exemple , si l'on demande ce que doivent coûter $54^T 3^P$ d'ouvrage , à raison de 42 liv. 17 sols 8 den. la toise ; on peut réduire le multiplicande 42 liv. 17 sols 8 deniers tout en deniers (57) ; ce qui donnera 10292 deniers , et comme le denier est la 240^e partie de la livre , le multiplicande peut être représenté par $\frac{10292}{240}$ de la livre ; pareillement on réduira le multiplicateur $54^T 3^P$ tout en pieds , ce qui donnera 327^P , et comme le pied est la sixième partie de la toise , on aura pour multiplicateur $\frac{327}{6}$ de toise , en sorte que la question est réduite à multiplier $\frac{10292}{240}$ de livre par $\frac{327}{6}$, ce qui (106) donnera $\frac{3365434}{1440}$ de livre , qui (112) valent 2337 livres 2 sols 10 deniers.

Cette méthode s'étend à toute espèce de nombres complexes , mais elle exige plus de calcul que celle que nous allons exposer ; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

120. Un nombre qui est contenu exactement dans un autre un certain nombre de fois , est dit partie *aliquote* de cet autre : ainsi 3 est partie aliquote de 12 ; il en est de même de 2 , de 4 et de 6.

Rappelons-nous que multiplier n'étant autre chose que prendre le multiplicande un certain nombre de fois ; multiplier par $8\frac{3}{4}$, par exemple , c'est prendre le multiplicande 8 fois ; et le prendre encore $\frac{3}{4}$ de fois , ou en prendre les $\frac{3}{4}$. Or on peut prendre ces $\frac{3}{4}$, ou en prenant d'abord le quart , et l'écrivant 3 fois , ou bien en prenant d'abord la moitié , et en-

suite la moitié de cette moitié : ainsi pour multiplier 38 par $8\frac{3}{4}$, j'écrirois. 84

$$\begin{array}{r} 84 \\ 8\frac{3}{4} \\ \hline 672 \\ 42 \\ 21 \\ \hline \end{array}$$

735 produit.

Et multipliant 84 par 8, j'aurois d'abord 672. Ensuite pour prendre les $\frac{3}{4}$ de 84, je prendrois d'abord la moitié qui est 42 ; puis pour prendre pour le quart restant, je prendrois la moitié de 42 qui est 21, et réunissant ces trois produits particuliers, j'aurois 735 pour le produit total.

121. Pour appliquer ceci aux nombres complexes, il faut remarquer que les différentes espèces d'unités au-dessous de l'unité principale, sont des fractions les unes à l'égard des autres, et à l'égard de cette unité principale; que par conséquent, pour multiplier facilement par ces sortes de nombres, il faut faire en sorte de les décomposer en parties aliquotes de l'unité principale, de manière que ces parties aliquotes puissent être employées commodément; ou de les décomposer en parties aliquotes les unes des autres; et si cette décomposition ne fournit que des parties aliquotes qui ne soient pas commodes dans le calcul, on y suppléera par de faux produits; c'est ce que nous allons développer dans les exemples suivans.

E X E M P L E I.

On demande combien doivent coûter $54^T 3^P$ à raison de 72 livres la toise.

$$\begin{array}{r}
 \text{Il faut multiplier. } 72^{\text{l}} \\
 \text{par. } 54^{\text{T}} \quad 3^{\text{P}} \\
 \hline
 288^{\text{l}} \quad 0^{\text{s}} \quad 0^{\text{d}} \\
 360 \\
 36 \\
 \hline
 3924^{\text{l}} \quad 0^{\text{s}} \quad 0^{\text{d}}
 \end{array}$$

On multipliera d'abord , selon les règles ordinaires , 72 livres par 54. Ensuite pour multiplier par 3^{P} qui sont la moitié de la toise , et qui par conséquent ne doivent donner que la moitié du prix de la toise , on prendra la moitié de 72 livres , et additionnant , on aura 3924^{l} pour produit total.

E X E M P L E I I.

$$\begin{array}{r}
 \text{Si on avoit. } 72^{\text{l}} \\
 \text{à multiplier par. } 54^{\text{T}} \quad 5^{\text{P}} \\
 \hline
 288^{\text{l}} \quad 0^{\text{s}} \quad 0^{\text{d}} \\
 360 \\
 36 \\
 24 \\
 \hline
 3948^{\text{l}} \quad 0^{\text{s}} \quad 0^{\text{d}}
 \end{array}$$

On multipliera d'abord 72 livres par 54. Ensuite au lieu de multiplier par $\frac{5}{8}$, parce que 5 pieds font les $\frac{5}{8}$ de la toise , on décomposera 5^{P} , en 3^{P} et 2^{P} , dont le premier est la moitié , et le second le $\frac{1}{2}$ de la toise ; on prendra donc d'abord la moitié de 72 livres , et ensuite le $\frac{1}{2}$ de 72 livres , et on aura , en réunissant tous ces produits particuliers , 3948 livres pour produit total.

E X E M P L E I I I.

Que l'on ait.	72^l		
à multiplier par.	5^T	4^P	8^P
	360^l	0^s	0^d
	36		
	12		
	4		
	4		
	416^l	0^s	0^d

Après avoir multiplié par 5^T , on multipliera par 4^P , et pour cet effet on décomposera ce nombre en 3^P et 1^P ; pour 3^P on prendra la moitié de 72 livres, qui est 36 livres, et pour un pied, on remarquera que c'est le $\frac{1}{3}$ de 3 pieds, et par conséquent on prendra le $\frac{1}{3}$ de 36 liv. qui est 12 livres. Ensuite pour multiplier par 8 pouces, au lieu de comparer ces 8 pouces à la toise, on les comparera au pied, et on les décomposera en 4 pouces, et 4 pouces qui sont chacun le $\frac{1}{3}$ du pied, et qui par conséquent donneront chacun le $\frac{1}{3}$ de 12 livres. Enfin réunissant, on aura 416 liv. 0 sols 0 deniers pour produit.

122. Si le multiplicande est aussi un nombre complexe, on se conduira comme il va être expliqué dans l'exemple suivant.

E X E M P L E

E X E M P L E I V.

Si l'on a	72 ^l	6 ^s	6 ^d
à multiplier par	27 ^T	4 ^P	8 ^P
	504 ^l	0 ^s	0 ^d
144	6	15	0
	1	7	0
	0	13	6
	36	3	3
	12	1	1
	4	0	4 $\frac{x}{2}$
	4	0	4 $\frac{x}{2}$
	2009 ^l	0 ^s	6 ^d $\frac{2}{3}$

On multipliera d'abord 72 livres par 27. Ensuite pour multiplier 6 sols par 27, on décomposera ces 6 sols en 5 sols et 1 sol. Les 5 sols faisant le quart de la livre, doivent, étant multipliés par 27, donner 27 fois le quart de la livre ou le quart de 27 livres; on prendra donc le quart de 27 livres, qui est 6 livres 15 sols. Pour multiplier 1 sol par 27, on remarquera qu'un sol est la cinquième partie de 5 qu'on vient de multiplier; ainsi on prendra le cinquième des 6 livres 15 sols, qui sera 1 livre 7 sols.

A l'égard des 6 deniers, on fera attention qu'ils sont la moitié d'un sol, et par conséquent on prendra la moitié de 1 livre 7 sols qu'on a eu pour un sol.

Jusques-là tout le multiplicande est multiplié par 27.

Pour multiplier par 4 pieds, on s'y prendra de la même manière que dans l'exemple précédent, c'est-à-dire, que pour les 4^P, on prendra d'abord pour

Arithmétique.

G

3^p , la moitié, 36 liv. 3 sols 3 deniers, du multiplicande, et pour 1^p , le tiers de ce que donnent les 3^p .

Enfin pour 8^p , on prendra 2 fois pour 4, c'est-à-dire, qu'on écrira 2 fois le tiers de ce qu'on vient d'avoir pour 1^p ; en réunissant toutes ces différentes parties, on aura 2009 livres 0 sols 6 den. $\frac{2}{3}$ pour produit total.

123. Jusques ici les parties du multiplicande qu'il a fallu prendre, ont été assez faciles à évaluer; mais dans les cas où ces parties seroient plus composées, on se conduiroit comme dans l'exemple suivant.

E X E M P L E V.

A raison de. 34^l 10^s 2^d la toise,
combien doivent coûter. . . 17^T

238^l	0^s	0^d
34		
8	10	
ϕ	17	
0	2	10
586^l	12^s	10^d

Après avoir multiplié 34 liv. par 17, et ensuite les 10 sols par 17, en prenant moitié de 17; on multipliera 2 deniers qui sont la sixième partie d'un sol, et par conséquent la sixième partie de la dixième partie, ou (114) la 60^e partie de 10 sols; mais au lieu de prendre la 60^e partie de 8 liv. 10 sols, il sera plus commode de faire un faux produit, et de prendre d'abord le dixième de ce qu'ont donné 10 sols, c'est-à-dire, le dixième de 8 liv. 10 sols;

ce dixième qui est 0 liv. 17 sols, est pour 1 sol; mais comme il ne faut que pour le sixième d'un sol, on barrera ce faux produit, et on écrira le sixième au-dessous.

E X E M P L E V I.

Combien pour 34 liv. 10 sols 2 deniers, fera-t-on faire d'ouvrage, à raison de 1 liv. pour 17 toises?

Il faut multiplier 17 toises par 34 livres 10 sols 2 deniers, c'est-à-dire, prendre 17 toises autant de fois que la livre est contenue dans 34 livres 10 sols 2 deniers.

17 ^T					
34 ^l	10 ^s	2 ^d			
68 ^T	0 ^P	0	0 ^P	0 ^{pts}	
51					
8	3				
0	5	1	2	4	$\frac{4}{5}$
0	0	10	2	4	$\frac{4}{5}$
586 ^T	3 ^P	10 ^P	2 ^l	4 ^{pts}	$\frac{4}{5}$

Ainsi on multipliera d'abord 17 toises par 34; ensuite pour multiplier 17 toises par 10 sols, on prendra la moitié de 17 toises, parce que 10 sols sont la moitié de la livre, et on aura 8 toises 3 pieds. Pour multiplier par 2 deniers, on cherchera, pour plus de facilité, ce que donneroit 1 sol, en prenant le dixième de ce qu'ont donné 10 sols; ce dixième est 0 toises 5 pieds 1 pouce 2 lignes 4 points et $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$ de points; on le barrera comme ne devant pas faire partie du produit, mais on en prendra le

sixième pour avoir le produit de 2 deniers, et on écrira au-dessous ce sixième qui est 0 toises 0 pieds 10 pouces 2 lignes 4 points et $\frac{24}{30}$ ou $\frac{4}{5}$.

Nous avons donné cet exemple, principalement, pour confirmer ce que nous avons dit (45), qu'il importoit de distinguer le multiplicande du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets : en effet, dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises et 34 livres 10 sols 2 deniers; cependant les deux produits sont différens.

Division d'un Nombre complexe par un Nombre incomplexe.

124. Si le dividende seul est complexe, et si en même temps le dividende et le diviseur ont des unités de différente espèce, on divisera d'abord les unités principales du dividende, selon la règle ordinaire; ce qui restera de cette division, on le réduira (57) en unités de la seconde espèce, qu'on ajoutera avec celles de même espèce qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme à l'ordinaire : on réduira pareillement le reste de cette division en unités de la troisième espèce, auxquelles on ajoutera celles de la même espèce qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme ci-dessus; on continuera de réduire les restes, en unités de l'espèce suivante, tant qu'il s'en trouvera d'inférieures dans le dividende.

E X E M P L E.

On a donné 4783 livres 3 sols 9 deniers pour

paiement de 87 toises d'ouvrage; on demande à combien cela revient la toise.

$$\begin{array}{r}
 4783^1 \quad 3^s \quad 9^d \quad | \quad 87 \\
 \underline{433} \\
 85 \\
 \hline
 1703^s \\
 \underline{833} \\
 50 \\
 \hline
 609^d \\
 \underline{000} \\
 \hline
 \end{array}$$

Il faut diviser 4783 livres 3 sols 9 deniers par 87 , en commençant par les livres.

Les 4783 livres divisées par 87 , selon la règle ordinaire , donneront 54 livres pour quotient , et 85 livres pour reste : ces 85 livres réduites en sols (57) , donneront avec les trois sols du dividende 1703 sols , qui , divisés par 87 , donneront 19 sols pour quotient , et 50 sols pour reste : ces 50 sols réduits en deniers , donnent , avec les 9 deniers du dividende , 609 deniers , lesquels divisés par 87 , donnent enfin 7 deniers pour quotient.

125. Mais si le dividende et le diviseur ont des unités de même espèce , il faut , avant de faire la division , examiner si le quotient doit être ou ne pas être de même espèce qu'eux ; ce que l'état de la question décide toujours.

126. Dans le cas où le dividende et le diviseur étant de même espèce , le quotient devra aussi être de même espèce qu'eux , la division se fera précisément comme dans le cas précédent ; par exemple , si l'on proposoit cette question , 1243 livres ont

produit un bénéfice de 7254 livres, à combien cela revient-il par livre ? Il est évident que le quotient doit avoir des unités de même espèce que le dividende et le diviseur, c'est-à-dire, doit être des livres; et qu'on doit diviser 7254 livres par 1243, en réduisant, comme dans l'exemple précédent, le reste de cette division en sols, et le second reste en deniers; et on trouvera 5 livres 16 sols 8 deniers $\frac{760}{1243}$ pour réponse à la question.

127. Mais lorsque le dividende et le diviseur étant de même espèce, le quotient devra être d'espèce différente; alors il faudra commencer par réduire (57) le dividende et le diviseur, chacun à la plus petite espèce qui soit dans le dividende, après quoi on fera la division comme dans le cas précédent, et on y traitera les unités du dividende, comme si elles étoient de même espèce que celles que doit avoir le quotient: par exemple, si l'on proposoit cette question, combien pour 7954 liv. 11 sols 7 deniers, fera-t-on faire d'ouvrage à raison de 72 livres la toise ? Il est clair, par la nature de la question, que le quotient doit être des toises et parties de toise. On réduira donc 7954 livres 11 sols 7 deniers tout en deniers, ce qui donnera 1909099; on réduira pareillement 72 livres en deniers, et on aura 17280; on divisera 1909099 considéré comme des toises, par 17280, et on aura pour quotient $110^T 2^P 10^P 6^1 \frac{19}{20}$.

Division d'un Nombre complexe par un Nombre complexe.

128. Lorsque le diviseur est aussi un nombre complexe, il faut le réduire à sa plus petite espèce (57), multiplier le dividende par le nombre qui exprime

combien il faut de parties de la plus petite espèce du diviseur pour composer l'unité principale de ce même diviseur ; alors la division sera réduite au cas précédent où le diviseur étoit complexe.

E X E M P L E.

57^T 5^P 5^P d'ouvrage ont été payées 854^l 17^s 11^d ; on demande à combien cela revient la toise ? Il faut diviser 854 liv. 17 sols 11 den. par 57^T 5^P 5^P ; et pour cet effet, je réduis les 57^T 5^P 5^P, en pouces, ce qui me donne 4169 pour nouveau diviseur ; et comme il faut 72^P pour faire la toise, qui est l'unité principale du diviseur, je multiplie le dividende proposé 854 livres 17 sols 11 deniers par 72 (121), ce qui me donne 61552 livres 10 sols pour nouveau dividende, en sorte que je divise comme il suit.

61552 ^l 10 ^s	4169
19862	
3186	14 ^l 15 ^s 3 ^d $\frac{1833}{4169}$
63730 ^s	
22040	
1195	
14340 ^d	
1833	

Les 61552 liv. divisées par 4169 donnent 14 liv. pour quotient, et 3186 pour reste. Ces 3186 livres, réduites en sols donnent, avec les 10 sols du dividende, 63730 sols qui, divisés par 4169, donnent 15 sols pour quotient, et 1195 sols de reste. Ces 1195 sols, réduits en deniers, valent 14340 deniers.

lesquels, divisés par 4169, donnent 3 deniers pour quotient, et 1833 deniers pour reste; en sorte que le quotient est 14 liv. 15 sols 3 den. $\frac{1833}{4169}$ de denier.

Pour entendre la raison de cette règle, il faut faire attention que les 57^T 5^P 5^P valant 4169^P, et le pouce étant la soixante-douzième partie de la toise, le diviseur est $\frac{4169}{72}$ de la toise; or, pour diviser par une fraction, il faut (109) renverser la fraction diviseur, et multiplier ensuite par cette fraction ainsi renversée; il faut donc ici multiplier par $\frac{72}{4169}$; ce qui revient à multiplier d'abord par 72, et à diviser ensuite par 4169, ainsi que le prescrit la règle que nous donnons.

Comme la division par un nombre complexe se réduit, ainsi qu'on vient de le voir, à la division par un nombre incomplexe, on doit avoir ici les mêmes attentions à l'égard de la nature des unités que nous avons eues (126 et 127).

Ce seroit ici le lieu de parler du toisé ou de la multiplication et de la division géométriques : ces opérations ne diffèrent en rien, pour le procédé, de celles que nous venons d'exposer; en sorte qu'il n'y auroit ici autre chose à ajouter, que d'expliquer quelle est la nature des unités des facteurs et du produit; mais cela appartient à la Géométrie. Nous remettrons donc à en parler, jusqu'à ce que nous soyons arrivés à la Géométrie.

De la formation des Nombres quarrés, et de l'extraction de leur racine.

129. On appelle *quarré* d'un nombre, le produit qui résulte de la multiplication de ce nombre par lui-même; ainsi 25 est le quarré de 5, parce que

25 résulte de la multiplication de 5 par 5.

130. La *racine quarrée* d'un nombre proposé, est le nombre qui, multiplié par lui-même, reproduiroit ce même nombre proposé : ainsi 5 est la racine quarrée de 25 ; 7 est la racine quarrée de 49.

131. Un nombre que l'on quarré, est donc tout à la fois multiplicande et multiplicateur ; il est donc deux fois facteur (42) du produit ; c'est pour cela qu'on appelle aussi ce produit ou quarré, la *seconde puissance* de ce nombre.

Il ne faut d'autre art pour quarrer un nombre, que de le multiplier par lui-même selon les règles ordinaires de la multiplication ; mais pour extraire la racine quarrée d'un nombre, c'est-à-dire, pour revenir du quarré à la racine, il faut une méthode, du moins lorsque le nombre ou quarré proposé a plus de deux chiffres.

Lorsque le nombre proposé n'a qu'un ou deux chiffres, sa racine, en nombre entier, est quelqu'un des nombres.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Dont les quarrés sont

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ainsi la racine quarrée de 72, par exemple, est 8 en nombre entier, parce que 72 étant entre 64 et 81, sa racine est entre les racines de ceux-ci, c'est-à-dire, entre 8 et 9 ; elle est 8 et une fraction, fraction qu'à la vérité on ne peut pas assigner exactement, mais dont on peut approcher continuellement, ainsi que nous le verrons dans peu.

132. La racine quarrée d'un nombre qui n'est point un quarré parfait, s'appelle un nombre *sourd* ou *irrationnel* ou *incommensurable*.

133. Venons aux nombres qui ont plus de deux chiffres.

C'est en observant ce qui se passe dans la formation du quarré, que nous trouverons la méthode qu'on doit suivre pour revenir à la racine.

Pour quarrer un nombre tel que 54, par exemple :

$$\begin{array}{r}
 54 \\
 54 \\
 \hline
 216 \\
 270 \\
 \hline
 2916
 \end{array}$$

Après avoir écrit le multiplicande et le multiplicateur, comme on le voit ici, nous multiplions, comme à l'ordinaire, le 4 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait évidemment le *quarré des unités*.

Nous multiplions ensuite le 5 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait le *produit des dizaines par les unités*.

Nous passons, après cela, au second chiffre du multiplicateur, et nous multiplions le 4 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait le produit des unités par les dizaines, ou (44) le *produit des dizaines par les unités*.

Enfin nous multiplions le 5 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait le *quarré des dizaines*.

Nous ajoutons ces produits, et nous avons pour quarré, le nombre 2916, que nous voyons donc être composé du *quarré des dizaines, plus deux fois le produit des dizaines par les unités, plus le quarré des unités* du nombre 54.

134. Ce que nous venons d'observer étant une

conséquence immédiate des règles de la multiplication, il n'est pas plus particulier au nombre 54 qu'à tout autre nombre composé de dizaines, et d'unités ; en sorte qu'on peut dire généralement que le carré de tout nombre composé de dizaines et d'unités, renfermera les trois parties que nous venons d'énoncer, savoir, le carré des dizaines de ce nombre, deux fois le produit des dizaines par les unités, et le carré des unités.

135. Cela posé, comme le carré des dizaines est des centaines (puisque 10 fois 10 font 100), il est visible que ce carré des dizaines ne peut faire partie des deux derniers chiffres du carré total.

Pareillement le produit du double des dizaines multipliées par les unités, étant nécessairement des dizaines, ne peut faire partie du dernier chiffre du carré total.

136. Donc pour revenir du carré 2916 à sa racine, on peut raisonner ainsi.

E X E M P L E I.

$$\begin{array}{r}
 2916 \mid 54 \text{ racine.} \\
 \underline{416} \\
 104 \\
 \hline
 000
 \end{array}$$

Commençons par trouver les dizaines de cette racine : or la formation du carré nous apprend qu'il y a, dans 291, le carré de ces dizaines, et que ce carré ne peut faire partie des deux derniers chiffres ; il est donc dans 29 ; et comme la racine carrée de 29 ne peut être plus de 5, concluons-en que le nombre des dizaines de la racine, est 5, et

portons-les à côté de 2916, comme on le voit ci-dessus.

Je quarre 5, et je retranche le produit 25, de 29; il me reste 4 à côté duquel j'abaisse les deux autres chiffres 16 du nombre proposé 2916.

Pour trouver, maintenant, les unités de la racine; je fais attention à ce que renferme le reste 416; il ne contient plus que deux parties du carré, savoir le double des dizaines de la racine, multipliées par les unités, et le carré des unités de cette même racine. De ces deux parties, la première suffit pour nous faire trouver les unités que nous cherchons; car puisqu'elle est formée du double des dizaines multipliées par les unités, si on la divise par le double des dizaines que nous connoissons, elle doit (74) donner pour quotient les unités: il ne s'agit donc plus que de savoir dans quelle partie de 416 est renfermé ce double des dizaines multipliées par les unités; or nous avons remarqué ci-dessus qu'il ne pouvoit faire partie du dernier chiffre; il est donc dans 41; il faut donc diviser 41, par le double 10 des dizaines trouvées; j'écris donc sous 41 le double 10 des dizaines, et faisant la division, le quotient 4 que je trouve est le nombre des unités, que je porte à la droite des 5 dizaines trouvées; en sorte que la racine cherchée est 54.

Mais il faut observer que quoique le quotient 4 que nous venons de trouver, soit en effet celui qui convient, cependant il peut arriver quelquefois que le quotient trouvé de cette manière, soit plus fort qu'il ne convient; parce que 41 (c'est-à-dire, la partie qui reste après la séparation du dernier chiffre), renferme non-seulement le double des dizaines multiplié par les unités, mais encore les dizaines

provenantes du quarré des unités; c'est pourquoi, pour n'avoir aucun doute sur le chiffre des unités, il faut employer la vérification suivante.

Après avoir trouvé le chiffre 4, des unités, et l'avoir écrit à la racine, je le porte à côté du double 10 des dizaines, ce qui fait 104, dont je multiplie successivement tous les chiffres par le même nombre 4, et je retranche les produits successifs des parties correspondantes de 416; comme il ne reste rien, j'en conclus que la racine est en effet 54.

S'il restoit quelque chose, la racine n'en seroit pas moins la vraie racine en nombre entiers, à moins que ce reste ne fût plus grand que le double de la racine, augmenté de l'unité; mais c'est ce qu'on n'a point à craindre quand on prend le quotient toujours au plus fort.

La vérification que nous venons d'enseigner, est fondée sur la formation même du quarré; car quand on multiplie 104 par 4, il est évident qu'on forme le quarré des unités et le double des dizaines multiplié par les unités; c'est-à-dire, ce qui complète le quarré parfait.

137. De ce que nous venons de dire, il faut conclure que pour extraire la racine quarrée d'un nombre qui n'a pas plus de quatre chiffres, ni moins de trois, il faut après en avoir séparé deux sur la droite, chercher la racine quarrée de la tranche qui reste à gauche; cette racine sera le nombre des dizaines de la racine totale cherchée, et on l'écrira à côté du nombre proposé, en l'en séparant par un trait.

On soustraira de cette même tranche le quarré de la racine qu'on vient de trouver; et après avoir écrit le reste au-dessous de cette tranche, on abais-

sera à côté de ce reste , les deux chiffres qu'on avoit séparés.

On séparera , par un point , le chiffre des unités de la tranche qu'on vient d'abaisser , et on divisera ce qui se trouvera sur la gauche , par le double des dizaines , qu'on écrira au-dessous.

On écrira le quotient , à côté du premier chiffre de la racine , et on le portera ensuite à côté du double des dizaines qui a servi de diviseur.

Enfin on multipliera par ce même quotient , tous les chiffres qui se trouveront sur cette dernière ligne , et on retranchera leurs produits , à mesure qu'on les trouvera , des chiffres qui leur correspondent dans la ligne au-dessus.

Achevons d'éclaircir ceci par un exemple.

E X E M P L E I I.

On demande la racine quarrée de 7569.

$$\begin{array}{r}
 75.69 \mid 87 \text{ racine.} \\
 116.9 \\
 \underline{167} \\
 000
 \end{array}$$

Je sépare les deux chiffres 69 , et je cherche la racine quarrée de 75 ; elle est 8 ; j'écris 8 à côté ; je quarre 8 et je retranche de 75 , le quarré 64 ; il me reste 11 que j'écris au-dessous de 75 , et j'abaisse à côté de ce même 11 , les chiffres 69 que j'avois séparés.

Je sépare , dans 1169 , le dernier chiffre 9 , pour avoir dans 116 la partie que je dois diviser pour trouver les unités.

Je forme mon diviseur , en doublant les 8 dizaines que j'ai trouvées , et j'écris ce diviseur au-dessous de 116 , la division me donne pour quotient 7 que j'écris à la racine , à la droite de 8.

Je porte aussi ce quotient à côté du diviseur 16 ; je multiplie 167 qui forme la dernière ligne , par ce même quotient 7 , et je retranche les produits à mesure que je les trouve , de 1169 : il ne reste rien , ce qui prouve que 7569 est un carré parfait , et le carré de 87.

138. Il faut bien remarquer qu'on ne doit diviser par le double des dizaines , que la seule partie qui reste à gauche , après qu'on a séparé le dernier chiffre , en sorte que si elle ne contenoit pas le double des dizaines , il ne faudroit pas , pour cela , employer le chiffre séparé ; on mettroit 0 à la racine. Si au contraire , on trouvoit que le double des dizaines y est plus de 9 fois , on ne mettroit cependant pas plus de 9 ; la raison en est la même que pour la division (66).

139. Après avoir bien compris ce que nous venons de dire sur la racine carrée des nombres qui n'ont pas plus de quatre chiffres , on saisira facilement ce qu'il convient de faire , lorsque le nombre des chiffres est plus grand. De quelque nombre de chiffres que la racine doive être composée , on peut toujours la concevoir composée de deux parties , dont l'une soit des dizaines , et l'autre des unités ; par exemple , 874 peut être considéré comme représentant 87 dizaines et 4 unités.

Cela posé , quand on a trouvé les deux premiers chiffres de la racine , par la méthode qu'on vient d'exposer , on peut aussi trouver le troisième par la même méthode , en considérant ces deux pre-

miers chiffres , comme ne faisant qu'un seul nombre de dizaines , et leur appliquant , pour trouver le troisième , tout ce qui a été dit du premier pour trouver le second.

Pareillement , quand on aura trouvé les trois premiers chiffres , s'il doit y en avoir un quatrième , on considérera les trois premiers comme ne faisant qu'un seul nombre de dizaines , auquel on appliquera , pour trouver le quatrième , le même raisonnement qu'on appliquoit aux deux premiers pour trouver le troisième , et ainsi de suite.

Mais pour procéder avec ordre , il faut commencer par partager le nombre proposé en tranches , de deux chiffres chacune , en allant de droite à gauche ; la dernière pourra n'en contenir qu'un.

La raison de cette préparation est fondée sur ce que , considérant la racine comme composée de dizaines et d'unités , il faut suivant ce qui a été dit ci-dessus (135 *et suiv.*) , commencer par séparer les deux derniers chiffres sur la droite , pour avoir dans la partie qui reste à gauche , le carré des dizaines ; mais comme cette partie est elle-même composée de plus de deux chiffres , un raisonnement semblable conduit à en séparer encore deux sur la droite , et ainsi de suite.

Donnons un exemple de cette opération.

EXEMPLE

E X E M P L E I I I.

On demande la racine quarrée de 76807696.

$$\begin{array}{r}
 76.80.76.96 \mid 8764 \\
 128.0 \\
 167 \\
 \hline
 1117.6 \\
 1746 \\
 \hline
 7009.6 \\
 17524 \\
 \hline
 00000
 \end{array}$$

Après avoir partagé le nombre proposé, en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, je cherche quelle est la racine quarrée de la tranche 76 qui est le plus à gauche : je trouve qu'elle est 8, et j'écris 8 à côté du nombre proposé : je quarre 8 et je retranche le quarré 64, de 76 ; j'ai pour reste 12 que j'écris au-dessous de 76 ; à côté de ce reste j'abaisse la tranche 80 dont je sépare le dernier chiffre par un point ; et au-dessous de la partie 128, j'écris 16, double de la racine trouvée ; puis disant, en 128 combien de fois 16 ? je trouve qu'il y est 7 fois ; j'écris 7 à la suite de la racine 8, et à côté du double 16 : je multiplie 167 par ce même nombre 7, et je retranche de 1280 le produit de cette multiplication ; il me reste 111 à côté duquel j'abaisse la tranche 76, ce qui forme 11176 ; je sépare le dernier chiffre 6 de ce nombre, et sous la partie 1117 qui reste à gauche, j'écris 174, le double de la racine 87 ; je divise 1117 par 174,

Arithmétique. H

et ayant trouvé 6 pour quotient, j'écris 6 à la racine et à côté du double 174 : je multiplie 1746 par ce même nombre 6, et je retranche de 11176, il reste 700; à côté de ce reste, j'abaisse 96 dont je sépare le dernier chiffre; au-dessous de 7009 qui reste à gauche, j'écris 1752, double de la racine trouvée 876; et divisant 7009 par 1752, je trouve pour quotient 4, que j'écris à la racine et à côté du double 1752. Je multiplie 17524 par ce même nombre 4, et je retranche de 70096, il ne reste rien; ainsi la racine quarrée de 76807696 est exactement 8764.

140. Lorsque le nombre proposé n'est point un carré parfait, il y a un reste à la fin de l'opération, et la racine quarrée qu'on a trouvée, est la racine quarrée du plus grand carré contenu dans le nombre proposé : alors il n'est pas possible d'extraire la racine quarrée exactement; mais on peut en approcher si près qu'on le juge à propos, c'est-à-dire, de manière que l'erreur qui en résulteroit dans le carré, soit au-dessous de telle quantité qu'on voudra.

Cette approximation se fait commodément par le moyen des décimales. Il faut concevoir à la suite du nombre proposé, deux fois autant de zéros qu'on voudra avoir de décimales à la racine; faire l'opération comme à l'ordinaire, et séparer ensuite par une virgule sur la droite de la racine, moitié autant de décimales qu'on a mis de zéros à la suite du nombre proposé. En effet (54), le produit de la multiplication devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble, le carré (dont les deux facteurs sont égaux) doit donc en avoir le double de ce qu'a l'un des facteurs, c'est-à-dire, le double de ce que doit avoir la racine.

E X E M P L E.

On demande la racine quarrée de 87567 à moins d'un millièrne près.

Pour faire des millièmes il faut trois décimales ; il faut donc mettre six zéros au quarré 87567 ; ainsi il faut tirer la racine quarrée de 87567000000.

$$\begin{array}{r}
 8.75.67.00.00.00 \mid 295917 \\
 47.5 \\
 \hline
 49 \\
 \hline
 346.7 \\
 585 \\
 \hline
 5420.0 \\
 5909 \\
 \hline
 10190.0 \\
 59181 \\
 \hline
 427190.0 \\
 591827 \\
 \hline
 129111
 \end{array}$$

En faisant l'opération comme dans les exemples précédens, on trouve pour racine quarrée, à moins d'une unité près, le nombre 295917 ; cette racine est celle de 87567000000 ; mais comme il s'agit de celle de 87567 ou de 87567,000000, je sépare moitié autant de décimales dans la racine, que j'ai mis de zéros au quarré ; ce qui me donne 295,917 pour la racine quarrée de 87567, à moins d'un millièrne près.

H 2



Pareillement, si l'on demande la racine quarrée de 2, à moins d'un dix-millième près, on tirera la racine quarrée de 200000000 qu'on trouvera être 14142, séparant les quatre chiffres de la droite par une virgule, on aura 1,4142 pour la racine quarrée de 2, approchée à moins d'un dix-millième près.

141. On a vu (106) que pour multiplier une fraction par une fraction, il falloit multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur; par conséquent, pour quarrer une fraction, il faut quarrer le numérateur et le dénominateur; ainsi le carré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$, celui de $\frac{4}{5}$ est $\frac{16}{25}$.

142. Donc réciproquement, pour tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer la racine quarrée du numérateur, et celle du dénominateur; ainsi la racine quarrée de $\frac{9}{16}$ est $\frac{3}{4}$, parce que celle de 9 est 3, et celle de 16 est 4.

143. Mais il peut arriver que le numérateur ou le dénominateur, ou tous les deux ne soient point des carrés parfaits; s'il n'y a que le numérateur qui ne soit point un carré, on en tirera la racine approchée par la méthode qu'on vient d'exposer, et ayant tiré la racine du dénominateur, on la donnera pour dénominateur à la racine du numérateur; ainsi si l'on demande la racine de $\frac{2}{9}$, on tirera la racine approchée du numérateur 2 qu'on trouvera 1,4, ou 1,41 ou 1,414 ou 1,4142, etc. selon qu'on voudra en approcher plus ou moins; et comme la racine quarrée de 9 est 3, on aura pour racine approchée de $\frac{2}{9}$, la quantité $\frac{1,4}{3}$ ou $\frac{1,41}{3}$ ou $\frac{1,414}{3}$ ou $\frac{1,4142}{3}$, etc.

Mais si le dénominateur n'est pas un carré, on

multipliera les deux termes de la fraction par ce même dénominateur ; ce qui ne changera rien à la valeur de la fraction , et rendra ce dénominateur quarré , alors on opérera comme dans le cas précédent. Par exemple , si l'on demande la racine quarrée de $\frac{3}{5}$, on changera cette fraction en $\frac{15}{25}$, tirant la racine quarrée de 15 , jusqu'à 3 décimales , par exemple , on aura 3,872 , et comme la racine quarrée de 25 est 5 , la racine quarrée de $\frac{15}{25}$ sera $\frac{3,872}{5}$.

144. Pour ne pas avoir plusieurs sortes de fractions à la fois , on réduira le résultat $\frac{3,872}{5}$, uniquement en décimales , en divisant 3,872 par 5 , ce qui donnera 0,774 pour la racine de $\frac{3}{5}$ exprimée purement en décimales (99).

145. Enfin si l'on avoit des entiers joints à des fractions , on réduiroit ces entiers en fractions (86) , et on opéreroit , comme il vient d'être dit pour une fraction. Ainsi , pour tirer la racine quarrée de $8\frac{3}{7}$, on changeroit $8\frac{3}{7}$, en $\frac{59}{7}$, et celle-ci (143) en $\frac{413}{49}$, dont on trouveroit que la racine approchée est $\frac{20,322}{7}$ ou 2,903.

146. On peut aussi réduire en décimales , la fraction qui accompagne l'entier , mais il faut observer d'y employer un nombre de décimales pair et double de celui qu'on veut avoir à la racine , parce que le produit de la multiplication de deux nombres qui ont des décimales , devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs (54) , le quarré d'un nombre qui a des décimales , doit en avoir deux fois autant que ce nombre. En appliquant cette méthode à $8\frac{3}{7}$, on le transforme en 8,428571 (99) , dont la racine est 2,903 , comme ci-dessus.

147. Si l'on avoit à tirer la racine quarrée d'une quantité décimale, il faudroit avoir soin de rendre le nombre des décimales pair, s'il ne l'est pas; ce qui se fera en mettant à la suite de ces décimales 1 ou 3 ou 5, etc. zéros; cela n'en change pas la valeur (30). Ainsi, pour tirer la racine quarrée de 21,935 à moins d'un millième près; je tire la racine quarrée de 21,935000 qui est 4,683; c'est aussi celle de 21,935. On trouvera de même que celle de 0,542 est à moins d'un millième près 0,736, et que celle de 0,0054 est à moins d'un millième près 0,073.

148. Quand on a trouvé, par la méthode qui vient d'être exposée, les trois premiers chiffres de la racine, on peut en avoir plusieurs autres avec plus de facilité et de promptitude, par la division seule, en cette manière.

Prenons pour exemple 763703556823 : je commence par chercher les trois premiers chiffres de la racine, par la méthode ci-dessus : je trouve 873 pour cette racine, et 1574 pour reste : je mets à côté de ce reste, les deux chiffres 55, qui suivent la partie 763703 qui a donné les trois premiers chiffres. (Je mettrois les trois chiffres suivant, si j'avois quatre chiffres de la racine, quatre si j'en avois 5, et ainsi de suite.) Je divise 157455 que j'ai alors, par le double 1746 de la racine; je trouve pour quotient 90; ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de la racine, qui par-là devient 87390. Je quarré cette racine, et je retranche son quarré 7637012100, de la partie 7637035568 dont 87390 est la racine; il me reste 23468.

Si je veux avoir de nouveaux chiffres à la racine,

comme j'en ai déjà cinq, je puis, par la seule division, en trouver 4; je mettrai, pour cet effet, à la suite du reste 23468 les deux chiffres restans 23 du nombre proposé et deux zéros, et divisant 234682300 par le double 174780 de la racine trouvée, j'aurai 1342 pour les quatre nouveaux chiffres que je dois joindre à la racine : mais en partageant le nombre proposé, en tranches, de la manière qui a été dite ci-dessus, on voit que sa racine ne doit avoir que six chiffres pour les nombres entiers, donc cette racine est 873901,342, à moins d'un millième près.

On peut, le plus souvent, pousser chaque division jusqu'à un chiffre de plus, c'est-à-dire, jusqu'à autant de chiffres qu'on en a déjà à la racine ; mais il y a quelques cas, rares, à la vérité, où l'erreur sur le dernier chiffre, pourroit aller jusqu'à cinq unités ; au lieu qu'en se bornant à un chiffre de moins, comme nous venons de le faire, on n'a jamais à craindre, même une unité d'erreur sur le dernier chiffre.

Si après avoir trouvé les premiers chiffres de la racine, par la méthode ordinaire, ce qui reste après l'opération faite, se trouvoit égal au double de ces premiers chiffres, il faudroit, pour éviter tout embarras, en déterminer encore un par la même méthode ordinaire, après quoi on trouveroit les autres par la méthode abrégée que nous venons d'exposer, qui, comme on le voit assez, s'applique également aux décimales.

Si la racine devoit avoir des zéros parmi ses chiffres intermédiaires, dans le cas où ces zéros seroient du nombre des chiffres qu'on détermine par la division, il peut arriver, s'ils doivent être les premiers

chiffres du quotient, qu'on ne s'en aperçoive pas, parce que dans la division on ne marque pas les zéros qui doivent précéder sur la gauche du quotient : le moyen de le distinguer est de faire attention qu'on doit avoir toujours autant de chiffres au quotient qu'on en a mis à la suite du reste; et par conséquent, quand il y en aura moins, il en faudra compléter le nombre, par des zéros placés sur la gauche de ce quotient.

Au reste, l'abrégé que nous venons d'exposer est une suite de ce principe général, qu'il est aisé de déduire de ce qu'on a vu (134); savoir que le carré d'une quantité quelconque composée de deux parties, renferme le carré de la première partie, deux fois la première partie multipliée par la seconde, et le carré de la seconde.

De la formation des Nombres cubes, et de l'extraction de leur racine.

149. Pour former ce qu'on appelle le *cube* d'un nombre, il faut d'abord multiplier ce nombre par lui-même, et multiplier ensuite, par ce même nombre, le produit résultant de cette première multiplication.

Ainsi le cube d'un nombre est, à proprement parler, le produit du carré d'un nombre multiplié par ce même nombre : 27 est le cube de 3, parce qu'il résulte de la multiplication de 9 (carré de 3) par le même nombre 3.

Le nombre que l'on cube est donc trois fois facteur dans le cube; c'est pour cette raison que le cube est aussi nommé *troisième puissance*, ou *troisième degré* de ce nombre.

150. En général, on dit qu'un nombre est élevé à sa seconde, troisième, quatrième, cinquième, etc. puissance, quand on l'a multiplié par lui-même, 1, 2, 3, 4, etc. fois consécutives, ou lorsqu'il est 2 fois, 3 fois, 4 fois, 5 fois, etc. facteur dans le produit.

151. La racine cubique d'un cube proposé, est le nombre qui, multiplié par son carré, produit ce cube; ainsi 3 est la racine cubique de 27.

152. On n'a donc pas besoin de règles pour former le cube d'un nombre; mais pour revenir du cube à sa racine, il faut une méthode. Nous déduirons cette méthode de l'examen de ce qui se passe dans la formation du cube.

Observons cependant qu'on n'a besoin de méthode pour extraire la racine cubique en nombre entiers, que lorsque le nombre proposé a moins de quatre chiffres; car 1000 étant le cube de 10, tout nombre au-dessous de 1000, et par conséquent de moins de quatre chiffres, aura pour racine moins que 10, c'est-à-dire, moins de deux chiffres.

Ainsi tout nombre qui tombera entre deux de ceux-ci.

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, aura sa racine cubique, en nombres entiers, entre les deux nombres correspondans de cette suite.

1 2 3 4 5 6 7 8 9
dont la première contient les cubes.

153. Tout nombre n'a pas de racine cubique; mais on peut approcher continuellement d'un nombre qui, étant cubé, approche aussi de plus en plus de reproduire ce premier nombre; c'est ce que nous verrons après avoir appris à trouver la racine d'un cube parfait.

154. Voyons donc de quelles parties peut-être composé le cube d'un nombre qui contiendrait des dizaines et des unités.

Puisque le cube résulte du quarré d'un nombre multiplié par ce même nombre, il est essentiel de se rappeler ici (134) que le *quarré d'un nombre composé de dizaines et d'unités*, renferme, 1°. le *quarré des dizaines*, 2°. *deux fois le produit des dizaines par les unités*, 3°. le *quarré des unités*.

Pour former le cube, il faut donc multiplier ces trois parties, par les dizaines et par les unités du même nombre.

Afin d'apercevoir plus distinctement les produits qui en résulteront, donnons à cette opération simulée, la forme suivante.

1°.		
Le quarré des dizaines ,	} étant multiplié par les dizaines , donnera	Le cube des dizaines.
Deux fois le produit des dizaines par les unités ,		Deux fois le produit du quarré des dizaines multiplié par les unités.
Le quarré des unités ,		Le produit des dizaines par le quarré des unités.
2°.		
Le quarré des dizaines ,	} étant multiplié par les unités , donnera	Le produit du quarré des dizaines multiplié par les unités.
Deux fois le produit des dizaines par les unités ,		Deux fois le produit des dizaines par le quarré des unités.
Le quarré des unités ,		Le cube des unités.

Donc en rassemblant ces 6 résultats, et réunissant ceux qui sont semblables, on voit que le cube d'un nombre composé de dizaines et d'unités, contient quatre parties, savoir le *cube des dizaines*, *trois fois le quarré des dizaines multiplié par les unités*, *trois fois les dizaines multipliées par le quarré des unités*, et enfin le *cube des unités*.

Formons, d'après cela, le cube d'un nombre composé de dizaines et d'unités, de 43, par exemple.

$$\begin{array}{r}
 64000 \\
 14400 \\
 1080 \\
 27 \\
 \hline
 79507
 \end{array}$$

Nous prendrons donc le cube de 4 qui est 64 ; mais comme ce 4 est des dizaines, son cube sera des mille, parce que le cube de 10 est 1000, ainsi le cube des 4 dizaines sera 64000.

3 fois 16, ou 3 fois le carré des 4 dizaines, étant multiplié par les 3 unités, donnera 144 centaines, parce que le carré de 10 est 100 ; ainsi ce produit sera 14400.

3 fois 4, ou 3 fois les dizaines, étant multipliées par le carré 9 des unités, donneront des dizaines, et ce produit sera 1080.

Enfin le cube des unités se terminera à la place des unités, et sera 27.

En réunissant ces quatre parties, on aura 79507 pour le cube de 43 ; cube qu'on auroit, sans doute, trouvé plus facilement, en multipliant 43 par 43, et le produit 1849, encore par 43 ; mais il ne s'agit pas tant ici de trouver la valeur du cube, que de reconnoître, par l'examen des parties qui le composent, la manière de revenir à sa racine.

155. Cela posé, voici le procédé de l'extraction de la racine cubique.

E X E M P L E.

Soit donc proposé d'extraire la racine cubique de 79507.

<i>Cube.</i>	<i>Racine.</i>
79.5 07	43
15 5.07	
48	

Pour avoir la partie de ce nombre qui renferme le cube des dizaines de la racine , j'en sépare les trois derniers chiffres , dans lesquels nous venons de voir que ce cube ne peut être compris , puisqu'il vaut des mille.

Je cherche la racine cubique de 79 ; elle est 4 que j'écris à côté.

Je cube 4 , et j'ôte le produit 64 de 79 ; il me reste 15 que j'écris au-dessous de 79.

A côté de 15 , j'abaisse 507 , ce qui me donne 15507 , dans lequel il doit y avoir 3 fois le quarré des quatre dizaines trouvées , multipliées par les unités que nous cherchons , plus 3 fois ces mêmes dizaines multipliées par le quarré des unités , plus enfin le cube des unités.

Je sépare les deux derniers chiffres 07 ; la partie 155 qui reste à gauche , renferme 3 fois le quarré des dizaines multiplié par les unités ; c'est pourquoi , afin d'avoir les unités (74) , je vais diviser cette partie 155 , par le triple du quarré des 4 dizaines , c'est-à-dire , par 48.

Je trouve que 48 est 3 fois dans 155 ; j'écris donc 3 à la racine.

Pour éprouver cette racine , et connoître le reste ,

8^o Il y en a, nous pourrions composer les trois parties du cube qui doivent se trouver dans 15507, et voir si elles forment 15507, ou de combien elles en diffèrent; mais il est aussi commode de faire cette vérification, en cubant tout de suite 43, c'est-à-dire, en multipliant 43 par 43, ce qui produit 1849, et multipliant ce produit par 43, ce qui donne enfin 79507. Ainsi 43 est exactement la racine cubique.

Si le nombre proposé à plus de six chiffres, on raisonnera comme dans l'exemple ci-après.

E X E M P L E.

Soit proposé d'extraire la racine cubique de 596947688.

$$\begin{array}{r}
 596.947.688 \mid 842 \\
 849.47 \\
 192 \\
 \hline
 592704 \\
 \hline
 42436.88 \\
 21168 \\
 596947688 \\
 \hline
 000000000
 \end{array}$$

On considérera sa racine comme composée de dizaines et d'unités, et par cette raison on commencera par séparer les trois derniers chiffres.

La partie 596947 qui renferme le cube des dizaines, ayant plus de trois chiffres, sa racine en aura plus d'un, et par conséquent elle aura des dizaines et des unités: il faut donc, pour trouver le cube de ces premières dizaines, séparer les trois chiffres 947.

Cela posé, je cherche la racine cubique de 596, elle est 8, j'écris ce 8 à côté.

Je cube 8, et je retranche le produit 512, de 596; il reste 84 que j'écris au-dessous de 596.

A côté de 84, j'abaisse 947, ce qui me donne 84947, dont je sépare les deux derniers chiffres.

Au-dessous de la partie 849, j'écris 192 qui est le triple carré de la racine 8, et je divise 849 par 192; je trouve pour quotient 4 que j'écris à la racine.

Pour vérifier cette racine, et avoir en même temps le reste, je cube 84, et je retranche le produit 592704, du nombre 596947; j'ai pour reste 4243.

A côté de ce reste j'abaisse la tranche 688, et considérant la racine 84 comme un seul nombre qui marque les dizaines de la racine cherchée, je sépare les deux derniers chiffres 88 de la tranche abaissée, et je divise la partie 42436 par le triple carré de 84, c'est-à-dire, par 21168; je trouve pour quotient 2 que j'écris à la suite de 84.

Pour vérifier la racine 842 et avoir le reste, s'il y en a, je cube 842, et je retranche le produit 596947688, du nombre proposé 596947688; et comme il ne reste rien, j'en conclus que 842 est la racine exacte de 596947688.

Il faut encore observer, 1°. que dans le cours de ces opérations, on ne doit jamais mettre plus de 9 à la racine.

2°. Si le chiffre qu'on porte à la racine étoit trop fort, on s'en apercevrait à ce que la soustraction ne pourroit se faire, et alors on diminueroit la racine successivement d'une, deux, trois, etc. unités, jusqu'à ce que la soustraction devînt possible.

Lorsque le nombre proposé n'est pas un cube parfait, la racine qu'on trouve n'est qu'une racine approchée, et il est rare qu'il soit suffisant de l'avoir en nombres entiers. Les décimales sont encore d'un usage très-avantageux pour pousser cette approximation beaucoup plus loin, et aussi loin qu'on le désire sans que cependant on puisse jamais atteindre à une racine exacte.

156. Pour approcher aussi près qu'on le voudra de la racine cubique d'un cube imparfait, il faut mettre à la suite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine; faire l'extraction comme dans les exemples précédens, et après l'opération faite, séparer par une virgule sur la droite de la racine, autant de chiffres qu'on vouloit avoir de décimales.

E X E M P L E.

On demande d'approcher de la racine cubique de 8755 jusqu'à moins d'un centième près. Pour avoir des centièmes à la racine, c'est-à-dire, deux décimales, il faut que le cube ou le nombre proposé en ait six (54); il faut donc mettre six zéros à la suite de 8755.

Ainsi la question se réduit à tirer la racine cubique de 8755000000.

$$8.755.000.000. \mid 2061$$

07.55

12

8000

7550.00

1200

8741816

131840.00

127308

87545529 81

447019

Suivant ce qui a été dit ci-dessus, je partage ce nombre en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

Je tire la racine cubique de la dernière tranche 8; elle est 2 que j'écris à la racine. Je cube 2 et je retranche le produit, de 8; j'ai pour reste 0, à côté duquel j'abaisse la tranche 755, dont je sépare les deux derniers chiffres 55 : au-dessous de la partie restante 7, j'écris 12, triple carré de la racine, et divisant 7 par 12, je trouve 0 pour quotient, que j'écris à la racine.

Je cube la racine 20, ce qui me donne 8000, que je retranche de 8755; j'ai pour reste 755, à côté duquel j'abaisse la tranche 000, dont je sépare deux chiffres sur la droite; au-dessous de la partie restante 7550, j'écris 1200 triple carré de la racine 20, et divisant 7550 par 1200, je trouve pour quotient 6 que j'écris à la racine.

Je cube la racine 206, et je retranche le produit de

de 8755000; j'ai pour reste 13184 à côté duquel j'abaisse la dernière tranche 000, dont je sépare les deux derniers chiffres. Au-dessous de la partie restante 131840, j'écris 127308, triple carré de la racine trouvée 206. Je divise 131840 par 127308; je trouve pour quotient 1 que j'écris à la suite de 206. Je cube 2061, et ayant retranché de 8755000000, le produit 8754552981, j'ai pour reste 447019.

La racine cubique approchée de 8755000000, est donc 2061; donc celle de 8755,000000 est 20,61, puisque le cube a trois fois autant de décimales que sa racine (54).

Si l'on vouloit pousser l'approximation plus loin, on mettroit à la suite du reste trois zéros, et on continueroit comme on a fait à chaque fois qu'on a descendu une tranche.

157. Puisque, pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur, il faudra donc, pour cuber une fraction, cuber son numérateur et son dénominateur. Donc réciproquement, pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faudra extraire la racine cubique du numérateur, et la racine cubique du dénominateur. Ainsi la racine cubique de $\frac{27}{64}$ est $\frac{3}{4}$, parce que la racine cubique de 27 est 3, et celle de 64 est 4.

148. Mais si le dénominateur seul est un cube, on tirera la racine approchée du numérateur, et on donnera à cette racine pour dénominateur, la racine cubique du dénominateur. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{143}{343}$, comme le numérateur n'est pas un cube, j'en tire la racine approchée, qui sera 5,22 à moins d'un centième près; et tirant la racine de 343 qui est 7, j'ai $\frac{5,22}{7}$ pour la racine appro-

chée de $\frac{143}{343}$; ou bien en réduisant en décimales (99), j'ai 0,74 pour cette racine approchée à moins d'un centième près.

159. Si le dénominateur n'est pas un cube, on multipliera les deux termes de la fraction par le carré de ce dénominateur, et alors le nouveau dénominateur étant un cube, on se conduira comme il vient d'être dit. Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{3}{7}$, je multiplie le numérateur et le dénominateur par 49, carré du dénominateur 7 ; j'ai $\frac{147}{343}$ qui (88) est de même valeur que $\frac{3}{7}$. La racine cubique de $\frac{147}{343}$ est $\frac{5,37}{7}$, ou en réduisant purement en décimales, 0,75 ; la racine cubique de $\frac{3}{7}$ est donc 0,75, à moins d'un centième près.

S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on convertirait le tout en fraction, et la question seroit réduite à tirer la racine cubique d'une fraction (157 et suiv.)

On pourroit aussi, soit qu'il y ait des entiers, soit qu'il n'y en ait point, réduire la fraction en décimales ; mais il faut avoir soin de pousser cette réduction jusqu'à trois fois autant de décimales qu'on veut en avoir à la racine. Ainsi, si l'on demandoit la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, approchée jusqu'à moins d'un millièmé, on changeroit la fraction $\frac{3}{11}$ en 0,272727272 ; en sorte que, pour avoir la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, on tireroit celle de 7,272727272 qu'on trouvera être 1,937.

160. Pour tirer la racine cubique d'un nombre qui aura des décimales, il faudra le préparer par un nombre suffisant de zéros mis à sa suite, de manière que le nombre de ses décimales soit ou 3, ou 6, ou 9, etc. alors on en tirera la racine comme s'il n'y avoit pas de virgule, et après l'opération faite,

on séparera sur la droite de la racine, par une virgule, un nombre de chiffres qui soit le tiers du nombre des décimales de la quantité proposée; en sorte que si la racine n'avoit pas suffisamment de chiffres pour que cette règle eût son exécution, on y suppléeroit par des zéros placés sur la gauche de cette racine; ainsi pour tirer la racine cubique de 6,54 à moins d'un millième près, je mettrai 7 zéros, et je tirerai la racine cubique de 6540000000 qui sera 1870; j'enséparerai 3 chiffres, puisqu'il y a 9 décimales au cube, et j'aurai 1,870, ou simplement 1,87 pour la racine cubique de 6,54. On trouvera de même que celle de 0,0006 approchée à moins d'un centième près, est 0,08.

161. Quand on a trouvé les quatre premiers chiffres de la racine cubique, par la méthode qu'on vient d'expliquer, on peut trouver les autres plus promptement, par la division, et cela de la manière suivante.

Qu'on demande la racine cubique de.
 5264627832723456 : j'en cherche les quatre premiers chiffres, par la méthode ordinaire : ils sont 1739, et le reste de l'opération est 5681413; à côté de ce reste, je mets les deux chiffres 72 qui suivent la partie 5264627832 qui a donné les quatre premiers chiffres. (Je mettrois les trois chiffres qui suivent cette même partie, si la racine trouvée avoit cinq chiffres, et les quatre si elle en avoit six.) Je divise 568141372 par 9072363 triple quarré de la racine 1739; j'ai pour quotient 62, et ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de 1739, en sorte que 173962 est, en nombres entiers, la racine cubique du nombre proposé.

Si l'on vouloit pousser plus loin , on cuberoit cette racine , et ayant retranché le produit , du nombre proposé , on mettroit à la suite du reste quatre zéros , et on diviseroit le tout , par le triple du quarré de 173962 , ce qui donneroit quatre décimales pour la racine.

On fera ici la même observation qu'on a faite (148) sur le cas où la division ne donne pas autant de chiffres qu'elle doit en donner. Et dans ces divisions on s'aidera de la règle abrégée qui a été donnée (69 et suiv.)

Des Raisons , Proportions et Progressions , et de quelques règles qui en dépendent.

162. Les mots *raison* et *rapport* ont la même signification en Mathématiques , et l'un et l'autre expriment le résultat de la comparaison de deux quantités.

163. Si dans la comparaison de deux quantités , on a pour but de connoître de combien l'une surpasse l'autre , ou en est surpassée , le résultat de cette comparaison , qui est la différence de ces deux quantités , se nomme le *Rapport Arithmétique*.

Ainsi , si je compare 15 avec 8 pour connoître leur différence 7 , ce nombre 7 qui est le résultat de la comparaison , est le rapport arithmétique de 15 à 8.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue , on sépare l'une de l'autre par un point ; en sorte que 15 . 8 marque que l'on considère le rapport arithmétique de 15 à 8.

164. Si dans la comparaison de deux quantités , on se propose de connoître combien l'une contient

l'autre , ou est contenue en elle , le résultat de cette comparaison se nomme leur *Rapport Géométrique*. Par exemple , si je compare 12 à 3 pour savoir combien de fois 12 contient 3 , le nombre 4 qui exprime ce nombre de fois , est le rapport géométrique de 12 à 3.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue , on sépare l'une de l'autre par deux points : cette expression $12 : 3$ marque que l'on considère le rapport géométrique de 12 à 3.

165. Des deux quantités que l'on compare , celle qu'on énonce ou qu'on écrit la première , se nomme *antécédent* , et la seconde se nomme *conséquent*. Ainsi dans le rapport $12 : 3$, 12 est l'antécédent , et 3 est le conséquent : l'un et l'autre s'appellent les *termes* du rapport.

166. Pour avoir le rapport arithmétique de deux quantités , il n'y a donc autre chose à faire qu'à retrancher la plus petite de la plus grande.

167. Et pour avoir le rapport géométrique de deux quantités , il faut diviser l'une par l'autre.

168. Nous évaluerons ce rapport , dorénavant , en divisant l'antécédent par le conséquent : ainsi le rapport de 12 à 3 est 4 , et le rapport de 3 à 12 est $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$.

169. Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à chacun de ses deux termes , ou qu'on en retranche une même quantité ; parce que la différence (en quoi consiste le rapport) , reste toujours la même.

170. Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre : car le rapport géométrique consistant (168) dans le quotient de la

division de l'antécédent par le conséquent, est une quantité fractionnaire qui (88) ne peut changer par la multiplication ou la division de ses deux termes par un même nombre. Ainsi le rapport $3 : 12$ est le même que celui $6 : 24$ que l'on a en multipliant les deux termes du premier par 2 ; il est le même que celui de $1 : 4$ que l'on a en divisant par 3.

171. Cette propriété sert à simplifier les rapports. Par exemple, si j'avois à examiner le rapport de $6\frac{3}{4}$ à $10\frac{2}{3}$, je dirois, en réduisant tout en fraction, ce rapport est le même que celui de $\frac{27}{4}$ à $\frac{32}{3}$, ou en réduisant au même dénominateur, le même que celui de $\frac{81}{12}$ à $\frac{128}{12}$, ou enfin, en supprimant le dénominateur 12 (ce qui revient au même que de multiplier les deux termes du rapport par 12), est le même que celui de 81 à 128.

172. Lorsque quatre quantités sont telles que le rapport des deux premières est le même que le rapport des deux dernières, on dit que ces quatre quantités forment une *proportion* ; et cette proportion est arithmétique ou géométrique, selon que le rapport qu'on y considère est arithmétique ou géométrique.

Les quatre quantités 7, 9, 12, 14, forment une proportion arithmétique, parce que la différence des deux premières est la même que celle des deux dernières. Pour marquer qu'elles sont en proportion arithmétique, on les écrit ainsi, $7. 9 : 12. 14$, c'est-à-dire, qu'on sépare, par un point, les deux termes de chaque rapport ; et les deux rapports, par deux points. Le point qui sépare les deux termes de chaque rapport, signifie *est à*, et les deux points qui séparent les deux rapports, signifient *comme* ; en-

sorte que pour énoncer la proportion ainsi écrite, on dit 7 *est à* 9, *comme* 12 *est à* 14.

Les quatre quantités 3, 15, 4, 20, forment une proportion géométrique, parce que 3 est contenu dans 15 comme 4 l'est dans 20. Pour marquer qu'elles sont en proportion géométrique, on les écrit ainsi $3 : 15 :: 4 : 20$, c'est-à-dire, qu'on sépare les deux termes de chaque rapport par deux points, et les deux rapports par quatre points. Les deux points signifient *est à*, et les quatre points signifient *comme*; de sorte qu'on dit 3 *est à* 15, *comme* 4 *est à* 20.

Il faut seulement observer que, dans la proportion arithmétique, on fait précéder le mot *comme*, du mot *arithmétiquement*.

173. Le premier et le dernier terme de la proportion se nomment les *extrêmes*; le 2^e et le 3^e se nomment les *moyens*.

Comme il y a deux rapports, et par conséquent deux antécédens et deux conséquens, on dit, pour le premier rapport, *premier antécédent*, *premier conséquent*; et pour le second, *second antécédent*, *second conséquent*.

174. Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, la proportion se nomme proportion *continue*. $3 . 7 : 7 . 11$ forment une proportion arithmétique continue; on l'écrit ainsi $\div 3 . 7 . 11 .$; les deux points et la barre qui précèdent, sont pour avertir que dans l'énoncé, on doit répéter le terme moyen qui est, ici, 7.

La proportion $5 : 20 :: 20 : 80$ est une proportion géométrique continue, que par abréviation on écrit ainsi $\frac{5}{20} : 20 : 80$; l'usage des quatre points et de la barre est le même que dans la proportion arithmétique continue.

175. Il suit de ce que nous venons de dire sur les proportions arithmétiques et géométriques,

1°. Que si dans une proportion arithmétique, on ajoute à chacun des antécédens, ou si l'on en retranche la différence ou raison qui règne dans cette proportion, selon que l'antécédent sera plus petit ou plus grand que son conséquent, chaque antécédent deviendra égal à son conséquent; car c'est donner au plus petit terme de chaque rapport, ce qui lui manque pour égaler son voisin; ou retrancher du plus grand, ce dont il surpasse son voisin: ainsi dans la proportion $3, 7 : 8, 12$, ajoutez la différence 4 au premier et au troisième terme, vous aurez $7, 7 : 12, 12$, et il est aisé de sentir que cela est général.

2°. Si dans une proportion géométrique vous multipliez chacun des deux conséquens, par le rapport, vous les rendrez pareillement égaux chacun à son antécédent; car multiplier le conséquent par le rapport, c'est le prendre autant de fois qu'il est contenu dans l'antécédent: ainsi dans la proportion $12 : 3 :: 20 : 5$, multipliez 3 et 5, chacun par 4, et vous aurez $12 : 12 :: 20 : 20$; pareillement dans la proportion $15 : 9 :: 45 : 27$; multipliez 9 et 27 chacun par $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$ qui est le rapport, vous aurez $15 : 15 :: 45 : 45$.

Propriété des Proportions Arithmétiques.

176. La propriété fondamentale des proportions arithmétiques, est que *la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens*; par exemple, dans cette proportion, $3, 7 : 8, 12$, la somme 3 et 12

des extrêmes, et celle 7 et 8 des moyens, sont également 15.

Voici comment on peut s'assurer que cette propriété est générale.

Si les deux premiers termes étoient égaux entre eux, et les deux derniers égaux aussi entr'eux, comme dans cette proportion,

$$7 \cdot 7 :: 12 \cdot 12$$

il est évident que la somme des extrêmes seroit égale à celle des moyens.

Or toute proportion arithmétique peut être ramenée à cet état (175) en ajoutant à chaque antécédent, ou en ôtant la différence qui règne dans la proportion. Cette addition qui augmentera également la somme des extrêmes et celle des moyens, ne peut rien changer à l'égalité de ces deux sommes; ainsi si elles deviennent égales par cette addition, c'est qu'elles étoient égales sans cette même addition. Le raisonnement est le même pour le cas de la soustraction.

177. Puisque dans la proportion continue les deux termes moyens sont égaux, il suit de ce qu'on vient de démontrer, que dans cette même proportion la somme des extrêmes est double du terme moyen, ou que le terme moyen est la moitié de la somme des extrêmes : ainsi pour avoir un moyen arithmétique entre 7 et 15, par exemple; j'ajoute 7 à 15, et prenant la moitié de la somme 22, j'ai 11 pour le terme moyen, en sorte que $\div 7 \cdot 11 \cdot 15$.

Propriétés des Proportions Géométriques.

178. La propriété fondamentale de la proportion géométrique, est que *le produit des extrêmes est*

égal au produit des moyens ; par exemple , dans cette proportion $3 : 15 :: 7 : 35$, le produit de 35 par 3 , et celui de 15 par 7 , sont également 105.

Voici comment on peut se convaincre que cette propriété a lieu dans toute proportion géométrique.

Si les antécédens étoient égaux à leurs conséquens , comme dans cette proportion ,

$$3 : 3 :: 7 : 7$$

il est évident que le produit des extrêmes seroit égal au produit des moyens.

Mais on peut toujours ramener une proportion à cet état (175) , en multipliant les deux conséquens par la raison. Cette multiplication fera , à la vérité , que le produit des extrêmes sera un certain nombre de fois plus grand qu'il n'auroit été , ou sera un certain nombre de fois plus petit , si le rapport est une fraction ; mais elle produira le même effet sur celui des moyens ; donc , puisqu'après cette multiplication , le produit des extrêmes seroit égal au produit des moyens , ces deux produits doivent aussi être égaux sans cette même multiplication.

On peut donc prendre le produit des extrêmes pour celui des moyens , et réciproquement.

Donc *dans la proportion continue , le produit des extrêmes est égal au carré du terme moyen* , car les deux moyens étant égaux , leur produit est le carré de l'un d'eux. Donc pour avoir un moyen géométrique entre deux nombres proposés , il faut multiplier ces deux nombres l'un par l'autre , et tirer la racine carrée de ce produit. Ainsi pour avoir un moyen géométrique entre 4 et 9 , je multiplie 4 par 9 , et la racine carrée 6 du produit 36 est le moyen proportionnel cherché.

179. De la propriété fondamentale de la proportion géométrique , il suit que si connoissant les trois premiers termes d'une proportion , on vouloit déterminer le quatrième , il faudroit *multiplier le second par le troisième , et diviser le produit par le premier* ; car il est évident (74) qu'on auroit le quatrième terme en divisant le produit des deux extrêmes , par le premier terme ; or ce produit est le même que celui des moyens ; donc on aura aussi le quatrième terme , en divisant le produit des moyens , par le premier terme.

Ainsi , si l'on demande quel seroit le quatrième terme d'une proportion , dont les trois premiers seroient $3 : 8 :: 12$; je multiplie 8 par 12 , ce qui me donne 96 que je divise par 3 ; le quotient 32 est le quatrième terme demandé ; en sorte que 3 , 8 , 12 , 32 , forment une proportion : en effet , le premier rapport est $\frac{3}{8}$, et le second est $\frac{12}{32}$ qui , (89) en divisant les deux termes par 4 , est aussi $\frac{3}{8}$.

Par un semblable raisonnement , on voit qu'on peut trouver tout autre terme de la proportion lorsqu'on en connoît trois. *Si le terme qu'on veut trouver est un des extrêmes , il faudra multiplier les deux moyens , et diviser par l'extrême connu : si au contraire on veut trouver un des moyens , il faudra multiplier les deux extrêmes , et diviser par le terme moyen connu.*

180. Cette propriété de l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens , ne peut appartenir qu'à quatre quantités en proportion géométrique : en effet , si l'on avoit quatre quantités qui ne fussent point en proportion géométrique , en multipliant les conséquens par le rapport des deux premières , il n'y auroit que le premier antécédent

qui deviendrait égal à son conséquent ; par exemple , si l'on avoit 3 , 12 , 5 , 10 , en multipliant les conséquens 12 et 10 par la raison $\frac{1}{4}$ des deux premiers termes 3 et 5 , on auroit 3 , 3 , 5 , $\frac{10}{4}$ dans lesquels il est évident que le produit des extrêmes ne peut être égal à celui des moyens ; donc ces produits ne pourroient pas être égaux non plus , quand même on n'auroit pas multiplié les conséquens par la raison $\frac{1}{4}$: il est visible que ce raisonnement peut s'appliquer à tous les cas.

Donc , *si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens , ces quatre quantités sont en proportion.*

De là nous conclurons cette seconde propriété des proportions :

181. *Si quatre quantités sont en proportion , elles y seront encore si l'on met les extrêmes à la place des moyens , et les moyens à la place des extrêmes.*

182. La même chose aura lieu , c'est-à-dire , *que la proportion subsistera si l'on échange les places des extrêmes , ou celles des moyens.*

En effet , dans tous ces cas , il est aisé de voir que le produit des extrêmes sera toujours égal à celui des moyens.

Ainsi la proportion 3 : 8 :: 12 : 32 , peut fournir toutes les proportions suivantes , par la seule permutation de ses termes.

$$\begin{array}{rcl}
 3 : 8 :: 12 : 32 \\
 3 : 12 :: 8 : 32 \\
 32 : 12 :: 8 : 3 \\
 32 : 8 :: 12 : 3 \\
 8 : 3 :: 32 : 12 \\
 8 : 32 :: 3 : 12 \\
 12 : 3 :: 32 : 8 \\
 12 : 32 :: 3 : 8
 \end{array}$$

Et il en est de même de toute autre proportion.

183. Puisqu'on peut mettre le troisième terme à la place du second, et réciproquement, on doit en conclure *qu'on peut, sans troubler une proportion, multiplier ou diviser les deux antécédens par un même nombre, et qu'il en est de même à l'égard des conséquens*; car, en faisant cette permutation, les deux antécédens de la proportion donnée formeront le premier rapport; et les deux conséquens, le second. Ainsi, multiplier les deux antécédens de la première proportion, revient alors, à multiplier les deux termes d'un rapport, chacun par un même nombre, ce qui (170) ne change point ce rapport. Par exemple, si j'ai la proportion $3 : 7 :: 12 : 28$; je puis, en divisant les deux antécédens, par 3, dire $1 : 7 :: 4 : 28$; parce que, de la proportion $3 : 7 :: 12 : 28$, on peut (182) conclure $3 : 12 :: 7 : 28$; et en divisant les deux termes du premier rapport par 3, $1 : 4 :: 7 : 28$, qui (182) peut être changée en $1 : 7 :: 4 : 28$.

184. *Tout changement fait dans une proportion, de manière que la somme de l'antécédent et du conséquent, ou leur différence, soit comparée à l'antécédent ou au conséquent, de la même*

manière dans chaque rapport , formera toujours une proportion.

Par exemple , si l'on a la proportion

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

on en pourra conclure les proportions suivantes.

$$12 \text{ plus } 3 : 3 :: 32 \text{ plus } 8 : 8$$

$$\text{ou } 12 \text{ moins } 3 : 3 :: 32 \text{ moins } 8 : 8$$

$$\text{ou } 12 \text{ plus } 3 : 12 :: 32 \text{ plus } 8 : 32$$

$$\text{ou } 12 \text{ moins } 3 : 12 :: 32 \text{ moins } 8 : 32$$

Car , si c'est au conséquent que l'on compare , il est facile de voir que l'antécédent augmenté ou diminué du conséquent , contiendra ce conséquent , une fois de plus , ou une fois de moins qu'auparavant ; et comme cette comparaison se fait de la même manière pour le second rapport , qui , par la nature de la proportion , est égal au premier , il s'ensuit nécessairement que les deux nouveaux rapports seront aussi égaux entr'eux.

Si c'est à l'antécédent que l'on compare , le même raisonnement aura encore lieu ; en concevant que dans la proportion sur laquelle on fait ce changement , on ait mis l'antécédent de chaque rapport , à la place de son conséquent , et le conséquent à la place de l'antécédent , ce qui est permis (181).

185. Puisqu'en mettant le troisième terme d'une proportion à la place du second , et réciproquement , il y a encore proportion (182) , on doit conclure que les deux antécédens se contiennent l'un l'autre , autant de fois que les conséquens se contiennent aussi l'un l'autre.

Donc la somme des deux antécédens de toute proportion , contient la somme des deux consé-

quens, ou est contenue en elle, autant qu'un des antécédens contient son conséquent, ou est contenu en lui.

Par exemple, dans la proportion

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

12 plus 32 : 3 plus 8 :: 32 : 8, ce qui est évident.

Mais pour s'en convaincre généralement, il n'y a qu'à faire attention que si le premier antécédent contient le second, quatre fois, par exemple, la somme de deux antécédens contiendra le second, cinq fois; et par la même raison, la somme des conséquens, contiendra le second conséquent, 5 fois: donc la somme des antécédens, contiendra celle des conséquens, comme le quintuple d'un des antécédens, contient le quintuple de son conséquent; c'est-à-dire (170), comme un des antécédens, contient son conséquent.

On prouveroit de même, que la différence des antécédens, est à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

186. Il est évident que la proposition qu'on vient de démontrer, revient à celle-ci; si on a deux rapports égaux, par exemple, celui de. . . 4 : 12
et celui de. 7 : 21

$$11 : 33$$

On aura encore le même rapport, en ajoutant antécédent à antécédent, et conséquent à conséquent.

Donc, si l'on a plusieurs rapports égaux, la somme de tous les antécédens, est à la somme de tous les conséquens, comme l'un des antécé-

dens, est à son conséquent. Par exemple, si on a les rapports égaux $4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6$, on peut dire que 4 *plus 7 plus 2*, sont à 12 *plus 21 plus 6*, comme 4 est à 12, ou comme 7 est à 21, etc.

Car après avoir ajouté, entr'eux, les antécédens des deux premiers rapports, et leurs conséquens aussi entr'eux, le nouveau rapport, qui, selon ce qu'on vient de voir, sera le même que chacun des deux premiers, sera aussi le même que le troisième; par conséquent on pourra l'ajouter de même avec celui-ci, et il en résultera encore le même rapport, et ainsi de suite.

187. On appelle *Rapport composé*, celui qui résulte de deux ou d'un plus grand nombre de rapports dont on multiplie les antécédens entr'eux, et les conséquens entr'eux. Par exemple, si l'on a les deux rapports $12 : 4$, et $25 : 5$, le produit des antécédens 12 et 25, sera 300; celui des conséquens 4 et 5, sera 20; le rapport de 300 à 20, est ce qu'on appelle rapport composé des rapports de 12 à 4, et de 25 à 5.

188. Ce rapport est le même que si l'on avoit évalué séparément chacun des rapports composans, et qu'on eût multiplié, entr'eux, les nombres qui expriment ces rapports; en effet, le rapport de 12 à 4 est 3, celui de 25 à 5 est 5; or 3 fois 5 font 15, qui est le rapport de 300 à 20, et on peut voir que cela est général, en faisant attention que le rapport est mesuré (168) par une fraction qui a l'antécédent pour numérateur, et le conséquent pour dénominateur : ainsi le rapport composé doit être une fraction qui ait pour numérateur le produit des deux antécédens, et pour dénominateur le produit
des

des deux conséquens; c'est donc (106) le produit des deux fractions qui expriment les rapports composans.

189. Si les rapports que l'on multiplie sont égaux, le rapport composé est dit *rapport doublé*, si l'on n'a multiplié que deux rapports; *rapport triplé*, si l'on en a multiplié trois; *quadruplé*, si l'on en a multiplié quatre, et ainsi de suite. Par exemple, si l'on multiplie le rapport de 2 à 3, par celui de 4 à 6, qui lui est égal, on aura le rapport composé 8 : 18 qui sera dit rapport *doublé* du rapport de 2 à 3, ou de 4 à 6.

190. Si l'on a deux proportions, et qu'on les multiplie par ordre; c'est-à-dire, le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre, le second par le second, et ainsi de suite; les quatre produits qui en résulteront seront en proportion.

Car en multipliant ainsi deux proportions, c'est multiplier deux rapports égaux par deux rapports égaux (172); donc les deux rapports composés qui en résultent, doivent être égaux; donc les quatre produits doivent être en proportion (172).

191. Concluons de là que les *quarrés*, les *cubes*, et en général les *puissances semblables de quatre quantités en proportion*, sont aussi en proportion; puisque, pour former ces puissances, il ne faut que multiplier la proportion, par elle-même, plusieurs fois de suite.

192. Les *racines quarrées*, *cubiques*, et en général les *racines semblables de quatre quantités en proportion*, sont aussi en proportion; car le rapport des racines quarrées des deux premiers termes, n'est autre chose que la racine quarrée du rapport de

Arithmétique. K

ces deux termes (142 et 167) ; et il en est de même du rapport des racines quarrées des deux derniers termes ; donc , puisque les deux rapports primitifs sont supposés égaux , leurs racines quarrées sont égales ; donc le rapport des racines quarrées des deux premiers termes , sera égal au rapport des racines quarrées des deux derniers. On prouvera , de même , pour les racines cubique , quatrième , etc.

Usage des propositions précédentes.

193. Les propositions que nous venons de démontrer , et qu'on appelle les *Règles de Proportions* , ont des applications continuelles dans toutes les parties des Mathématiques. Nous nous bornerons , ici , à celles qui appartiennent à l'Arithmétique , et nous commencerons par celle qu'on peut faire de ce qui a été établi (179) , et qui est la base de presque toutes les autres.

De la Règle de Trois directe et simple.

194. On distingue plusieurs sortes de Règles de *Trois* : elles ont toutes pour objet de faire connoître un terme d'une proportion dont on en connoît trois.

Celle qu'on appelle *Règle de trois directe et simple* , est nommée *simple* , parce que l'énoncé des questions auxquelles on l'applique , ne renferme jamais plus de quatre quantités , dont trois sont connues , et la quatrième est à trouver.

On l'appelle *directe* , parce que des quatre quantités qu'on y considère , il y en a toujours deux , qui non-seulement sont relatives aux deux autres ,

mais qui en dépendent de manière que, de même qu'une des quantités contient l'autre, ou est contenue en elle, de même aussi la quantité relative à la première, contient la quantité relative à la seconde, ou est contenue en elle; c'est-à-dire, d'une manière plus abrégée, qu'une quantité et sa relative peuvent toujours être, toutes deux, ou antécédens ou conséquens dans la proportion; ce qui n'a pas lieu dans la règle de Trois inverse, comme nous le verrons dans peu.

La méthode, pour trouver le quatrième terme d'une proportion, et par conséquent pour faire la règle de Trois directe et simple, est suffisamment exposée (179); mais il est à propos de faire connoître par quelques exemples, l'usage qu'on peut faire de cette règle.

E X E M P L E I.

40 Ouvriers on fait, en un certain temps, 268 toises d'ouvrage; on demande combien 60 Ouvriers pourroient en faire dans le même temps?

Il est clair que le nombre des toises doit augmenter à proportion du nombre des Ouvriers; en sorte que celui-ci devenant double, triple, quadruple, etc. le premier doit devenir aussi double, triple, quadruple, etc. Ainsi l'on voit que le nombre de toises cherché, doit contenir les 268 toises, autant que le nombre 60, relatif au premier, contient le nombre 40 relatif au second: il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.

$$40 : 60 :: 268^T :$$

K 2

Ou (en divisant ces deux premiers termes par 20),
ce qui est permis (170), par ces trois autres.....

$$2 : 3 :: 268^T :$$

Ainsi, selon ce qui a été dit (179), je multiplie 268^T , par 3, et je divise le produit 804, par 2; ce qui donne pour quotient, 402^T ; et par conséquent 402^T pour l'ouvrage que feroient les 60 Ouvriers.

E X E M P L E I I.

Un navire a fait, avec un même vent, 275 lieues en 3 jours; on demande en combien de temps il en feroit 2000, toutes les autres circonstances demeurant les mêmes?

Il est évident qu'il faut plus de temps, à proportion du nombre de lieues; et que par conséquent, le nombre de jours cherché doit contenir 3 jours, autant que 2000 lieues contiennent 275 lieues: il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.

$$275 : 2000 :: 3 :$$

Multipliant 2000 par 3, et divisant le produit 6000 par 275, on aura $21^{\text{jours}} \frac{2}{11}$.

E X E M P L E I I I.

$52^T 4^P 5^P$ d'ouvrage ont été payés $168^1 9^s 4^d$; on demande combien on doit payer pour $77^T 1^P 8^P$?

Le prix de $77^T 1^P 8^P$ doit contenir le prix $168^1 9^s 4^d$ des $52^T 4^P 5^P$, autant que $77^T 1^P 8^P$ contiennent $52^T 4^P 5^P$. Il faut donc chercher le qua-

atrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.

$$52^T 4^P 5^P : 77^T 1^P 8^P :: 168^1 9^s 4^d :$$

C'est-à-dire, qu'il faut multiplier $168^1 9^s 4^d$ par $77^T 1^P 8^P$, et diviser le produit par $52^T 4^P 5^P$, ce qu'on peut faire par ce qui a été dit (122 et 128).

Mais il sera encore plus simple de réduire les deux premiers termes à leur plus petite espèce, c'est-à-dire, en pouces, et la question sera réduite à chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois autres.

$$3797 : 5564 :: 168^1 9^s 4^d :$$

Alors multipliant $168^1 9^s 4^d$ par 5564, on aura $937348^1 10^s 8^d$; et divisant par 3797, le quotient $246^1 17^s 3^d \frac{2789}{3797}$ sera ce qu'on doit payer pour les $77^T 1^P 8^P$.

S'il y avoit des fractions; après avoir réduit les deux termes de même espèce, à leur plus petite unité, comme dans cet exemple, on simplifieroit le rapport de ces deux termes de la manière qui a été enseignée (171).

De la Règle de Trois inverse et simple.

195. La règle de *Trois inverse et simple*, diffère de la règle de *Trois directe*, dont nous venons de parler, en ce que, des quatre quantités qui entrent dans l'énoncé de la question pour laquelle on fait cette opération, les deux principales doivent se contenir l'une l'autre, dans un ordre tout opposé à celui des deux autres quantités qui leur sont relatives; en sorte que, lorsque par l'examen de la ques-

tion , on a donné , à ces quantités , la disposition convenable pour former une proportion , l'une des quantités principales , et sa relative , forment les extrêmes , et l'autre quantité principale , avec sa relative , forment les moyens.

Au reste , cela n'introduit aucune différence dans la manière de faire l'opération ; c'est toujours le quatrième terme d'une proportion , qu'il s'agit de trouver , ou du moins on peut toujours amener la chose à ce point.

Quelques Arithméticiens ont prescrit , pour le cas présent , une règle assujétie à l'énoncé de la question : nous ne suivrons point leur exemple ; c'est la nature de la question , et non pas son énoncé (qui souvent est vicieux) , qui doit diriger dans la résolution.

E X E M P L E I.

30 Hommes ont fait un certain ouvrage en 25 jours ; combien faudroit-il d'hommes , pour faire le même ouvrage en 10 jours ?

On voit qu'il faut , dans ce second cas , d'autant plus d'hommes , que le nombre de jours est moindre ; ainsi le nombre d'hommes cherché , doit contenir le nombre de 30 hommes , autant que le nombre 25 de jours , relatif à ceux-ci , contient le nombre 10 de jours , relatif à ceux-là. Il ne s'agit donc que de trouver le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci

$$10^j : 25^j :: 30^{\text{hom.}}$$

C'est-à-dire , de multiplier 30 par 25 , et de diviser le produit 750 par 10 ; ce qui donne 75 ou 75^{hom.}

E X E M P L E I I.

Un Équipage n'a plus que pour 15 jours de vivres ; mais les circonstances doivent lui faire tenir encore la mer pendant 20 jours ; on demande à combien on doit réduire la totalité des rations par jour ?

Représentons par l'unité, la totalité des vivres que l'on consomme par jour ; on voit que ce à quoi on doit se restreindre , doit être d'autant moindre que cette unité, que le nombre 20 des jours, pendant lesquels cette économie doit durer, est plus grand que le nombre de 15 jours ; que par conséquent, de même que 20 jours contiennent 15 jours, de même la totalité des vivres que l'on auroit consommés pendant chacun de ces 15 jours, doit contenir celle des vivres que l'on consommera pendant chacun des 20 jours : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par les trois suivans.

$$20^j : 15^j :: 1 :$$

Ce quatrième terme sera $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$; il faut donc se réduire aux $\frac{3}{4}$ de ce qu'on auroit consommé par jour.

De la Règle de Trois composée.

196. Dans les deux règles de Trois que nous venons d'exposer, la quantité cherchée et la quantité de même espèce qui entre dans l'énoncé de la question, ont entr'elles un rapport simple et déterminé par celui des deux autres quantités qui entrent pareillement dans l'énoncé de la question.

Dans la règle de Trois composée, le rapport de la quantité cherchée à la quantité de même espèce

qui entre dans l'énoncé de la question, n'est pas donné par le rapport simple de deux autres quantités seulement, mais par plusieurs rapports simples qu'il s'agit de composer (187) d'après l'examen de la question.

Quand une fois ces rapports ont été composés, la règle est réduite à une règle de Trois simple : les exemples suivans vont éclaircir ce que nous disons.

E X E M P L E I.

30 Hommes ont fait 132 toises d'ouvrage, en 18 jours; combien 54 hommes en feront-ils en 28 jours?

On voit que l'ouvrage dépend ici, non-seulement du nombre des hommes, mais encore du nombre des jours.

Pour avoir égard à l'un et à l'autre, il faut considérer que 30 hommes travaillant pendant 18 jours, ne font qu'autant que 18 fois 30 hommes, c'est-à-dire, que 540 hommes qui travailleroient pendant un jour.

Pareillement, 54 hommes travaillant pendant 28 jours, ne font qu'autant que feroient 28 fois 54 hommes, ou 1512 hommes travaillant pendant un jour.

La question est donc changée en celle-ci : 540 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage, combien 1512 hommes en feroient-ils dans le même temps? c'est-à-dire, qu'il faut chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci...

$$540^h : 1512^h :: 132^T :$$

Multipliant 1512 par 132, et divisant le pro-

duit, par 540, on trouvera pour réponse à la question, $369^T 3^P 7^P 2^{\frac{1}{2}}$.

E X E M P L E I I.

Un homme marchant 7 heures par jour, a mis 30 jours à faire 230 lieues; s'il marchoit dix heures par jour, combien emploieroit-il de jours pour faire 600 lieues, allant toujours avec la même vitesse?

S'il marchoit pendant le même nombre d'heures par jour, dans chaque cas, on voit qu'il emploieroit d'autant plus de jours, qu'il y a plus de chemin à faire; mais comme il marche pendant un plus grand nombre d'heures, chaque jour, dans le second cas, il lui faudra moins de temps par cette raison; ainsi l'opération tient en partie à la règle de Trois directe, et à la règle de Trois inverse.

On la réduira à une règle de Trois simple, en considérant que marcher pendant 30 jours, en employant 7 heures chaque jour, c'est marcher pendant 30 fois 7 heures, ou 210 heures; ainsi on peut changer la question en cette autre: il a fallu 210 heures pour faire 230 lieues; combien en faudrait-il pour faire 600 lieues? Quand on aura trouvé le nombre d'heures qui satisfait à cette question; en le divisant par 10, on aura le nombre de jours demandé, puisque l'homme dont il s'agit, emploie dix heures par jour.

Ainsi il faut chercher le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers sont.

$$230^l : 600^l :: 210^h :$$

On trouvera que ce quatrième terme est 547 heures et $\frac{19}{33}$, lesquelles divisées par 10, nombre des

heures que cet homme emploie chaque jour , donnent
 54 jours et $\frac{180}{23}$ ou $54\frac{18}{23}$.

E X E M P L E III.

« Le pied de Londres étant au pied de roi :: 15 : 16 ;
 on demande combien 720 pieds de Londres font de pieds
 de roi ?

Il est clair que pour mesurer une longueur déterminée ,
 il faudra moins de pieds de roi que de pieds de Londres ,
 dans le même rapport que cette première mesure est au con-
 traire plus grande que la seconde ; en sorte que la question
 se réduit à calculer le quatrième terme d'une proportion qui
 commenceroit par ces trois-ci :

$$16 : 15 :: 720 :$$

Multipliant donc 720 par 15 , et divisant par 16 , on
 aura 675 pour le nombre de pieds de roi qui équivalent à 720
 pieds de Londres.

E X E M P L E IV.

Un convoi peut faire un certain espace en 18 jours , en
 marchant 5 heures par jour ; mais on voudroit le faire arri-
 ver en 12 jours , abstraction faite des séjours ; on demande
 combien d'heures il doit marcher par jour ?

Il est évident qu'il doit , chaque jour , marcher pendant
 un nombre d'heures d'autant plus considérable que 5 heures ,
 que le nombre 12 des jours qu'il doit employer est plus petit
 au contraire que le nombre 18 des jours qu'il auroit em-
 ployés , si l'on n'eût pas forcé la marche. Ainsi l'état de la
 question fait voir qu'il s'agit de calculer le quatrième terme
 d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci :

$$12 : 18 :: 5 :$$

Multipliant donc 18 par 5 , et divisant par 12 , on a
 $7\frac{1}{2}$ pour le nombre d'heures pendant lesquelles le convoi
 doit marcher chaque jour. »

De la Règle de Société.

197. La Règle de Société est ainsi nommée, parce qu'elle sert à partager, entre plusieurs associés, le bénéfice ou la perte résultant de leur société.

Son but est de partager un nombre proposé, en parties qui aient entr'elles des rapports donnés.

La règle que l'on donne pour cet effet, est fondée sur ce que nous avons établi (186) : nous allons la déduire de ce principe dans l'exemple suivant.

E X E M P L E I.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de partager 120, en trois parties qui aient entr'elles les mêmes rapports que les nombres 4, 3, 2; l'énoncé de la question fournit ces deux proportions.

4 : 3 :: la première partie, est à la seconde.

4 : 2 :: la première partie, est à la troisième.

Ou (182) ces deux autres.

4 est à la première partie :: 3 est à la seconde.

4 est à la première partie :: 2 est à la troisième.

De sorte qu'on a ces trois rapports égaux ; 4 est à la première partie :: 3 est à la seconde :: 2 est à la troisième.

Or on a vu (186) que la somme des antécédens de plusieurs rapports égaux, est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent; on peut donc dire ici, que la somme 9 des trois parties proportionnelles à celles que l'on cherche, est à la somme 120 de celles-ci, comme l'une quelconque des trois parties proportionnelles, est à la partie de 120 qui lui répond.

La règle se réduit donc , 1°. à faire une totalité des parties proportionnelles données ; 2°. à faire autant de règles de Trois , qu'il y a de parties à trouver , et dont chacun aura , pour premier terme , la somme des parties proportionnelles données ; pour second terme , le nombre proposé à diviser ; et pour troisième terme , l'une des parties proportionnelles données ; ainsi dans la question que nous avons prise pour exemple , on auroit ces trois règles de Trois à faire.

$$9 : 120 :: 4 :$$

$$9 : 120 :: 3 :$$

$$9 : 120 :: 2 :$$

Dont on trouvera (179) que les quatrièmes termes sont $53\frac{1}{3}$, 40 , $26\frac{2}{3}$ qui ont entr'eux les rapports demandés , et qui composent , en effet , le nombre 120.

Mais il est aisé de remarquer qu'il n'est pas absolument nécessaire de faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver : on peut se dispenser de la dernière , en retranchant du nombre proposé la somme des autres parties , quand on les a trouvées.

E X E M P L E I I.

Trois personnes ont à partager le bénéfice de la prise d'un Vaisseau. La première a fait un fonds de 20000^l , la seconde de 60000^l , la troisième de 120000^l ; on demande ce qui revient à chacune , sur la prise estimée 800000 liv. tous frais faits.

On voit qu'il s'agit de partager 800000^l en parties qui aient , entr'elles , les mêmes rapports que 20000 , 60000 , 120000 , ou (170) , que 2 , 6 , 12 , puis

que chacun doit avoir proportionnellement à sa mise ;
il faut donc ajouter les trois parties proportionnelles
2, 6, 12, et faire les trois proportions suivantes ,
ou seulement deux..

20 : 800000 :: 2¹ : la première partie.

20 : 800000 :: 6¹ : la seconde partie.

20 : 800000 :: 12¹ : la troisième partie.

Ces trois parties seront 80000¹, 240000¹, 480000¹.

La question pourroit être plus compliquée et cependant être ramenée aux mêmes principes , comme dans l'exemple qui suit :

E X E M P L E I I I.

Trois personnes ont mis en société ; la première 3000¹, qui ont été pendant six mois dans la société ; la seconde, 4000¹ qui y ont été pendant cinq mois ; et la troisième, 8000¹ qui y ont resté pendant neuf mois ; combien chacun doit-il avoir sur le bénéfice qui monte à 12050¹ ?

On réduira toutes les mises à un même temps, en cette manière :

La mise de 3000¹ a dû produire pendant six mois , autant que 6 fois 3000¹, ou 18000¹ pendant un mois.

La mise de 4000¹ a dû produire pendant 5 mois , autant que 5 fois 4000¹, ou 20000¹ pendant un mois.

Enfin la mise de 8000¹ a dû produire en 9 mois , autant que 9 fois 8000¹, ou 72000¹ pendant un mois.

Ainsi la question est réduite à cette autre ; les mises des trois associés sont 18000¹, 20000¹, 72000¹ ; combien revient-il à chacun sur le gain 12050¹.

En procédant comme dans l'exemple ci-dessus, on trouvera $1971^1 16^s 4^d \frac{4}{11}$, $2190^1 18^s 2^d \frac{2}{11}$, $7887^1 5^s 5^d \frac{5}{11}$.

E X E M P L E I V.

« On doit distribuer à l'isle de Ré, à Belle-Isle et au Port-Louis, un approvisionnement d'outils, savoir : 4500 bûches, 2500 pics-hoyaux, 4550 pioches, 820 pics-à-tête, 820 pics-à-toc, 2200 écoupes, 2210 serpes et 800 haches. Cette distribution doit être faite pour chaque espèce d'outils, proportionnellement et conformément à un modèle d'approvisionnement, par lequel on voit que sur 8500 outils de même espèce, l'isle de Ré en a eu 6000, Belle-Isle 1400, et le Port-Louis 1100. On demande combien il en faut de chaque espèce pour chacun de ces endroits ? »

Modèle d'approvisionnement.

L'ISLE DE RÉ,	6000
BELLE-ISLE.	1400
PORT-LOUIS.	1100
	8500

Puisque chaque espèce d'outils doit être distribuée proportionnellement aux nombres 6000, 1400 et 1100, on trouvera combien chaque endroit en doit avoir d'une espèce quelconque ; par exemple, de bûches, en calculant le quatrième terme de chacune de ces trois proportions,

$$8500 : 4500, \text{ ou } 85 : 45 :: 6000 :$$

$$85 : 45 :: 1400 :$$

$$85 : 45 :: 1100 :$$

On s'y prendra de la même manière pour calculer le nombre de pics-hoyaux, de pioches, etc. qui doivent être distribués dans chaque endroit ; et l'on trouvera que la distribution doit être faite comme il suit :

	OUTILS		
	pour L'ÎLE DE RÉ.	pour BELLE-ÎLE.	pour PORT-LOUIS.
4500 Bêches. . . .	3177	741	582
2500 Pics-hoyaux.	1765	412	323
4550 Pioches. . . .	3212	749	589
820 Pics-à-tête. . .	579	135	106
820 Pics-à-toc. . .	579	135	106
2200 Ecoupes. . . .	1553	362	285
2210 Serpes. . . .	1560	364	286
800 Haches. . . .	565	132	103
18400	12990	3030	2380

E X E M P L E V.

Trois Bateliers doivent faire entre eux le décompte de 1500 livres. Le premier s'étoit chargé de 2 milliers qu'il a conduit à 50 lieues; le second a conduit 15 quintaux à 75 lieues, et le troisième 3 milliers à 60 lieues. On demande ce qui revient à chacun.

Pour réduire cette question à la règle précédente; il faut réduire ces différens transports à une même distance, en cette manière.

2 Milliers portés à 50 lieues, doivent être payés comme 50 fois 2 milliers ou 100 milliers portés à une lieue. Pareillement 15 quintaux ou un millier et demi portés à 75 lieues, seront payés comme 75 fois un millier et demi, ou 112 $\frac{1}{2}$ milliers portés à une lieue. Enfin, 3 milliers portés à 60 lieues, doivent être payés comme 60 fois 3 milliers, ou 180 milliers portés à une lieue.

Ainsi la question est la même que si les trois voituriers avoient porté à la même distance, le premier 100 milliers, le second 112 $\frac{1}{2}$ milliers, et le troisième 180 milliers. Il s'agit donc de partager 1500 livres en trois parts proportionnelles aux nombres 100, 112 $\frac{1}{2}$ et 180, en calculant le quatrième terme de chacune des trois proportions suivantes :

$$\begin{array}{lcl}
 392\frac{1}{2} : 1500 :: 100 & : & 382^{\text{th}} \quad 3s. \quad 4d. \\
 392\frac{1}{2} : 1500 :: 112\frac{1}{2} & : & 429 \quad 18 \quad 9 \\
 392\frac{1}{2} : 1500 :: 180 & : & 687 \quad 17 \quad 11
 \end{array}$$

E X E M P L E VI.

Le parc d'une armée consiste en 156 pièces de canon. On veut partager cette armée en trois divisions, de manière que la force de la première division soit à celle de la seconde :: 5 : 4, et que celle de la première soit à celle de la troisième :: 7 : 3. Il s'agit de répartir l'artillerie proportionnellement aux forces que doivent avoir les trois divisions.

Comme la force de la première division est représentée par 5 dans le premier rapport, et par 7 dans le second, il faut, avant tout, la ramener à être représentée par le même nombre, ce que l'on fera facilement, en multipliant les deux termes du premier rapport par 7, et les deux termes du second par 5, ce qui ne change point ces rapports. Alors les forces de la première, seconde et troisième division, doivent être respectivement comme les nombres 35, 28, 15. Il s'agit donc de partager 156 en trois parties proportionnelles aux nombres 35, 28 et 15, ce qui s'exécute comme dans le premier exemple, et donne 70, 56 et 30.

Remarque au sujet de la Règle précédente.

198. Il n'est pas inutile d'examiner un cas qui peut embarrasser les Commensans. Si l'on proposoit cette question, partager 650 en trois parties, dont la première soit à la seconde :: 5 : 4, et dont la première soit à la troisième :: 7 : 3.

On ne peut pas appliquer, ici, la règle précédente, sans une préparation qui consiste à rendre la même, dans chaque rapport donné, la partie proportionnelle de l'une des trois parts cherchées; par exemple, celle de la première; cela s'exécute aisément, en multipliant les deux termes de chaque rapport, par le premier terme de l'autre rapport: ainsi les deux rapports 5 : 4, et 7 : 3, seront ramenés à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes du premier par 7, et les deux termes du second par 5, ce qui n'en change pas la valeur (170), et donne

donne les rapports $35 : 28$, et $35 : 15$; en sorte que la question se réduit à partager 650, en trois parties qui soient entr'elles comme les nombres 35, 28 et 15; ce qui se fera aisément par la règle précédente.

Si l'on demandoit de partager un nombre en quatre parties, dont la première fût à la seconde :: 5 : 4, la première à la troisième :: 9 : 5, et la première à la quatrième :: 7 : 3, on réduiroit ces rapports à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes de chacun par le produit des premiers termes des deux autres; ainsi dans cet exemple on changeroit ces trois rapports, en ces trois autres, $315 : 252$, $315 : 175$, $315 : 135$; en sorte que la question se réduit à partager le nombre proposé, en quatre parties qui soient entr'elles, comme les nombres 315, 252, 175 et 135.

De quelques autres Règles dépendantes des Proportions.

199. Quoique les règles suivantes soient d'un usage moins fréquent que les précédentes, nous ne pouvons cependant les omettre absolument : outre qu'elles ne sont pas sans utilité par elles-mêmes, elles sont d'ailleurs propres à faire sentir les usages des proportions.

200. La première dont nous parlerons, est la règle d'une *fausse position*. On l'applique souvent à résoudre des questions qui appartiennent à la règle de Société dont elle diffère en ce qu'au lieu de prendre les parties proportionnelles telles qu'elles sont données par l'énoncé de la question, elle en prend

Arithmétique. L

une arbitrairement , et y subordonner les autres conformément à la question ; ce qui rend le calcul un peu plus facile.

E X E M P L E I.

Partager 640^l entre trois personnes , dont la seconde ait le quadruple de la première , et la troisième deux fois et $\frac{1}{3}$ autant que les deux autres ensemble.

Je prends arbitrairement , pour représenter la première partie , le nombre 3 , dont je puis prendre commodément le $\frac{1}{3}$.

La première partie étant 3 , la seconde sera 12 , et la troisième sera 35.

La question est réduite à partager 640 , en trois parties qui soient entr'elles comme les trois nombres 3 , 12 et 35 ; ce qui se fera comme il a été dit (197).

La règle d'une fausse position sert aussi à résoudre des questions qui sont , en quelque façon , l'inverse de celles de la règle de Société ; puisqu'il s'agit de revenir de la somme de quelques parties d'un nombre , à ce nombre même , comme dans l'exemple qui suit.

E X E M P L E II.

On demande de trouver un nombre dont le $\frac{1}{5}$, le $\frac{1}{7}$ et les $\frac{3}{7}$ fassent 808. Je prends un nombre dont je puisse avoir commodément le $\frac{1}{5}$, le $\frac{1}{7}$, et les $\frac{3}{7}$ (ce qui est facile en multipliant les trois dénominateurs). Ce nombre sera 105 ; j'en prends le $\frac{1}{5}$ qui est 35 , le $\frac{1}{7}$ qui est 21 , et les $\frac{3}{7}$ qui sont 45 ; j'ajoute ces trois nombres , et j'ai 101 qui est composé des parties de 105 , de la même manière que 808 l'est de celles

du nombre en question ; donc le nombre en question doit avoir même rapport à 808 , que 105 à 101 ; il doit donc être le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.

$$101 : 105 : 808 :$$

Ce quatrième terme est 840 , dont 808 renferme en effet le $\frac{1}{2}$, le $\frac{1}{3}$ et les $\frac{3}{7}$.

201. La seconde règle dont nous parlerons , est celle de deux fausses positions.

Elle sert dans les questions où il s'agit de partager, non pas le nombre même proposé , mais seulement une partie de ce nombre, en parties proportionnelles à des nombres donnés ; l'exemple suivant fera connoître la règle et son usage.

E X E M P L E III.

Il s'agit de partager 6954¹, entre trois personnes , de manière que la seconde ait autant que la première , et 54¹ de plus ; et que la troisième ait autant que les deux autres ensemble , et 78¹ de plus.

Sans les 54 et les 78¹, il est clair qu'il ne s'agiroit que de partager le nombre proposé , en parties proportionnelles aux nombres 1 , 1 et 2 , mais puisqu'il faut prélever sur la somme , 54¹ pour la seconde personne , et 54¹ plus 78¹ pour la troisième , il est évident qu'il n'y a qu'une partie du nombre proposé , qu'on doit partager en parties proportionnelles à 1 , 1 et 2 : comme cette partie qui est facile à trouver dans l'exemple actuel , peut être plus difficile à apercevoir dans d'autres circonstances , on suit la méthode que voici.

Supposons pour la première part , tel nombre que nous voudrons , par exemple , 1¹ ; la seconde part

sera 1^1 plus 54^1 , c'est-à-dire, 55^1 ; et la troisième sera 1^1 plus 55^1 plus 78^1 , c'est-à-dire, 134^1 : la totalité de ces parts est 190^1 .

S'il n'eût été question que de partager en parties proportionnelles à 1, 1 et 2, la première part étant toujours supposée 1^1 , la seconde seroit 1^1 , la troisième seroit 2^1 , et la totalité seroit 4^1 , dont la différence avec 190^1 , c'est-à-dire, 186^1 , est ce qu'il faut prélever sur la somme proposée 6954^1 , ce qui la réduit à 6768^1 ; il reste donc à partager 6768^1 en parties proportionnelles à 1, 1 et 2, selon les règles ci-dessus; et ayant trouvé que la première partie est 1692^1 , on en conclura que les deux autres parts demandées sont 1746^1 ; et 3516^1 en effet la totalité de ces trois parts est 6954^1 .

202. « Dans les règles ainsi nommées, on a pour but de faire connoître un ou plusieurs nombres inconnus, d'après des conditions données, et pour cela on prend à volonté un nombre quelconque sur lequel on opère suivant les conditions exprimées dans la question; ce qui donne un résultat. Si ce nombre ainsi déterminé est au nombre pris à volonté, comme le résultat d'opérations semblables sur le nombre inconnu est à ce même nombre, la règle est dite d'une seule fausse position; et faisant la proportion énoncée ci-dessus, on découvre le nombre inconnu, et par celui-ci tous les autres, s'il y en a plusieurs.

Mais si les quantités trouvées par le résultat d'opérations faites sur le nombre pris à volonté suivant les conditions de la question, non-seulement ne sont pas celles que l'on cherche, mais ne leur sont pas même proportionnelles, alors la règle est dite de deux fausses positions: ce cas a lieu lorsque dans l'énoncé de la question il y a des quantités connues et invariables, combinées par addition ou par soustraction, séparément ou à la fois, avec les parties que l'on cherche à déterminer; car si aux antécédens ou aux conséquens des termes d'une proportion on ajoute un même nombre, ou si on l'en soustrait, les sommes ne sont plus en proportion avec les termes qui n'ont point été altérés.

Ainsi dans ces sortes de questions tout se réduit à déterminer les nombres qui tendent à troubler la proportion; nous allons voir comment cela se pratique dans les questions suivantes qui se résolvent par la règle de simple fausse position.

Trouver un nombre dont la moitié, le tiers et les deux cinquièmes fassent ensemble 148.

Quoique l'on puisse résoudre ces sortes de questions au moyen d'un nombre pris à volonté et pour ainsi dire au hasard, néanmoins il convient de le choisir d'après les conditions qui sont énoncées dans la question, parce que le calcul devient plus facile; dans la question présente on voit que le nombre inconnu doit être exactement divisible par deux, par trois et par cinq, puisque la somme de toutes les parties donne un nombre entier. Je prends donc le nombre 30 qui est le plus petit nombre divisible par les trois nombres ci-dessus; ajoutant sa moitié, son tiers et son cinquième, j'ai pour somme 37: il est évident que l'on auroit cette suite de termes proportionnels, la moitié de 30 qui est 15 est à la moitié du nombre cherché, comme le tiers de 30 qui est 10 est au tiers du nombre cherché, comme les deux cinquièmes de 30 qui sont 12 sont aux deux cinquièmes du nombre cherché, comme 30 est au nombre cherché; mais la somme d'un certain nombre d'antécédens est au même nombre des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent: donc la somme de tous les antécédens excepté le dernier (cette somme est 37), est à la somme de tous les conséquens excepté le dernier (cette somme est 148 dans ce cas-ci), comme le nombre total 30 est au nombre cherché; on fera donc cette proportion; $37 : 148 :: 30 : x = 120$.

Un particulier lègue son bien à trois amis, et donne au premier le tiers; au second les deux cinquièmes; et 32000 l. qui restent, au troisième; on demande le bien du défunt et la part des deux premiers.

On voit encore par l'état de la question, que le bien dont il s'agit doit être divisible par trois et par cinq; je prends le nombre 15, ôtant de ce nombre son tiers et ses deux cinquièmes dont la somme est 11, il reste 4: je dirai, si 4 donne 32000 l. combien 15? je trouve 120000 l. qui satisfait à la question. Les parts des héritiers sont donc 40000 l., 48000 l., et 32000 l.

Partager le nombre 7800 entre trois personnes ; de manière que la seconde ait deux fois autant que la première, et que la troisième ait autant que les deux autres.

Supposant que la première ait une livre, la seconde en auroit deux, et la troisième trois, ce qui fait 6 pour la somme des trois parts. On fera ensuite cette règle de compagnie.

$$6 \text{ l.} : 7800 :: \left\{ \begin{array}{l} 1 : x = 1300 \\ 2 : x = 2600 \\ 3 : x = 3900 \end{array} \right\} \text{ dont la somme est } 7800 \text{ l.}$$

Partager le nombre 15600 l. en trois parts, telles que la part du premier soit à la part du second, comme 5 est à 7 ; et que celle du second soit à celle du troisième, comme 9 est à 11.

A cause que la part du second est représentée d'abord par 7 et ensuite par 9, je multiplie le premier rapport par neuf et le second par sept, et alors la part du premier sera à celle du second, comme 45 est à 63, et celle du second sera à celle du troisième, comme 63 est à 77. La somme des trois parts sera donc 185 ; on opérera ensuite comme ci-dessus : et on aura

$$185 : 15600 :: \left\{ \begin{array}{l} 45 : x = 3794 \frac{22}{37} \\ 63 : x = 5312 \frac{16}{37} \\ 77 : x = 6492 \frac{2}{37} \end{array} \right.$$

Je passe à présent à des questions qu'on résout par le moyen de la règle de deux fausses positions.

Partager le nombre 69960 entre cinq personnes, de manière que la seconde ait trois fois autant que la première et 540 l. de plus ; que la troisième ait la moitié de la première, et le tiers de la seconde moins 120 ; que la quatrième ait le double de la troisième et 360 l. de plus ; et qu'enfin la cinquième ait autant que la première et la quatrième. On demande ce qui revient à chacun.

A cause des nombres constans et invariables 540, 120 et 360 qui doivent se combiner par addition et soustraction avec les parts qu'il s'agit de déterminer, il est facile de reconnoître que les parties trouvées par le moyen d'un nombre pris à volonté, non-seulement ne seront pas les vraies parts de chacun, mais ne leur seront même pas proportionnelles. Afin donc de reconnoître pour combien ces quantités constantes tendent à troubler la proportion, il n'y a qu'à opérer de manière à ne pas confondre les mêmes quantités avec les grandeurs qui conservent la proportion, en ne faisant qu'in-

cliquer les additions et les soustractions avec les signes $+$ et $-$ comme on va le voir.

Pour résoudre cette question, je prends un nombre à volonté, comme 60 l., pour représenter la part du premier; triplant cette part et y joignant 540 l. on aura $1800 + 540$ pour le quart du second; prenant encore la moitié du premier et le tiers du second on aura $900 + 180 = 120$ pour celle du troisième, ou $900 + 60$. Passant à la quatrième qui doit être le double de la troisième, je double $900 + 60$: ce qui me donne $1800 + 120$ auxquels il faut encore ajouter 360; d'où il suit qu'elle est égale à $1800 + 480$: ce qui me donne $2400 + 480$ pour la cinquième qui doit être égale à la première plus la quatrième; ajoutant les quatre sommes comme on le voit ci-dessous, on trouvera que la somme des parts subordonnées à la première, par multiplication et par division, est de 7500, et que celle des parties qui proviennent des combinaisons, par addition et soustraction, est de 1560; c'est précisément cette quantité qui tend à troubler la proportion; on commencera donc par l'ôter de 69960, et l'on aura pour reste 68400; après quoi l'on fera la proportion suivante: $7500 : 600 :: 68400 : x = 5472$, qui est la vraie part du premier. Il est à présent facile de trouver la part des autres co-partageans.

600	5472
$1800 + 540$	16956
$900 + 60$	828
$1800 + 480$	16896
$2400 + 480$	22368
$7500 + 1560$	69960

Voici le procédé que l'on doit suivre dans les différentes questions qu'on résout par la règle de double fausse position.

Prenez deux nombres que vous assujétirez aux conditions de la question, ce qui donnera deux résultats différens; si l'un de ces nombres satisfait à la question, comme cela arrive quelquefois, le problème est résolu; ôtez ces deux résultats du nombre donné dans la question, s'ils sont tous les deux plus petits que ce même nombre; ou bien retranchez-en le nombre donné, s'ils se trouvent

tous les deux plus grands que lui ; ou , enfin , si l'un est plus petit et l'autre plus grand que le nombre dont il s'agit , prenez les différences de ces deux résultats avec le nombre proposé , en marquant du signe — celle qui est par défaut , et du signe + celle qui est par excès. Ayant écrit ces deux restes avec leurs signes , multipliez le premier reste par le nombre supposé en second lieu ; et le second reste par la première suppression. Divisez la différence de ces deux produits par la différence de l'erreur , si elles se sont trouvées toutes les deux de même espèce , positives ou négatives ; ou la somme de ces deux produits par la somme des erreurs , si elles se sont trouvées de signe contraire à l'égard du nombre qu'on devoit trouver pour résultat des opérations faites suivant les conditions du problème. Dans l'un et l'autre cas , le quotient sera le nombre cherché.

Un particulier demande à un autre ce qu'il a gagné d'écus au jeu ; celui-ci lui répond : si j'avois encore gagné la moitié , le quart et les deux tiers avec cinq par-dessus , j'en aurois 150.

I^{re}. supp. 12. I^{er}. résult. 34 I^{re}. diff. 116.

II^e. supp. 24. II^e. résult. 63 II^e. diff. 87.

diff. des err. 29.

	2784	
	1044	
diff. des prod.	1740	29
		60

Je prends le nombre 12 auquel ajoutant sa moitié , son quart et ses deux tiers avec cinq , j'aurai pour somme 34 qui diffère de 150 , de 116 unités ; je prends ensuite 24 , sur lequel opérant de la même manière , j'ai pour résultat 63 , dont la différence avec 150 est de 87 ; multipliant 12 par 87 on a 1044 , multipliant de même 24 par 116 on trouve 2784 : la différence de ces deux produits est 1740 qui divisé par 29 , différence des erreurs , donne 60 qui est le nombre cherché.

En résolvant cette même question par une règle de fausse position , on la réduira à cette proportion.

$$29 : 12 :: 145 : x = 60.$$

Un Général, après une bataille, fait la revue de son armée et trouve un tiers de morts, un quart de prisonniers, et un cinquième qui a pris la fuite; en sorte qu'il ne lui reste plus que 13000 hommes: on demande de combien de soldats son armée étoit composée.

Je suppose d'abord qu'il eût 30000 hommes; si j'en ôte le tiers, le quart et le cinquième, il reste 6500, dont la différence avec 13000 est de 6500. Je suppose ensuite l'armée de 45000; après en avoir ôté les mêmes parties, on trouve 9750, dont la différence avec 13000 est de 3250; multipliant la première supposition par la seconde erreur, et la seconde supposition par la première erreur, les produits seront 97500000 et 29250000 dont la différence est de 19500000 que je divise par la différence des erreurs qui est de 3250; et le quotient sera de 60000, nombre qui satisfait à la question.

Règle d'Intérêt.

La règle d'intérêt a pour but de fixer la somme due pour de l'argent prêté sous certaines conditions.

On tire l'intérêt d'une somme de plusieurs manières. L'on place une somme à raison de tant pour cent d'intérêt par an, à 5 pour cent, par exemple; ou bien l'on place une somme au denier tant, au denier vingt, par exemple. Placer son argent à cinq pour cent par an, veut dire que 100 l. rapporteront 5 l. dans un an. Placer son argent au denier 20, ne veut dire autre chose que 20 l. rapporteront 1 l. dans un an; le placer au denier 18, au denier 16, au denier 12, au denier 10, cela veut dire que 18 l., 16 l., 12 l., 10 l., rapporteront 1 l. dans un an.

La règle d'intérêt présente quatre questions à résoudre: dans la première on cherche l'intérêt du capital, dans la seconde on cherche le capital même, dans la troisième on cherche le temps, dans la quatrième enfin, on cherche la raison de l'intérêt, soit à raison de tant pour cent ou du denier. Nous allons éclaircir tout ceci par des exemples.

On demande l'intérêt simple de 450 l. pour trois ans, à raison de 6 pour cent par an; on fera la règle de Trois suivante.

Si 100 l. donnent 6 l., combien 450 l. ? On trouvera 27 l. pour l'intérêt d'un an, dont le triple fera 81 l. pour l'intérêt de trois ans, lesquels 81 l. ajoutés au principal, font 531 l. somme totale, tant du principal que de l'intérêt.

On demande quel étoit le capital de 531 l., somme qu'on a touchée au bout de trois ans, tant en capital qu'en intérêt, comptant l'intérêt à 6 pour cent par an.

Puisque 100 l. deviennent 106 l. au bout d'un an, 100 l. deviendront 118 l. au bout de trois ans; vous faites ensuite cette règle de Trois :

Si 118 l. se réduisent à 100 l. à combien se réduiront 531 l. ? On trouvera que 531 l. se réduiront à 450 l., laquelle somme sera celle qui a été placée à intérêt pendant trois années.

On a donné 450 l. à intérêt à raison de 6 pour cent par an; on demande en combien de temps 450 l. donneront 531 l., tant en principal qu'en intérêt.

Pour faire cette règle, ôtez le principal 450 l. de 531 l., il restera 81 l. pour l'intérêt.

Cherchez d'abord combien donneront 450 l. à raison de 6 pour cent par an, en disant :

Si 100 l. donnent 6 l. par an, combien 450 l.; on trouvera 27 l. pour l'intérêt d'un an. Dites ensuite :

Si 27 l. se gagnent dans un an, en combien de temps se gagneront 81 l., cherchez le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci: 27 l. : 1 an :: 81 : x; vous trouverez 3 ans pour quatrième terme; d'où je conclus que les 450 l., en trois ans se monteront à 531 l. tant en principal qu'en intérêt.

On a placé à intérêt 450 l. qui, en trois ans, ont rendu, tant en principal qu'en intérêt 531 l.; on demande à combien d'intérêt pour cent, on a placé cette somme.

Otez 450 l. de 531 l., il restera 81 l. pour les intérêts des trois ans; divisant ensuite 81 l. par trois, vous aurez 27 l. pour l'intérêt de chaque année: dites ensuite, 450 l. donnent 27 l. par an, combien 100 l.; et vous trouverez 6 l.; d'où vous concluez que 450 l. avoient été placées à raison de 6 pour cent.

Si au lieu de demander l'intérêt de 450 l. pour trois ans à raison de 6 l. pour 100 l., on avoit demandé l'intérêt de 450 l. pour trois ans au denier 20, au denier 18, ou à

tout autre denier, la règle auroit été absolument la même; au lieu de dire si 100 donnent 6 l., combien 450, on auroit dit, si 20 donnent 1 l., ou si 18 donnent un, combien 450 l.

On demande quel étoit le capital de 531 l., somme qu'on a touchée au bout de trois ans, tant en capital qu'en intérêt, comptant l'intérêt au denier vingt, ou à tout autre denier; on auroit dit, puisque 20 l. deviennent 21 l. au bout d'un an, 20 l. deviendront 23 l. au bout de trois ans.

On feroit ensuite cette règle de Trois : Si 23 l. se réduisent à 20 l. à combien se réduiront 531 l., et on trouveroit que 531 l. se réduiroient à 461 l. 14 s. $\frac{11}{12}$.

On a donné 450 l. à intérêt au denier 20, on demande en combien de temps 450 l. donneront 531 l., tant en principal qu'en intérêt.

Pour faire cette règle, on ôtera 450 l. de 531 l. il restera 81 l. pour l'intérêt : on cherchera ensuite combien donneront 450 l. au denier vingt, en disant :

Si 20 l. donnent 1 l., combien 450 l.; on trouvera 22 l. 10 s.; on fera ensuite cette proportion : si 22 l. 10 s. se gagnent dans un an, en combien de temps se gagneront 81 l., etc.

On a placé à intérêt 450 l. qui en trois ans ont rapporté, tant en principal qu'en intérêt, 531 l.; on demande à quel denier on a placé cette somme.

Otez 450 l. de 531 l., il restera 81 l. pour les intérêts de trois ans : divisant ensuite 81 l. par trois, on aura 27 l. pour l'intérêt de chaque année : on fera ensuite cette proportion :

$$27 \text{ l.} : 450 \text{ l.} :: 1 : x.$$

et le quatrième terme apprendra à quel denier on a placé cette somme.

Règle de Change.

La règle de change n'est au fond qu'une règle d'intérêt. Le change se compte tant pour cent de perte ou de profit.

La difficulté de transporter de l'argent d'un lieu dans un autre, tant pour la pesanteur que pour les risques que l'on court sur les chemins, a donné lieu à l'établissement de

plusieurs places qu'on nomme places de change, comme à Paris, à Lyon, à Bordeaux, et autres endroits. Par ce moyen, chacun peut faire tenir telles sommes d'argent que l'on veut, moyennant une lettre de change d'un banquier ou d'un commerçant, pour laquelle on lui paye la valeur en deniers comptans.

Un particulier voulant aller de Paris à Toulouse, va trouver un banquier pour lui faire recevoir 3000 l. net au même lieu; on demande combien il faut donner au banquier pour le change de 3000 l. le change étant accordé à 3 l. pour cent.

Dites: si pour 100 l. on donne 3 l., combien pour 3000 l. donnera-t-on? La règle étant faite on trouvera 90 l. qu'il faudra payer pour le change. Il faudra donc remettre 3090 l. au banquier, lequel fournira une lettre de change de 3000 l. net sur son correspondant de Toulouse.

Mais si l'on vouloit savoir combien on recevrait d'argent net à Toulouse, en donnant 3000 l. à un banquier de Paris, selon la même condition de 3 l. pour cent.

On dirait: si 103 l. sont réduites à 100 l. à combien 3000 l.? Faisant l'opération, il viendra 2912 l. 11 s. 5 d. $\frac{1}{103}$ que l'on recevra net à Toulouse.

Quelqu'un ayant besoin de 300 l. pour aller de Paris à Bordeaux, va trouver un Banquier pour les recevoir; on demande de combien la lettre de change doit être faite, prenant le change à 3 l. pour 100 l.; dites si 100 l. valent 103 l., combien 300 l.: on trouvera 309 l.; et partant, ce particulier doit fournir au banquier une lettre de change de 309 l.

Quelqu'un demande à ne payer que dans trois mois la somme de 5000 l. et consent à payer l'intérêt à $2\frac{1}{2}$ pour cent pour les trois mois, dites:

Si pour 100 l. on paye $102\frac{1}{2}$ pour principal et intérêt, combien doit-on payer tant pour le principal que pour le change au bout de trois mois, ou 100 l.: $102\frac{1}{2} :: 5000$ l.; on trouvera 5125 l. que le débiteur doit payer au bout des trois mois.

Mais comme le débiteur n'a pas d'argent pour payer, il demande à son créancier qu'il attende encore trois autres mois aux mêmes conditions.

Il s'agira de savoir combien 5125 l. monteront tant en principal qu'en intérêt; on dira donc 100 l.: $102\frac{1}{2} :: 5125$ l.,

et l'on trouvera 5253 l. 2 s. 6 d. à payer au bout de ces trois derniers mois.

Règle d'Escompte.

L'escompte est une somme à déduire sur la valeur d'un billet dont on demande à être payé avant son échéance, d'où il suit que l'escompte n'est autre chose que l'intérêt de l'argent que l'on a payé d'avance, lequel intérêt se prend à un certain taux pour cent, qui est communément de 5 à 6.

Il y a deux manières de prendre l'escompte. Lorsque pour une somme de 100 l. qu'on prête aujourd'hui, on fait un billet de 105 l. ou de 106 l. payable au bout de l'année, on dit que l'escompte est en dedans, et dans ce cas la valeur d'un billet de 105 l. ou de 106 l. payable au bout de l'année se réduit à 100 l. payables sur-le-champ; l'escompte est alors de 5 l. ou 6 l. Mais si l'on commence par prélever sur la somme prêtée, l'intérêt de cette somme pendant l'année, en ne prêtant que le principal diminué de son intérêt, on dit que l'escompte est en dehors. Il est visible que ceux qui prêtent ainsi ont au bout de l'année l'intérêt de l'intérêt des sommes qu'ils ont prêtées.

Un marchand a acheté pour 500 l. de marchandises à un an de terme ou de crédit, à condition qu'il en pourra faire l'escompte à raison de 10 pour cent par an : il arrive que trois ou quatre jours après, le marchand veut payer; on demande combien il doit payer, au lieu de 500 l. qu'il payeroit au bout d'un an.

Pour résoudre cette question, il faut d'abord considérer que les 500 l. qu'il doit payer au bout d'un an sont composées du principal et de l'intérêt pour un an à raison de 10 pour cent; on dira ensuite : si 110 l., somme composée de 100 l. et de son intérêt pendant un an, donnent 100 l.; combien 500 l.? Faisant l'opération, on trouvera 454 l. 10 s. 10 d. $\frac{10}{12}$, somme qu'il faut payer présentement au lieu de 500 l. dans un an.

Trouver l'escompte d'une somme de 7800 l. 15 s. 6 d., à 6 pour cent, escompte en dedans.

On dira 106 l. : 6 l. :: 7800 l. 15 s. 6 d. : $x = 441$ l. 11 s. 0 d. $\frac{42}{100}$; ôtant cette somme de la somme proposée, 7359 l. 4 s. 5 d. $\frac{22}{100}$ sera la somme qu'il faut payer déduction

faite de l'escompte. Pour faire la preuve de cette opération ; on fera cette proportion 106 l. : 100 l. : : 7800 l. 15 s. 6 d. : $x = 7359$ l. 4 s. 5 d. $\frac{11}{11}$.

Si l'on veut résoudre la même question , l'escompte en dehors , on dira : si le nombre 106 , intérêt et principal de 100 l. donnent 6 l. d'escompte , combien 7800 l. 15 s. 6 d. donneront-ils ? ou 100 l. : 6 l. : : 7800 l. 15 s. 6 d. : $x = 468$ l. 0 s. 11 d. $\frac{4}{23}$; ôtant cette somme de la somme proposée , il vient 7332 l. 14 s. 6 d. $\frac{2}{3}$ dont on fera la preuve par cette proportion : 100 l. : 94 l. : : 7800 l. 15 s. 6 d. : $x = 7332$ l. 14 s. 6 d. $\frac{2}{3}$.

Si l'on prend la différence des nombres 468 l. 0 s. 11 d. $\frac{4}{23}$ et 441 l. 11 s. 0 d. $\frac{22}{23}$, on la trouve de 26 l. 9 s. 11 d. $\frac{487}{1323}$; et si l'on cherche l'intérêt de 468 l. 0 s. 11 d. $\frac{4}{23}$ à 6 pour 100 , on trouvera absolument le même nombre ; d'où il suit que ceux qui prennent l'escompte en dehors , prennent l'intérêt de l'intérêt , ou l'intérêt composé des sommes qu'ils avancent.

Souvent on est obligé d'escompter une somme pour un nombre de mois et jours donnés avant l'échéance.

Un Imprimeur achète pour 15640 l. de papier dont il consent de payer l'escompte à 6 pour 100 par an , avec la faculté de diminuer l'escompte à raison du temps qu'il payera avant l'échéance du billet : il vient payer au bout de 240 jours ; on demande ce qu'il doit donner au marchand de papier. On fera d'abord cette proportion : 365 : 240 :: 6 : $x = 3$ $\frac{60}{73}$; on dira ensuite , 106 l. : 103 $\frac{60}{73}$:: 15640 l. : $x = 15336$ l. 16 s. 5 d. $\frac{87}{3867}$. »

De la Règle d'Alliage.

203. Les questions qui appartiennent à cette règle , sont de deux sortes.

Dans l'une il s'agit de trouver la valeur moyenne de plusieurs sortes de choses , dont le nombre et la valeur particulière de chacune , sont connus.

Dans la seconde , il s'agit de connoître les quantités de chaque espèce de choses qui entrent dans un ou plusieurs mélanges , lorsqu'on connoît le prix ou la valeur totale de chaque mélange.

Nous réservons les questions de la seconde sorte pour l'Algèbre.

Quant aux questions de la première, voici la règle pour les résoudre.

Multipliez la valeur de chaque espèce de chose, par le nombre des choses de cette espèce; ajoutez tous les produits, et divisez la somme par le nombre total des choses de toutes les espèces.

E X E M P L E.

On emploie 200 Ouvriers, dont 50 sont payés à raison de 40 sols par jour, 70 à raison de 30 sols, 50 à raison de 25 sols, et 30 à raison de 20 sols; à combien chaque Ouvrier revient-il par jour, l'un portant l'autre?

50 Ouvriers à 40 sols par jour font une dépense de	2000
70 à 30 ^s	2100
50 à 25	1250
30 à 20	600
	5950 ^s

La dépense des 200 Ouvriers est donc de 5950^s par jour et par conséquent (en divisant par 200), chaque Ouvrier revient, l'un portant l'autre, à 29^s 9^d par jour. Les autres questions de cette espèce sont si faciles à résoudre d'après cet exemple, que nous croyons à propos de ne pas insister sur cette matière.

« Voici les règles de la seconde sorte que BEZOUT renvoie à l'Algèbre.

Dans le second cas, le prix moyen et celui de chaque partie de l'alliage étant connus, il peut arriver, 1^o. qu'aucune des quantités dont le mélange doit être formé, ne

soit fixée : 2°. qu'il y en ait une qui le soit : 3°. que l'on soit restreint à une certaine quantité d'alliage. Les exemples suivans vont éclaircir tout cela.

Un marchand de vin voudroit mêler du vin à 15 s. la pinte avec du vin à 8 s. pour en avoir qu'il pût vendre 12 s. la pinte ; combien doit-il en prendre de chaque espèce pour faire le mélange ?

Après avoir disposé les trois prix de cette manière ,

$$12 \quad \left\{ \begin{array}{l} 15 \dots 4 \\ 8 \dots 3 \end{array} \right.$$

Je prends la différence 3 de 12 à 15 et je la mets vis-à-vis 8 ; je place réciproquement vis-à-vis 15 la différence 4 de 12 à 8 , et je conclus que trois pintes de vin à 8 mêlées avec quatre du vin à 15 feront du vin à 12 sols ; cela est évident par la compensation qui se fait des deux prix , l'un supérieur et l'autre inférieur au prix moyen.

Il ne faut cependant pas conclure de cette compensation ; que les nombres 4 et 3 soient les seuls qui satisfassent aux conditions du problème : c'est ici une question qui a une infinité de solutions , même en nombres entiers. Il suffit pour les trouver de prendre deux nombres qui soient dans les mêmes rapports que 4 et 3 , et pour cela il n'y a qu'à les doubler , tripler , etc.

Si le mélange devoit être fait avec du vin à 15 s. , à 10 s. et à 8 s. , pour avoir encore du vin à 12 s. on s'y prendroit à-peu-près de la même manière ; c'est-à-dire , qu'après avoir comparé 15 et 8 avec le prix moyen , et disposé réciproquement les différences 3 et 4 , on compareroit 15 et 10 avec le même prix moyen 12 , et on disposeroit réciproquement aussi leurs différences. Voyez l'exemple.

$$12 \quad \left\{ \begin{array}{l} 15 \dots 4 \dots 2 = 6 \\ 10 \dots 3 \\ 8 \dots 3 \end{array} \right.$$

Six pintes de vin à 15 s. , trois pintes à 10 s. et trois pintes à 8 s. mêlées ensemble feroient donc 12 pintes de vin à 12 s. S'il devoit entrer encore dans le mélange quatre , cinq ou six sortes de vin à différens prix , on les compareroit successivement deux à deux avec le prix moyen , en observant de ne comparer à la fois que deux prix l'un plus fort et l'autre plus foible que le prix moyen.

Dans

Dans un temps de disette, un Boulanger veut faire du pain avec de l'orge, du seigle et du froment, et le vendre 4 s. la livre. Il a huit boisseaux et demi de froment qui feroit du pain à 5 s. la livre. Le pain fait avec le seigle seul reviendrait à 3 s. 8 d. : celui qu'il feroit avec de l'orge coûteroit 1 s. 6 d. ; on demande combien il doit mêler de seigle et d'orge avec les huit boisseaux et demi de froment, pour faire du pain à 4 s. la livre.

Le prix moyen est ici 48 d.

$$48 \left\{ \begin{array}{l} 60 \dots 30 \dots 4 \\ 44 \dots 12 \\ 18 \dots 12 \end{array} \right.$$

Je prends les différences avec les autres prix, comme dans l'exemple précédent, et je dis :

Pour faire du pain à 4 s. la livre avec les prix marqués, on pourroit donc prendre 34 boisseaux d'orge ; mais puisque la quantité de froment est fixée, il est clair que s'il faut douze boisseaux de seigle et douze d'orge sur trente-quatre de froment, il en faudra sur huit et demi une quantité proportionnelle que je détermine par cette règle de Trois.

$$34 : 8 \frac{1}{2} :: 12 : x = 3$$

Il en est de même pour les plus grands nombres des choses à mêler, quand on connoit leur prix et la quantité de l'une d'entr'elles.

Des Échanges.

Quand il se fait des échanges d'une marchandise avec une autre, c'est toujours par les prix des monnoies que l'on connoit la valeur des marchandises, et le gain ou la perte qui peut se faire tant à la vente qu'à l'échange.

Deux marchands veulent troquer leurs marchandises ; l'un à des épiceries qui ne valent que 9 s. la livre argent comptant, et en troc il veut les faire valoir 10 s. ; l'autre a de la cire qui vaut 12 s. argent comptant, et celui-ci veut savoir combien il doit vendre en troc pour n'être pas trompé.

Pour résoudre cette question et autres semblables, il faut faire cette règle de Trois.

Si 9 s. argent comptant valent 10 s. en troc, combien 12 s. en argent vaudront-ils en troc ? ou 9 s. : 10 s. ::

Arithmétique.

M

11 s. : $x = 13$ s. 4 d. ; il vendra donc sa cire 13 s. 4 d. pour ne rien perdre dans l'échange.

Deux marchands veulent faire un troc de marchandises ; l'un a de la serge qui vaut 56 s. l'aune argent comptant, et en troc il en veut avoir 60 s., et il veut avoir le tiers argent comptant ; l'autre a de la laine qui vaut 20 s. la livre argent comptant : combien la doit-il vendre en troc pour n'être pas trompé ?

Il faut prendre le tiers de 60, et ôter ce nombre de 56 et de 60 : la première opération donnera 36 de reste, la seconde 40 : on fera ensuite cette règle de Trois : Si 36 s. comptant valent 40 s. en troc, combien 20 s. comptant ; ou 36 s. : 40 s. :: 20 s. : $x = 22$ s. 2 d. $\frac{1}{2}$.

Deux marchands troquent leurs marchandises ; l'un a de l'étain qui vaut 8 s. la livre argent comptant, et en troc il le fait valoir 10 s. ; l'autre a du cuivre qui vaut 20 s. argent comptant, et en troc il le fait valoir 30 s. ; on veut savoir lequel gagne le plus.

Disons : si 8 s. argent comptant valent 10 s. en troc, combien 26 s. argent comptant vaudroient-ils en troc ? on trouvera 32 s. 6 d., et par ce moyen l'on connoitroit que le marchand de cuivre perdrait 2 s. 6 d. pour livre, et que l'autre marchand les gagneroit.

Mais si le marchand de cuivre vouloit avoir le tiers en argent comptant, lequel des deux auroit le meilleur compte.

Pour le savoir, il faut prendre le tiers de la juste valeur du cuivre, qui est 10 s., et ôter cette somme de 26 s. et de 30 s., reste 16 et 20, et dire ensuite ; si 16 s. donnent 20 s., combien 26 s. ? on trouveroit 32 s. 6 d., et par-là on connoitroit que le marchand de cuivre, ayant le tiers de son argent comptant, fait un troc égal avec l'autre marchand. »

Des Progressions Arithmétiques.

204. La progression arithmétique est une suite de termes dont chacun surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé, de la même quantité.

Par exemple, cette suite.
 $\div 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdot 19 \cdot 22 \cdot 25$, etc.
 est une progression arithmétique, parce que chaque

terme y surpasse celui qui le précède, d'une même quantité qui est ici 3.

Les deux points séparés par une barre qu'on voit ici à la tête de la progression, sont destinés à marquer qu'en énonçant cette progression, on doit répéter chaque terme, excepté le premier et le dernier, en cette manière, *1 est à 4 comme 4 est à 7, comme 7 est à 10*, etc.

La progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant; mais comme les propriétés de l'une et de l'autre sont les mêmes, en changeant seulement les mots *plus* en *moins*, ou *ajouter* en *soustraire*, nous la considérerons ici uniquement comme *croissante*.

205. On voit donc, d'après la définition de la progression arithmétique, qu'avec le premier terme et la différence commune, ou la raison de la progression, on peut former tous les autres termes, en ajoutant consécutivement cette raison; et que par conséquent :

Le second terme est composé du premier, plus la raison.

Le troisième composé du second, plus la raison, et par conséquent du premier, plus deux fois la raison.

Le quatrième est composé du troisième, plus la raison, et par conséquent, du premier, plus trois fois la raison; et ainsi de suite.

206. De sorte qu'on peut dire, en général, qu'un *terme quelconque d'une progression arithmétique, est composé du premier, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

207. Donc si le premier terme étoit zéro, tout

autre terme de la progression seroit égal à autant de fois la raison, qu'il y auroit de termes avant lui.

208. Ce principe peut avoir les deux applications suivantes :

1°. Il sert à trouver un terme quelconque d'une progression, sans qu'on soit obligé de calculer ceux qui le précèdent : qu'on demande, par exemple, quel seroit le 100^e terme de cette progression.

$$\div 4 : 9 : 14 . 19 : 24 , \text{etc.}$$

Puisque ce terme cherché doit être le centième, il a donc 99 termes avant lui ; il est donc composé du premier terme 4, et de 99 fois la raison 5 ; il est donc 4 plus 495, c'est-à-dire, 499.

209. 2°. Ce même principe sert à lier deux nombres quelconques, par une suite de tant d'autres nombres qu'on voudra, de manière que le tout forme une progression arithmétique ; ce qu'on appelle *insérer* entre deux nombres donnés, plusieurs *moyens proportionnels arithmétiques*, ou simplement plusieurs *moyens arithmétiques*.

Par exemple, on peut lier 1 et 7, par cinq nombres qui fassent une progression arithmétique avec 1 et 7 ; ces nombres sont 2, 3, 4, 5, 6 ; mais comme il n'est pas toujours aisé de voir, du premier coup d'œil quels doivent être ces nombres, voici comment on peut les trouver à l'aide du principe que nous venons de poser.

Il ne s'agit que de trouver la raison qui doit régner dans cette progression.

Or le plus grand des deux nombres proposés, devant être le dernier terme de la progression, doit être composé du premier, c'est-à-dire, du plus petit de ces deux nombres, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui ; donc si du plus grand

De ces deux nombres, on retranche le plus petit, le reste sera composé d'autant de fois la raison qu'il doit y avoir de termes avant le plus grand; c'est-à-dire, qu'il est le produit de la multiplication de cette raison par le nombre des termes qui précèdent le plus grand; donc (74) si l'on divise ce reste, par le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, on aura cette raison.

Or le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, est plus grand d'une unité que le nombre des moyens qu'on veut insérer entre les deux; donc, *pour insérer, entre deux nombres donnés, tant de moyens arithmétiques qu'on voudra, il faut retrancher le plus petit de ces deux nombres, du plus grand; et diviser le reste, par le nombre des moyens augmenté d'une unité.* Le quotient sera la différence ou la raison qui doit régner dans la progression.

Par exemple, si entre 4 et 11, on demande d'insérer 8 moyens arithmétiques; je retranche 4 de 11, il me reste 7 que je divise par 9 nombre de moyens augmenté de l'unité; le quotient $\frac{7}{9}$ est la différence qui doit régner dans la progression, qui sera par conséquent.

$$\div 4 \cdot 4\frac{7}{9} \cdot 5\frac{14}{9} \cdot 6\frac{21}{9} \cdot 7\frac{28}{9} \cdot 7\frac{35}{9} \cdot 8\frac{42}{9} \cdot 9\frac{49}{9} \cdot 10\frac{56}{9} \cdot 11.$$

Pareillement, si l'on demandoit neuf moyens arithmétiques entre 0 et 1, retranchant 0 de 1, il reste 1 qu'il faudroit diviser par 10, nombre des moyens augmenté de l'unité; ce qui donne $\frac{1}{10}$ ou 0,1 pour la raison. Et par conséquent la progression sera. . .

$$\div 0 \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 \cdot 1.$$

210. On voit par-là, qu'entre deux nombres, si

voisins qu'ils puissent être l'un de l'autre, on peut toujours insérer tant de moyens arithmétiques qu'on voudra.

Nous n'en dirons pas davantage sur les progressions arithmétiques, que nous ne traitons ici que par rapport aux logarithmes dont nous parlerons plus bas; nous aurons occasion d'y revenir ailleurs.

Des Progressions Géométriques.

211. La progression géométrique est une suite de termes dont chacun contient celui qui le précède, ou est contenu en lui, le même nombre de fois. Par exemple cette suite.

$$\ddots 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

est une progression géométrique; parce que chaque terme contient celui qui le précède, le même nombre de fois qui est ici 2.

Ce nombre de fois est ce qu'on appelle *la raison* de la progression.

Les quatre points qui précèdent la progression, ont la même signification que les deux points qui précèdent la progression arithmétique (204). Mais on en met quatre pour avertir que la progression est géométrique.

La progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

Nous considérerons toujours la progression géométrique, comme *croissante*, parce que les propriétés sont les mêmes dans l'une et dans l'autre, en changeant le mot de *multiplier* en celui de *diviser*, et celui de *contenir* en ceux de *être contenu*.

Puisque le second terme contient le premier, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est

donc composé du premier multiplié par la raison.

Puisque le troisième terme contient le second, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du second multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par la raison, et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire, du premier multiplié par le carré, ou la seconde puissance de la raison.

Puisque le quatrième terme contient le troisième, autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du troisième multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par le carré de la raison, et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire, multiplié par le cube, ou la troisième puissance de la raison.

Par exemple, dans la progression ci-dessus; 6 est composé du premier terme 3 multiplié par la raison 2; 12 est composé du premier terme 3 multiplié par le carré 4 de la raison 2; 24 est composé du premier terme 3 multiplié par le cube 8 de la raison 2.

212. En continuant le même raisonnement, on voit qu'un terme quelconque de la progression géométrique, est composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce terme quelconque.

Donc, si le premier terme de la progression est l'unité, chaque autre terme sera formé de la raison même élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent; car la multiplication par le premier terme qui est l'unité, n'augmente point le produit.

Pour élever un nombre à une puissance proposée; à la septième, par exemple, il faut suivant l'idée

que nous avons donnée des puissances , multiplier ce nombre par lui-même , six fois consécutives ; ainsi pour élever 2 à la septième puissance , je dirois 2 fois 2 font 4 , 2 fois 4 font 8 , 2 fois 8 font 16 , 2 fois 16 font 32 , 2 fois 32 font 64 , 2 fois 64 font 128 , qui seroit la septième puissance de 2 , mais on peut abrégér l'opération en diverses manières ; par exemple : je puis d'abord quarrer 2 , ce qui fait 4 , cuber ce 4 , ce qui donne 64 , et le multiplier par 2 , ce qui fait 128 ; ou bien je puis cuber 2 , ce qui donne 8 , quarrer 8 , ce qui donne 64 , et multiplier 64 par 2 , ce qui donne 128 ; en un mot , peu importe de quelle façon on s'y prenne , pourvu que 2 se trouve 7 fois facteur dans le produit.

213. Le principe que nous venons de poser (212) sur la formation d'un terme quelconqué de la progression , et la remarque que nous venons de faire , peuvent servir à calculer tel terme qu'on voudra de la progression , sans être obligé de calculer ceux qui le précèdent : si l'on demande , par exemple , quel seroit le douzième terme de la progression.

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 , \text{etc.}$$

Comme je sais (212) que ce douzième terme doit être composé du premier , multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce douzième , je vois que , pour le former , il faut multiplier 3 par la onzième puissance de la raison 2 ; pour former cette onzième puissance , je cube 2 , ce qui me donne 8 ; je cube 8 , ce qui me donne 512 pour la neuvième puissance , et enfin je multiplie 512 , neuvième puissance de la raison , par 4 , seconde puissance , et j'ai 2048 pour la onzième puissance de 2 ; je multiplie donc 2048 par 3 , et j'ai 6144 pour le douzième terme de la progression.

214. Une autre application qu'on peut faire, du même principe; c'est pour trouver tant de moyens proportionnels géométriques qu'on voudra, entre deux nombres donnés. Si l'on demandoit trois moyens géométriques entre 4 et 64; avec un peu d'attention, on voit que ces trois moyens géométriques sont 8, 16, 32; en effet $\frac{4}{8} : \frac{8}{16} : \frac{16}{32} : \frac{32}{64}$ forment une progression géométrique; mais si l'on proposoit d'autres nombres que 4 et 64, ou que l'on demandât tout autre nombre de moyens géométriques, on ne les trouveroit pas aussi facilement.

Or voici comment on peut les trouver en vertu du principe dont il s'agit.

La question se réduit à trouver la raison qui doit régner dans la progression, parce que, quand elle sera trouvée, on formera aisément les termes, par des multiplications successives par cette raison.

Qu'il soit question, par exemple, de trouver neuf moyens géométriques entre 2 et 2048.

2048 sera donc le dernier terme d'une progression géométrique qui commence par 2, et qui doit avoir neuf termes entre le premier et le dernier. 2048 est donc composé du premier terme 2 multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc (69), si l'on divise 2048 par le premier terme, le quotient sera la raison élevée à une puissance marquée par le nombre de termes qui doivent précéder 2048; donc, en cherchant quelle est la racine de cette puissance, on aura la raison : or cette puissance doit être la dixième, puisque devant y avoir neuf termes entre 2 et 2048, il y en a nécessairement dix avant 2048 : donc il faut extraire la racine dixième du quotient qu'aura don-

né le plus grand nombre 2048 divisé par le plus petit 2.

215. Comme on peut faire le même raisonnement dans tous les cas, concluons donc en général que, pour insérer entre deux nombres donnés tant de moyens géométriques qu'on voudra; il faut diviser le plus grand de ces deux nombres par le plus petit, ce qui donnera un quotient; on extraira, de ce quotient, une racine du degré marqué par le nombre des moyens augmenté de l'unité.

Ainsi, pour revenir à notre exemple, je divise 2048 par 2, ce qui me donne 1024, dont je cherche la racine dixième (*); elle est 2; donc la raison est 2 : ainsi pour former les moyens en question, je multiplie le premier terme 2 continuellement par la raison 2; après avoir formé neuf moyens, je retombe sur 2048, comme on le voit ici.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \vdots & 2 & : & 4 & : & 8 & : & 16 & : & 32 & : & 64 & : & 128 & : & 256 & : & 512 & : & 1024 & : & 2048. \end{array}$$

Pareillement, si l'on demandoit de trouver quatre

(*) Nous n'avons pas donné de méthode pour extraire la racine dixième d'un nombre; mais il en est de celle-ci comme de la racine quarrée et de la racine cubique : la racine quarrée ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de deux; la racine cubique ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de trois; pareillement la racine dixième n'aura jamais qu'un chiffre, tant que le nombre proposé n'en aura pas plus de dix; il en est de même pour les autres racines; la trentième, par exemple, n'aura qu'un chiffre, si le nombre proposé n'a pas plus de trente chiffres; cela se démontre, comme on l'a fait pour la racine quarrée et la racine cubique.

moyens géométriques entre 6 et 48, je diviserois 48 par 6, et du quotient 8 je tirerois la racine cinquième; comme 8 n'a pas de racine cinquième exacte, on ne peut jamais assigner exactement en nombres, quatre moyens géométriques entre 6 et 48; mais on peut approcher de cette racine, si près qu'on le voudra, par une méthode analogue à celles de la racine quarrée et de la racine cubique, et que nous ferons connoître dans l'Algèbre. En attendant, il suffit qu'on conçoive qu'il est possible de trouver un nombre, qui multiplié quatre fois de suite par lui-même, approche de plus en plus de reproduire 8; et qu'il en est de même pour tout autre nombre et pour toute autre racine; et de-là nous conclurons qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours trouver tant de moyens géométriques qu'on voudra, soit exactement, soit par une approximation poussée à tel degré qu'on voudra, et c'est tout ce qu'il nous faut pour passer aux logarithmes.

Des Logarithmes.

216. Les *logarithmes* sont des nombres en progression arithmétique, qui répondent, terme pour terme, à une pareille suite de nombres en progression géométrique. Si l'on a, par exemple, la progression géométrique et la progression arithmétique suivantes.

$\begin{array}{c} \div \\ \div \end{array} 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, \text{ etc.}$
 $\div 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17, \text{ etc.}$

Chaque terme de la suite inférieure, est dit le logarithme du terme qui est à pareille place dans la suite supérieure.

217. Un même nombre peut donc avoir une infinité de logarithmes différens , puisqu'à la même progression géométrique on peut faire correspondre une infinité de progressions arithmétiques différentes. Comme nous ne considérons ici les logarithmes , que par rapport à l'usage qu'on peut en faire dans les calculs numériques , nous ne nous arrêterons pas à considérer les différentes progressions géométriques et arithmétiques qu'on pourroit comparer entr'elles ; nous passons tout de suite à celles qu'on a considérées dans la formation des Tables de logarithmes.

218. On a choisi pour progression géométrique , la progression décuple , et pour progression arithmétique , la suite naturelle des nombres ; c'est-à-dire , qu'on a choisi les deux progressions suivantes.

$\begin{array}{cccccccc} \div & 1 & : & 10 & : & 100 & : & 1000 & : & 10000 & : & 100000 & : & 1000000 \\ \div & 0 & . & 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & . & 5 & . & 6 \end{array}$

219. Ainsi il sera toujours aisé de reconnoître quel est le logarithme de l'unité suivie de tant de zéros qu'on voudra ; il a toujours autant d'unités qu'il y a de zéros à la suite de cette unité.

Nous n'enseignerons pas ici la méthode qu'on a suivie pour trouver les logarithmes des termes intermédiaires de la progression décuple ; elle dépend de principes que nous ne pouvons exposer ici ; mais nous allons expliquer leur formation par une voie , qui , à la vérité , ne seroit pas la plus expéditive pour calculer ces logarithmes , mais qui suffit , tant pour concevoir cette formation , que pour rendre raison des usages auxquels on emploie ces nombres artificiels.

220. D'après la définition que nous avons don-

née des logarithmes, on voit que pour avoir le logarithme d'un nombre quelconque, de 3, par exemple, il faut que ce nombre puisse faire partie de la progression géométrique fondamentale. Or, quoiqu'on ne voie pas que 3 puisse faire partie de la progression géométrique $\ddots 1 : 10 : 100$, etc. cependant on voit que si, entre 1 et 10, on inséroit un très-grand nombre de moyens géométriques (214); comme on monteroit alors de 1 à 10 par des degrés d'autant plus serrés que le nombre de ces moyens seroit plus grand, il arriveroit de deux choses l'une, ou que quelqu'un de ces moyens se trouveroit être précisément le nombre 3, ou que du moins, il s'en trouveroit deux consécutifs, entre lesquels le nombre 3 seroit compris, et dont chacun différeroit d'autant moins de 3, que le nombre des moyens insérés seroit plus grand.

Cela posé, si l'on inséroit pareillement entre 0 et 1 autant de moyens arithmétiques qu'on a inséré de moyens géométriques entre 1 et 10, chaque terme de la progression géométrique ayant pour logarithme, le terme correspondant de la progression arithmétique, on prendroit dans celle-ci, pour logarithme de 3, le nombre qui s'y trouveroit à pareille place que 3 se trouve dans la progression géométrique; ou si 3 n'étoit pas exactement quelqu'un des termes de celle-ci, on prendroit dans la progression arithmétique, le terme qui répondroit à celui de la progression géométrique, qui approche le plus du nombre 3.

C'est ainsi qu'on pourroit s'y prendre en effet, si l'on n'avoit pas de moyens plus expéditifs; quoi qu'il en soit, c'est à cela que revient le calcul des logarithmes.

221. Il faut donc se représenter qu'ayant inséré 10000000 moyens géométriques entre 1 et 10, pareil nombre entre 10 et 100, pareil nombre entre 100 et 1000, etc. on a inséré aussi pareil nombre de moyens arithmétiques entre 0 et 1, pareil nombre entre 1 et 2, pareil nombre entre 2 et 3; qu'ayant rangé tous les premiers sur une même ligne, et tous les seconds au-dessous, on a cherché dans la première le nombre le plus approchant de 2, et on a pris dans la suite inférieure, le nombre correspondant; qu'on a cherché de même dans la première, le nombre le plus approchant de 3, et qu'on a pris dans la suite inférieure, le nombre correspondant; qu'on en a fait de même, successivement, pour les nombres 4, 5, 6, etc. qu'enfin ayant transporté dans une même colonne, comme on le voit dans la Table ci-jointe, les nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc. on a écrit dans une colonne à côté, les termes de la progression arithmétique, qu'on a trouvés correspondans à ceux-là, ou du moins à ceux qui en approchoient le plus; alors on aura l'idée de la formation des logarithmes, et de leur disposition dans les Tables ordinaires.

Table des Logarithmes des Nombres naturels
depuis 1 jusqu'à 1080.

Nom- bres.	Loga- rithmes.	Nom- bres.	Loga- rithmes.	Nom- bres.	Loga- rithmes.	Nom- bres.	Loga- rithmes.
0	inf. nég.						
1	0.000000	51	1.707170	101	2.004121	151	2.178977
2	0.301030	52	1.716003	102	2.008600	152	2.181844
3	0.477121	53	1.724276	103	2.012837	153	2.184691
4	0.602060	54	1.732391	104	2.017031	154	2.187521
5	0.698970	55	1.740363	105	2.021189	155	2.190332
6	0.778151	56	1.748183	106	2.025306	156	2.193125
7	0.845098	57	1.755875	107	2.029384	157	2.195900
8	0.903090	58	1.763428	108	2.033424	158	2.198657
9	0.951423	59	1.770852	109	2.037426	159	2.201397
10	1.000000	60	1.778151	110	2.041393	160	2.204120
11	1.041393	61	1.785330	111	2.045323	161	2.206826
12	1.079181	62	1.792392	112	2.049218	162	2.209515
13	1.113943	63	1.799341	113	2.053078	163	2.212188
14	1.146128	64	1.806180	114	2.056905	164	2.214844
15	1.176691	65	1.812913	115	2.060698	165	2.217484
16	1.204120	66	1.819544	116	2.064458	166	2.220108
17	1.230449	67	1.826075	117	2.068186	167	2.222716
18	1.255727	68	1.832509	118	2.071882	168	2.225309
19	1.279954	69	1.838849	119	2.075547	169	2.227887
20	1.303100	70	1.845098	120	2.079181	170	2.230449
21	1.322219	71	1.851258	121	2.082785	171	2.232996
22	1.342221	72	1.857332	122	2.086360	172	2.235528
23	1.361728	73	1.863323	123	2.089905	173	2.238046
24	1.380211	74	1.869232	124	2.093422	174	2.240549
25	1.397940	75	1.875061	125	2.096910	175	2.243038
26	1.414973	76	1.880814	126	2.100371	176	2.245513
27	1.431364	77	1.886491	127	2.103804	177	2.247973
28	1.447158	78	1.892095	128	2.107210	178	2.250420
29	1.462398	79	1.897627	129	2.110590	179	2.252853
30	1.477121	80	1.903090	130	2.113943	180	2.255273
31	1.491362	81	1.908485	131	2.117271	181	2.257679
32	1.505150	82	1.913814	132	2.120574	182	2.260071
33	1.518514	83	1.919078	133	2.123852	183	2.262451
34	1.531479	84	1.924279	134	2.127105	184	2.264818
35	1.544068	85	1.929419	135	2.130334	185	2.267172
36	1.556303	86	1.934498	136	2.133539	186	2.269513
37	1.568202	87	1.939519	137	2.136721	187	2.271842
38	1.579784	88	1.944483	138	2.139879	188	2.274158
39	1.591065	89	1.949390	139	2.143015	189	2.276462
40	1.602060	90	1.954243	140	2.146128	190	2.278754
41	1.612784	91	1.959041	141	2.149219	191	2.281033
42	1.623249	92	1.963788	142	2.152288	192	2.283301
43	1.633468	93	1.968483	143	2.155336	193	2.285557
44	1.643453	94	1.973128	144	2.158362	194	2.287802
45	1.653213	95	1.977724	145	2.161368	195	2.290035
46	1.662758	96	1.982271	146	2.164353	196	2.292256
47	1.672098	97	1.986772	147	2.167317	197	2.294466
48	1.681241	98	1.991226	148	2.170262	198	2.296665
49	1.690196	99	1.995635	149	2.173186	199	2.298853
50	1.698970	100	2.000000	150	2.176091	200	2.301030

Nom.	Logarithm.	Nom.	Logarithm.	Nom.	Logarithm.	Nom.	Logarithm.
201	2.303196	256	2.408240	311	2.492760	366	2.563481
202	2.305351	257	2.409933	312	2.494155	367	2.564666
203	2.307496	258	2.411620	313	2.495544	368	2.565848
204	2.309630	259	2.413300	314	2.496930	369	2.567026
205	2.311754	260	2.414973	315	2.498311	370	2.568202
206	2.313867	261	2.416641	316	2.499687	371	2.569374
207	2.315970	262	2.418301	317	2.501059	372	2.570543
208	2.318063	263	2.419956	318	2.502427	373	2.571709
209	2.320146	264	2.421604	319	2.503791	374	2.572872
210	2.322219	265	2.423246	320	2.505150	375	2.574031
211	2.324282	266	2.424882	321	2.506505	376	2.575188
212	2.326336	267	2.426511	322	2.507856	377	2.576341
213	2.328380	268	2.428135	323	2.509203	378	2.577492
214	2.330414	269	2.429752	324	2.510545	379	2.578639
215	2.332438	270	2.431364	325	2.511883	380	2.579784
216	2.334454	271	2.432969	326	2.513218	381	2.580925
217	2.336460	272	2.434569	327	2.514548	382	2.582063
218	2.338456	273	2.436163	328	2.515874	383	2.583199
219	2.340444	274	2.437751	329	2.517196	384	2.584331
220	2.342423	275	2.439333	330	2.518514	385	2.585461
221	2.344392	276	2.440909	331	2.519828	386	2.586587
222	2.346353	277	2.442480	332	2.521138	387	2.587711
223	2.348305	278	2.444045	333	2.522444	388	2.588832
224	2.350248	279	2.445604	334	2.523746	389	2.589950
225	2.352183	280	2.447158	335	2.525045	390	2.591065
226	2.354108	281	2.448706	336	2.526339	391	2.592177
227	2.356026	282	2.450249	337	2.527630	392	2.593286
228	2.357935	283	2.451786	338	2.528917	393	2.594393
229	2.359835	284	2.453318	339	2.530200	394	2.595496
230	2.361728	285	2.454845	340	2.531479	395	2.596597
231	2.363612	286	2.456366	341	2.532754	396	2.597695
232	2.365488	287	2.457882	342	2.534026	397	2.598791
233	2.367356	288	2.459392	343	2.535294	398	2.599883
234	2.369216	289	2.460898	344	2.536558	399	2.600973
235	2.371068	290	2.462398	345	2.537819	400	2.602050
236	2.372912	291	2.463893	346	2.539076	401	2.603124
237	2.374748	292	2.465383	347	2.540329	402	2.604196
238	2.376577	293	2.466868	348	2.541579	403	2.605265
239	2.378398	294	2.468347	349	2.542825	404	2.606331
240	2.380211	295	2.469822	350	2.544068	405	2.607395
241	2.382017	296	2.471292	351	2.545307	406	2.608456
242	2.383815	297	2.472756	352	2.546543	407	2.609514
243	2.385606	298	2.474216	353	2.547775	408	2.610560
244	2.387390	299	2.475671	354	2.549003	409	2.611703
245	2.389166	300	2.477121	355	2.550228	410	2.612844
246	2.390935	301	2.478566	356	2.551450	411	2.613982
247	2.392697	302	2.480007	357	2.552668	412	2.615117
248	2.394452	303	2.481443	358	2.553883	413	2.616250
249	2.396199	304	2.482874	359	2.555094	414	2.617380
250	2.397940	305	2.484300	360	2.556303	415	2.618508
251	2.399674	306	2.485721	361	2.557507	416	2.619633
252	2.401400	307	2.487138	362	2.558709	417	2.620756
253	2.403121	308	2.488551	363	2.559907	418	2.621876
254	2.404834	309	2.489958	364	2.561101	419	2.622994
255	2.406540	310	2.491362	365	2.562293	420	2.624109

Nom.	Logarithm.	Nom.	Logarithm.	Nom.	Logarithm.	Nom.	Logarithm.
421	2.624282	476	2.677607	531	2.725094	586	2.767898
422	2.625312	477	2.678518	532	2.725912	587	2.768638
423	2.626340	478	2.679428	533	2.726727	588	2.769377
424	2.627366	479	2.680336	534	2.727541	589	2.770115
425	2.628389	480	2.681241	535	2.728354	590	2.770852
426	2.629410	481	2.682145	536	2.729165	591	2.771587
427	2.630438	482	2.683047	537	2.729974	592	2.772322
428	2.631444	483	2.683947	538	2.730782	593	2.773055
429	2.632457	484	2.684845	539	2.731589	594	2.773786
430	2.633468	485	2.685742	540	2.732394	595	2.774517
431	2.634477	486	2.686636	541	2.733197	596	2.775246
432	2.635484	487	2.687529	542	2.733999	597	2.775974
433	2.636488	488	2.688420	543	2.734800	598	2.776701
434	2.637490	489	2.689309	544	2.735599	599	2.777427
435	2.638489	490	2.690196	545	2.736397	600	2.778151
436	2.639486	491	2.691081	546	2.737193	601	2.778874
437	2.640481	492	2.691965	547	2.737987	602	2.779596
438	2.641474	493	2.692847	548	2.738781	603	2.780317
439	2.642465	494	2.693727	549	2.739572	604	2.781037
440	2.643453	495	2.694605	550	2.740363	605	2.781755
441	2.644439	496	2.695482	551	2.741152	606	2.782473
442	2.645422	497	2.696356	552	2.741939	607	2.783189
443	2.646404	498	2.697229	553	2.742725	608	2.783904
444	2.647383	499	2.698101	554	2.743510	609	2.784617
445	2.648360	500	2.698970	555	2.744293	610	2.785330
446	2.649335	501	2.699838	556	2.745075	611	2.786041
447	2.650307	502	2.700704	557	2.745855	612	2.786751
448	2.651278	503	2.701568	558	2.746634	613	2.787460
449	2.652246	504	2.702431	559	2.747412	614	2.788168
450	2.653212	505	2.703291	560	2.748188	615	2.788875
451	2.654176	506	2.704151	561	2.748963	616	2.789581
452	2.655138	507	2.705008	562	2.749736	617	2.790285
453	2.656098	508	2.705861	563	2.750508	618	2.790988
454	2.657056	509	2.706718	564	2.751279	619	2.791691
455	2.658011	510	2.707570	565	2.752048	620	2.792392
456	2.658965	511	2.708421	566	2.752816	621	2.793092
457	2.659916	512	2.709270	567	2.753581	622	2.793790
458	2.660865	513	2.710117	568	2.754348	623	2.794488
459	2.661813	514	2.710963	569	2.755112	624	2.795185
460	2.662758	515	2.711807	570	2.755875	625	2.795880
461	2.663701	516	2.712650	571	2.756636	626	2.796574
462	2.664642	517	2.713491	572	2.757396	627	2.797268
463	2.665581	518	2.714330	573	2.758155	628	2.797960
464	2.666518	519	2.715167	574	2.758912	629	2.798651
465	2.667453	520	2.716003	575	2.759668	630	2.799341
466	2.668386	521	2.716838	576	2.760422	631	2.800039
467	2.669317	522	2.717671	577	2.761175	632	2.800737
468	2.670246	523	2.718502	578	2.761928	633	2.801434
469	2.671173	524	2.719331	579	2.762679	634	2.802130
470	2.672098	525	2.720159	580	2.763428	635	2.802827
471	2.673021	526	2.720986	581	2.764176	636	2.803523
472	2.673942	527	2.721811	582	2.764923	637	2.804219
473	2.674861	528	2.722634	583	2.765669	638	2.804914
474	2.675778	529	2.723456	584	2.766413	639	2.805609
475	2.676694	530	2.724276	585	2.767156	640	2.806304

Num.	Logarithm.	Num.	Logarithm.	Num.	Logarithm.	Num.	Logarithm.
641	2.806858	696	2.842609	751	2.875640	806	2.906335
642	2.807135	697	2.843233	752	2.876218	807	2.906874
643	2.808211	698	2.843855	753	2.876795	808	2.907411
644	2.808886	699	2.844477	754	2.877371	809	2.907949
645	2.809560	700	2.845098	755	2.877947	810	2.908485
646	2.810232	701	2.845718	756	2.878522	811	2.909021
647	2.810904	702	2.846337	757	2.879096	812	2.909556
648	2.811575	703	2.846955	758	2.879669	813	2.910091
649	2.812245	704	2.847573	759	2.880242	814	2.910624
650	2.812913	705	2.848189	760	2.880814	815	2.911158
651	2.813581	706	2.848805	761	2.881385	816	2.911690
652	2.814248	707	2.849419	762	2.881955	817	2.912222
653	2.814913	708	2.850033	763	2.882525	818	2.912753
654	2.815578	709	2.850646	764	2.883093	819	2.913284
655	2.816241	710	2.851258	765	2.883661	820	2.913814
656	2.816904	711	2.851870	766	2.884229	821	2.914343
657	2.817565	712	2.852480	767	2.884795	822	2.914872
658	2.818226	713	2.853090	768	2.885361	823	2.915400
659	2.818885	714	2.853698	769	2.885926	824	2.915927
660	2.819544	715	2.854306	770	2.886491	825	2.916454
661	2.820201	716	2.854913	771	2.887054	826	2.916980
662	2.820858	717	2.855519	772	2.887617	827	2.917506
663	2.821514	718	2.856124	773	2.888179	828	2.918030
664	2.822168	719	2.856729	774	2.888741	829	2.918555
665	2.822822	720	2.857332	775	2.889302	830	2.919078
666	2.823474	721	2.857935	776	2.889862	831	2.919601
667	2.824126	722	2.858537	777	2.890421	832	2.920123
668	2.824776	723	2.859138	778	2.890980	833	2.920645
669	2.825426	724	2.859739	779	2.891537	834	2.921166
670	2.826075	725	2.860338	780	2.892095	835	2.921686
671	2.826723	726	2.860937	781	2.892651	836	2.922206
672	2.827369	727	2.861534	782	2.893207	837	2.922725
673	2.828015	728	2.862131	783	2.893762	838	2.923244
674	2.828660	729	2.862728	784	2.894316	839	2.923762
675	2.829304	730	2.863323	785	2.894870	840	2.924279
676	2.829947	731	2.863917	786	2.895423	841	2.924796
677	2.830589	732	2.864511	787	2.895975	842	2.925312
678	2.831230	733	2.865104	788	2.896526	843	2.925828
679	2.831870	734	2.865696	789	2.897077	844	2.926342
680	2.832509	735	2.866287	790	2.897627	845	2.926857
681	2.833147	736	2.866878	791	2.898176	846	2.927370
682	2.833784	737	2.867467	792	2.898725	847	2.927883
683	2.834421	738	2.868056	793	2.899273	848	2.928396
684	2.835056	739	2.868644	794	2.899821	849	2.928908
685	2.835691	740	2.869232	795	2.900367	850	2.929419
686	2.836324	741	2.869818	796	2.900913	851	2.929930
687	2.836957	742	2.870404	797	2.901458	852	2.930440
688	2.837588	743	2.870989	798	2.902003	853	2.930949
689	2.838219	744	2.871573	799	2.902547	854	2.931458
690	2.838849	745	2.872156	800	2.903090	855	2.931966
691	2.839478	746	2.872739	801	2.903633	856	2.932474
692	2.840106	747	2.873321	802	2.904174	857	2.932981
693	2.840733	748	2.873902	803	2.904716	858	2.933487
694	2.841359	749	2.874482	804	2.905256	859	2.933993
695	2.841985	750	2.875061	805	2.905796	860	2.934498

Nom.	Logarithm.	Nom.	Logarithm.	Nom.	Logarithm.	Nom.	Logarithm.
861	2.935003	916	2.961895	971	2.987219	1026	3.011147
862	2.935507	917	2.962369	972	2.987666	27	3.011570
863	2.936011	918	2.962843	973	2.988113	28	3.011993
864	2.936514	919	2.963316	974	2.988559	29	3.012415
865	2.937016	920	2.963788	975	2.989005	30	3.012837
866	2.937518	921	2.964260	976	2.989450	1031	3.013259
867	2.938019	922	2.964731	977	2.989895	32	3.013680
868	2.938520	923	2.965202	978	2.990339	33	3.014100
869	2.939020	924	2.965672	979	2.990783	34	3.014521
870	2.939519	925	2.966142	980	2.991226	35	3.014940
871	2.940018	926	2.966611	981	2.991669	1036	3.015360
872	2.940516	927	2.967080	982	2.992111	37	3.015779
873	2.941014	928	2.967548	983	2.992554	38	3.016197
874	2.941511	929	2.968016	984	2.992995	39	3.016616
875	2.942008	930	2.968483	985	2.993436	40	3.017033
876	2.942504	931	2.968950	986	2.993877	1041	3.017451
877	2.943000	932	2.969416	987	2.994317	42	3.017868
878	2.943495	933	2.969882	988	2.994757	43	3.018284
879	2.943989	934	2.970347	989	2.995196	44	3.018700
880	2.944483	935	2.970812	990	2.995635	45	3.019116
881	2.944976	936	2.971276	991	2.996074	1046	3.019532
882	2.945469	937	2.971740	992	2.996512	47	3.019947
883	2.945961	938	2.972203	993	2.996949	48	3.020361
884	2.946452	939	2.972666	994	2.997386	49	3.020775
885	2.946943	940	2.973128	995	2.997823	50	3.021189
886	2.947434	941	2.973590	996	2.998259	1051	3.021603
887	2.947924	942	2.974051	997	2.998695	52	3.022016
888	2.948413	943	2.974512	998	2.999131	53	3.022428
889	2.948902	944	2.974972	999	2.999565	54	3.022841
890	2.949390	945	2.975432	1000	3.000000	55	3.023252
891	2.949878	946	2.975891	1001	3.000434	1056	3.023664
892	2.950365	947	2.976350	2	3.000868	57	3.024075
893	2.950851	948	2.976808	3	3.001301	58	3.024486
894	2.951338	949	2.977266	4	3.001734	59	3.024896
895	2.951823	950	2.977724	5	3.002166	60	3.025306
896	2.952308	951	2.978181	1006	3.002598	1061	3.025715
897	2.952792	952	2.978637	7	3.003029	62	3.026125
898	2.953276	953	2.979093	8	3.003461	63	3.026533
899	2.953760	954	2.979548	9	3.003891	64	3.026942
900	2.954243	955	2.980003	10	3.004321	65	3.027350
901	2.954725	956	2.980458	1011	3.004751	1066	3.027757
902	2.955207	957	2.980912	12	3.005181	67	3.028164
903	2.955688	958	2.981366	13	3.005609	68	3.028571
904	2.956168	959	2.981819	14	3.006038	69	3.028978
905	2.956649	960	2.982271	15	3.006466	70	3.029384
906	2.957128	961	2.982723	1016	3.006894	1071	3.029789
907	2.957607	962	2.983175	17	3.007321	72	3.030195
908	2.958086	963	2.983626	18	3.007748	73	3.030600
909	2.958564	964	2.984077	19	3.008174	74	3.031004
910	2.959041	965	2.984527	20	3.008600	75	3.031408
911	2.959518	966	2.984977	1021	3.009026	1076	3.031812
912	2.959995	967	2.985426	22	3.009451	77	3.032216
913	2.960471	968	2.985875	23	3.009876	78	3.032619
914	2.960946	969	2.986324	24	3.010300	79	3.033021
915	2.961421	970	2.986772	25	3.010724	1080	3.033424

Les Logarithmes renfermés dans cette Table, n'ont que six chiffres après la virgule ou le point; ils en ont sept dans les Tables ordinaires, mais cette différence ne nuit en rien à l'usage que nous en ferons ci-après.

222. Remarquons au sujet de cette Table, que le premier chiffre de la gauche de chaque logarithme, s'appelle la *Caractéristique*, parce que c'est par ce chiffre qu'on peut juger dans quelle décade est compris le nombre auquel appartient ce logarithme; par exemple, si un nombre a pour caractéristique 3, je sais qu'il appartient à des mille, parce que le logarithme de 1000 est 3, et que celui de 10000 étant 4, tout nombre depuis 1000 jusqu'à 10000 ne peut avoir pour logarithme, que 3 et une fraction; il a donc 3 pour caractéristique, et les autres chiffres expriment cette fraction réduite en décimales.

Propriétés des Logarithmes.

223. Comme il ne s'agit ici que des Logarithmes tels qu'ils sont dans les Tables ordinaires, les propriétés que nous allons exposer, ne regardent que les progressions géométriques qui ont l'unité pour premier terme, et les progressions arithmétiques qui ont zéro pour premier terme.

Comparons donc encore, terme à terme, une progression géométrique quelconque, mais dont le premier terme soit l'unité, avec une progression arithmétique aussi quelconque, mais dont le premier terme soit zéro; par exemple, les deux progressions suivantes.

$\frac{\div}{\div} 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561, \text{etc.}$
 $\frac{\div}{\div} 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 , \text{etc.}$

Il suit de la nature et de la correspondance par-

faite de ces deux progressions, qu'autant de fois la raison de la première est facteur dans l'un quelconque des termes de cette progression, autant de fois la raison de la seconde est contenue dans le terme correspondant de cette seconde; par exemple, dans le terme 2187, la raison 3 est sept fois facteur, et dans le terme 28, la raison 4 est contenue sept fois.

En effet, selon ce qui a été dit (206 et 212) la raison est facteur dans un terme quelconque de la première, autant de fois qu'il y a de termes avant celui-là; et dans la seconde, un terme quelconque est composé d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui. Or il y a le même nombre de termes de part et d'autre.

Concluons de là, qu'un terme quelconque de la progression géométrique, aura toujours pour correspondant dans la progression arithmétique, un terme qui contiendra la raison de celle-ci, autant de fois que la raison de l'autre est facteur dans le premier.

224. Donc, *si l'on multiplie, l'un par l'autre, deux termes de la progression géométrique, et si l'on ajoute en même temps les deux termes correspondans de la progression arithmétique, le produit et la somme seront deux termes qui se correspondront dans ces progressions.*

Car il est évident que la raison sera facteur dans le produit, autant qu'elle l'est, tant dans l'un des termes multipliés, que dans l'autre; et que la raison de la progression arithmétique sera contenue dans la somme, autant qu'elle l'est, tant dans l'un des termes ajoutés, que dans l'autre.

225. Donc on peut, par l'addition seule de deux termes de la progression arithmétique, connoître le

produit des deux termes correspondans de la progression géométrique , en supposant ces deux progressions prolongées suffisamment.

Par exemple , en ajoutant les deux termes 8 et 24 qui répondent à 9 et 729, j'ai 32 qui répond à 6561; d'où je conclus que le produit de 729 par 9, est 6561, ce qui est en effet.

226. Donc , puisque les nombres naturels qui composent la première colonne de la Table ci-dessus , ont été tirées d'une progression géométrique qui commence par l'unité; et puisque leurs logarithmes sont les termes correspondans d'une progression arithmétique qui commence par zéro; il faut en conclure, *qu'en ajoutant les logarithmes de deux nombres, on a le logarithme de leur produit.*

De-là il est aisé de conclure les usages suivans.

Usages des Logarithmes.

227. *Pour faire une multiplication par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du multiplicande , au logarithme du multiplicateur ; la somme sera le logarithme du produit ; c'est pourquoi cherchant cette somme parmi les logarithmes des Tables, on trouvera le produit à côté ;* par exemple, si l'on propose de multiplier 14 par 13.

Je trouve dans la petite Table ci-dessus, que le logarithme de 14 est. 1,146128
et que celui de 13 est. 1,113943

La somme 2,260071

répond dans la même Table au nombre 182 qui est en effet le produit.

228. Pour quarrer un nombre, il suffit donc de doubler son logarithme ; puisqu'il faudroit ajouter ce logarithme à lui-même, pour multiplier le nombre par lui-même.

229. Par une raison semblable, pour cuber un nombre, il faudra tripler son logarithme, et en général, pour élever un nombre à une puissance quelconque, il faudra prendre son logarithme autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque cette puissance ; c'est-à-dire, multiplier son logarithme, par le nombre qui marque cette puissance ; par exemple, pour élever un nombre à la septième puissance, il faudra multiplier par 7, le logarithme de ce nombre.

230. Donc réciproquement, pour extraire la racine quarrée, cubique, quatrième, etc. d'un nombre proposé, il faudra diviser le logarithme de ce nombre, par 2, 3, 4, etc. ; c'est-à-dire, en général, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.

Par exemple, si l'on demande la racine quarrée de 144, ayant trouvé, dans la Table, que le logarithme de ce nombre est 2,158362, j'en prends la moitié 1,079181 ; je cherche parmi les logarithmes, à quel endroit se trouve 1,079181 ; il répond à 12, qui est par conséquent la racine quarrée de 144.

Si l'on demande la racine septième de 128, je cherche, dans la Table, son logarithme que je trouve être 2,107210 ; j'en prends le septième, ou je le divise par 7, et je cherche à quoi répond dans la Table, le quotient 0,301030 : il répond à 2 qui est en effet la racine septième de 128.

231. Pour trouver le quotient de la division d'un nombre, par un autre, il faut retrancher

le logarithme du diviseur , du logarithme du dividende , chercher dans la Table à quel nombre répond le logarithme restant , ce nombre sera le quotient.

Par exemple , si l'on veut diviser 187 par 17 , je cherche dans la Table , les logarithmes de ces deux nombres , et je trouve.

le logarithme de 187. 2,271842

celui de 17. 1,230449

La différence. 1,041393

répond , dans la Table , à 11 qui est en effet le quotient.

Si la division ne pouvoit pas être faite exactement , le logarithme restant ne se trouveroit qu'en partie dans la Table ; mais nous allons enseigner , ci-après , ce qu'il faut faire dans ce cas.

La raison de cette règle est fondée sur ce que le quotient multiplié par le diviseur , devant reproduire le dividende (74) , le logarithme du quotient , ajouté (227) au logarithme du diviseur , doit donc composer le logarithme du dividende ; et par conséquent le logarithme du quotient vaut le logarithme du dividende , moins celui du diviseur.

232. D'après ce que nous venons de dire , il est très-facile de voir que pour faire une règle de Trois par logarithmes ; il faut ajouter le logarithme du second terme , au logarithme du troisième , et de la somme , retrancher le logarithme du premier.

233. Remarquons que lorsqu'on cherche dans les Tables ordinaires , un logarithme résultant de quelques opérations sur d'autres logarithmes ; si l'on ne trouve de différence entre le dernier chiffre de ce logarithme , et celui de la Table , que sur le dernier chif-

fre seulement, on doit regarder cette différence comme nulle ; parce que les logarithmes de tous les nombres intermédiaires à la progression décuple, ne sont qu'approchés à environ une demi-unité décimale du septième ordre près.

Des Nombres dont les Logarithmes ne se trouvent point dans les Tables.

234. Les fractions et les nombres entiers joints à des fractions n'ont pas leurs logarithmes dans les Tables ; il en est de même des racines quarrées, cubiques, etc. des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites du degré de ces racines.

Si l'on demande le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, il faut d'abord réduire le tout en fraction (86), et ensuite retrancher le logarithme du dénominateur, du logarithme du nouveau numérateur. Par exemple, pour avoir le logarithme de $8\frac{3}{11}$, je cherche celui de $\frac{21}{11}$, que je trouve en retranchant 1,041393 logarithme de 11, de 1,959041 logarithme de 91, le reste 0,917648 est le logarithme de $8\frac{3}{11}$, puisque $8\frac{3}{11}$ ou $\frac{91}{11}$, n'est autre chose que 91 divisé par 11 (96).

235. La même raison prouve que, pour avoir le logarithme d'une fraction, il faut retrancher pareillement le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur ; mais comme cette soustraction ne peut se faire, puisque le logarithme du dénominateur sera plus grand que celui du numérateur, on retranchera au contraire le logarithme du numérateur de celui du dénominateur ; le reste, qui marquera ce dont il s'en faut que la soustraction n'ait pu se faire, sera le logarithme de la fraction, en appliquant à ce

reste un signe qui marque que la soustraction n'a pas été entièrement faite. Ce signe est celui-ci —, qu'on énonce *moins*. Ainsi le logarithme de la fraction $\frac{11}{91}$ seroit — 0,917648 (*).

236. Ce signe est destiné à rappeler dans le calcul, que les logarithmes des fractions doivent être employés, selon une règle toute opposée à celle que nous avons prescrite pour les logarithmes des nombres entiers, ou des nombres entiers joints à des fractions, c'est-à-dire, que si l'on a à multiplier par une fraction, il faut retrancher le logarithme de cette fraction; si au contraire l'on a à diviser par une fraction, il faut ajouter son logarithme.

La raison en est, pour la multiplication, que multiplier par une fraction, revient à multiplier par le numérateur, et à diviser ensuite par le dénominateur; donc, lorsqu'on opère par logarithmes, on doit ajouter le logarithme du numérateur, et retrancher ensuite celui du dénominateur, ou, ce qui revient au même, on doit seulement retrancher l'excès du logarithme du dénominateur sur le logarithme du numérateur: or, cet excès est précisément le logarithme de la fraction. A l'égard de la division, la raison en est aussi facile à saisir; en effet, diviser par $\frac{3}{4}$, par exemple, revient (109) à multiplier par $\frac{4}{3}$; donc, en opérant par logarithmes, il faut ajouter le logarithme de $\frac{4}{3}$; c'est-à-dire (234), la différence du logarithme de 4, au logarithme de 3,

(*) Les nombres précédés du signe — se nomment nombres *négatifs*. Nous les ferons connoître plus particulièrement dans l'Algèbre; en attendant, nous prévenons que c'est en prendre une idée fausse que de les regarder comme des nombres au-dessous de zéro. Il n'y a rien au-dessous de zéro.

ou du logarithme du dénominateur de la fraction proposée, au logarithme de son numérateur.

237. Il peut arriver, et il arrive assez souvent, qu'en convertissant en une seule fraction, l'entier et la fraction dont on cherche le logarithme, il peut arriver, dis-je, que le numérateur soit un nombre qui passe les limites des Tables; par exemple, si l'on demande le logarithme de $53 \frac{811}{5704}$, ce nombre réduit en fraction, revient à $\frac{303133}{5704}$, dont le numérateur passe les limites des Tables les plus étendues.

Il est donc à propos de savoir comment on peut trouver le logarithme d'un nombre qui passe ces limites.

La méthode que nous allons donner, n'est pas rigoureuse; mais elle est plus que suffisante pour les usages ordinaires. Avant que de l'exposer, observons :

238. 1°. Qu'en ajoutant 1, 2, 3, etc. unités, à la caractéristique du logarithme d'un nombre, on multiplie ce nombre par 10, 100, 1000, etc. puis-que c'est ajouter le logarithme de 10, ou de 100, ou de 1000, etc. (219 et 227).

2°. Au contraire, si l'on retranche 1, 2, 3, etc. unités, de la caractéristique d'un logarithme, c'est diviser le nombre correspondant par 10, 100, 1000, etc.

239. Cela posé, qu'il soit question de trouver le logarithme de 357859, par exemple.

Je séparerai par une virgule, sur la droite de ce nombre, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le reste puisse se trouver dans les Tables (*). Ici, par exemple, j'en séparerai deux, ce qui me donnera 3578,59, qui, (28) est 100 fois plus petit que le nombre proposé 357859.

(*) Nous supposons ici que l'on ait entre les mains des Tables ordinaires de logarithmes. On en trouvera dans le *Traité de Navigation*, qui fait le sixième volume de Bezout.

Je cherche dans les Tables le logarithme de 3578, que je trouve être 3,5536403; je prends en même temps à côté de ce logarithme, la différence 1214, entre ce même logarithme et celui de 3579, après quoi je fais cette règle de Trois. Si pour 1 unité de différence entre les deux nombres 3579 et 3578,

On a 1214 de différence entre leurs logarithmes;

Combien, pour 0,59 différence entre les deux nombres 3578,59 et 3578,

Aura-t-on de différence entre leurs logarithmes? c'est-à-dire, que je cherche le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers sont.

$$1 : 1214 :: 0,59 :$$

Ce quatrième terme est 716,26, ou simplement 716, en négligeant les décimales; j'ajoute donc 716 au logarithme 3,5536403 de 3578, et j'ai 3,5537119 pour logarithme de 3578,59; il ne s'agit plus, pour avoir celui de 357859, que d'ajouter deux unités à la caractéristique du logarithme qu'on vient de trouver; et on aura 5,5537119 pour le logarithme cherché, puisque 357859 est 100 fois plus grand que 3578,59.

Si les chiffres qu'on doit séparer sur la droite, étoient tous des zéros; après avoir trouvé, dans les Tables, le logarithme de la partie qui reste à gauche, il n'y auroit autre chose à faire qu'à ajouter autant d'unité à la caractéristique, qu'on auroit séparé de zéros.

240. S'il s'agit du logarithme d'un nombre accompagné de décimales, on cherchera ce logarithme, comme si le nombre proposé n'avoit point de virgule; et après l'avoir trouvé, soit immédiatement

dans les Tables, soit par la méthode qu'on vient de donner (239), on ôtera autant d'unités à la caractéristique, qu'il y a de décimales dans le nombre proposé, parce qu'ayant considéré le nombre, comme s'il n'avoit point de virgule; c'est-à-dire, comme 10, ou 100, ou 1000, etc. fois plus grand qu'il n'est, on doit le rappeler à sa valeur par une diminution convenable sur la caractéristique de son logarithme (238).

241. Enfin, s'il n'y a que des décimales dans le nombre proposé; on cherchera encore ce nombre, dans les Tables, comme s'il n'avoit pas de virgule; et ayant pris le logarithme correspondant, on le retranchera d'autant d'unités qu'il y a de décimales dans ce même nombre, et on fera précéder le reste du signe —; par exemple, pour avoir le logarithme de 0,03, je cherche celui de 3 qui est 0,477121; je le retranche de deux unités, et appliquant au reste le signe —, j'ai — 1,522879 pour logarithme de 0,03. En effet, 0,03 n'est autre chose que $\frac{3}{100}$; or pour avoir le logarithme de $\frac{3}{100}$, il faut (235) retrancher le logarithme de 3, de celui de 100, et appliquer au reste, le signe —.

Des Logarithmes dont les Nombres ne se trouvent point dans les Tables.

242. Cette recherche n'est pas moins nécessaire que la précédente. Par exemple, pour la division, il arrive rarement que le quotient soit un nombre entier; or si l'on fait l'opération par logarithmes, on ne trouvera dans les Tables, le logarithme restant, que quand le quotient sera un nombre entier; il y a une infinité d'autres cas de la même espèce.

243. Proposons-nous d'abord de trouver à quel

nombre répond un logarithme proposé , soit qu'il excède les limites des Tables , soit qu'il tombe entre les logarithmes des Tables.

On retranchera de la caractéristique , autant d'unités qu'il sera nécessaire , pour qu'on puisse trouver , dans les Tables , les premiers chiffres du logarithme proposé , ainsi préparé. Si tous les chiffres se trouvent alors dans les Tables , le nombre cherché sera le nombre même qu'on trouve à côté dans les Tables , mais en mettant à sa suite autant de zéros qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique (238).

Par exemple , le logarithme 7,2273467 se trouve (après avoir ôté trois unités à la caractéristique) , répondre au nombre 16879 ; j'en conclus que le logarithme proposé 7,2273467 , répond à 16879000.

Si l'on ne trouve , dans les Tables , que les premiers chiffres du logarithme , on se conduira comme dans l'exemple qui suit.

Pour trouver à quel nombre appartient le logarithme , 5,2432768 , j'ôte deux unités à sa caractéristique ; le logarithme 3,2432768 que j'ai alors , tombe entre les logarithmes de 1750 et 1751 ; le nombre auquel il répond est donc 1750 et une fraction.

Afin d'avoir cette fraction , je retranche de mon logarithme 3,2432768 , le logarithme de 1750 , et j'ai pour différence 2388.

Je prends aussi dans les Tables , la différence 2481 entre les logarithmes de 1751 et 1750 , après quoi je fais cette règle de Trois.

Si 2481 de différence entre les logarithmes de 1751 et 1750 ,

Répondent à 1 unité de différence entre ces nombres,

A quelle différence de nombres doit répondre la différence 2388 entre mon logarithme et celui de 1750 ?

Je trouve pour quatrième terme $\frac{2388}{2481}$; ainsi le logarithme 3,243 2768 appartient au nombre 1750 $\frac{2388}{2481}$; à très-peu de chose près; par conséquent, le logarithme proposé qui appartient à un nombre 100 fois plus grand (238), a pour nombre correspondant 175000 $\frac{238800}{2481}$, c'est-à-dire, 175096 $\frac{674}{2481}$, ou en réduisant en décimales, il a pour nombre correspondant 175096,25.

244. Si le logarithme proposé tomboit entre ceux des Tables, il n'y auroit aucune unité à retrancher à la caractéristique, et par conséquent point de zéros à ajouter à la fin de l'opération, qu'on feroit d'ailleurs de la même manière.

245. Mais comme la proportion que nous employons dans cette méthode, n'est pas rigoureusement exacte(*), et qu'elle n'approche de la vérité, qu'autant que les nombres cherchés sont grands; si le logarithme proposé tomboit au-dessous de celui de 1500, il faudroit, pour plus d'exactitude, ajouter à sa caractéristique autant d'unités qu'on pourroit le faire sans passer les bornes des Tables; et ayant trouvé le nombre qui approche le plus d'y répondre dans les Tables, on en sépareroit sur la droite, autant de chiffres par une virgule, qu'on auroit ajouté d'unités à la caractéristique, ce qui suffira le plus souvent; mais si l'on veut avoir plus de décimales, on fera la proportion comme ci-dessus (243), et réduisant le quatrième terme en décimales, on mettra celle-ci à la suite de celles qu'on a déjà trouvées.

Par exemple, si l'on demande à quel nombre appar-

(*) Cette proportion suppose que les différences des logarithmes sont proportionnelles aux différences des nombres, ce qui n'est jamais exactement vrai, mais approche assez, quand les nombres sont un peu grands, et cela suffit pour les usages ordinaires.

tient le logarithme 0,5432725; comme ce logarithme tombe entre ceux de 3 et de 4, et que le nombre auquel il appartient est par conséquent beaucoup au-dessous de 1500, je cherche ce logarithme avec trois unités de plus à sa caractéristique, c'est-à-dire, que je cherche 3,5432725; je trouve qu'il tombe entre les logarithmes de 3493 et 3494, d'où je conclus que le nombre cherché est 3,493, à moins d'un millièbre près. Mais si cette approximation ne suffit pas, je prendrai la différence entre mon logarithme et celui de 3493, c'est-à-dire, 739; je prendrai pareillement la différence 1243, entre les logarithmes de 3494 et 3493, et je chercherai, en raisonnant comme ci-dessus (243), le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci. . . .

$$1243 : 1 :: 739 :$$

Ce quatrième terme, évalué en décimales, est 0,594; donc le nombre cherché est 3,498594.

Au reste, cette seconde approximation est bornée, parce que les logarithmes des Tables n'étant exacts qu'à environ une demi-unité décimale du septième ordre près, les différences sont affectées de ce léger défaut; mais on peut toujours pousser l'approximation avec confiance, jusqu'à trois décimales: au surplus il est rare qu'on ait besoin d'aller jusques-là. La remarque que nous faisons, doit diriger aussi dans l'usage que nous avons fait ci-dessus (239 et 243) de la même proportion.

246. Si l'on veut avoir la fraction à laquelle répond un logarithme négatif proposé, on retranchera ce logarithme de 1, ou 2, ou 3, ou 4, etc. unités, selon l'étendue des Tables; et après avoir trouvé le nombre qui répond au logarithme restant, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y aura eu d'unités dans le nombre dont on aura retranché le logarithme.

Par

Par exemple, si l'on demande à quelle fraction appartient — 1,532732, je retranche 1,532732 de 4, et il me reste 2,467268, qui dans les Tables se trouve entre les logarithmes de 293 et de 294; j'en conclus que la fraction cherchée est entre 0,0293 et 0,0294; c'est-à-dire, qu'elle est 0,0293, à moins d'un dix-millième près. En effet, retrancher de 4, le logarithme proposé 1,532732; c'est (236) multiplier 10000 par la fraction à laquelle appartient ce même logarithme proposé, ou (ce qui est la même chose) c'est multiplier cette fraction par 10000; donc le nombre qu'on trouve est 10000 fois trop grand; il faut donc le compter pour des dix-millièmes.

Tout ce que nous venons de dire, trouvera abondamment des applications par la suite. Bornons-nous, quant à présent, à donner une idée, par quelques exemples, des avantages que les logarithmes procurent pour la facilité et la promptitude des calculs.

E X E M P L E I.

On demande le quotient de 17954 divisé par 12836. approché jusqu'à moins d'un dix-millième près.

Logarithme de 17954. 4,254161

Logarithme de 12836. 4,108430

Reste. 0,145731

Ce reste, cherché dans les Tables, avec une caractéristique plus forte de quatre unités, répond à 13987; donc (238) le quotient cherché est 1,3987.

E X E M P L E II.

On demande la racine cubique de 53, à moins d'un millième près.

Le logarithme de 53 est. 1,724276

Son tiers (230) est. 0,574759

Arithmétique. O

Ce dernier, cherché dans les Tables avec une caractéristique plus forte de trois unités, répond à 3756; donc (238) la racine cherchée est 3,756.

Pour juger de l'avantage des logarithmes, on n'a qu'à chercher cette racine par la méthode donnée (156). Il ne faut pas, pour cela, regarder cette dernière comme inutile; car elle s'étend à une infinité de nombres auxquels les logarithmes n'atteindroient pas, par rapport aux bornes des Tables.

E X E M P L E I I I.

Veut-on avoir, à moins d'un centième près, la racine cinquième du cube de 5736?

On triplera le logarithme 3,758609, de 5736; et on aura 11,275827, pour logarithme du cube de 5736. Prenant le cinquième de ce dernier logarithme, on a 2,255165, pour logarithme de la racine cinquième du cube de 5736. Ce logarithme, cherché dans les Tables, avec une caractéristique plus forte de deux unités, pour avoir des centièmes, répond entre les nombres 17995 et 17996; la racine cherchée est donc 179,95 à moins d'un centième près.

E X E M P L E I V.

Qu'il soit question de trouver quatre moyens proportionnels géométriques, entre $2\frac{2}{3}$, et $5\frac{3}{4}$?

Il faudroit (215) pour avoir la raison qui doit régner dans la progression, diviser $5\frac{3}{4}$, par $2\frac{2}{3}$, et extraire la racine cinquième du quotient.

Par logarithmes, cette opération est très-simple. Je détermine par les Tables, le logarithme de $5\frac{3}{4}$, ou $\frac{23}{4}$; c'est 0,759668. Je détermine pareillement le logarithme de $2\frac{2}{3}$; c'est 0,425969. Je retranche donc (231) ce logarithme, du premier; et j'ai

0,333699 ; prenant donc (230) le cinquième de ce dernier , j'ai 0,066740 pour le logarithme de la raison cherchée. Ce logarithme , cherché dans les Tables , avec une caractéristique plus forte de 4 unités , pour avoir 4 décimales , répond à 11661 à moins d'une unité près ; donc la raison est 1,1661 , à moins d'un dix-millième près. Il ne s'agit donc plus , pour avoir les moyens proportionnels , que de multiplier le premier terme $2\frac{2}{3}$, par 1,1661 ; puis le produit , par 1,1661 et ainsi de suite.

Mais ces opérations peuvent être faites beaucoup plus promptement , à l'aide des logarithmes , en ajoutant consécutivement au logarithme 0,425969 du premier terme $2\frac{2}{3}$, le logarithme 0,066740 de la raison , son double , son triple , et son quadruple ; en sorte qu'on aura 0,492709 ; 0,559449 ; 0,626189 ; 0,692929 pour les logarithmes des quatre moyens proportionnels demandés. Et si l'on cherche ces logarithmes dans les Tables , avec trois unités de plus à la caractéristique , on trouve que ces quatre moyens proportionnels sont 3,109 ; 3,626 ; 4,228 ; 4,931.

R E M A R Q U E.

Lorsque dans une opération où l'on fait usage des logarithmes , il s'en trouve quelques-uns que l'on doit retrancher , on peut simplifier l'opération par l'observation suivante.

Lorsqu'on a à retrancher un nombre quelconque , d'un autre qui est l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le premier , l'opération se réduit à écrire la différence entre 9 et chacun des chiffres du nombre proposé , à l'exception du dernier , pour lequel on écrit la différence entre 10 et ce chiffre. Par exemple , si j'ai 526927 à retrancher de 1000000 ;

O 2

je retranche successivement les chiffres 5, 2, 6, 9, 2, de 9 ; et le dernier chiffre, je le retranche de 10, et j'ai 473073 pour reste.

Ce reste, est ce qu'on appelle le *Complément arithmétique* du nombre proposé.

La soustraction faite de cette manière, étant trop simple, pour pouvoir être comptée pour une opération, il s'ensuit que lorsqu'on aura à former un résultat, de l'addition et de la soustraction de plusieurs nombres, on pourra toujours réduire l'opération, à l'addition. Par exemple, s'il s'agit d'ajouter les deux nombres 672736, 426452, et de retrancher de leur somme, les deux nombres 432752, 18675 ; ce qui exige deux additions et une soustraction ; je substitue à cette opération, la suivante. 672736

	426452
Complément arithmétique de 432752 . .	567248
Complément arithmétique de 18675 . .	981325

Somme. 2647761

c'est-à-dire, que j'ajoute ensemble les deux premiers nombres proposés, et les complémens arithmétiques des deux derniers ; la somme est 2647761. Il faut en supprimer le premier chiffre 2 ; et les chiffres restans 647761 sont le résultat cherché.

La raison de cette opération est facile à sentir, en remarquant que si au lieu de retrancher 432752, comme on le proposoit, j'ajoute son complément arithmétique, c'est-à-dire, 1000000 moins 432752 ; je fais en même temps la soustraction proposée, et une augmentation de 1000000, c'est-à-dire, d'une dizaine au premier chiffre du résultat ; donc pour chaque complément arithmétique que j'aurai introduit, j'aurai une dizaine de trop à l'égard du premier chiffre du résultat.

L'application de ceci, aux logarithmes, est évidente.

Qu'il soit question, par exemple, de diviser 3760, par 79. Il faudroit retrancher le logarithme de 79, de celui de 3760. Au lieu de cette opération, j'écris

log. 3760.	3,575188
compl. arith. du log de 79.	8,102373
	11,677561

Somme. 11,677561

Ainsi, 1,677561 est le logarithme du quotient, et répond à 47,59 à moins d'un centième près.

Supposons, pour second exemple, qu'il soit question de multiplier $\frac{675}{527}$, par $\frac{952}{377}$; il faudroit (106) multiplier 675, par 952; et 527, par 377, puis diviser le premier produit, par le second. Par logarithmes, on opérera ainsi.

log. 675.	2,829304
-------------------	----------

log. 952.	2,978637
-------------------	----------

compl. arith. du log. de 527.	7,278189
---------------------------------------	----------

compl. arith. du log. de 377.	7,423659
	10,509789

Somme. 10,509789

le logarithme du produit est donc 0,509789, qui cherché avec trois unités de plus à la caractéristique, répond à 3,234.

On peut faire usage du complément arithmétique, pour mettre les logarithmes des fractions sous la même forme que ceux des nombres entiers, et les employer de même, dans le calcul; par-là on évitera la distinction des logarithmes négatifs, et des logarithmes positifs. Il suffira de se souvenir que la caractéristique du logarithme des fractions proprement dites, est trop forte de 10 unités.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{4}$ qui n'est (96) autre chose que 3 divisé par 4; au lieu de retrancher le logarithme de 4, de celui de 3;

c'est-à-dire , de retrancher le logarithme de 3 de celui de 4 et de donner au reste le signe—(236) ; au logarithme de 3 , j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 4.

log. 3. 0,477121

compl. arith. du log. 4. 9,397940

Somme. 9,875061

Cette somme est le logarithme de $\frac{3}{4}$, dont la caractéristique est trop forte de 10 unités. Or il n'est pas nécessaire de faire actuellement la diminution ; on peut la rejeter à la fin des opérations dans lesquelles on emploiera ce logarithme.

La même règle s'applique aux fractions décimales : ainsi pour avoir le logarithme de 0,575, qui n'est autre chose que $\frac{575}{1000}$; au logarithme de 575, j'ajouterois le complément arith. du logarithme de 1000.

En employant ainsi, les complémens arithmétiques, au lieu des logarithmes négatifs des fractions, il n'en est pas plus difficile de trouver dans les Tables, les valeurs, en décimales, de ces mêmes fractions. Dès que je saurai qu'un logarithme proposé, est ou renferme un ou plusieurs complémens arithmétiques ; je sais que sa caractéristique est trop forte, d'autant de dizaines qu'il y entre de complémens arithmétiques, ainsi si elle passe ce nombre de dizaines il sera facile de la diminuer, et de trouver le nombre auquel appartient ce logarithme, et qui sera un nombre entier, ou un nombre entier joint à une fraction.

Mais si la caractéristique est au-dessous du nombre des dizaines qu'elle est censée renfermer de trop ; elle appartient certainement à une fraction, que je trouverai en cette manière : je chercherai, par ce qui a été dit (242 et suiv.) à quel nombre répond le logarithme proposé ; et lorsque je l'aurai trouvé, j'en séparerai, par une

virgule, autant de dizaines de chiffres sur la droite, qu'il y aura de dizaines de trop, dans la caractéristique.

Par exemple, si l'on me donnoit $8,732235$ pour logarithme résultant d'une opération dans laquelle il est entré un complément arithmétique. Je vois, puisque sa caractéristique est au-dessous d'une dizaine, qu'il appartient à une fraction. Je cherche d'abord (243) à quel nombre répond $8,732235$, considéré comme logarithme du nombre entier; je trouve qu'il répond à 539802600 ; séparant 10 chiffres, j'ai $0,0539802600$ pour valeur très-approchée de la fraction qui répond au logarithme proposé.

Mais comme il est très-rarement nécessaire d'avoir ces fractions à un tel degré de précision, on abrégera, en diminuant tout de suite la caractéristique du logarithme proposé, autant qu'il est nécessaire pour la faire tomber parmi celle des Tables; et prenant seulement le nombre correspondant, on séparera autant de chiffres de moins que ne le prescrit la règle précédente, autant de moins, dis-je, qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique. Ainsi, dans le cas présent, je diminuerois la caractéristique, de 5 unités, et ayant trouvé que le nombre correspondant, est 5398 , j'en séparerois seulement cinq chiffres, et j'aurois $0,05398$.

Dans les élévations aux puissances, il faudra observer, qu'en multipliant (229) le logarithme, par le nombre qui marque le degré de la puissance, il se trouvera qu'on multipliera aussi ce dont la caractéristique se trouvera être trop forte. Ainsi en élevant au cube, par exemple; s'il entre un complément arithmétique dans le logarithme proposé; c'est-à-dire, si la caractéristique est trop forte de 10 unités, celle du logarithme du cube, sera trop forte, de 30 unités; et ainsi des autres. Il sera donc facile de la ramener à sa juste valeur.



Dans les extractions des racines ; pour éviter toute méprise , lorsqu'il entrera des complémens arithmétiques dans les logarithmes dont on fera usage ; on aura soin d'ajouter ou d'ôter à la caractéristique autant de dizaines qu'il est nécessaire , pour que ce dont elle sera trop forte , soit précisément d'autant de dizaines qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de la racine : et ayant , conformément à la règle ordinaire , divisé par le nombre qui marque le degré de la racine , la caractéristique sera trop forte , précisément de 10 unités.

Par exemple , si l'on demande la racine cubique de $\frac{276}{547}$; au logarithme de 276 , j'ajoute le complément arithmétique de celui de 547
 log. 276 2,440909
 compl. arithmétique du log. de 547. . 7,262013

Somme. 9,702922
 à la caractéristique de laquelle j'ajoute. 20,
 29,702922
 afin qu'elle devienne trop forte de 3 dizaines ; et j'ai 29,702922 dont le tiers 9,900974 est le logarithme de la racine cubique demandée , mais avec dix unités de trop à la caractéristique ; ainsi , conformément à ce qui a été observé ci-dessus , je trouve que cette racine cubique est 0,7961 à moins d'un millième près.

L'usage des complémens arithmétiques , est principalement utile dans les calculs de la Trigonométrie , et par conséquent dans plusieurs des opérations du pilotage que l'on veut faire avec une certaine exactitude.

T A B L E

D E S P R I N C I P E S.

- L**A quantité est tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution, n. 1.
- L'**arithmétique est la science des nombres, n. 2.
- L'**unité est le terme de comparaison de toutes les quantités de même espèce, n. 4.
- Le** nombre exprime combien il y a d'unités ou de parties d'unité dans une quantité, n. 5.
- Le** nombre abstrait est celui qui n'est appliqué à aucune espèce déterminée, n. 6.
- Le** nombre concret est toujours appliqué à quelque espèce de chose, n. 6.
- La** numération est l'art d'énoncer et de représenter les nombres, n. 7.
- La** numération actuelle est fondée sur ce principe de convention, que si plusieurs chiffres sont rangés sur une même ligne, les unités représentées par chacun de ces chiffres, valent dix fois plus que celles du chiffre à la droite, et dix fois moins que celles du chiffre à sa gauche, n. 15.
- Les** nombres complexes ne se rapportent qu'à une seule espèce d'unité, n. 18.
- Les** nombres complexes expriment des quantités dont les parties sont comparées à différentes unités, n. 18.
- Les** décimales sont des parties de dix en dix fois plus petites que l'unité; on les exprime par des chiffres placés à la droite des unités, et séparés d'elles par une virgule, n. 21.
- Un** nombre devient dix fois plus grand ou plus petit, à mesure que la virgule avance ou recule d'un rang vers la droite ou vers la gauche, n. 28.
- L'**addition est une opération par laquelle on exprime, par un seul nombre, la valeur totale de plusieurs nombres de même espèce, n. 33.
- La** soustraction est une opération par laquelle on trouve le reste, l'excès ou la différence de deux nombres de même espèce, n. 35.
- La** multiplication est une opération par laquelle on

- répète un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre, n. 40.
- Le nombre que l'on répète s'appelle *multiplicande*; celui qui indique combien de fois on le répète, se nomme *multiplicateur*; et l'on appelle *produit*, le résultat de la multiplication, n. 41.
- On appelle *facteurs* les nombres que l'on multiplie l'un par l'autre, n. 42.
- La multiplication est une addition répétée du multiplicande, autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, n. 43.
- Le produit est toujours de même nature que le multiplicande, n. 47.
- Dans la multiplication des parties décimales, le produit doit avoir autant de chiffres décimaux qu'il y en a en tout dans les deux facteurs, n. 54.
- La division est une opération par laquelle on cherche combien de fois un nombre est contenu dans un autre, n. 59.
- Le nombre qu'on divise s'appelle *dividende*; celui par lequel on divise, *diviseur*, et celui qu'on trouve, *quotient*, n. 59.
- Le dividende est toujours égal au produit d'une multiplication dont le diviseur et le quotient seroient facteurs, n. 59.
- La nature des unités du quotient ne peut, en général, être déterminée que par l'état de la question qui donne lieu à la division, n. 59.
- La division des parties décimales se réduit à celle des nombres entiers, en observant de rendre les mêmes, le nombre des décimales du dividende, et celui des décimales du diviseur, n. 68.
- On appelle *fraction*, une ou plusieurs parties de l'unité partagée en un nombre quelconque de parties égales, n. 78.
- Une fraction est exprimée par deux nombres, dont l'un marque en combien de parties égales l'unité est partagée; il s'appelle *dénominateur*; et l'autre marque combien il entre de ces parties dans la valeur de la fraction; on le nomme *numérateur*, n. 79.
- Le numérateur et le dénominateur s'appellent les *deux termes de la fraction*, n. 83.
- Une expression fractionnaire, dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, vaut plus que l'unité, n. 84.
- Lorsqu'une expression fractionnaire vaut plus que l'unité, on trouve sa valeur en divisant le numérateur par le dénominateur, n. 85.

- On réduit un nombre entier en fraction d'une espèce déterminée, en le multipliant par le dénominateur de cette fraction, n. 86.
- On ne change point la valeur d'une fraction quand on en multiplie ou divise les deux termes par un même nombre, n. 88.
- Par ce principe on rend raison de la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur, et de la réduction des fractions à leur plus simple expression, n. 89, 90, 92.
- Un nombre premier est celui qui n'a d'autre diviseur que l'unité ou lui-même, n. 93.
- Une fraction peut être considérée comme le quotient d'une division dont le numérateur seroit le dividende, et le dénominateur seroit le diviseur, n. 97.
- Une fraction peut être réduite en décimales, en divisant le numérateur (suivi d'autant de zéros qu'on veut avoir de décimales) par le dénominateur, n. 99.
- Pour additionner les fractions ou les retrancher l'une de l'autre, il faut préalablement les réduire au même dénominateur, puis on ajoute ou l'on retranche les numérateurs, et l'on donne à la somme ou à la différence le dénominateur commun, n. 101, 102.
- Pour multiplier une fraction par une autre fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur, n. 106.
- Pour diviser une fraction par une autre, il faut la multiplier par la fraction diviseur renversée, n. 109.
- Évaluer une fraction, c'est en chercher la valeur en sous-espèces de l'unité principale dont elle fait partie, n. 112.
- Une fraction de fraction est égale au produit de toutes les fractions qui entrent dans son expression, n. 114.
- L'addition et la soustraction des nombres complexes ne diffèrent de celles des nombres incomplexes que par les différentes subdivisions de l'unité, n. 116, 117.
- Un nombre est partie aliquote d'un autre, ou bien est sous-multiple de cet autre, quand il y est exactement contenu, n. 120.
- Dans la multiplication des nombres complexes, on considère les sous-espèces comme des fractions, l'une à l'égard de l'autre, et à l'égard de l'unité principale, n. 121.
- Dans la division des nombres complexes, il faut toujours rendre le diviseur incomplexé, n. 128 et suiv.

Le carré d'un nombre est le produit de ce nombre multiplié par lui-même, n. 129.

La racine d'un carré est le nombre, qui multiplié par lui-même, a produit ce carré, n. 130.

Lorsqu'un nombre n'est pas un carré parfait, sa racine est appelée *sourde, irrationnelle ou incommensurable*, n. 132.

Le carré d'un nombre, composé de dizaines et d'unités, contient le carré des dizaines, le double produit des dizaines par les unités, et le carré des unités, n. 133.

Sur ce principe est fondée l'extraction de la racine carrée d'un nombre composé de plus de deux chiffres, n. 134 et suiv.

Pour approcher de la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait, on met à la suite de ce nombre, deux fois autant de zéros que l'on veut de décimales à la racine, n. 140.

Pour extraire la racine carrée d'une fraction, on tire la racine du numérateur et celle du dénominateur, si les deux termes de la fraction sont des carrés parfaits; sinon, on réduit la fraction en décimales d'un nombre pair de chiffres

décimaux, et on extrait ensuite la racine, n. 142 et suiv.

Le cube d'un nombre est le produit de ce nombre, multiplié par son carré, n. 149.

La racine cubique d'un cube est le nombre qui, multiplié par son carré, produit ce cube, n. 151.

Le cube d'un nombre composé de dizaines et d'unités, contient le cube des dizaines, trois fois le carré des dizaines multiplié par les unités, trois fois les dizaines multipliées par le carré des unités, et le cube des unités, n. 154.

Sur ce principe est fondée l'extraction de la racine cubique d'un nombre composé de plus de trois chiffres, n. 155.

On approche de la racine cubique d'un nombre qui n'est pas un cube parfait, en mettant à la suite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut de décimales à sa racine, n. 156.

Pour extraire la racine cubique d'une fraction, on tire la racine cubique du numérateur et celle du dénominateur, n. 157 et suiv.

La raison ou le rapport est le résultat de la compa-

- raison de deux quantités, n. 162.
- Le rapport arithmétique consiste dans la différence des deux quantités comparées, n. 163.
- Le rapport géométrique consiste dans le nombre de fois qu'une quantité en contient une autre, n. 164.
- Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à ces deux termes, ou quand on en retranche une même quantité, n. 169.
- Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre, n. 170.
- Quatre quantités sont en proportion quand le rapport des deux premières est égal au rapport des deux dernières. La proportion est arithmétique ou géométrique selon la nature des rapports qui la composent, n. 172.
- La proportion continue, est celle dont les termes moyens sont égaux entr'eux, n. 174.
- Dans toute proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens, n. 176.
- Dans une proportion arithmétique continue, la somme des extrêmes est double du terme moyen, n. 177.
- Dans une proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, n. 178.
- Et si la proportion est continue, le produit des extrêmes est égal au carré du terme moyen, n. 178.
- Le quatrième terme d'une proportion géométrique est égal au produit du second par le troisième divisé par le premier, n. 179.
- Si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyens, ces quatre quantités sont en proportion, n. 180.
- Si quatre quantités sont en proportion, elles y seront encore si on met les extrêmes à la place des moyens, et les moyens à la place des extrêmes, ou si l'on échange les places des moyens, ou celles des extrêmes, n. 181, 182.
- On peut multiplier ou diviser par un même nombre les deux antécédens ou les deux conséquens, sans troubler la proportion, n. 183.
- Tout changement fait dans une proportion, de manière que la somme de l'antécédent et du conséquent, ou leur différence, soit comparée à l'antécédent ou au conséquent, de la même manière dans chaque rap-

- port, formera toujours une proportion, n. 184.
- La somme ou la différence des antécédens d'une proportion, est à la somme ou la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent, n. 185.
- Dans une suite de plusieurs rapports égaux, la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent, n. 186.
- Le rapport composé résulte de deux ou plusieurs rapports, dont on multiplie les antécédens entr'eux et les conséquens entr'eux, n. 187.
- Le rapport est doublé, triplé, quadruplé, etc. quand il est composé de deux, trois, quatre, etc. rapports égaux, n. 189.
- Les produits de deux ou plusieurs proportions multipliées par ordre, ou terme par terme, sont en proportion, n. 190.
- Les quarrés, les cubes, et en général les puissances semblables de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion, n. 191.
- Les racines quarrées, cubiques, etc. de quatre quantités en proportion, sont aussi en proportion, n. 192.
- La règle de trois a pour objet de trouver un terme d'une proportion, les trois autres étant donnés, n. 194.
- Une règle de trois est simple quand son énoncé ne renferme que quatre termes, dont l'un est à trouver, et les trois autres sont donnés, n. 194.
- Une règle de trois est directe lorsque les quantités principales sont directement proportionnelles à leurs relatives, n. 194.
- Une règle de trois est inverse quand les quantités principales sont réciproquement proportionnelles à leurs relatives, n. 195.
- Une règle de trois est composée, lorsque son énoncé renferme plus de trois termes connus; on la réduit à une proportion dont les rapports sont composés, n. 196.
- La règle de société a pour objet de partager un nombre en plusieurs parties qui aient des rapports donnés, n. 197.
- La progression arithmétique est une suite de termes qui ont même différence, n. 204.
- Un terme quelconque d'une progression arithmétique croissante, est composé du premier, plus autant de fois la raison ou la différence, qu'il y a de termes avant lui, n. 206.

- Une progression géométrique est une suite de termes, dont chacun contient également le suivant, ou y est également contenu, n. 211.
- Un terme quelconque d'une progression géométrique croissante, est composé du premier multiplié, autant de fois de suite, par la raison, qu'il y a de termes avant lui, n. 212.
- Les logarithmes sont des nombres en progression arithmétique, qui répondent, terme pour terme, à une pareille suite de nombres en progression géométrique, n. 216.
- Dans la construction des logarithmes dont on fait usage actuellement, on a fait correspondre la progression arithmétique, 0, 1, 2, 3, etc. à la progression géométrique décuple, 1, 10, 100, 1000, etc. n. 218.
- La caractéristique du logarithme d'un nombre, marque dans quelle décade est compris ce nombre, n. 222.
- La somme des logarithmes de deux nombres est égale au logarithme de leur produit, n. 226.
- Le logarithme d'une puissance quelconque d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre, multiplié par le nombre qui marque cette puissance, n. 229.
- Le logarithme de la racine d'un nombre, est égal au logarithme de ce nombre, divisé par le degré de la racine, n. 230.
- Le logarithme du quotient d'une division est égal au logarithme du dividende, moins le logarithme du diviseur, n. 231.
- Le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, se trouve, en réduisant cet entier en fraction, et retranchant le logarithme du dénominateur, de celui du nouveau numérateur, n. 234.
- Le logarithme d'une fraction est la différence des logarithmes du numérateur et du dénominateur, précédée d'un signe qui avertit que cette différence est un nombre qui reste encore à retrancher; en sorte que les logarithmes doivent être employés suivant des règles contraires à celles que l'on suit pour ceux des nombres entiers, pour la multiplication et la division, n. 236.
- Le complément arithmétique d'un nombre, est la différence entre ce nombre, et l'unité suivie

d'autant de zéros qu'il y a
de chiffres dans ce nombre,
n. 246.

Par l'usage des complé-
mens arithmétiques, on
change les soustractions

en additions, et on ra-
mène les logarithmes des
fractions aux mêmes rè-
gles que l'on suit pour
ceux des nombres entiers,
n. 246.

Fin de la Table des Principes.

EXPOSITION
ABRÉGÉE
DU NOUVEAU SYSTÈME
DES POIDS ET MESURES,

D'APRÈS LE MÈTRE DÉFINITIF;

*Suivie d'un Précis des Calculs qui leur sont
relatifs.*

NOUVELLE ÉDITION.

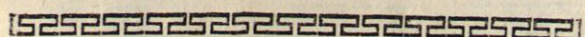
A AVIGNON,

Chez SEGUIN FRÈRES, Imprimeurs-Libraires.

1811.

*Table des Abréviations des noms de Mesures
et de Poids.*

MÈTRE.	mt.	Myria.	myr.
ARE.	a.	Kilo.	k.
LITRE.	l.	Hecto.	h.
STÈRE.	st.	Déca.	deca.
GRAMME.	gr.	Déci.	d.
FRANC.	fr.	Centi.	c.
DÉCIME.	dme.	Milli.	m.
CENTIME.	cme.	Décimal.	dml.
		Quarré.	q.
		Cube.	cb.



EXPOSITION ABRÉGÉE

DU NOUVEAU SYSTÈME

DES POIDS ET MESURES.

Des anciennes Mesures et de leurs inconvéniens.

ON sait qu'en général les anciennes Mesures n'avoient rien de fixe ; elles varioient de nom et de grandeur d'une province à l'autre , d'une ville à la ville voisine , quelquefois dans la même ville. Un même mot signifiant des valeurs différentes , et le rapport de ces valeurs entre elles n'étant pas toujours bien déterminé ni généralement connu , on étoit continuellement induit en erreur , ou l'on ne s'entendoit pas : ce qui apportoit des entraves très-préjudiciables au commerce , et fournissoit des moyens de fraude si multipliés qu'on avoit souvent de la peine à s'en garantir.

La subdivision des unités principales des anciennes Mesures présentait aussi de graves inconvéniens. Comme cette subdivision ne se faisoit pas suivant l'ordre décimal (qui est celui de la numération universellement adoptée), ni même d'après un mode constant et uniforme , la plupart des opérations d'Arithmétique qui avoient les Mesures pour objet , se trouvoient singulièrement compliquées et pénibles à exécuter. L'ordre de ces opérations s'oublioit aisément , de même que la manière de les faire. De sorte que cette partie de la science du calcul étoit regardée avec raison comme très-difficile soit à acquérir , soit à conserver.

La nécessité d'une réforme dans les Poids et Mesures étoit donc manifeste ; elle étoit , en effet , depuis long-temps et généralement reconnue. Cette réforme vient enfin d'être opérée. Voici les bases sur lesquelles on a établi le nouveau Système.

DES NOUVELLES MESURES EN GÉNÉRAL.

Origine ou base des nouvelles Mesures.

Si l'on ne s'étoit proposé que de rendre les Mesures uniformes dans toute l'étendue de la France , on auroit pu se contenter d'en choisir une de chaque espèce , en statuant qu'à l'avenir chacune de ces Mesures choisies seroit la seule employée dans cet Empire. Parmi les Mesures de longueur on distinguoit la toise , l'aune , la canne , etc. : comme la toise étoit une Mesure dont la longueur avoit été assez bien déterminée , et qu'elle étoit d'ailleurs très-usitée , on auroit pu lui donner la préférence , et la désigner , à cet effet , pour mesurer seule à l'avenir l'étendue en longueur. Mais la toise se divisant en 6 pieds , le pied en 12 pouces , le pouce en 12 lignes , etc. , et ces subdivisions ne se faisant pas suivant l'ordre décimal , le calcul des nouvelles Mesures auroit conservé les difficultés qu'avoit celui des anciennes , et auroit dès lors participé à tous leurs graves inconvéniens. La toise devoit donc être rejetée. Ce que nous avons dit de la toise s'applique à bien plus forte raison aux autres Mesures anciennes , dont les défauts étoient encore plus multipliés.

A ces motifs , pour faire rejeter sans exception toute sorte de Mesure ancienne , se réunissoient les considérations suivantes.

On désiroit , pour la simplification des opérations commerciales non-seulement dans l'intérieur de la

France, mais encore de la France avec les autres pays, que tous les peuples civilisés avec qui nous pouvons avoir des rapports, eussent les mêmes Mesures que les nôtres. Or rien ne faisoit espérer que les mesures qui auroient été choisies en France, arbitrairement et sans une raison de préférence intrinsèque et incontestable, pussent être adoptées ailleurs. Pour qu'on pût espérer que cette adoption auroit lieu tôt ou tard, il étoit évident qu'il falloit des mesures dont la valeur fut invariable et comparable; c'est-à-dire, la même dans tous les temps et dans tous les lieux, existant naturellement, et qu'on pût regarder par-là comme universelles.

Afin d'atteindre ce but, on les a fait dériver de la grandeur de la Terre. On s'est servi pour cela de la distance de l'équateur au pôle, c'est-à-dire, de la *longueur du Quart d'un méridien terrestre* (du méridien qui traverse la France).

Cette longueur, déduite des dernières observations, est de 5130740 toises ou de 30784440 pieds; elle a été déterminée avec tant de soin, avec des instrumens si parfaits, et par des Géomètres si distingués, qu'on ne doit avoir aucun doute sur son exactitude.

Du Mètre, Unité fondamentale et usuelle des nouvelles Mesures; et des autres Unités qui en dérivent.

La longueur du Quart du méridien terrestre étant très-considérable, on l'a successivement divisée et subdivisée en parties de dix en dix fois plus petites, ainsi qu'on le voit ci-dessous, dans la vue de choisir parmi ces parties une longueur qui fût propre à servir d'*Unité linéaire* pour remplacer celles dont on

faisoit usage, et pour en faire dériver toute autre sorte de Mesure; c'est le résultat de la septième division qui a été choisi pour cet objet.

Divisions successives, et de dix en dix, du Quart du Méridien.

Quart du méridien 30784440

1 ^{re} division	$\frac{1}{10}$	3078444			
2 ^e division	$\frac{1}{100}$	307844.4 ou 307844	Pieds.	pouc.	lign. $\frac{16}{10}$
3 ^e division	$\frac{1}{1000}$	30784.44 ou 30784	5	3	$\frac{36}{1000}$
4 ^e division	$\frac{1}{10000}$	3078.444 ou 3078	5	3	$\frac{936}{10000}$
5 ^e division	$\frac{1}{100000}$	307.8444 ou 307	10	1	$\frac{594}{100000}$
6 ^e division	$\frac{1}{1000000}$	30.78444 ou 30	9	4	$\frac{959}{1000000}$
7 ^e division	$\frac{1}{10000000}$	3.078444 ou 3	0	11	$\frac{296}{10000000}$

Le résultat de la septième division, c'est-à-dire, la dix-millionième partie du Quart du méridien terrestre, exprimée en pieds, est de *trois pieds onze lignes deux cent quatre-vingt-seize millièmes de ligne*. Cette longueur a été définitivement adoptée pour *Elément* ou *Unité fondamentale et usuelle* des nouvelles Mesures, et on lui a donné le nom de MÈTRE, dérivé d'un terme grec qui signifie Mesure, Mesure par excellence.

Ainsi, le MÈTRE en longueur est l'élément, et en même temps l'unité proprement dite, de toutes les Mesures linéaires ou de longueur.

Le Mètre quarré est l'élément et l'unité de toutes les Mesures quarrées ou de superficie. Il sert en

même temps à former une nouvelle unité pour mesurer les grandes surfaces , comme celles d'un champ , d'un terrain , etc. Cette nouvelle unité est un espace quarré dont le côté est de dix Mètres , et qui renferme par conséquent *cent Mètres quarrés* (car le quarré de 10 , est 100) : on l'appelle *ARE* , du mot latin *arare* , labourer.

Le *Mètre cube* est l'élément et l'unité de toutes les Mesures cubes , ou de solidité et de capacité. Il sert également à former une nouvelle unité de capacité , destinée pour le mesurage des liquides , des grains et autres matières sèches. Cette nouvelle unité est un espace cube qui a pour côté la dixième partie du Mètre , et qui renferme par conséquent *un millième de Mètre cube* (car le cube de $\frac{1}{10}$, est $\frac{1}{1000}$) : On l'appelle *LITRE* , de l'ancienne Mesure de capacité connue sous le nom de *litron*.

Les *Poids* ou mesures de pesanteur dérivent aussi du Mètre. On a pris pour unité de poids , *le poids absolu d'un volume d'eau pure* , égal au cube de la centième partie du Mètre , *égal* , par conséquent , *à la millionième partie du Mètre cube* (car le cube de $\frac{1}{100}$, est $\frac{1}{1000000}$). Cette unité de poids s'appelle *GRAMME* , d'un terme grec qui signifie un très-petit poids ancien.

Les *Monnoies* se rattachent au Mètre , par le *Gramme* , c'est-à-dire , par leur poids ; nous en parlerons ci-après , ainsi que de la nouvelle *Division du Cercle* , et du *Jour astronomique*.

Subdivisions et multiples décimaux des nouvelles Unités ; leur Nomenclature.

Les unités des nouvelles Mesures , dont nous venons de faire mention , se divisent et se subdivisent toutes d'une manière uniforme , et de dix en dix ,

c'est-à-dire, par *décimales* (*). De toutes les divisions et subdivisions de l'unité, celle qui se fait de cette manière est incontestablement la plus simple, et la plus commode dans les calculs, puisque la formation et le calcul des décimales sont absolument les mêmes que pour les nombres ordinaires ou entiers.

On divise donc le *Mètre* ou l'unité de longueur, en 10 parties qu'on appelle *Décimètres* ;

Le *Décimètre*, en 10 *Centimètres* ;

Le *Centimètre*, en 10 *Millimètres*.

On pourroit continuer, et diviser le millimètre en 10 *dixièmes de millimètres*, et ainsi de suite ; mais on s'arrête à ce terme qui suffit pour les usages ordinaires.

C'est d'après le même système, qu'on forme des multiples décimaux du *Mètre*. Ainsi,

10 Mètres	forment 1	<i>Décamètre</i> ;
10 Décamètres,	1	<i>Hectomètre</i> ;
10 Hectomètres,	1	<i>Kilomètre</i> ;
10 Kilomètres,	1	<i>Myriamètre</i> .

On voit que pour former des Mesures plus grandes ou plus petites que le *Mètre*, on s'est servi des mots *Myria-*, *Kilo-*, *Hecto-*, *Deca-* ; *Déci-*, *Centi-*, *Milli-*, tirés du grec et du latin. Ils désignent respectivement des dizaines de mille, des mille, des centaines, des dizaines ; des dixièmes, des centièmes, des millièmes de l'unité, et s'appliquent également aux unités de mesures de *superficie*, de *capacité*, de *pesanteur*, pour en désigner les subdivisions et les multiples décimaux. Ainsi,

(*) Voyez, pour ce qui concerne la formation et le calcul des *décimales*, la page 20 ci-après.

Myriamètre	} signifient	dix mille Mètres.
Kilomètre		mille Mètres.
Hectare		cent Ares.
Décalitre		dix Litres.
Décigramme	}	dixième de Gramme.
Centilitre		centième de Litre.
Millimètre		millième de Mètre.
etc. etc.		

Voici le tableau général de cette nomenclature.

M E S U R E S

de longueur, de superficie, de capacité, de pesanteur.

Myriamètre, Myriare, Myrialitre, Myriagramme, dix mille... de l'unité choisie.

Kilomètre, Kilare, Kilolitre, Kilogramme, mille...

Hectomètre, Hectare, Hectolitre, Hectogramme, cent...

Décamètre, Décare, Décalitre, Décagramme, dix...

Mètre, Are, Litre, Gramme,

Décimètre, Déciare, Décilitre, Décigramme, dixièmes de...

Centimètre, Centiare, Centilitre, Centigramme, centièmes de...

Millimètre, Milliare, Millilitre, Milligramme, millièmes de...

Nous allons nous occuper plus particulièrement de chaque espèce de nouvelle Mesure et de leurs rapports avec les anciennes.

DES NOUVELLES MESURES EN PARTICULIER.

Des Mesures Linéaires ou de Longueur.

Ainsi qu'il a été dit ci-dessus, le *Mètre*, unité de longueur, est la dix-millionième partie du Quart du méridien terrestre, et répond à 3^{pièds} 0^{pouces} 11^{lignes} 296^{millièmes de ligne}, ou, en décimales. . . . 3^{pièds}, 078444.

Il se divise en 10 *Décimètres* ;
 Le Décimètre , en 10 *Centimètres* ;
 Le Centimètre , en 10 *Millimètres*.

Ses multiples sont les suivans :

10 Mètres font 1 *Décamètre* ;
 10 Décamètres , 1 *Hectomètre* ;
 10 Hectomètres , 1 *Kilomètre* ;
 10 Kilomètres , 1 *Myriamètre* ;
 10 Myriamètres , 1 *Degré décimal du méridien* ;
 100 Degrés décimaux du méridien , constituent le
Quart du méridien terrestre.

Le Mètre et ses subdivisions remplacent la toise , le pied , le pouce , etc. Ils remplacent aussi l'aune , la canne , le pan , etc. Ainsi le mesurage des draps , toiles , etc. doit se faire en mètres , décimètres , centimètres , etc. La lieue , le mille , et les autres anciennes mesures itinéraires sont remplacées par le Myriamètre et le Kilomètre.

Le tableau ci-dessous présente les subdivisions et les multiples décimaux du Mètre, leurs rapports avec cette unité , et leurs valeurs en mesures anciennes.

TABLEAU des nouvelles Mesures de Longueur.

N O M S des NOUVELLES MESURES.	Leurs RAPPORTS avec l'UNITÉ fondamentale.	VALEURS en MESURES ANCIENNES.			
		mètres.	toif.	pieds.	pou. lign.
Myriamètre.	10000		5130	4	5 3'360
Kilomètre.	1000		513	0	5 3'336
Hectomètre.	100		51	1	10 1'583
Décamètre.	10		5	0	9 4'959
METRE.	1			3	0 11'296
Décimètre.	0'1				3 8'330
Centimètre.	0'01				4'433
Millimètre.	0'001				0'443

Des Mesures quarrées ou de Superficie.

L'unité de superficie, pour les petites surfaces, est le *Mètre quarré*, qui répond à 9^{Pieds quarrés} 68pouces qu. 95^{lignes qu.} et 34^{centièmes de ligne qu.}, ou, en décimales, 9^{Pieds qu.} 47682.

Il se divise en 100 *Décimètres quarrés* ;
le Décimètre quarré, en 100 *Centimètres quarrés* ;
le Centimètre quarré, en 100 *Millimètres quarrés*.

L'unité de superficie, pour les grandes surfaces, est l'*Are* qui vaut cent Mètres quarrés (un Décamètre quarré), et répond à 26^{toises qu.} et 32^{centièmes de toise qu.} environ.

L'*Are* se divise en 10 *Centiares* (ou Mètres quarrés).

Ses multiples sont les suivans :

10 Ares font 1 *Décare* (1000 Mètres quarrés).
10 Décares font 1 *Hectare* (10000 Mètres quarrés, ou 1 Hectomètre quarré).

10 Hectares font 1 *Kilare* (100000 Mètres quarrés).

10 Kilares font 1 *Myriare* (1000000 Mètres quarrés, ou 1 Kilomètre quarré).

L'*Are* et ses multiples remplacent l'arpent, la salmée, et les autres anciennes mesures *agraires*. Ainsi, la surface d'un terrain, d'un champ, etc. doit s'exprimer en Ares, Décares, Centiares, et en multiples décimaux de l'*Are*.

TABLEAU des nouvelles Mesures de Superficie.

NOMS des NOUVELLES MESURES.	Leurs RAPPORTS avec l'UNITÉ fondamentale.	VALEURS en MESURES ANCIENNES.
	mètres.	toises quar.
Myriare.	1000000 ou Kilomètre carré.	263244'93
Kilare.	100000	26324'49
Hectare.	10000 ou Hectomètre quar.	2632'46
Décare.	1000	263'24
ARE.	100 ou Décamètre quar.	26'32
Déciare.	10	2'63
Centiare.	1 Mètre carré.	Pieds quar. 9'47682
Décimètre carré.	0'01	pouces quar. 13'647
Centimètre carré.	0'0001	lignes quar. 19'651
Millimètre carré.	0'000001	0 197

Des Mesures cubes, ou de Solidité et de Capacité.

1°. Des Mesures de Solidité.

L'unité de solidité est le *Mètre cube*, qui répond à 29^{Pieds cub.}, 1739.

Il se divise en 1000 *Décimètres cubes* ;
le *Décimètre cube*, en 1000 *Centimètres cubes*.

Le Mètre cube et ses subdivisions remplacent la Toise cube, le Pied cube, etc. dans le toisé des solides. Ainsi la solidité ou mesure des pierres, des corps massifs, etc. doit s'exprimer en Mètres cubes, Décimètres et Centimètres cubes.

Quand il s'agit de mesurer les bois de chauffage et de charpente, le Mètre cube est de même employé, mais sous la dénomination de *Stère*, mot dérivé du grec, et qui signifie *solide*. Dans ce dernier cas, le Mètre cube ou *Stère* se divise en 10 *Décistères*.

Le *Décistère* vaut donc 100 *Décimètres cubes*.

2°. Des Mesures de Capacité.

Quand il s'agit de mesurer les liquides, les grains, etc. on se sert du *Litre*, dont la capacité est celle d'un Décimètre cube, c'est-à-dire, la millièame partie du Mètre cube, et qui répond à 50^{Pouces cub.} 4124.

Le Litre se divise en 10 *Décilitres*;

Le Décilitre, en 10 *Centilitres*;

Le Centilitre, en 10 *Millilitres*.

Le Millilitre vaut donc un Centimètre cube.

Les multiples décimaux du Litre sont les suivans :

10 Litres font 1 *Décalitre*;

10 Décalitres, 1 *Hectolitre*;

10 Hectolitres, 1 *Kilolitre*.

Le Kilolitre vaut donc 1 Mètre cube.

Le Décalitre, le Litre et ses subdivisions, remplacent le muid, la velle, la pinte, etc. qui servoient à mesurer les liquides.

L'Hectolitre, et les autres multiples décimaux du Litre, remplacent le muid, le sétier, le boisseau, etc. qui servoient à mesurer les grains et autres matières sèches.

TABLEAU des nouvelles Mesures de Solidité et de Capacité.

N O M S		Leurs RAPPORTS avec l'Unité fondam.	V A L E U R S en mesures anciennes.
DES NOUVELLES MESURES.			
mefures de capacité.	mefures correspondantes de solidité.	mètre cu.	pieds cu.
Kilolitre.	Mètre cube. Stere de bois.	1	29'1739
Hectolitre.	Décistère.	0'1	2'9174
Décalitre.		0'01	0'2917
LITRE.	Décimètre cube.	0'001	50'4124
Décilitre.		0'0001	5'0412
Centilitre.		0'00001	0'5041
Millilitre.	Centimètre cube.	0'000001	0'0504

Des Mesures de pesanteur, ou des Poids.

L'unité de Poids est le *Gramme*. Sa valeur est le poids d'un Centimètre cube d'eau distillée ; c'est-à-dire, le poids de la millionième partie d'un cube de cette eau, pesée dans le vide, à la température où elle est à son *maximum* de condensation (*). Il répond à 0^{deniers} 5,7845 de l'ancien poids de marc.

Le Gramme se divise en 10 *Décigrammes* ;

Le Décigramme, en 10 *Centigrammes* ;

Le Centigramme, en 10 *Milligrammes*.

Le Milligramme est le poids du Millimètre cube d'eau.

Les multiples décimaux du Gramme sont les suivans :

10 Grammes font 1 *Décagramme* ;

10 Décagrammes, 1 *Hectogramme* ;

10 Hectogrammes, 1 *Kilogramme* ;

10 Kilogrammes, 1 *Myriagramme*.

Le Kilogramme est le poids du Décimètre cube d'eau.

Le Gramme, ses subdivisions et ses multiples décimaux, remplacent l'ancienne livre, l'once, le gros, le denier, le grain, etc. et en général tous les poids anciens.

On se sert du Gramme et de ses subdivisions pour exprimer des poids très-petits ou qui doivent être rapportés avec beaucoup de précision et d'exactitude, comme dans la pesée de certains médicamens,

(*) Vers — 4 degrés du thermomètre centigrade ; c'est-à-dire, du thermomètre divisé en 100 degrés depuis le terme de l'eau bouillante jusqu'à celui de la glace fondante. La même division est continuée au-dessous de ce terme qui est marqué par 0. Les degrés au-dessous de la glace sont distingués de ceux au-dessus, par le signe —.

dans celle du diamant, dans les essais de l'or et de l'argent, etc. (*).

On se sert des multiples décimaux du Gramme, pour exprimer des poids plus considérables.

TABLEAU des nouveaux Poids.

NOMS des NOUVELLES MESURES.	Leurs RAPPORTS avec l'UNITÉ fondamentale.	VALEURS en MESURES anciennes.
Myriagramme.	grammes. 10000	li. poids de m. 20'4288
Kilogramme.	1000 Poids du décimètre cu. d'eau.	20'429 onces.
Hectogramme.	100	3'2686 gros.
Décagramme.	10	2'6149 den.
GRAMME.	1 Poids du centimètre c.d'eau.	0'7845 grains.
Décigramme.	0'1	1'883
Centigramme.	0'01	0'188
Milligramme.	0'001 Poids du mill. cub. d'eau.	0'019

Des Monnoies.

L'unité monétaire se nomme FRANC, et diffère peu de l'ancienne unité qui portoit le même nom et plus souvent celui de *Livre* (tournois), dont on se servoit pour caractériser la monnoie précédemment frappée en France. Il se rattache au Mètre, par le Gramme, c'est-à-dire, par son poids : car le Franc est une pièce d'argent du poids de cinq Grammes. Il contient neuf dixièmes d'argent pur, et un dixième d'alliage de cuivre ; il répond à une livre et trois deniers tournois.

Le Franc vaut 10 *Décimes*.

(*) C'est cette considération qui a fait choisir une unité de poids aussi petite qu'est le Gramme ; et pour le mesurage des liquides, etc. une unité de capacité aussi petite qu'est le Litre.



Le Décime est une pièce de cuivre qui pèse deux décagrammes, et vaut 10 *Centimes*.

Le Centime est une petite monnaie, également de cuivre, et qui pèse deux grammes.

Ainsi le Franc vaut 100 *Centimes*.

On voit que pour exprimer les subdivisions décimales du Franc, on n'a pas composé avec cette unité et les mots déci, centi, milli, des mots analogues à ceux des Mesures linéaires, quarrées, cubes, ou des poids. On s'est contenté de donner à ces subdivisions un mot propre, dérivé seulement de leur rapport décimal avec l'unité.

On n'a point formé de multiples décimaux du Franc; on a seulement frappé des pièces d'un Franc, de deux Francs, de cinq Francs: on en a frappé aussi d'un demi-Franc.

La pièce de cinq Francs pèse vingt-cinq Grammes, et répond à 5 livres 1 sol 3 deniers tournois.

A l'égard du titre, ou degré de fin des Matières d'or et d'argent, on suppose le titre le plus fin égal à l'unité, et on détermine le degré d'alliage, en dixièmes, centièmes et millièmes d'unité.

Du Cercle, et du Jour astronomique.

Pour compléter la réforme des anciennes Mesures, on a appliqué la division décimale à la circonférence du cercle, et à la durée du Jour astronomique.

La circonférence du Cercle se divisait autrefois en 360 degrés, ou chaque Quart de Cercle, en 90 degrés; le degré, en 60 minutes; la minute, en 60 secondes; la seconde, en 60 tierces, etc. On divise maintenant cette circonférence, en 400 *degrés décimaux*, ou chaque Quart de Cercle, en 100 *degrés décimaux*, qui répondent chacun à 54 minutes de l'ancienne division.

Le

Le degré décimal, qui est ici l'unité fondamentale, se divise en 100 *minutes décimales* ;

La minute, en 100 *secondes décimales*, etc.

TABLEAU de la nouvelle division du Cercle.

NOMS des NOUVELLES MESURES.	Leurs RAPPORTS avec l'UNITÉ fondamentale.	VALEURS en Degrés de l'an- cienne division.
Circonférence.	degrés. 400	degrés. 360
Quart du Cercle.	100	90 minutes.
DEGRÉ décimal.	1	54 secondes.
Minute décimale.	0'01	32'4
Seconde décimale.	0'0001	0'324

Il résulte de la nouvelle division du Cercle, que le quart du Méridien terrestre étant de 5130740 toises (comme il est rapporté ci-dessus page 5), ou de 10000000 mètres, le degré décimal terrestre est de 100000 mètres (10 myriamètres), et répond à 51307^{toises}.4.

La minute décimale terrestre, est de 1000 mètres (1 kilomètre), et répond à 513^{toises}.074.

La seconde décimale terrestre, est de 10 mètres (1 décamètre), et répond à 5^{toises}.13074.

La tierce décimale terrestre, est 1 décimètre, et répond à 3^{pouces}.69413.

La quarte décimale terrestre, est un millimètre, et répond à 0^{lignes}.44329.

La durée du Jour astronomique étoit partagée en 24 heures ; l'heure, en 60 minutes ; la minute, en 60 secondes, etc.

On la divise en 10 *heures décimales* ;

L'heure, en 100 *minutes décimales* ;

La minute, en 100 *secondes décimales*.

1 heure décimale répond à 2 heures 24 minutes de l'ancienne division.

TABLEAU de la nouvelle Division du Jour astronomique.

N O M S des NOUVELLES MESURES.	Leurs RAPPORTS avec l'UNITÉ fondamentale.	VALEURS en heur. minut. etc. de l'ancienne divis.
	heures. 10	heures. 24 minutes. 2 24 secondes. 1 24
Jour.		
Heure.	1	
Minute décimale.	0'01	
Seconde décimale.	0'0001	0'864

*Application des Principes du nouveau Système ,
à quelques usages de la Marine.*

Le quart de la boussole se divise en 10 aires de vent, et l'aire de vent, en 10 degrés.

Le nœud ou division du Loc vaut la *seconde décimale terrestre*, ou 10 mètres (1 décamètre), et répond à 5^{toises}. 13074, ou 3^{pieds}. 685.

On prend pour le poids du *tonneau de mer*, celui du Mètre cube d'eau distillée, qui vaut mille kilogrammes, et répond à 2043^{lb} environ poids de marc.

Nous réunissons dans le *Tableau général* suivant, les divers tableaux que nous avons déjà présentés pour chaque classe séparée de nouvelles mesures. On en saisira plus facilement les rapports qui lient entre elles toutes les parties du nouveau Système.

L'Arrêté des Consuls, du 13 Brumaire an 9, pour faciliter l'exécution des Lois relatives aux nouveaux Poids et Mesures, permet l'usage d'une autre nomenclature que celle dont nous avons donné ci-dessus le développement. Nous avons présumé que,

dans cette Exposition succincte , l'admission de ces mots *synonymes* conjointement avec les dénominations systématiques , seroit loin de faciliter l'intelligence du nouveau système ; nous nous sommes donc bornés à les faire connoître dans le *Tableau général*. Comme cette nouvelle nomenclature emploie les termes d'anciennes mesures , il est nécessaire d'observer ici , pour prévenir les erreurs , que ces anciens noms , qui passent ainsi par adoption dans le nouveau système , n'expriment plus la même grandeur ou le même poids qu'auparavant , et ne conservent pas entre les nouvelles mesures qu'ils désignent , des rapports semblables à ceux qui existoient entre les anciennes mesures du même nom. Ainsi la *livre décimale* (qui est le kilogramme) répond actuellement à 2 livres 5 gros 35 grains et 15 centièmes de grains de l'ancien poids de marc. Elle ne se divise plus , comme l'ancienne livre , en 16 onces , l'once en 8 gros , etc. Elle doit se diviser en 10 *onces décimales* ; l'once , en 10 *gros décimaux* ; le gros , en 10 *deniers décimaux* , etc.

Il faut aussi observer que la dénomination *Mètre* , n'a point de synonyme dans la désignation de l'Unité fondamentale des Poids et Mesures , et ne doit point en avoir.

La dernière colonne du *Tableau général* , donne les valeurs de quelques anciennes mesures en mesures nouvelles ; nous en expliquons l'usage à la fin de la section suivante , qui traite des calculs relatifs aux nouvelles Mesures.

DES CALCULS

RELATIFS AUX NOUVELLES MESURES.

Formation et calcul des Décimales.

On entend par *décimales*, des parties de dix en dix fois plus petites que l'unité choisie.

Pour se faire une idée exacte des décimales, il faut observer que, d'après notre système de numération, les unités de chaque chiffre (dans un nombre composé de plusieurs chiffres), ont une valeur de dix en dix fois plus grande, en allant de droite à gauche; et qu'elles ont, au contraire, une valeur de dix en dix fois plus petite, en allant de gauche à droite.

Prenant pour exemple un nombre composé de deux chiffres, celui de gauche exprime des unités dix fois plus grandes que celui de droite; et réciproquement, celui de droite exprime des unités dix fois plus petites que celui de gauche.

Or, si on met une virgule ou tout autre signe (*) entre ces deux chiffres, à l'effet d'indiquer que celui de gauche au lieu d'exprimer des dizaines, n'exprime que des unités simples, le chiffre de droite placé après la virgule aura une valeur dix fois plus petite que s'il étoit au rang de ces unités simples ou entiers; il exprimera donc des unités d'un nouvel ordre et qui

(*) On met quelquefois à la place de la virgule, un point supérieur. Cette manière paroît mériter la préférence, puisque le point supérieur, tout en rendant le même service que la virgule, n'a pas, comme elle, l'inconvénient de pouvoir être confondue quelquefois avec la virgule que bien des personnes emploient pour diviser les nombres au-dessus de mille, en tranches de trois chiffres chacune, afin d'en faciliter l'énonciation.

seront dix fois plus petites que l'entier ou l'unité choisie. Ces nouvelles unités sont appelées *dixièmes*, et forment le premier rang des décimales.

Si l'on ajoute un chiffre à la droite des dixièmes, ce nouveau chiffre n'altérera pas la valeur des chiffres des entiers, ni celle du chiffre des dixièmes, valeurs fixées par la virgule; et il exprimera des unités dix fois plus petites que les dixièmes, par conséquent cent fois plus petites que l'unité choisie. Ces unités nouvelles, du second ordre, sont appelées *centièmes*, et occupent le second rang des décimales.

Un autre chiffre placé à la droite des centièmes, exprimera, par la même raison, des unités dix fois plus petites que les centièmes, par conséquent cent fois plus petites que les dixièmes, et mille fois plus petites que l'unité choisie. Ces unités nouvelles, du troisième ordre, sont appelées *millièmes*, et forment le troisième rang des décimales.

De nouveaux chiffres ajoutés à la droite des décimales déjà formées, exprimeront successivement des unités de dix en dix fois plus petites, que l'on appelle *dix-millièmes*, *cent-millièmes*, *millionièmes*, etc. et qui forment de nouveaux rangs de décimales.

Voici le nom de chaque ordre de décimales, et le rang qu'elles occupent relativement à la virgule ou signe indicatif du chiffre qui exprime les unités simples.

Entiers.	Dixièmes.	Centièmes.	Millièmes.	Dix-millièmes.	Cent-millièmes.	Millionièmes.	Dix-millionièmes.	Cent-millionièmes.
0, 1	2	3	4	5	6	7	8, etc.	
Numéros des rangs de décimales.								

Par exemple, 24 exprime vingt-quatre entiers ou unités.

Mais avec la virgule, 2,4 vaut *deux* entiers et *quatre* dixièmes d'entier.

2,45 vaut *deux* entiers *quatre* dixièmes d'entier et *cinq* centièmes d'entier, ou plus simplement (puisque un dixième vaut dix centièmes), 2,45 vaut *deux* entiers et *quarante-cinq* centièmes d'entier.

2,454 vaut *deux* entiers *quatre* dixièmes *cinq* centièmes et *quatre* millièmes d'entier, ou *deux* entiers et *quatre cent cinquante-quatre* millièmes d'entier.

12,045 vaut *douze* entiers et *quarante-cinq* millièmes d'entier.

0,25 vaut *vingt-cinq* centièmes d'entier.

0,0005 vaut *cinq* dix-millièmes d'entier.

On voit, par les premiers exemples ci-dessus, qu'après avoir énoncé les entiers d'un nombre qui renferme des décimales, on peut énoncer la quantité décimale de deux manières; 1.^o en exprimant chaque chiffre décimal séparément, et ajoutant pour le premier rang des décimales le mot *dixième*; pour le second rang, le mot *centième*; pour le troisième rang, le mot *millième*, etc. 2.^o En exprimant en un seul nombre tous les chiffres de la quantité décimale, et ajoutant à la fin le nom des unités décimales de la dernière espèce.

La formation des décimales est, ainsi qu'on vient de le voir, semblable à celle des nombres entiers.

Il en est de même du calcul des décimales; il ne diffère pas du calcul des nombres ordinaires ou entiers. Il faut avoir seulement le soin, après chaque opération, de placer la virgule ou le signe indicateur des unités simples, d'une manière convenable et que nous allons faire connoître.

Pour l'*addition* ou la *soustraction* des quantités décimales, on écrit les nombres les uns au-dessous

des autres , de manière que les virgules se répondent ; et faisant l'addition ou la soustraction , comme si les quantités étoient des nombres entiers , on place la virgule au même rang où elle est déjà dans les nombres supérieurs.

Pour la *multiplication* , on écrit les deux nombres à multiplier sans avoir égard à la virgule , et comme si c'étoient deux nombres entiers ; on fait ensuite la multiplication , et l'on sépare dans le produit , au moyen de la virgule , autant de chiffres vers la droite qu'il y a de décimales en tout dans le multiplicande et dans le multiplicateur.

Pour la *division* , on écrit à la suite de celui des deux nombres proposés qui a le moins de décimales , autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun. On fait ensuite la division sans avoir égard à la virgule , et le quotient indique des entiers. S'il y a un reste , et qu'on désire une valeur plus approchée , on ajoute à ce reste ou au dividende , un ou plusieurs zéros , suivant le degré d'exactitude auquel on veut atteindre. Ils donneront , en continuant la division , un ou plusieurs chiffres décimaux que l'on ajoutera au quotient.

Application du Calcul des décimales , aux nouvelles Mesures.

Les nouvelles Mesures étant divisées et subdivisées en parties de dix en dix fois plus petites , il en résulte que le calcul des décimales peut leur être appliqué immédiatement dans toutes les opérations d'Arithmétique auxquelles on veut les soumettre.

Nous allons présenter divers exemples de cette application ; mais nous ferons remarquer auparavant quelques propriétés et abréviations qui découlent de notre système de numération , ainsi que les changemens qu'on peut faire naître dans un nombre , par le seul déplacement de la virgule.

Un nombre qui renferme des décimales ne change pas de valeur , si on écrit à sa droite autant de zéros qu'on voudra , ou si on efface les zéros qui pourroient être à sa droite.

Ainsi 14,4 est la même chose que 14,40 , ou 14,400 , ou 14,4000 , ou , etc. Réciproquement , 0,170000 valent simplement 0,17.

Un nombre entier , ou un nombre qui renferme des décimales , ne change pas de valeur , si on écrit à sa gauche autant de zéros qu'on voudra , ou si on efface les zéros qui pourroient être à la gauche d'un nombre entier , ou à la gauche du zéro qui occupe la place des entiers dans une quantité décimale.

Ainsi 27 est la même chose que 027 , ou 0027 , ou , etc. 3,51 , ou 03,51 , 003,51 sont des quantités égales entre elles. Il en est de même des quantités 0,028 , 00,028 , 0000,028. Réciproquement , 00000033 égale 33 entiers ; 0000,59 égale 0,59.

Puisque la virgule détermine la place des unités simples , et que tous les autres chiffres ont des valeurs dépendantes de leur distance à cette même virgule ; si l'on avance la virgule d'une , deux , trois , etc. places vers la gauche , on rendra le nombre , 10 , 100 , 1000 , etc. fois plus petit ; et au contraire , on le rendra 10 , 100 , 1000 , etc. fois plus grand , si l'on recule la virgule d'une , deux , trois , etc. places vers la droite.

On multiplie donc un nombre qui renferme des décimales , par 10 , 100 , 1000 , etc. en avançant la virgule d'autant de places ou chiffres vers la droite qu'il y a de zéros au multiplicateur. On divise de même par 10 , 100 , 1000 , etc. en reculant la virgule vers la gauche d'autant de places ou chiffres qu'il y a de zéros au diviseur.

Si le nombre à multiplier ne contient que des en-

tiers, on le multiplie par 10, 100, 1000, etc. en ajoutant à sa droite un, deux, trois, etc. zéros, c'est-à-dire, autant qu'il y en a au multiplicateur. On le divise par 10, 100, 1000, etc. en séparant vers la gauche autant de chiffres qu'il y a de zéros au diviseur.

Ainsi 10 fois 43 font 430; 1000 fois 657 font 657000; 100000 fois 471 font 47100000.

10 fois 2,45 font 24,5; 100 fois 0,0035 font 0,35; 10000 fois 2,5 valent 1000 fois 25, et font par conséquent 25000.

Le dixième de 475, ou 475 divisé par 10, donne pour quotient 47,5; la dix-millième partie de 53, ou 00053 (qui est la même chose que 53) divisé par 10000, égale 0,0053; la millième partie de 0,8712, ou 0000,8712 divisé par 1000, égale 0,0008712.

Nous aurons souvent occasion d'employer ces abréviations et transformations, dans le calcul des nouvelles Mesures.

Dans les quantités décimales, on sépare les unités simples, des dixièmes, par une virgule ou par un point supérieur. Dans les calculs des nouvelles Mesures on emploie cette manière de séparer et distinguer l'unité, de ses subdivisions, conjointement avec l'indicateur ou abrégiateur de cette unité.

Ainsi, pour représenter trois francs deux décimes et quatre centimes, ou plus simplement, trois francs ^{fr.} 3,24 ou 3^{fr.} 24. Pour exprimer vingt mètres sept décimètres et huit centimètres, ou plus simplement, vingt mètres ^{mt.} et soixante-dix-huit centimètres, on écrit 20^{mt.} 78, et ainsi des autres. Voyez pour les abréviations des noms des nouvelles Mesures, la Table de la page 2.

Lorsqu'une des subdivisions de l'unité se trouve

nulle, on met un zéro à la place; si l'on n'avoit, par exemple, que des mètres, des décimètres et des millimètres, on mettroit un zéro à la place des centimètres qui manquent.

Ainsi, 71^{mt.}506 signifient soixante et onze mètres cinq décimètres et six millimètres; ou plus simplement, soixante et onze mètres et cinq cent six millimètres.

De même, quand il n'y a point d'unité simple ou d'entiers, on met un zéro avant la virgule ou le point supérieur.

EXEMPLES D'ADDITION.

Addition de francs, décimes et centimes.

	fr.	dme.	cme.		fr.
	36	7	5		36.75
	21	8	6		21.86
	29	6	7		29.67
	32	4	7		32.47
Total.	120	7	5	ou	120.75

Addition de Mesures de longueur.

	mt.	d.mt.	c.mt.		mt.
	17	4	7		17.47
	21	0	6		21.06
	99	3	4		99.84
	12	5	9		12.59
Total.	150	9	6	ou	150.96

Addition de Poids.

	gr.	d.gr.	c.gr.		gr.
	23	3	4		23.34
	91	5	6		91.56
	39	4	1		39.41
	20	0	6		20.06
Total.	174	3	7	ou	174.37

Si l'on n'avoit à ajouter que des subdivisions de l'unité principale, on pourroit prendre pour unité, la plus grande de ses subdivisions. Exemples :

	d.mt.	c.mt.	m.mt.	d.m.mt.		d.mt.
	5	4	3	5		5.435
	8	7	6	3		8.763
	4	9	5	4		4.954
	d.mt.	c.mt.	m.mt.	d.m.mt.	ou	d.mt.
Total.	19	1	5	2		19.152

	myr.gr.	k.gr.	h.gr.	decagr. gr.	d.gr.	myr.gr.
	7	4	8	9	8	7.48987
	5	6	7	3	2	5.67322
	9	5	6	4	5	9.56451
	myr.gr.	k.gr.	h.gr.	decagr. gr.	d.gr.	ou myr.gr.
Total.	22	7	2	7	6	0 22.7276

Addition de Mesures de superficie.

	h.ar.	decar.	ar.	d.ar.		h.ar.
	3	2	5	6		3.256
	4	7	3	2		4.732
	5	8	9	3		5.893
Total.	h.ar.	decar.	ar.	d.ar.	ou	h.ar.
	13	8	8	1		13.881

	mt.q.	d.mt.q.	c.mt.q.	m.mt.q.		mt.q.
	2	2	6	5		2.020605
	7	75	39	27		7.753927
	11	93	87	11		11.938711
Total.	mt.q.	d.mt.q.	c.mt.q.	m.mt.q.	ou	mt.q.
	21	71	32	43		21.713243

Addition de Mesures de capacité.

	l.	d.l.	c.l.	m.l.		l.
	12	7	8	3		12.783
	15	3	5	5		15.355
	8	7	8	6		8.786
Total.	l.	d.l.	c.l.	m.l.	ou	l.
	36	9	2	4		36.924

Addition de Mesures de solidité.

	mt.cb.	d.mt.cb.	c.m.cb.		mt.cb.
	36	7	11		36'007011
	25	125	960		25'125960
	3	702	873		3'702873
	<u>mt.cb.</u>	<u>d.mt.cb.</u>	<u>c.m.cb.</u>	ou	<u>mt.cb.</u>
Total.	64	835	844		64'835844

EXEMPLES DE SOUSTRACTION.

	fr.	dme.	cme.		fr.
	26	5	5		26'55
	17	8	7		17'87
	<u>fr.</u>	<u>dme.</u>	<u>cme.</u>	ou	<u>fr.</u>
Reste	8	6	8		8'68

	ar.	d.ar.	c.ar.		ar.
	37	3	7		37'37
	25	4	9		25'49
	<u>ar.</u>	<u>d.ar.</u>	<u>c.ar.</u>	ou	<u>ar.</u>
Reste	11	8	8		11'88

	mt.q.	d.mt.q.	c.mt.q.		mt.q.
	20	3	10		20'0310
	12	75	47		12'7547
	<u>mt.q.</u>	<u>d.mt.q.</u>	<u>c.mt.q.</u>	ou	<u>mt.q.</u>
Reste	7	27	63		7'2763

	mt.cb.	d.mt.cb.	c.mt.cb.		mt.cb.
	11	27	7		11'027007
	10	188	992		10'188992
	<u>mt.cb.</u>	<u>d.mt.cb.</u>	<u>c.mt.cb.</u>	ou	<u>mt.cb.</u>
Reste		838	15		0'838015

EXEMPLES DE MULTIPLICATION.

On sépare au produit autant de décimales sur la droite, qu'il y en a au multiplicande et au multiplicateur.

des Poids et Mesures.

29

A raison de ^{fr.} 27.85 la chose ,
Combien 43 choses quelconques ?

$$\begin{array}{r} 8355 \\ \hline 11140 \\ \hline \end{array}$$

Produit ^{fr.} 1197.55 ou 1197^{francs.} 5^{dmes.} 5^{cmes.}

A raison de ^{fr.} 35.54 le mètre ,

Combien ^{mt.} 24.26

$$\begin{array}{r} 21324 \\ 7108 \\ 14216 \\ 7108 \\ \hline \end{array}$$

Produit ^{fr.} 862.2004 ou 862^{francs.} 20^{cmes.} environ.

A raison de ^{fr.} 23.26 le kilogramme ,

Combien ^{k.} 12.736

$$\begin{array}{r} 13956 \\ 6978 \\ 16282 \\ 4652 \\ 2326 \\ \hline \end{array}$$

Produit ^{fr.} 296.23936 ou 296^{francs.} 24^{cmes.} environ.

On n'a pas toujours besoin de toutes les décimales qu'un nombre renferme. Quand on veut en supprimer plusieurs, comme dans ce dernier exemple; alors, pour avoir une valeur qui ne diffère pas de la véritable d'une demi-unité de l'ordre du dernier chiffre conservé, il faut augmenter ce dernier chiffre d'une unité, toutes les fois que le premier chiffre de la partie négligée est égal à 5, ou lorsqu'il surpasse 5.

On voit par-là que le calcul décimal engage quelquefois à se contenter d'approximations dans ses ré-

sultats, en sorte qu'il arrive souvent que le multiplicande et le multiplicateur ne sont que des nombres approximatifs. Dans ce cas, le produit est aussi nécessairement approximatif, et l'on est forcé d'y retrancher toutes les décimales d'un degré moindre que celui des unités les plus basses du multiplicande. On peut alors employer la méthode abrégée que donne Bezout dans son Arithmétique (n.^o 55).

Les grandes unités se convertissent en unités plus petites par la multiplication. Cette conversion s'opère aisément dans les nouvelles mesures, en faisant mouvoir la virgule ou le point supérieur vers la droite.

S'il on veut convertir 47 kilogrammes 3 hectogrammes 1 décagramme 8 grammes 8 décigrammes, successivement en hectogrammes, décagrammes, grammes, décigrammes, on aura $47 \overset{\text{k. gr.}}{3} \overset{\text{h. gr.}}{1} \overset{\text{d. gr.}}{8} \overset{\text{d. gr.}}{8}$ égal à $47 \overset{\text{d. gr.}}{3} \overset{\text{gr.}}{1} \overset{\text{d. gr.}}{8} \overset{\text{d. gr.}}{8}$ égal à $47 \overset{\text{d. gr.}}{3} \overset{\text{gr.}}{1} \overset{\text{d. gr.}}{8} \overset{\text{d. gr.}}{8}$.

27 mètres carrés 3 décimètres carrés 75 centimètres carrés valent $27 \overset{\text{d. mt. q.}}{0} \overset{\text{c. mt. q.}}{3} \overset{\text{c. mt. q.}}{7} \overset{\text{c. mt. q.}}{5}$ ou $27 \overset{\text{d. mt. q.}}{0} \overset{\text{c. mt. q.}}{3} \overset{\text{c. mt. q.}}{7} \overset{\text{c. mt. q.}}{5}$.

35 mètres cubes 78 décimètres cubes, valent 35078 décimètres cubes, ou 35078000 centimètres cubes.

On opérera de la même manière pour convertir toute autre espèce de mesure nouvelle, en ses subdivisions décimales.

EXEMPLES DE DIVISION.

Lorsque le diviseur est un nombre entier, on sépare dans le quotient autant de décimales sur la droite, qu'il y a de décimales au dividende. S'il y a aussi des décimales au diviseur, on séparera autant de décimales au quotient, que le dividende en contient de plus que le diviseur. S'il y avoit plus de décimales dans le diviseur que dans le dividende, on mettroit à la suite du dividende un nombre de zéros suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans l'un et dans l'autre.

Toutes ces règles peuvent se réduire à celle que nous avons rapportée ci-dessus, page 23 : elle est simple et facile ; elle a de plus l'avantage d'écarter toute distinction.

On trouve l'application de ces diverses règles dans les exemples suivans :

213 mètres coûtent 1829^{fr.}·67 ; combien le mètre ?

$$\begin{array}{r}
 1829\cdot67 \\
 \underline{1704} \\
 1256 \\
 \underline{1065} \\
 1917 \\
 \underline{1917} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 213 \\
 \hline
 \text{fr.} \\
 8\cdot59 \text{ ou } 8\text{francs. } 59^{\text{cmes.}}
 \end{array}$$

6^{décal.}·5 d'eau-de-vie coûtent 160^{fr.}·55, combien le décalitre ?

$$\begin{array}{r}
 16055 \\
 \underline{130} \\
 305 \\
 \underline{260} \\
 455 \\
 \underline{455} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 65 \\
 \hline
 \text{fr.} \\
 24\cdot7 \text{ ou } 24\text{francs. } 7^{\text{dmes.}}
 \end{array}$$

21^{décal.}·82 coûtent 506^{fr.}, combien le décalitre ?

$$\begin{array}{r}
 50600 \\
 \underline{4364} \\
 6960 \\
 \underline{6546} \\
 4140 \\
 \underline{2182} \\
 19580 \\
 \underline{17456} \\
 21240 \\
 \underline{19638} \\
 1602
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2182 \\
 \hline
 \text{fr.} \\
 23\cdot189 \text{ ou } 23\text{francs. } 19^{\text{cmes.}} \text{ environ.}
 \end{array}$$

^{h.gr.} 6.52 d'or coûtent ^{fr.} 1499.6, combien l'hectogramme ?

$$\begin{array}{r}
 149960 \\
 1304 \\
 \hline
 1956 \\
 1956 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{r} 652 \\ \hline \text{fr.} \\ 230 \end{array}$$

On emploie la division pour convertir les petites unités en plus grandes. Cette conversion est très-simple dans les nouvelles Mesures. Il suffit de faire mouvoir le point supérieur vers la gauche. Par exemple :

^{m.mt.} 32839 valent ^{cm.} 3283.9, ou ^{dmt.} 328.39, ou ^{mt.} 32.839, ou ^{déca.mt.} 3.2839, que l'on peut écrire ainsi : 3 décamètres 2 mètres 8 décimètres 3 centimètres 9 millimètres.

De la Réduction des Mesures anciennes en nouvelles, et des Mesures nouvelles en anciennes. Usage des deux dernières Colonnes du Tableau général des nouvelles Mesures.

Ces colonnes présentent les valeurs des Mesures nouvelles en Mesures anciennes, et les valeurs de quelques Mesures anciennes en Mesures nouvelles.

Ces valeurs ou rapports peuvent servir,

1.^o A déterminer le prix d'une Mesure nouvelle ou ancienne, lorsque le prix de la Mesure ancienne ou nouvelle est donné.

Pour cela on multiplie le prix donné par le nombre qui, dans le Tableau, exprime combien il faut de ces mesures dont le prix est donné, pour égaler celle dont on cherche le prix.

E X E M P L E.

Si le pied d'une étoffe coûte 17 fr., quel sera le prix du mètre ?

On

On trouve dans la cinquième colonne du Tableau la valeur du mètre en pieds 3.07844. Multipliant cette quantité par 17, le produit est 52^{fr.} 33^{cmes.} environ pour le prix du mètre lorsque le pied vaut 17 francs.

$$\begin{array}{r}
 3.07844 \\
 \times 17 \\
 \hline
 2154908 \\
 307844 \\
 \hline
 \text{fr.} \\
 52.33348
 \end{array}$$

Si l'hectare d'un terrain se vend 1834 fr. à combien revient l'arpent (eaux et forêts)?

La dernière colonne du Tableau donne la valeur de l'arpent en hectares, 0.51072^{hect.}. Multipliant cette quantité par 1834, on a 936^{fr.} 66^{cmes.} environ pour le prix de l'arpent.

$$\begin{array}{r}
 0.51072 \\
 \times 1834 \\
 \hline
 204288 \\
 153216 \\
 408576 \\
 51072 \\
 \hline
 936.66048
 \end{array}$$

Ces mêmes valeurs ou rapports peuvent servir, 2.^o à réduire un nombre quelconque de Mesures anciennes en Mesures nouvelles, et réciproquement.

Pour cela on multiplie le nombre donné, par celui qui, dans le tableau, exprime combien la Mesure dont le nombre est donné, vaut en Mesures auxquelles on veut le réduire.

E X E M P L E S.

Combien 48 pintes de Paris valent-elles de litres?
Le Tableau donne pour la valeur de la pinte de

$$\begin{array}{r}
 \text{Paris en litres,} \quad 0.93132 \\
 \text{multipliant par} \quad 48 \\
 \hline
 745056 \\
 372528 \\
 \hline
 \end{array}$$

Le produit est 44.70336 ou 44 litres 7 décilitres environ.

Combien 82 kilogrammes valent-ils en livres poids de marc ?

Le Tableau donne pour la valeur du kilogramme,

$$\begin{array}{r}
 2.042876 \\
 \text{à multiplier par} \quad 82 \\
 \hline
 4085752 \\
 16343008 \\
 \hline
 \end{array}$$

Le produit est 167.515832 ou 167 liv. 52 cmes. environ.

Dans ces derniers exemples où le multiplicande est un nombre approximatif, les deux dernières décimales du produit peuvent être fausses. On est donc obligé de les négliger et de se contenter des autres décimales.

Afin d'obtenir un résultat plus exact, et qui ne pût différer du véritable que d'une très-petite quantité, il faudroit se servir de *valeurs* ou *rapports* exprimés avec un plus grand nombre de décimales que les précédens. Comme il est des cas où l'on peut avoir besoin de semblables résultats, nous donnons ci-dessous les valeurs des petits élémens des anciennes et des nouvelles Mesures, exprimées soit exactement, soit avec une suite de 20 décimales.

Dans la réduction des Mesures anciennes en nouvelles, et dans celle des Mesures nouvelles en anciennes, leur usage est le même que celui que nous venons d'indiquer pour les *valeurs* contenues au *Tableau général*. On doit seulement avoir soin de convertir en leurs plus petites subdivisions, les Mesures que l'on veut réduire. Cette conversion est très-facile quand il s'agit de Mesures nouvelles : nous l'avons déjà remarqué. S'il est question de Mesures ancien-

nes, on fera les opérations indiquées dans Bezout (Arithmétique n.º 57).

Valeurs des petits élémens des Mesures nouvelles, exprimées en Mesures anciennes.

1 Millimètre.	ligne. 0.443296	} EXACTEMENT.
1 Millimètre carré.	ligne carrée. 0.196511343616	
1 Millimètre cube.	ligne cube. 0.087112692579598336	
1 Milligramme.	grain [poids de marc.] 0.01882715	
1 Centime.	deniers [tournois.] 2.43	
1 Seconde décim. [Circonfér. 400°.]	seconde ancienne. 0.324	
1 Seconde décimale [Jour 10 h.]	seconde ancienne. 0.864	

Valeurs des petits élémens des Mesures anciennes, exprimées en Mesures nouvelles.

1 Ligne.	millimètres. 2.25582906229697538439
1 Ligne carrée.	millimètres carrés. 5.08876475830365124970
1 Ligne cube.	millimètres cubes. 11.47938343297402017995
1 Grain [poids de marc.]	milligrammes. 53.11478370332206414672
1 Denier [tournois.]	centimes. 0.41152263374485596708
1 Seconde [Circonférence 360°.]	secondes décimales. 3.08641975308641975309
1 Seconde [Jour 24 h.]	secondes décimales. 1.15740740740740740741

On peut, au moyen de ces *valeurs*, obtenir celle de toute autre espèce de Mesure ancienne, dont le rapport avec une des Mesures précédentes seroit connu.

Sachant, par exemple, que l'aune de Paris égale 3 pieds lignes.
7 pouces 10 lignes $\frac{2}{3}$, ou 526.83333, etc. on multiplie par ce rapport, la valeur de la ligne exprimée en Mesures nouvelles. Le produit 1188.4459443201231983 est la valeur de l'aune en millimètres.
m.mt.

Divisant 1 mètre, ou 1000^{m.mt.}, par cette valeur de l'aune

36 *Nouveau système des Poids et Mesures:*

en millimètres , le quotient 0.8414349888434960578 est la valeur du mètre en parties décimales de l'aune.
anne.

Si l'on veut connoître la valeur d'une quantité décimale , en subdivisions d'une mesure ancienne , on multipliera les chiffres décimaux seulement , par le nombre qui marque en combien de parties se divise l'unité principale de cette mesure ancienne. Puis on retranchera , dans le produit , par un point supérieur , autant de chiffres à droite qu'il y a de chiffres décimaux dans la partie multipliée , et l'on aura à gauche du point le nombre des premières subdivisions. En opérant de la même manière sur les nouvelles décimales , en les multipliant par le nombre qui marque en combien de parties une de ces premières subdivisions se divise , et retranchant toujours vers la droite le même nombre de chiffres par un point supérieur , on aura à gauche du point , le nombre des secondes subdivisions. On continuera de même pour trouver les autres. Mais on observera que le nombre décimal étant presque toujours approximatif , il ne faut pas chercher dans la transformation , d'approximation plus grande que celle qui est fournie par le nombre à transformer.

Exemple : évaluer la partie décimale du nombre
liv.
 167.515832 , en onces , gros , deniers et grains poids de marc.

Il faut savoir que la livre ancienne vaut 16 onces , l'once 8 gros , le gros 3 deniers , le denier 24 grains. On multipliera donc , d'après la règle ci-dessus , 515832 par 16 , et retranchant du produit les six premiers chiffres de droite ,
onces
on aura 8.153212 . Multipliant 153212 par 8 , et retranchant six chiffres du produit , on aura gros 1.226496 . Multipliant 226496 par 3 , on aura deniers 0.679488 . Enfin 679488 multipliés par 24 donnera grains 16.306712 . Réunissant tous ces résultats , on trouvera que 167.515832 valent 167
liv.
 8 onces , 1 gr. 0 den. , 19 gr. à très-peu-près.

FIN.

NB. La Table des Principes est à la page 217.
et La Table des Matières à la page 1.

TABLEAU DES NOUVELLES MESURES,

Contenant leurs Noms, leurs Rapports avec l'Unité fondamentale, leurs Subdivisions, et leurs Valeurs en Mesures anciennes.

NOMS DES NOUVELLES MESURES.		LEURS RAPPORTS AVEC L'UNITÉ FONDAMENTALE.		LEURS SUBDIVISIONS DÉCIMALES.	VALEURS EN MESURES ANCIENNES.	VALEURS DE QUELQUES ANCIENNES MESURES EN MESURES NOUVELLES.
NOMS SYSTÉMATIQUES.	SYNONYMES. (*)					
MESURES DE LONGUEUR.	Quart du Méridien terrestre.	Mètres.	Valeurs en Arcs décim. du Méridien terrestre.	100 Degrés décimaux.	Toises.	Lieu terrestre de 25 au deg.
	Degré décimal.	1000000	100°	100 Min. décim. ou 10 myria.	5130740	2280 Toises 2 Pieds. = 4.44445
	Myriamètre.	100000	1°	10 Kilomètres.	51307.4 ou 51307 2 4 9 6	Lieu marine de 20 au degré 2850 T. 2 P. 2 1 = 5.55557
	Kilomètre.	10000	10'	10 Hectomètres.	5130.74 5130 4 5 3 36	Lieu moyenne 2565 T. 2 P. = 4.99993
	Hectomètre.	1000	1'	10 Décamètres.	513.074 513 0 5 3 336	Lieu de poste 2000 T. = 3.89807
	Décamètre.	100	10''	10 Mètres.	51.3074 51 1 10 1 583	Toise 6 P. = 1.949037
	MÈTRE.	10	1''	10 Décimètres.	Pieds. 3.07844 3 0 11 2 96	Pied. = 0.324839
	Décimètre.	1	10'''	10 Centimètres.	Pouces. 3.69413 3 8 330	Aune de Paris. = 1.188446
	Centimètre.	0.1	1'''	10 Millimètres.	Lignes. 4.43296 4 433	Canne d'Avignon 6 P. 1 p. = 1.9761
	Millimètre.	0.01	10'''		0.443296 0.443	Canne d'Avignon Arpent. 6 P. 1 p. 4 l. = 1.9851
						Canne de Marseille. = 2.0129
MESURES DE SUPERFICIE.	Myriare.	Mètres carrés.		10 Kilares.	Toises carrées.	Hectares.
	Kilare.	1000000 ou Kilomètre carré.		10 Hectares.	263244.93	Arpent Eaux et For. 48400 P. quar. = 0.510720
	Hectare.	100000		10 Décares.	26324.49	Mètres carrés.
	Décare.	10000 ou Hectomètre quar.		10 Ares.	2632.45 ou 1 95 802	Toise carrée 16 P. quar. = 3.798744
	Are.	1000		10 Déciars.	263.24 19 580	Pied carré. = 0.1055207
	Déciare.	100 ou Décamètre carré.		10 Centiars.	26.32 1 958	Salmée d'Avignon 1733 Cann. quar. arp. = 0.6829
	Centiare, ou Mètre quar.	10		100 Décimètres qrés.	2.63 0 196	Canne carrée d'Avignon Arpent. = 3.9407
	Décimètre carré.	1 Mètre carré.		100 Centimètres qrés.	0.26 0 020	Quarterée de Marseille. = 0.2051
	Centimètre carré.	0.01		100 Millimètres qrés.	Pouces carrés. 13.647	
	Millimètre carré.	0.0001			Lignes carrées. 19.651	
MESURES DE CAPACITÉ ET DE SOLIDITÉ.	Mesures de capacité.	Mesures corrépondantes de solidité.		10 Hectolitres.	Pieds cubes. Muid de blé. Corde de bois.	Pied cube. = 34.27726
	Kilolitre.	Mètre cube.	1 Mètre cube.	10 Décalitres.	29.1739 ou 0.53885 ou 0.2605	Muid de vin 288 Pintes de Paris. = 268.21952
	Hectolitre.		0.1	10 Litres.	Setier. Solive. 2.9174 0 64062 0 97246	Pinte de Paris. = 0.93132
	Décalitre.		0.01	10 Décilitres.	Boisseau. Velle. 0.2917 0.76874 1.3422	Pinte d'Avignon. = 0.876
	LITRE.	Décimètre cube.	0.001 ou Décimèt. cube	10 Centilitres.	Pouces cubes. Litron. 50.4124 1.23 1.07374	Pinte de Marseille. = 1.073
	Décilitre.		0.0001	10 Millilitres.	Grains. 5.0412 0.10737	Muid de blé 144 Boiss. de Paris. = 1873.195
	Centilitre.		0.00001			Boisseau de Paris. = 13.008
	Millilitre.		0.000001			Salmée d'Avignon. = 199.633
	Centim. cube.		0.0000001			Panal de Marseille. = 19.345
POIDS.		Grammes.		1000 Kilogrammes.	Livres poids de marc. Liv. Onc. Gros. Grain.	Quintal 100 Liv. Poids de marc. = 48.9506
		1000000 Poids du mètre cube d'eau. (**)		100 Kilogrammes.	2042.876 ou 2042 14 0 14	Livre même poids. = 0.4895
	Myriagramme.	100000		10 Kilogrammes.	204.2876 204 4 4 59	Quintal d'Avignon poids de romaine. = 40.7922
	Kilogramme.	10000		10 Hectogrammes.	20.42876 20 6 6 63.5	Livre d'Avignon même poids. = 0.4079
	Hectogramme.	1000 Poids du décimètre cube d'eau. (**)		10 Décagrammes.	2.042876 2 0 5 35.15	Quintal de Marseille poids de romaine. = 40.8431
	Décagramme.	100		10 Grammes.	Onces. 3.268601 3 2 10.72	Livre de Marseille même poids. = 0.4084
	GRAMME.	10		10 Décigrammes.	Gros. 2.61488 2 44.27	
	Décigramme.	1 Poids du centimètre cube d'eau. (**)		10 Centigrammes.	Deniers. 0.78446 18.827	
	Centigramme.	0.1		10 Milligrammes.	Grains. 1.883 1.883	
	Milligramme.	0.01			0.188 0.188	
MONNOIES.	FRANG.	1 fr. Pièce d'arg. du poids de 5 grammes à 1.0 d'alliage.		10 Décimes.	Livres tournois. Liv. Sols. Den. 1.0125 ou 1 0 3	Livre tournois 20 Sols. = 0.987654
	Décime.	0.1 Pièce de cuivre du poids de 2 décagrammes.		10 Centimes.	0.1013 2 0.3	Sols 12 Deniers. = 0.049383
	Centime.	0.01 Pièce de cuivre du poids de 2 grammes.			0.0101 2 43	Denier. = 0.004115
DIVISION DU CERCLE.	Circonfér. du Cercle.	Degrés.		4 Quarts de cercle.	Degrés de l'ancienne division.	Degré de l'ancienne division
	Quart du Cercle.	400		100 Degrés décimaux.	360	du Cercle. = 1.111111
	Degré décimal.	100		100 Minutes décimal.	90 Minutes.	Minute. = 0.018519
	Minute décimale.	1		100 Secondes décim.	54 Secondes.	Seconde. = 0.000309
	Seconde décimale.	0.01		10 Tierces décimales.	32.4	

(*) Conformément à l'Arrêté des Consuls, du 13 Brumaire an IX, les dénominations systématiques des nouveaux Poids et Mesures peuvent, dans les actes publics comme dans les usages habituels, être traduites par les noms français qui leur correspondent dans la II^e colonne de ce Tableau. La dénomination MÈTRE n'aura point de synonyme dans la désignation de l'Unité fondamentale des Poids et Mesures. Aucune Mesure ne pourra recevoir de dénomination publique qu'elle ne soit un multiple ou un dividende décimal de cette Unité.

(**) Eau distillée, pesée dans le vide à la température où elle est à son maximum de condensation, vers —4 degré du thermomètre centigrade.

