

www.e-rara.ch

Cours de mathématiques, à l'usage des gardes du pavillon et de la marine

Les principes généraux de la mécanique, précédés des principes de calcul qui servent d'introduction aux sciences physico-mathématiques

Bézout, Étienne

A Paris, An VII [1799]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5601

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-21892>

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

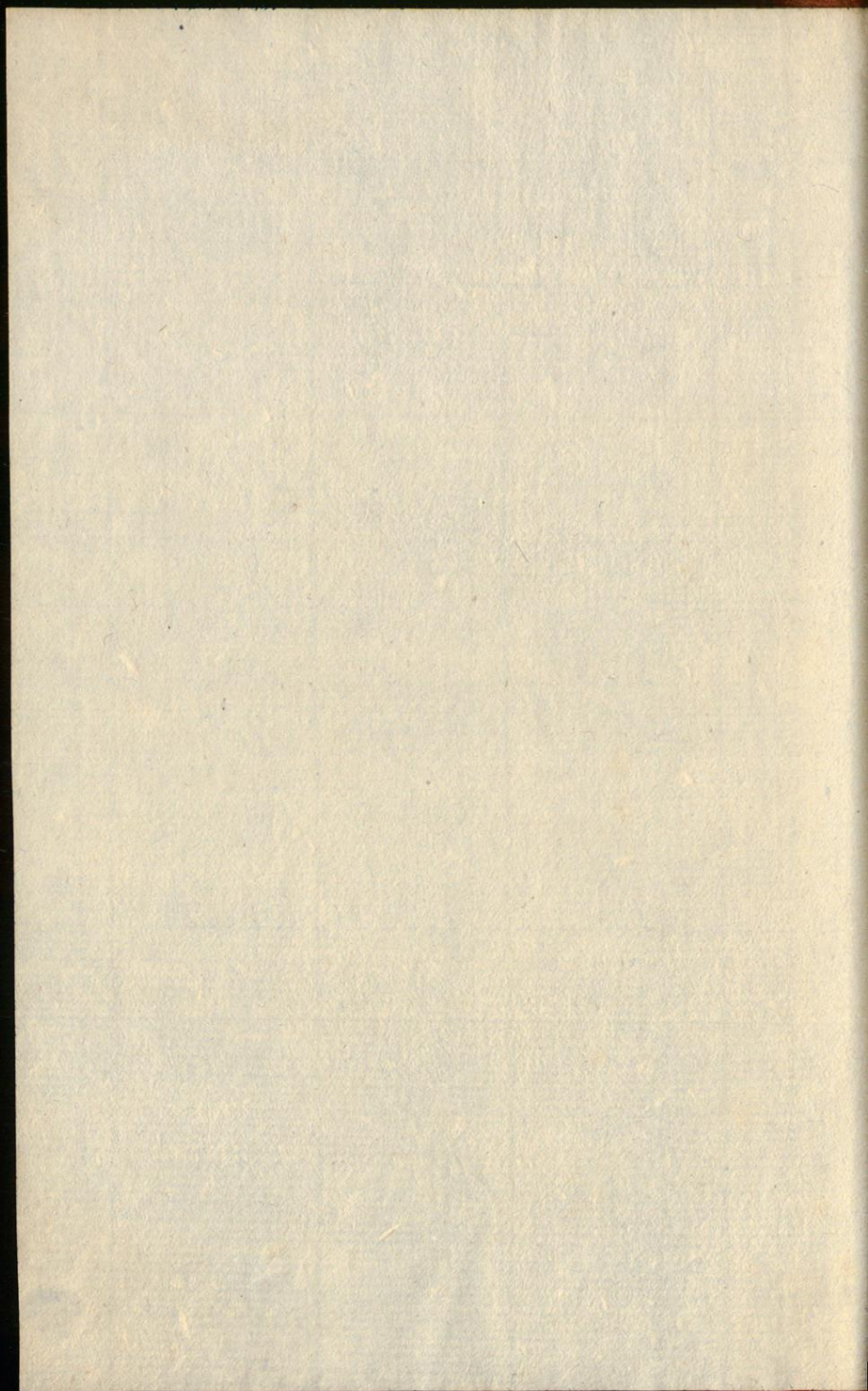
Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]



~~29102~~ (R2)

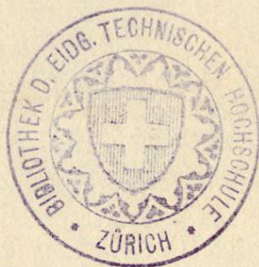
Rar 5601:4





COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

QUATRIÈME PARTIE.



COURS
DE
MATHÉMATIQUES

COURS
DE
MATHÉMATIQUES

QUATRIÈME PARTIE

C O U R S
D E
MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie des Sciences, Examineur
des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Élèves
& des Aspirans au Corps de l'Artillerie, & Censeur
de Livres.

QUATRIÈME PARTIE,

*Contenant les Principes généraux de la MÉCANIQUE,
Précédés des Principes de Calcul qui servent d'introduction
aux Sciences Physico-Mathématiques.*

NOUVELLE ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE.



A P A R I S,

Chez RICHARD, CAILLE & RAVIER, Libraires, rue
Haute-Feuille, N°. 11, au coin de la rue Serpente.

AN VII.

C O U R S

MATHÉMATIQUES

DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT

ET DE LA MAIRIE

Par M. BOUTIER, professeur de Mathématiques
au Lycée de la Ville de Paris, et ancien élève
de l'École Polytechnique. Deuxième édition, revue
et corrigée.

QUATRIÈME PARTIE

CHAPITRE I. Des fonctions algébriques.
Section I. Des fonctions rationnelles.
Par M. BOUTIER, professeur de Mathématiques
au Lycée de la Ville de Paris, et ancien élève
de l'École Polytechnique.

NOUVELLE ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE

PAR M. BOUTIER

A PARIS

CHEZ M. BOUTIER, Libraire, Palais National, ci-devant des Arts, ci-après de la République, ci-après de la Nation, ci-après de la Liberté, ci-après de l'Égalité, ci-après de la Fraternité, ci-après de la Justice, ci-après de la Vérité, ci-après de la Sagesse, ci-après de la Force, ci-après de la Gloire, ci-après de l'Immortalité.

Il est permis de copier, pour son usage personnel, tout ce qui est imprimé dans ce livre, sans en payer de droits, pourvu qu'on en cite le nom de l'auteur.

Paris, le 10 Mars 1793, l'an 2 de la Liberté.

A Paris, chez M. BOUTIER, Libraire, Palais National, ci-devant des Arts, ci-après de la République, ci-après de la Nation, ci-après de la Liberté, ci-après de l'Égalité, ci-après de la Fraternité, ci-après de la Justice, ci-après de la Vérité, ci-après de la Sagesse, ci-après de la Force, ci-après de la Gloire, ci-après de l'Immortalité.



P R É F A C E.

JE me suis proposé dans cet Ouvrage, de mettre les Lecteurs en état d'entendre & d'appliquer la mécanique. L'étude des principes généraux de cette science, est facile, & n'exige guères d'autres connoissances mathématiques, que l'Arithmétique & la Géométrie ordinaires. Les abstractions qu'on s'y permet, & avec raison d'abord, simplifient l'objet : & une mécanique qui se borneroit à ces connoissances générales, feroit, sans doute, à la portée des Lecteurs ; mais les Lecteurs ne seroient encore, que peu en état d'appliquer la mécanique.

Dès qu'on voudra rendre la mécanique utile, il faut sortir des suppositions par lesquelles on est obligé de commencer dans l'étude des principes généraux ; il faut cesser de faire abstraction de la masse des machines, de leur pesanteur, du frottement, &c. ; cesser de considérer l'action des corps comme toujours réunie à leur centre de gravité, &c. ; cesser de regarder les machines comme ne partageant point l'action de la force motrice, &c. ; en un mot, avoir égard à l'état réel & physique où sont les choses dans la nature. Dès lors le nombre des élémens qui

entrent dans chaque question, étant augmenté, il devient nécessaire d'employer pour la résolution de ces questions, des méthodes plus efficaces; c'est dans cette vue que nous avons fait précéder la mécanique, d'une courte exposition des principes de Calcul qui servent d'introduction aux Sciences Physico-mathématiques. Nous nous y sommes déterminés d'autant plus volontiers, qu'indépendamment de ce que ces principes deviennent souvent d'un usage indispensable, même dans des questions qui auroient paru fort simples, ils sont d'ailleurs (si l'on en excepte ce qu'on trouvera en petit caractère, & dont l'usage est moins fréquent) une suite si naturelle des connoissances exposées dans la troisième Partie, qu'ils ne peuvent qu'être entendus avec facilité, dès qu'on possèdera celles-ci.

A l'égard de la mécanique elle-même, les objets que nous y avons examinés sont trop nombreux pour pouvoir être passés ici en revue, avec quelque détail. Nous avons renfermé dans ce premier volume, tout ce que nous avons compris sous le nom de Principes généraux de la Mécanique: c'est-à-dire, les lois du mouvement simple, uniforme ou varié; les lois du mouvement composé; la composition & décomposition des forces; l'usage des momens pour cette composition & cette décomposition; l'application de cette

théorie, à la recherche des centres de gravité, & des propriétés de ce centre. Ces principes généraux, dont nous donnons d'ailleurs, par anticipation, diverses applications, particulièrement au navire, sont suivis des lois de l'équilibre des fluides, & des corps qui y sont plongés : cette partie a un rapport trop direct au navire, pour ne pas trouver place dans cet Ouvrage.

Le second volume renferme l'application de ces principes généraux, à différens cas de mouvement & d'équilibre. Nous y avons examiné un très-grand nombre d'objets ; & si les bornes qu'il faut enfin se prescrire, ne nous ont pas permis d'y en comprendre un plus grand nombre, nous espérons que ce que nous y avons dit, ne remplira pas moins les vues que nous nous sommes proposées, de mettre les Lecteurs en état d'entendre & d'appliquer la mécanique.

Au reste, on ne doit pas perdre de vue que cet Ouvrage étant un Ouvrage de principes, on n'a pu ni dû se livrer à beaucoup de détails dont pourroient être susceptibles quelques-unes des questions mécaniques qu'on y a traitées. Il en est plusieurs qu'il suffit d'examiner avec un peu d'attention, pour voir qu'elles doivent faire matière d'un ouvrage à part : nous nous sommes borné à en exposer les principes. Telles sont la plupart des questions concernant le navire : cette

machine qui fait tant d'honneur à l'esprit humain, dans l'état où elle est, ne lui en laisse peut-être pas encore moins à acquérir; surtout si l'on considère que l'état où elle est parvenue, est en grande partie le fruit d'un très-long tâtonnement; mais que ce qui reste à faire pour la perfectionner, ne doit être attendu que du concours de l'observation avec la théorie.

Les travaux de M. Bouguer, que l'on ne peut trop consulter sur cet objet, ont déjà préparé de très-grands secours; & les progrès actuels de la Physique & du Calcul, donnent lieu d'espérer que l'on fera encore des pas très-utiles dans cette carrière.



T A B L E

D E S M A T I È R E S.

<i>P</i> R I N C I P E S D E C A L C U L qui servent d'introduction aux Sciences Physico-Ma- thématiques ,	page 1
N O T I O N S P R É L I M I N A I R E S ,	ibid.
Éléments du Calcul différentiel ,	9
Des Différences secondes , troisièmes , &c.	16
Des différentielles de Sinus , Cosinus , &c.	21
Des Différentielles logarithmiques ,	24
Des différentielles des quantités exponen- tielles ,	29
Applications des Règles précédentes ,	30
Applications aux Soutangentes , Tangentes , Sounormales , &c. des Lignes courbes ,	ibid.
Application aux limites des Lignes courbes , & en général , aux limites des quantités , & aux questions de maximis & minimis ,	52
Des Points multiples ,	73
Des Points d'inflexion visibles & invisibles ,	83

x TABLE DES MATIÈRES.

<i>Des Points de rebroussement de différentes espèces, & des différentes sortes d'attouchement des branches d'une même Courbe ,</i>	page 90
<i>Des Rayons de courbure , ou de la développée ,</i>	92
<i>Éléments du Calcul intégral ,</i>	98
<i>Des différentielles à une seule variable , qui ont une intégrale algébrique ; & premièrement des différentielles monomes ,</i>	100
<i>Des Différentielles complexes dont l'intégration rentre dans la règle fondamentale ,</i>	102
<i>Des différentielles binomes qui peuvent s'intégrer algébriquement ,</i>	106
<i>Application des règles précédentes , à la quadrature des Courbes ,</i>	113
<i>Application à la rectification des lignes courbes ,</i>	122
<i>Application aux Surfaces courbes ,</i>	124
<i>Application à la mesure des Solidités ,</i>	126
<i>De l'Intégration des quantités qui renferment des Sinus & Cosinus ,</i>	139
<i>De la manière d'intégrer par approximation , & quelques usages de cette méthode ,</i>	141

TABLE DES MATIÈRES. xj

<i>Usage des approximations précédentes , pour l'intégration des diverses quantités ,</i>	pag. 157
<i>De la manière de ramener (lorsque cela est possible) l'intégration d'une différentielle proposée à celle d'une autre différentielle connue , & de distinguer les cas où cela se peut ,</i>	178
<i>Des Fractions rationnelles ,</i>	184
<i>De quelques transformations qui peuvent faci- liter les Intégrations ,</i>	195
<i>De l'Intégration des quantités exponen- tielles ,</i>	199
<i>De l'Intégration des quantités à deux , ou à un plus grand nombre de Variables ,</i>	201
<i>Des Équations différentielles ,</i>	206
<i>Des Équations différentielles du second , troisième , &c. ordre ,</i>	224

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE.

<i>NOTIONS PRÉLIMINAIRES ,</i>	237
<i>Du Mouvement uniforme ,</i>	239
<i>Des Forces & de la quantité de Mouvement ,</i>	242
<i>Des Mouvements uniformément accélérés ,</i>	246
<i>Du Mouvement libre des Corps pesans ,</i>	251

xij TABLE DES MATIÈRES.

<i>Des mouvemens variés de quelque manière que ce soit ,</i>	page 259
<i>De l'équilibre entre des forces directement opposées ,</i>	263
<i>Du Mouvement composé ,</i>	267
<i>De la Composition & de la Décomposition des forces ,</i>	275
<i>Des Momens , & de leurs usages pour la com- position & la décomposition des forces ,</i>	286
<i>Des forces qui agissent dans des plans diffé- rens ,</i>	297
<i>Des Centres de gravité ,</i>	304
<i>Propriétés des Centres de gravité ,</i>	340
<i>Principe général de l'Équilibre des Corps ,</i>	350
<i>Principe général du Mouvement ,</i>	352
<i>Conséquences qui résultent des deux principes précédens , par rapport au mouvement du Centre de gravité des Corps ,</i>	353
DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES <i>& des corps qui y sont plongés ,</i>	357

Fin de la Table des Matières.



PRINCIPES DE CALCUL,

*Qui servent d'Introduction aux
Sciences Physico-mathématiques.*

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. **N**ous avons donné, dans la troisième Partie, les règles nécessaires pour calculer les quantités, dans tel état de grandeur qu'on puisse les supposer. Mais nous n'avons point considéré les variations par lesquelles ces quantités arrivent à tel ou tel état de grandeur. Ce nouvel objet à considérer dans les quantités, donne lieu à une autre branche de l'Analyse, qui est de la plus grande utilité dans les Sciences Physico-mathématiques & principalement dans la

Marine. Mécan. 1^{re} Partie,

A

Mécanique, où l'on ne parvient souvent à déterminer les rapports des quantités qui entrent dans les questions relatives à cette science, qu'après avoir considéré les rapports de leurs variations, c'est-à-dire, des accroissemens ou des diminutions qu'elles reçoivent à chaque instant.

Nous allons donc, avant que d'entrer en mécanique, nous arrêter quelques momens sur cette partie du calcul qui a pour objet de décomposer les quantités jusques dans leurs élémens, & de revenir de ces élémens aux quantités mêmes. A proprement parler, ce n'est point une nouvelle méthode de calcul, que nous allons exposer; c'est une application des méthodes de la troisième Partie, & même une simplification de ces règles.

2. Nous nous proposons deux objets: le premier d'enseigner à descendre des quantités à leurs élémens; & la méthode, pour y parvenir, s'appelle calcul *différentiel*. Le second, nous montrera la route pour revenir des élémens des quantités, aux quantités mêmes, & nous appellerons cette méthode calcul *intégral*.

La partie de ces deux calculs qui nous importe véritablement, n'est qu'un corollaire des méthodes de la troisième Partie, & peut être saisie avec facilité, dès qu'on est instruit de ces méthodes. Quant à la

partie de ces mêmes calculs, qui exige des recherches plus délicates, ou d'une application moins fréquente, nous la distinguerons, à l'ordinaire, par un caractère d'impression plus petit.

3. Comme nous allons considérer les quantités relativement à leurs élémens, c'est-à-dire, relativement à leurs accroissemens infiniment petits, il convient, avant que d'aller plus loin, d'exposer ce que nous entendons par quantités infiniment petites, infinies, &c., & de faire connoître la subordination qu'on doit mettre entre ces quantités dans le calcul.

4. Nous disons qu'une quantité est infinie ou infiniment petite à l'égard d'une autre, lorsqu'il n'est pas possible d'assigner aucune quantité assez grande ou assez petite pour exprimer le rapport de ces deux-là, c'est-à-dire, le nombre de fois que l'une contient l'autre.

Comme une quantité ne peut, sans cesser d'être quantité, cesser d'être susceptible d'augmentation ou de diminution, il n'y a point de quantité si petite ou si grande à l'égard d'une autre, que l'on ne puisse en concevoir une troisième infiniment plus petite ou plus grande.

Par exemple, si x est infini à l'égard de a , quoique dès lors il soit impossible d'assigner leur rapport, cela n'empêche point que je ne puisse concevoir une troisième quantité

qui soit à l'égard de x , ce que x est à l'égard de a ; c'est-à-dire, qui soit le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seroient $a : x :: x :$; ce quatrième terme qui est $\frac{x^2}{a}$ fera donc infiniment plus grand que x , puisqu'il contient x autant que x est supposé contenir a . De même, rien ne m'empêche de concevoir le quatrième terme de cette proportion $x : a :: a :$; & ce quatrième terme qui sera $\frac{a^2}{x}$ fera infiniment plus petit que a , puisqu'il doit être contenu dans a , autant que celui-ci est supposé contenu dans x . Rien ne borne l'imagination à cet égard, & l'on peut concevoir, de même, une nouvelle quantité qui soit encore infiniment plus petite à l'égard de $\frac{a^2}{x}$ que celle-ci ne l'est à l'égard de a . On appelle cela des *infinis* ou des *infiniment petits* de différens ordres.

En général le produit de deux quantités infinies ou infiniment petites du premier ordre est infiniment plus grand ou infiniment plus petit que chacun de ses deux facteurs.

En effet $xy : y :: x : 1$; or si x est infini, il contient une infinité de fois l'unité, donc xy contient une infinité de fois y .

Un raisonnement semblable fait voir qu'un produit ou une puissance de tant de dimensions qu'on voudra, & dont tous les facteurs sont infinis, est d'un ordre d'infini marqué par le nombre de ses facteurs.

Ainsi lorsque x est infini, x^4 est infini du quatrième ordre, c'est-à-dire, infiniment plus grand que x^3 , qui est

infiniment plus grand que x^2 , qui lui-même est infiniment plus grand que x . En effet $x^4 : x^3 :: x^3 : x^2 :: x^2 : x :: x : 1$. Ce seroit le contraire si x étoit infiniment petit; alors x^4 seroit infiniment petit du quatrième ordre, c'est-à-dire, infiniment plus petit que x^3 ; celui-ci infiniment plus petit que x^2 ; & ce dernier, infiniment plus petit que x .

Mais si un produit n'a pas tous ses facteurs infinis, alors son ordre d'infini ne doit se déterminer que par le nombre de ses facteurs infinis.

Ainsi axy n'est que du même ordre que xy ; en effet $axy : xy :: a : 1$, & ce dernier rapport peut être évalué, si a est une quantité finie.

Remarquons bien cette différence dans la comparaison des infinis ou infiniment petits, entre eux ou à l'égard des quantités relativement auxquelles ils sont infinis ou infiniment petits. Si x est infini à l'égard de a , rien ne peut mesurer leur rapport; mais dans la même supposition, le rapport de x à x multiplié ou divisé par tel nombre fini que l'on voudra, est un rapport fini; ainsi, x infini ou infiniment petit est incomparable à l'égard de a , supposé un nombre fini; mais il ne l'est point à l'égard de ax , puisque x est à $ax :: 1 : a$.

5. Pour exprimer par le calcul qu'une quantité x est infinie à l'égard d'une autre quantité a , ou, ce qui est la même chose, pour exprimer que a est infiniment

petit à l'égard de x , il faut, dans l'expression algébrique où ces quantités se trouveroient ensemble, rejeter toutes les puissances de x inférieures à la plus élevée, & par conséquent aussi tous les termes sans x .

Par exemple, si dans $\frac{3x+a}{5x+b}$, on suppose x infini à l'égard de a & de b , on supprimera a & b , & l'on aura $\frac{3x}{5x}$ ou $\frac{3}{5}$ pour la valeur de $\frac{3x+a}{5x+b}$, lorsque x est infini. En

effet $\frac{3x+a}{5x+b}$, est la même chose que $\frac{3 + \frac{a}{x}}{5 + \frac{b}{x}}$ (en divisant,

haut & bas, par x); or dès qu'on suppose que x est infini à l'égard de a & de b , les fractions $\frac{a}{x}$ & $\frac{b}{x}$ qui représentent les rapports de a & de b à x , doivent nécessairement être supprimées, puisque, par cette supposition même, ces rapports sont au-dessous de toute quantité, si petite qu'on veuille la supposer; donc dans ce cas la quantité proposée doit se réduire à $\frac{3}{5}$.

Pareillement, si l'on avoit $x^2 + ax + b$, on le réduiroit à x^2 , si l'on a dessein de savoir ce que vaut cette quantité, lorsque x est infini. En effet, on vient de voir que dans cette supposition on devoit supprimer b vis-à-vis de ax ; or x^2 est lui-même infini à l'égard de ax , puisque $x^2 : ax :: x : a$; donc par la même raison on doit rejeter ax vis-à-vis de x^2 ; donc la quantité doit, alors, être réduite à x^2 .

Au contraire, si x étoit infiniment petit, il ne faudroit conserver que les termes où l'exposant de x est le plus petit.

Ainsi $x^2 + ax$ se réduit à ax , lorsque x est infiniment petit ; $\frac{ax + b}{cx + d}$ se réduit à $\frac{b}{d}$, lorsque x est infiniment petit.

On ne doit pas craindre que ces omissions altèrent les conséquences que l'on tirera des calculs auxquels on les appliquera. Au contraire, ce n'est que par ces omissions que l'on exprime ce que l'on a dessein d'exprimer, c'est-à-dire, que x est infini ou infiniment petit : ce n'est que par elles qu'on peut arriver à une conclusion conforme à la supposition qu'on a faite. Or si lorsqu'on suppose x infini, on ne rejettoit point les termes que nous venons de prescrire, si,

par exemple, dans $\frac{3x + a}{5x + b}$ ou $\frac{3 + \frac{a}{x}}{5 + \frac{b}{x}}$ on ne rejettoit pas

$\frac{a}{x}$ & $\frac{b}{x}$, le calcul n'exprimant point alors que $\frac{a}{x}$ & $\frac{b}{x}$ sont des rapports au-dessous de toute quantité assignable, ne répondroit point à ce que l'on demande, savoir quelle est la valeur de cette quantité lorsque x est infini : en un mot en attribuant encore à $\frac{a}{x}$ & à $\frac{b}{x}$ quelque influence sur la valeur cherchée, on contrediroit la supposition que l'on a faite.

Nous ne manquerons pas d'occasions de vérifier l'exactitude de ce principe sur l'omission des quantités infinies des ordres inférieurs ; mais en attendant, voici un exemple qui peut venir à l'appui du raisonnement que nous venons de faire. Concevons la suite $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7},$ &c. : les termes de cette suite, comme on le voit, approchent de

plus en plus de l'unité, & on conçoit que jamais ils ne peuvent passer cette limite. Chaque terme peut être représenté par $\frac{x}{x+1}$, en mettant pour x le numéro de ce terme. Puis donc que les termes approchent sans cesse de l'unité, & d'autant plus qu'ils s'éloignent plus de l'origine, ils n'atteindront donc cette limite qu'à une distance infinie de l'origine; donc pour avoir le dernier terme de cette série, il faut supposer dans $\frac{x}{x+1}$, que x est infini; or conformément au principe, cette quantité se réduit alors à $\frac{x}{x}$, c'est-à-dire à 1; donc l'omission du terme $+1$ dans $\frac{x}{x+1}$, loin d'altérer la conclusion, est au contraire ce qui la donne telle qu'elle doit être. En un mot, en faisant cette omission, on agit conséquemment à la supposition qu'on a faite.

Telle est la subordination qu'on doit mettre dans le calcul, entre les quantités infinies ou infiniment petites de différens ordres.



É L É M E N S

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

6. LORSQUE l'on considère une quantité variable comme croissant par degrés infiniment petits, si l'on veut connoître la valeur de ces accroissemens, ce qui se présente de plus naturel, est de déterminer la valeur de cette quantité pour un instant quelconque, & la valeur de cette même quantité pour l'instant immédiatement suivant : alors la différence de ces deux valeurs est l'accroissement ou la diminution que cette quantité reçoit : c'est aussi ce qu'on appelle la *différence* ou la *différentielle* de cette quantité.

7. Pour marquer la différentielle d'une quantité variable simple, comme x ou y , on écrit dx , ou dy ; c'est-à-dire, qu'on fait précéder cette variable, de la lettre d initiale du mot différence. Mais lorsqu'on veut indiquer la différentielle d'une quantité composée comme x^2 ou $5x^3 + 3x^2$ ou $\sqrt{x^2 - aa}$, &c. on renferme cette quantité entre deux parenthèses que l'on fait précéder de la lettre d ; ainsi l'on écrit $d(x^2)$, $d(5x^3 + 3x^2)$, $d[\sqrt{x^2 - a^2}]$, &c.

Dorénavant nous représenterons les quantités variables par les dernières lettres t, u, x, y, z de

l'Alphabet; & les constantes, ou celles qui conservent toujours la même valeur, nous les représenterons par les premières lettres a, b, c , &c. & lorsque nous en userons autrement, nous en avertirons. Quant à la lettre d , elle ne sera employée à d'autre usage qu'à désigner la différentielle de la quantité qu'elle précédera.

8. Suivant l'idée que nous venons de donner de la différentielle d'une quantité, on voit que pour avoir la différentielle lorsque la quantité ne renferme que des variables au premier degré & non multipliées ni divisées les unes par les autres, il n'y a autre chose à faire qu'à affecter chaque variable de la caractéristique d , en conservant d'ailleurs le signe de chacune.

Par exemple, la différentielle de $x + y - z$, sera $dx + dy - dz$. En effet, pour avoir cette différentielle, il faudroit considérer x comme devenant $x + dx$; y comme devenant $y + dy$; & z comme devenant $z + dz$; alors la quantité proposée, qui est actuellement $x + y - z$, deviendrait $x + dx + y + dy - z - dz$; prenant donc la différence de ces deux états, on aura $x + dx + y + dy - z - dz - x - y + z$; c'est-à-dire, $dx + dy - dz$ pour la différentielle.

Il en feroit de même, si les variables qui entrent dans la quantité proposée avoient des coefficients ou multiplicateurs constans.

Ainsi la différentielle de $5x + 3y$, est $5dx + 3dy$; celle de $ax + by$, est $adx + bdy$; en effet, lorsque x & y deviennent $x + dx$ & $y + dy$, la quantité $ax + by$ devient $a(x + dx) + b(y + dy)$, c'est à dire, $ax + adx + by + bdy$; donc la différence des deux états, ou la différentielle, est $adx + bdy$; c'est-à-dire, qu'en général, il faut affecter chaque variable de la caractéristique d .

Si dans la quantité proposée il y avoit un terme tout constant, la différentielle seroit la même que s'il n'y étoit point. C'est-à-dire, que la différentielle de ce terme seroit zéro; cela est évident, puisque la différentielle n'étant autre chose que l'accroissement, une quantité constante ne peut avoir de différentielle sans cesser d'être constante.

Ainsi la différentielle de $ax + b$ est simplement adx .

9. Lorsque les quantités variables sont simples, mais multipliées entre elles, alors il faut suivre cette règle.... *Différenciez successivement par rapport à chaque variable, comme si tout le reste étoit un multiplicateur constant (*)*.

Par exemple, pour différencier xy , je différencie d'abord comme si x étoit constant, & j'ai xdy ; puis je différencie la même quantité xy comme si y étoit constant, & j'ai ydx ; ensorte que la différentielle totale de xy est $xdy + ydx$.

(*) Pour éviter l'équivoque dans la manière d'écrire, il conviendra d'écrire la dernière, la variable | qui devra être affectée de la caractéristique d .

La raison de cette règle se trouvera en remontant au principe. Pour avoir la différentielle de xy , il faut considérer x comme devenant $x + dx$, c'est-à-dire, augmentant de la quantité infiniment petite dx ; & y comme devenant $y + dy$, c'est-à-dire, augmentant de la quantité infiniment petite dy ; alors xy devient $(x + dx) \times (y + dy)$, c'est-à-dire, $xy + xdy + ydx + dydx$; donc la différence des deux états, ou la différentielle, est $xy + xdy + ydx + dydx - xy$, ou $xdy + ydx + dydx$; mais pour que le calcul exprime que dy & dx sont des quantités infiniment petites comme on le suppose, il faut (5) omettre $dydx$ qui (4) est infiniment petit du second ordre, & par conséquent infiniment petit à l'égard de xdy & ydx qui sont infiniment petits du premier; donc enfin la différentielle de xy ou $d(xy)$ est $xdy + ydx$, comme le donne la règle.

On trouvera de même, en suivant la règle, que la différentielle de xyz est $xydz + xzdy + yzdx$, en différenciant d'abord comme si xy étoit constant, puis comme si xz étoit constant, & enfin comme si yz étoit constant. Et on le démontrera comme ci-dessus en regardant x , y & z comme devenus $x + dx$, $y + dy$, & $z + dz$; auquel cas xyz devient $(x + dx)(y + dy)(z + dz)$ ou $xyz + xydz + xzdy + yzdx + ydxdz + zdxdy + dx dydz$; donc la différence des deux états sera, après avoir réduit & rejeté les infiniment petits du second & du troisième ordre, $xydz + xzdy + yzdx$, ainsi que le donne la règle.

10. Si la quantité proposée est une puissance quelconque d'une quantité variable, alors suivez cette règle : *Multipliez par l'exposant, diminuez cet exposant d'une unité, & multipliez par la différentielle de la variable.*

Ainsi, pour appliquer la règle à x^2 j'aurai $2x dx$, en multipliant par l'exposant 2, diminuant l'exposant 2 de 1, & multipliant enfin par la différentielle dx de la variable x . On trouvera de même que la différentielle de x^3 est $3x^2 dx$; celle de x^4 , $4x^3 dx$; celle de x^{-1} , $-x^{-2} dx$; celle de x^{-3} , $-3x^{-4} dx$; celle de $x^{\frac{1}{2}}$ est $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} dx$; celle de $x^{\frac{4}{3}}$ est $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} dx$; & en général, celle de x^m , est $mx^{m-1} dx$, quel que soit d'ailleurs l'exposant m , positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

Pour trouver la raison de cette règle, remontons encore au principe. Regardons x comme devenant $x + dx$ (dx étant infiniment petit); alors x^m devient $(x + dx)^m$; c'est-à-dire, en appliquant les règles données (*Alg.* 149), devient $x^m + mx^{m-1} dx + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2} dx^2 + \&c.$, ou (parce que le terme $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot x^{m-2} dx^2$ est infiniment petit du second ordre, & que les suivans seroient encore d'ordres inférieurs), devient $x^m + mx^{m-1} dx$; donc la différence des deux états, ou la différentielle de x^m , est $x^m + mx^{m-1} dx - x^m$, c'est-à-dire, $mx^{m-1} dx$.

S'il y avoit un coefficient ou multiplicateur constant, cela n'apporteroit aucun changement; il resteroit dans la différentielle tel qu'il est dans la quantité; ainsi $d(ax^m)$ est $max^{m-1} dx$.

11. Voilà tout ce qu'il est nécessaire de savoir pour être en état de différencier toutes sortes de quantités algébriques; ainsi tout ce qui va suivre ne fera plus qu'une application de ces règles.

12. Si l'on avoit $\frac{x}{y}$, c'est-à-dire une fraction, on écrirait

ainsi cette quantité... xy^{-1} , selon ce qui a été enseigné (*Alg.* 141); & alors appliquant la règle donnée (9), on auroit $d(xy^{-1}) = x d(y^{-1}) + y^{-1} dx$, & par conséquent (10) $d(xy^{-1}) = -xy^{-2} dy + y^{-1} dx$.

Si l'on réduit cette quantité, on aura $-\frac{xdy}{y^2} + \frac{dx}{y}$ ou $\frac{y dx - x dy}{y^2}$; où l'on voit que la différentielle d'une fraction $\frac{x}{y}$, est égale à la différentielle dx du numérateur multipliée par le dénominateur y , moins la différentielle dy du dénominateur, multipliée par le numérateur x , le tout divisé par le carré du dénominateur; & c'est la règle que l'on donne ordinairement pour différencier les fractions; mais on peut se dispenser, comme on le voit, de charger encore sa mémoire de cette nouvelle règle: il suffit de faire passer le dénominateur au numérateur, selon la règle donnée (*Alg.* 141), & de différencier ensuite.

13. Si l'on veut différencier ax^3y^2 , on regardera d'abord x^3 & y^2 comme deux variables simples, & (9) on aura $d(ax^3y^2) = ax^3 d(y^2) + ay^2 d(x^3)$; puis (10) on aura $d(ax^3y^2) = 2ax^3y dy + 3ay^2x^2 dx$. En général $d(ax^m y^n) = ax^m d(y^n) + ay^n d(x^m) = nax^m y^{n-1} dy + may^n x^{m-1} dx$.

14. Si la quantité qu'on veut différencier, est complexe, mais sans renfermer de puissances de quantités complexes, on différenciera séparément chacun des termes qui la composent: ainsi $d(ax^3 + bx^2 + cxy) = 3ax^2 dx + 2bxdx + cxdy + cydx$. De même $d\left(ax^2 + bx + \frac{cy}{x^2}\right) = d(ax^2 + bx + cx^{-2}y) = 2ax dx + bdx - 2cx^{-3}y dx + cx^{-2}dy$. De même $d(x^3y + ay^2 + b^3) = 3x^2y dx + x^3 dy + 2ay dy$, en se rappelant que la constante b^3 n'a point de différentielle, ou que sa différentielle est zéro.

15. Si l'y a un exposant total, comme dans $(a + bx + cx^2)^5$, on regardera toute la quantité affectée de cet exposant, comme une seule variable que l'on différenciera selon la règle donnée (10) pour les puissances : ainsi $d(a + bx + cx^2)^5 = 5(a + bx + cx^2)^4 \times d(a + bx + cx^2) = 5(a + bx + cx^2)^4 \times (bdx + 2cxdx)$. De même $d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} d(a + bx^2) = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} \times 2bxdx = \frac{10}{3}bxdx (a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$.

16. Si la quantité étant toujours complexe, étoit d'ailleurs composée de différens facteurs, on regarderoit chaque facteur comme une variable simple, & l'on suivroit la règle qui a été donnée (9) pour un produit de plusieurs variables simples : ainsi $x^3 (a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$ qu'on peut regarder comme composé des deux facteurs x^3 & $(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$, donnera $d(x^3 (a + bx^2)^{\frac{5}{3}}) = (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} d(x^3) + x^3 d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$ qui, par les règles précédentes, devient $3x^2dx (a + bx^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{3}bx^4dx (a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$. Pareillement $d\left(\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right) = d[(x+a)^3 \times (x+b)^{-2}] = (x+a)^3 d(x+b)^{-2} + (x+b)^{-2} d(x+a)^3$; c'est-à-dire $= -2(x+a)^3 (x+b)^{-3}dx + 3(x+b)^{-2} (x+a)^2 dx$, qui se change en $-\frac{2(x+a)^3 dx}{(x+b)^3} + \frac{3(x+a)^2 dx}{(x+b)^2}$, & se réduit à $\frac{(x+3b-2a)(x+a)^2 dx}{(x+b)^3}$.

17. Si la quantité proposée est radicale, on substituera aux radicaux, des exposans fractionnaires, comme il a été enseigné (*Alg.* 128), & l'on différenciera ensuite selon les règles ci-dessus. Ainsi $d(\sqrt{x}) = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$;

$$\begin{aligned}
d(\sqrt[5]{x^3}) &= d(x^{\frac{3}{5}}) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} dx; \quad d[\sqrt{(aa - xx)}] = \\
d(aa - xx)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} d(aa - xx) = \\
- x dx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{- x dx}{\sqrt{(aa - xx)}}; \quad d(x^m \sqrt[3]{(a + \\
bx^n)^p}) &= d(x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{3}}) = x^m d(a + bx^n)^{\frac{p}{3}} + \\
(a + bx^n)^{\frac{p}{3}} d(x^m) &= \frac{p n b}{3} x^{m+n-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{3}-1} \\
+ m x^{m-1} dx (a + bx^n)^{\frac{p}{3}}.
\end{aligned}$$

Des Différences secondes, troisièmes, &c.

18. Indépendamment des différentielles que nous venons de considérer, & qu'on appelle *Différences premières*, on considère aussi les différences *secondes*, *troisièmes*, &c. Pour marquer celles-ci, on fait précéder la variable, de deux lettres *d*, s'il s'agit d'une différence seconde; de trois lettres *d*, s'il s'agit d'une différence troisieme, & ainsi de suite; par exemple, *ddx* marque la différence seconde de *x*.

Lorsqu'il s'agit des différences secondes, on regarde la variable comme augmentant par degrés inégaux, mais dont la différence est infiniment petite à l'égard de ces accroissemens mêmes. Ainsi *ddx* est infiniment petit à l'égard de *dx*. De même dans les différences troisièmes, *ddd* ou *d³x* (car on les marque

marque également de ces deux manières) est infiniment petit à l'égard de ddx ; & ainsi de suite.

Pour marquer le quarré de dx , on devroit naturellement écrire $(dx)^2$; mais pour simplifier on écrit dx^2 , ce qui ne peut causer de méprise, & être pris pour la différentielle de x^2 , que nous sommes convenus de marquer ainsi $d(x^2)$.

Observons bien que quoique ddx & dx^2 soient tous deux infiniment petits du second ordre, ces deux quantités ne sont pas égales entre elles; ddx est la différence seconde de x , ou la différence de deux différences consécutives de x ; & dx^2 est le quarré de dx .

Pour déterminer les différences secondes, ce qui se présente naturellement est de considérer la quantité variable, dans trois états consécutifs, infiniment voisins; prendre la différence du second état au premier, celle du troisième au second; & enfin prendre la différence de ces deux différences. Par exemple, le premier état de x est x ; au second instant, x augmente de la quantité dx , & devient $x + dx$; dans l'instant suivant $x + dx$ augmente de la quantité $dx + d(dx)$, $d(dx)$ marquant ce dont l'accroissement du second instant surpasse celui du premier, ou la différence de dx . Ainsi les trois états consécutifs de la quantité x sont x , $x + dx$, $x + 2dx + d(dx)$. La

différence du second & du premier est dx ; celle du troisième & du second est $dx + d(dx)$; enfin la différence de ces deux différences ou la différence seconde de x , est $d(dx)$; on a donc $ddx = d(dx)$. Donc pour avoir les différences secondes, il faut différencier les différences premières selon les règles qui ont été données pour avoir celles-ci.

Par exemple, pour avoir la différence seconde de xy , je prends sa différence première qui est $x dy + y dx$; je différencie maintenant celle-ci, comme si x & dx , y & dy étoient autant de variables différentes, & j'ai $x ddy + dy dx + dy dx + y ddx$, ou $x ddy + 2 dy dx + y ddx$. Pareillement, la différence seconde de x^2 se trouvera en différenciant d'abord x^2 , ce qui donne $2x dx$; puis différenciant $2x dx$ comme si x & dx étoient deux variables finies, ce qui donnera $2x ddx + 2 dx^2$. On trouvera de même que $dd(ax^m) = d(max^{m-1}dx) = m \cdot (m-1) ax^{m-2} dx^2 + max^{m-1} ddx$ (*).

Si l'on avoit à différencier une quantité dans laquelle il entre déjà des différences premières, soit qu'elle vint ou

(*) Il peut se présenter, sur cette manière de prendre les différences secondes, une difficulté qu'il est bon de prévenir. Quand on détermine les différences premières, on rejette les quantités infiniment petites du second ordre; or les différences secondes étant aussi infiniment petites du second ordre, ne doit-on pas craindre que ce qu'on a rejeté

dans l'évaluation des premières, ne rende les secondes défectueuses? Non, parce que cet infiniment petit du second ordre, qu'on a rejeté, ne peut donner pour la différentielle qu'un infiniment petit du troisième ordre, qui doit être rejeté vis-à-vis de la différence seconde, puisque celle-ci est infiniment petite du second.

ne vint pas d'une différenciation exacte, on suivroit la même méthode. Ainsi, $d(xdy) = xddy + dx dy$. Pareillement $d\left(\frac{dy}{x}\right) = d(x^{-1}dy) = -x^{-2}dx dy + x^{-1}ddy$. De même $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = d(dxdy^{-1}) = ddx dy^{-1} - dx dy^{-2}ddy$
 $= \frac{ddx}{dy} - \frac{dx ddy}{dy^2}$.

19. Il arrive souvent que dans les calculs où il entre plusieurs variables, on suppose constante la différence première de l'une de ces variables. Cette supposition qui est permise, parce qu'on peut toujours prendre une des différences premières pour terme fixe de comparaison des autres différences premières, cette supposition, dis-je, simplifie les calculs, en ce que les termes affectés de la différence seconde de cette variable, ne se trouvent plus dans le calcul, puisque si dx est constant, on a $ddx = 0$, ce qui fait disparaître tous les termes affectés de ddx . Il n'y a d'autre attention à avoir dans ce cas que de ne point différencier dx (ou la différentielle constante), dans les termes où elle se rencontre.

Ainsi, la différentielle de $\frac{dx}{dy}$, prise en supposant dx constant, ou $d(dxdy^{-1})$, dans cette même supposition, est $-dx dy^{-2}ddy$ ou $-\frac{dx ddy}{dy^2}$. Si, au contraire, on suppose dy constant, elle est $\frac{ddx}{dy}$.

20. A l'égard des différences troisièmes, on voit,

en raisonnant comme ci-dessus, que pour les avoir il faut de même différencier, comme à l'ordinaire, les différences secondes, en regardant les variables, leurs différences premières, & leurs différences secondes, comme autant de variables différentes; & ainsi des autres différences plus élevées. Il faut seulement observer que si dans le passage des premières différences aux secondes, l'une des différences premières a été supposée constante, on doit la regarder comme constante dans toutes les autres différenciations.

R E M A R Q U E.

21. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que les variables x , y , &c. augmentoient toutes en même temps; c'est-à-dire, que x devenant $x + dx$, y devenoit $y + dy$, & ainsi des autres. Mais il peut arriver que les unes diminuent pendant que les autres augmentent. Dans ce cas il faut, après la différenciation, donner dans le résultat, le signe —, à la différentielle de la variable qui va en diminuant. Ou bien, on peut laisser la différentielle telle que la donnent les règles précédentes; mais dans l'application qu'on en fera à une question, il faudra avoir soin de prendre négativement la quantité que représente la différentielle de la variable qui va en diminuant.

En effet si y vient à diminuer d'une quantité q , & que par la différenciation vous ayiez supposé tacitement que y devenoit $y + dy$, il faut donc que $y - q = y + dy$, ou que $-q = dy$, ou que $q = -dy$; ainsi dans ces cas, ce que vous auriez appelé dy , vous l'appellerez $-dy$, par-tout ailleurs que dans la différenciation : nous verrons des exemples de cela, par la suite.

Il en fera de même des différences secondes à l'égard des différences premières. Si la différence première va en diminuant, vous n'en différencierez pas moins comme à l'ordinaire, mais dans l'application à quelque question, vous appellerez $-ddy$, ce que vous auriez appelé ddy , si dy est la différence dont il s'agit.

Telles sont les règles pour différencier les quantités, lorsqu'elles sont présentées immédiatement. Mais il arrive souvent que ce n'est pas tant sur les quantités mêmes, que sur certaines expressions de ces quantités, que l'on a à opérer. Par exemple, au lieu des angles on emploie souvent leurs sinus, tangentes, &c. de même, on est souvent forcé d'employer les logarithmes des quantités au lieu des quantités mêmes. Voyons donc comment on doit différencier ces sortes d'expressions.

Des différentielles de Sinus, Cosinus, &c.

22. Lorsqu'on a à différencier une quantité telle que $\sin. z$ (ou sinus de l'angle ou de l'arc z), il faut concevoir que l'angle z devient $z + dz$, &

alors $\sin. (\zeta + d\zeta) - \sin. \zeta$ est la différentielle de $\sin. \zeta$. Or selon ce qui a été dit (*Géom.* 284),
 $\sin. (\zeta + d\zeta) = \sin. \zeta \cos. d\zeta + \sin. d\zeta \cos. \zeta$,
 en supposant le rayon = 1. Mais le sinus d'un arc
 infiniment petit $d\zeta$ est cet arc lui-même, & son
 cosinus ne diffère point du rayon ; on a donc $\sin. d\zeta$
 $= d\zeta$ & $\cos. d\zeta = 1$; donc $\sin. (\zeta + d\zeta) =$
 $\sin. \zeta + d\zeta \cos. \zeta$; donc $\sin. (\zeta + d\zeta) - \sin. \zeta$,
 ou $d(\sin. \zeta) = d\zeta \cos. \zeta$; c'est-à-dire, qu'on a
 la différentielle du sinus d'un angle ou d'un arc dont le
 rayon est l'unité, en multipliant la différentielle de l'angle,
 par le cosinus de ce même angle.

23. Pareillement la différentielle de $\cos. \zeta$ ou
 $\cos. (\zeta + d\zeta) - \cos. \zeta = \cos. \zeta \cos. d\zeta - \sin. \zeta$
 $\sin. d\zeta - \cos. \zeta$, puisque (*Géom.* 285) $\cos. (\zeta + d\zeta)$
 $= \cos. \zeta \cos. d\zeta - \sin. \zeta \sin. d\zeta$; donc, eu égard
 à ce que $\sin. d\zeta = d\zeta$, & $\cos. d\zeta = 1$, on a
 $d(\cos. \zeta) = \cos. \zeta - d\zeta \sin. \zeta - \cos. \zeta = -d\zeta$
 $\sin. \zeta$; c'est-à-dire, qu'on a la différentielle du cosinus
 d'un angle dont le rayon est 1, en multipliant la diffé-
 rentielle de l'angle (prise avec un signe contraire), par
 le sinus de ce même angle.

Ainsi, pour récapituler, on a $d(\sin. \zeta) = d\zeta \cos. \zeta$,
 & $d(\cos. \zeta) = -d\zeta \sin. \zeta$.

A l'aide de ces deux principes, on peut diffé-
 rencier toute quantité composée de sinus & de

cosinus, & cela en appliquant les règles données précédemment.

Ainsi, pour différencier $\text{cosf. } 3\tau$ on aura $d(\text{cosf. } 3\tau) = -3 d\tau \sin. 3\tau$. De même $d(\text{cosf. } m\tau)$ (m étant un nombre constant) $= -m d\tau \sin. m\tau$; & $d(\sin. m\tau) = m d\tau \text{cosf. } m\tau$. Pareillement $d(\sin. \tau \text{cosf. } t) = \text{cosf. } t d(\sin. \tau) + \sin \tau d(\text{cosf. } t) = d\tau \text{cosf. } t \text{cosf. } \tau - dt \sin. \tau \sin. t$. De même $d(\sin. \tau)^m = m(\sin. \tau)^{m-1} d(\sin. \tau) = m d\tau \text{cosinus } \tau (\sin. \tau)^{m-1}$.

24. Si l'on avoit $\frac{\sin. \tau}{\text{cosf. } \tau}$ qui est l'expression de la tangente de l'angle τ lorsque le rayon est 1 (puisque (Géom. 278) on a $1 : \text{cosf. } \tau :: \sin. \tau : \text{tang. } \tau$), on auroit $d\left(\frac{\sin. \tau}{\text{cosf. } \tau}\right) = d[(\sin. \tau)(\text{cosf. } \tau)^{-1}] = d\tau \text{cosf. } \tau (\text{cosf. } \tau)^{-1} + d\tau (\sin. \tau)^2 (\text{cosf. } \tau)^{-2} = \frac{d\tau \text{cosf. } \tau}{\text{cosf. } \tau} + \frac{d\tau (\sin. \tau)^2}{(\text{cosf. } \tau)^2} = \frac{d\tau (\text{cosf. } \tau)^2 + d\tau (\sin. \tau)^2}{(\text{cosf. } \tau)^2} = \frac{d\tau}{\text{cosf. } \tau^2}$, parce que (Géom. 281) $(\text{cosf. } \tau)^2 + (\sin. \tau)^2 = 1$.

Donc la différentielle de la tangente d'un angle dont le rayon est 1, est égale à la différentielle de l'angle, divisée par le carré du cosinus de ce même angle.

D'où l'on peut conclure aussi que la différentielle d'un angle, est égale à la différentielle de la tangente de cet angle, multipliée par le carré de son cosinus; en effet, puisque $d\left(\frac{\sin. \tau}{\text{cosf. } \tau}\right)$ ou $d(\text{tang. } \tau) = \frac{d\tau}{(\text{cosf. } \tau)^2}$, on a $d\tau = (\text{cosf. } \tau)^2 d(\text{tang. } \tau)$.

25. Si l'on avoit au contraire $\frac{\text{cosf. } \tau}{\sin. \tau}$ qui est la cotangente

de l'angle ζ , on auroit $d\left(\frac{\text{cof. } \zeta}{\text{fin. } \zeta}\right) = d[(\text{cof. } \zeta)(\text{fin. } \zeta)^{-1}]$
 $= -d\zeta \text{ fin. } \zeta (\text{fin. } \zeta)^{-1} - d\zeta (\text{cof. } \zeta)^2 (\text{fin. } \zeta)^{-2} =$
 $= -\frac{d\zeta \text{ fin. } \zeta}{\text{fin. } \zeta} - \frac{d\zeta (\text{cof. } \zeta)^2}{(\text{fin. } \zeta)^2} = -\frac{d\zeta (\text{fin. } \zeta)^2 - d\zeta (\text{cof. } \zeta)^2}{(\text{fin. } \zeta)^2} =$
 $= -\frac{d\zeta}{(\text{fin. } \zeta)^2}$; donc la différentielle de la cotangente d'un angle, est
 égale à la différentielle de l'angle (prise négativement) divisée
 par le carré du sinus de ce même angle. Nous verrons, par
 la suite, l'usage de ces différenciations.

Des Différentielles logarithmiques.

26. Rappelons-nous (*Arith.* 216) que les logarithmes font une suite de nombres en progression arithmétique quelconque, qui répondent, terme à terme, à une suite de nombres en progression géométrique quelconque.

Cela posé, soient y & y' deux termes consécutifs d'une progression géométrique, dont r soit la raison, & a , a' , les deux premiers termes. Soient pareillement x & x' deux termes consécutifs d'une progression arithmétique, dont b & b' soient les deux premiers termes. Supposons de plus que x & x' sont à même place dans la progression arithmétique, que y & y' dans la progression géométrique, auquel cas x & x' sont les logarithmes de y & y' .

Par la nature de la progression géométrique, (*Arith.* 211) on a $y' = ry$, & $a' = ra$; substituant dans la première équation, la valeur de r

tirée de la seconde, on a $y' = \frac{a'y}{a}$, ou $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$.
 Supposons maintenant que la différence de y' à y est z , ou que $y' = y + z$; nous aurons $\frac{y+z}{y}$ ou
 $1 + \frac{z}{y} = \frac{a'}{a}$, & par conséquent $\frac{z}{y} = \frac{a'}{a} - 1$
 $= \frac{a' - a}{a}$, ou $\frac{az}{y} = a' - a$.

D'un autre côté, la nature de la progression arithmétique (*Arith.* 204), donne $x' - x = b' - b$.

Pour avoir maintenant la relation de ces deux progressions, supposons que la différence $a' - a$ des deux premiers termes de la première, soit à la différence $b' - b$ des deux premiers termes de la seconde, comme l'unité est à un nombre quelconque m , c'est-à-dire, que $a' - a : b' - b :: 1 : m$; nous aurons $m(a' - a) = b' - b$; mettant donc dans cette dernière équation, pour $a' - a$ & $b' - b$, les valeurs qu'on vient de trouver, on aura $\frac{maz}{y} = x' - x$, qui exprime généralement la relation d'une progression géométrique quelconque, à la progression arithmétique quelconque correspondante.

Imaginons maintenant, que dans l'une & dans l'autre progression, les termes consécutifs soient infiniment voisins; alors z qui marque la différence de y' à y , fera dy , & $x' - x$ qui marque la différence de x' à x , fera dx ; d'où l'équation se

changera en $\frac{m a dy}{y} = dx$. A l'égard de m qui marque le rapport de la différence des deux premiers termes de la progression arithmétique, à la différence des deux premiers termes de la progression géométrique, il n'en fera pas moins un nombre fini, quoique ces deux différences soient alors infiniment petites, parce que l'on conçoit aisément, que deux quantités infiniment petites peuvent se contenir l'une l'autre, autant de fois que deux quantités finies.

L'équation $\frac{m a dy}{y} = dx$ nous apprend donc que la différentielle dx du logarithme d'un nombre marqué par y , est égale à la différentielle dy de ce nombre, divisée par ce même nombre y , & multipliée par le premier terme a de la progression géométrique fondamentale, & par le nombre m qui marque le rapport de la différence des deux premiers termes de la progression arithmétique, à la différence des deux premiers termes de la progression géométrique. Comme ce nombre m fixe, en quelque sorte, le rapport des deux progressions, on l'appelle le *module*.

On voit donc que selon la valeur que l'on supposera à m & au premier terme a de la progression géométrique, un même nombre y peut avoir différens logarithmes. Mais entre tous ces différens

systèmes de logarithmes , celui qui est le plus com-
mode dans les calculs algébriques , est celui où le
premier terme de la progression géométrique est 1 ,
& où le module est 1. Alors l'équation $\frac{m a d y}{y} = d x$
qui renferme tous les différens systêmes de loga-
rithmes , devient $\frac{d y}{y} = d x$.

27. Donc , dans le systême de logarithmes , en
usage dans le calcul algébrique , *la différentielle $d x$
du logarithme x d'un nombre quelconque y , est égale à
la différentielle $d y$ de ce nombre , divisée par ce même
nombre y* . C'est là le principe d'après lequel on peut
trouver facilement la différentielle du logarithme de
toute quantité algébrique ; mais avant d'en faire usage ,
nous observerons 1°. que les logarithmes dont il
s'agit ici ne sont point ceux des Tables ; mais on
peut facilement passer des uns aux autres , comme
nous le verrons par la suite.

2°. Que puisque le premier terme b de la progres-
sion arithmétique ne se trouve point dans l'équation
 $\frac{m a d y}{y} = d x$, cette équation , ainsi que l'équation
particulière $\frac{d y}{y} = d x$, que nous venons d'en dé-
duire , ont toujours lieu quel que soit ce premier
terme b , c'est-à-dire , le logarithme du premier terme
 a de la progression géométrique. Donc nous sommes

les maîtres de supposer, pour plus de simplicité, que le logarithme du premier terme de la progression arithmétique est zéro : & comme nous avons supposé que la progression géométrique à laquelle nous nous arrêtons, a pour premier terme l'unité, nous prendrons donc zéro pour logarithme de l'unité ; mais il faut bien remarquer qu'on en est absolument maître.

En prenant ainsi l'unité pour premier terme de la progression géométrique, & zéro pour premier terme de la progression arithmétique, ou pour le logarithme de l'unité, les règles que nous avons données (*Arith.* 227 & *suiv.*) pour l'usage des logarithmes, s'appliqueront également ici ; ainsi, en se les rappelant & les généralisant, on verra que au lieu de $l(ab)$ on peut prendre $la + lb$, l marquant *logarithme*. De même $l\frac{a}{b} = la - lb$. Pareillement $la^m = mla$; enfin $l\sqrt[n]{a^m} = la^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} la$.

Cela posé, appliquant le principe que nous venons d'établir concernant la différentielle du logarithme d'un nombre, on trouvera que $dlx = \frac{dx}{x}$; $dl(a+x) = \frac{d(a+x)}{a+x} = \frac{dx}{a+x}$; $dl\left(\frac{a}{a+x}\right) = d[la - l(a+x)] = -\frac{d(a+x)}{a+x} = -\frac{dx}{a+x}$, en faisant attention que la différentielle de la constante la , est zéro.

Pareillement, $dl\frac{1}{x} = d(l1 - lx) = -\frac{dx}{x}$; $dl(x^2)$

$= d(2lx) = \frac{2dx}{x}$; $dl(xy) = d(lx + ly) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$, $d\left(l\frac{x}{y}\right) = d(lx - ly) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$; $d\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$
 $= d[l(a+x) - l(a-x)] = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$;
 $d[l(aa+xx)] = \frac{d(aa+xx)}{aa+xx} = \frac{2xdx}{aa+xx}$; $dl\sqrt{aa+xx}$
 $= \frac{d\sqrt{aa+xx}}{\sqrt{aa+xx}} = \frac{xdx}{\sqrt{aa+xx}\sqrt{aa+xx}} = \frac{xdx}{aa+xx}$;
 ou plus commodément, $dl\sqrt{aa+xx} = d\left[\frac{1}{2}l(aa+xx)\right]$
 $= \frac{xdx}{aa+xx}$; $dl[x^m(a+bx^n)^p] = d[lx^m + l(a+bx^n)^p]$
 $= d\left[mlx + pl(a+bx^n)\right] = \frac{mdx}{x} + \frac{npbx^{n-1}dx}{a+bx^n}$. Ces
 exemples suffisent pour faire voir comment on doit diffé-
 rencier toutes les autres quantités logarithmiques.

Des Différentielles des quantités exponentielles.

28. On rencontre encore quelquefois des quantités de cette forme, c^x , x^y ; c'est-à-dire, des quantités dont l'exposant est variable. On les appelle des quantités *Exponentielles*.

Pour savoir comment on doit les différencier, posons $x^y = z$; alors, en prenant les logarithmes de chaque membre, nous aurons $lx^y = l z$, & par conséquent $dl(x^y) = \frac{dz}{z}$; donc $d z = z dl(x^y)$, ou (en mettant pour z & $d z$, leurs valeurs) $d(x^y) = x^y dl(x^y)$; c'est-à-dire, que la différentielle d'une quantité exponentielle, se trouve en multipliant cette quantité exponentielle, par la différentielle de son logarithme.

Ainsi $d(x^y) = x^y d(lx^y) = x^y d(ylx) = x^y \left(dy lx + \frac{y dx}{x}\right)$. Pareillement $d(a^x + y^x) = d(a^x) + d(y^x) =$

$a^x d(la^x) + y^x d(ly^x) = a^x d(xla) + y^x d(xly) =$
 $a^x dxla + y^x \left(d\chi ly + \frac{\chi dy}{y} \right)$. De même $d(aa + xx)^x =$
 $(aa + xx)^x d(aa + xx)^x = (aa + xx)^x d(xl(aa + xx) + xx)$
 $= (aa + xx)^x \left(dxl(aa + xx) + \frac{2x^2 dx}{aa + xx} \right)$;
 & ainsi des autres. On fait assez souvent usage, dans le calcul, de la quantité exponentielle c^x , c étant le nombre dont le logarithme $= 1$. La différentielle de cette quantité est, selon ce qui vient d'être enseigné, $c^x d(lc^x)$, ce qui revient à $c^x d(xlc) = c^x \cdot dxlc$; donc puisque lc est supposé $= 1$, on a simplement $d(c^x) = dx c^x$. C'est-à-dire, que cette exponentielle particulière, a pour différentielle, cette exponentielle même, multipliée par la différentielle de son exposant. Nous la retrouverons par la suite.

Applications des Règles précédentes.

29. Pour faire connoître par quelques exemples, l'usage des règles que nous venons de donner, & leur avantage sur l'Algèbre ordinaire, nous allons les appliquer aux objets que nous connoissons; c'est-à-dire, à des questions de Géométrie & de Calcul.

Applications aux Soutangentes, Tangentes, Sounormales, &c. des Lignes courbes.

30. Pour mener une tangente à une ligne courbe quelconque AM (fig. 1), on se représente cette ligne courbe, comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits : le prolongement MT de l'un

Mm de ces côtés, est la tangente, que l'on détermine pour chaque point M , en calculant la valeur de la soutangente PT , ou de la partie de la ligne sur laquelle se comptent les abscisses, comprise entre l'ordonnée PM & la rencontre T de cette tangente. Voici comment on détermine cette soutangente.

Par les deux extrémités M & m du côté infiniment petit Mm , on imagine les deux ordonnées MP, mp , & par le point M , la ligne Mr parallèle à AP axe des abscisses. Le triangle infiniment petit Mrm est alors semblable au triangle fini TPM , & donne cette proportion $rm : rM :: PM : PT$. Or si l'on nomme AP, x ; PM, y ; il est évident que Pp ou son égal rM fera dx , & que rm fera dy ; on aura donc $dy : dx :: y : PT = \frac{y dx}{dy}$. C'est-là la formule générale pour déterminer la soutangente de quelque courbe que ce soit, soit que les y & les x soient perpendiculaires entre eux; soit qu'ils ne le soient pas, pourvu que les y soient toujours parallèles entre eux. Voyons maintenant comment on applique cette formule à chaque courbe dont on a l'équation.

Supposons que la nature de la courbe quelconque AM , soit exprimée par une équation telle qu'on voudra, où entrent x, y & des quantités constantes. Si l'on différencie cette équation, il n'y aura jamais que deux sortes de termes, les uns multipliés par dx ,

les autres multipliés par dy . Il fera donc facile, par les règles ordinaires de l'Algèbre, de tirer de cette équation différentielle, la valeur de $\frac{dx}{dy}$, laquelle ne contiendra que des x , des y & des constantes: substituant cette valeur dans la formule $\frac{y dx}{dy}$ ou $y \times \frac{dx}{dy}$, on aura la valeur de la soutangente, en x , y & en constantes; enfin mettant pour y sa valeur exprimée en x , que l'on tirera de l'équation de la courbe même, on aura la soutangente exprimée simplement en x & en constantes; ainsi pour déterminer la soutangente pour quelque point M que ce soit, il ne s'agira plus que de mettre dans ce dernier résultat, au lieu de x , la valeur de l'abscisse AP qui répond à ce point M .

Supposons, par exemple, que la courbe dont il s'agit, est une ellipse dont l'équation (*Alg.* 294) est $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$. Je différencie cette équation, ce qui me donne $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$ ou $2aaydy = abbdx - 2bbxdx$; j'en tire la valeur de $\frac{dx}{dy}$, (en divisant d'abord par dy , puis par le multiplicateur de dx), & j'ai $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{abb - 2bbx}$; substituant dans $\frac{y dx}{dy}$, j'aurai $\frac{y dx}{dy} = \frac{2aay^2}{abb - 2bbx}$; enfin mettant pour y^2 , sa valeur $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$ que donne l'équation de la courbe, & réduisant, j'ai $\frac{y dx}{dy}$ ou $PT = \frac{2(ax - xx)}{a - 2x} = \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$, valeur qui est précisément la même que celle que nous avons trouvée (*Algèbre* 301), mais que l'on trouve ici, d'une manière bien plus

plus expéditive. Remarquons en passant, combien ce résultat justifie ce que nous avons dit (5) touchant les quantités que l'on rejette dans le calcul; car en employant ici le calcul différentiel, dont les règles, dans cet exemple, supposent l'omission des quantités infiniment petites du second ordre, vis-à-vis de celles du premier, nous arrivons au même résultat que dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, où nous avons déterminé cette sous-tangente de la manière la plus directe & la plus rigoureuse. On voit donc qu'en rejetant ainsi les quantités que nous avons prescrit de rejeter, on ne fait qu'imprimer au calcul, le caractère qu'il doit avoir pour exprimer l'état de la question.

On s'y prendra d'une manière semblable pour déterminer les tangentes, les sous-normales, les normales, &c.

Supposons, pour plus de simplicité, que les x & les y sont perpendiculaires entre eux; pour avoir la tangente, on comparera de nouveau le triangle Mmr , au triangle TPM , & l'on aura $rm : Mm :: PM : TM$; or à cause du triangle rectangle Mrm , on a $Mm = \sqrt{[(rM)^2 + (rm)^2]} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; donc $dy : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} :: y : TM$; donc $TM = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy} = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(dy^2)}} = y\sqrt{\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dy^2}\right)} = y\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2} + 1\right)}$; ainsi, différenciant l'équation de la courbe, on en tirera la valeur de $\frac{dx}{dy}$, dont on substituera le carré dans cette expression de la tangente, après quoi, mettant pour y sa valeur en x

& en constantes, tirée de l'équation de la courbe, on aura la tangente exprimée en x & en constantes. On peut en faire l'application à l'équation à l'ellipse; on retrouvera la même valeur que nous avons donnée (*Algèbre* 303).

Si l'on veut avoir la founormale, on imaginera la ligne MQ perpendiculaire à la tangente TM , & l'on remarquera que les triangles Mrm , MPQ , qui ont les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, sont semblables; on aura donc $Mr : rm :: PM : PQ$; c'est-à-dire, $dx : dy :: y : PQ = \frac{y dy}{dx}$. Donc, après avoir différencié l'équation de la courbe, on en tirera la valeur de $\frac{dy}{dx}$, que l'on substituera dans $\frac{y dy}{dx}$, & achevant comme ci-dessus, on aura la valeur de la founormale, en x & en constantes.

Par exemple, pour l'ellipse, l'équation $yy = \frac{bb}{aa} (ax - xx)$ étant différenciée, nous donne $2y dy = \frac{bb}{aa} (adx - 2x dx)$; donc $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{bb}{aa} (a - 2x)}{2y}$; par conséquent la founormale $\frac{y dy}{dx} = \frac{bb}{aa} \times \frac{a - 2x}{2} = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a - x)$, la même chose que l'on a trouvée (*Alg.* 300).

Si l'on vouloir la normale MQ , on la trouveroit en comparant de nouveau le triangle Mrm , au triangle MPQ .

Prenons pour second exemple de la formule des foutangentes, & de celle des founormales, l'équation à la parabole, qui (*Alg.* 356) est $yy = px$. En différenciant, nous aurons $2ydy = p dx$; donc $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$: donc la foutangente $\frac{y dx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$; & la founormale $\frac{y dy}{dx} = \frac{p y}{2y} = \frac{p}{2}$; ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons trouvé (*Alg.* 363 & 364).

Pour troisième exemple, nous prendrons l'équation $y^{m+n} = a^m x^n$ qui exprime généralement les paraboles de tous les genres.

On est convenu d'appeler parabole, toute courbe dont l'équation telle que $y^{m+n} = a^m x^n$ n'a que deux termes, mais où les exposans de x & y dans différens membres, sont de même signe.

En différenciant cette équation, nous aurons.

$$(m+n)y^{m+n-1}dy = na^m x^{n-1}dx; \text{ donc } \frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)y^{m+n-1}}{na^m x^{n-1}}; \text{ donc la foutangente } \frac{y dx}{dy} \text{ fera } \frac{(m+n) \cdot y^{m+n}}{na^m x^{n-1}},$$

ou (en mettant pour y^{m+n} sa valeur $a^m x^n$), $\frac{y dx}{dy} = \frac{(m+n)a^m x^n}{na^m x^{n-1}} = \frac{m+n}{n}x$; d'où l'on voit que la foutangente dans ces courbes, est égale à autant de fois l'abscisse x , qu'il y a d'unités dans l'exposant de y divisé par l'exposant de x , ce qui a lieu, comme nous le savions déjà, dans la parabole ordinaire, où la foutangente est $2x$, & où l'exposant de y divisé par l'exposant de x , est en effet $\frac{2}{1} = 2$.

Prenons maintenant, pour exemple, une courbe dont la

nature soit exprimée par une équation entre les différentielles des coordonnées. Supposons, par exemple, que la courbe BM (fig. 4) soit telle, que les abscisses AP , Ap , &c. étant prises en progression arithmétique, les ordonnées correspondantes PM , pm , &c., soient en progression géométrique : cette courbe qu'on appelle *logarithmique*, parce que les ordonnées représentant successivement tous les nombres imaginables, les abscisses représentent leurs logarithmes, cette courbe, dis-je, aura pour équation $\frac{a m dy}{y} = dx$, puisque nous avons vu (26) que cette équation exprimait la relation des nombres à leurs logarithmes. On aura donc $\frac{dx}{dy} = \frac{a m}{y}$, & par conséquent la sous-tangente $\frac{y dx}{dy}$ deviendra $\frac{a m y}{y}$ ou am ; c'est-à-dire, que pour chaque point d'une même logarithmique, la sous-tangente PT est toujours la même, & égale à autant de fois la première ordonnée AB , ou a , qu'il y a d'unités dans le module m .

31. Lorsque l'équation de la courbe est telle, que x croissant, y diminue, comme dans la figure 2, alors la ligne rM doit être exprimée par $-dy$ (21); & la proportion $rM : rm :: PM : PT$ qui sert à trouver la sous-tangente, devient $-dy : dx :: y : PT = -\frac{y dx}{dy}$; ainsi il n'y aura aucune différence pour le calcul : le seul changement est que la tangente, au lieu de tomber du côté de l'origine A des abscisses, par rapport à l'ordonnée PM , tombera du côté opposé; c'est pourquoi on peut

toujours prendre $\frac{y dx}{dy}$ pour la formule des soutangentes : si les ordonnées vont en décroissant , la valeur de $\frac{y dx}{dy}$ se présentera sous une forme négative qui indiquera qu'il faut porter cette valeur du côté opposé à l'origine des x .

Par exemple , si on prend l'équation au cercle , l'origine étant prise au centre , c'est-à-dire (*Alg.* 285) l'équation $yy = \frac{1}{a}aa - xx$, il est évident que CP ou x (*fig.* 3) croissant , y ou PM diminue ; aussi la soutangente PT tombe-t-elle du côté de PM opposé à l'origine C des abscisses ; & c'est ce que le calcul dit aussi ; car si l'on différencie , on a $2ydy = - 2xdx$; & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{x}$; donc $\frac{y dx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = \frac{-(\frac{1}{a}aa - xx)}{x}$, valeur dont le signe $-$ indique qu'elle doit être portée du côté opposé à celui que l'on a supposé en prenant $\frac{y dx}{dy}$ pour formule de la soutangente.

Prenons encore pour exemple , l'équation $xy = aa$ qui est à l'hyperbole entre ses asymptotes (*Alg.* 347) : nous aurons $x dy + y dx = 0$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{-x}{y}$; donc $\frac{y dx}{dy} = \frac{-xy}{y} = -x$; ce qui nous apprend que pour mener une tangente à l'hyperbole considérée entre ses asymptotes , il faut prendre sur l'asymptote voisine du point M en question (*fig.* 7) & du côté de PM opposé au point A origine des x , la ligne $PT = AP = x$.

On voit avec quelle facilité toutes ces choses se déterminent par le calcul différentiel.

A l'imitation des paraboles de tous les genres, on appelle *Hyperboles*, rapportées à leurs asymptotes, toutes les courbes dont l'équation telle que $y^m = a^{m+n} x^{-n}$ n'a que deux termes, mais où les exposans de y & de x dans différens membres, sont de signes contraires. On peut encore prendre ces courbes pour exemple; nous le laissons à faire au Lecteur. On trouvera la soutangente $= -\frac{m}{n} x$; c'est-à-dire, qu'elle tombe du côté opposé à l'origine des x , & qu'elle est égale à autant de fois l'abscisse qu'il y a d'unités dans l'exposant de y divisé par l'exposant de x .

En général, par ce calcul, on détermine à la fois toutes les soutangentes, tangentes, &c. de toutes les courbes d'une même famille: on appelle ainsi les courbes dont l'équation est formée de la même manière, & ne diffère que par la grandeur des exposans; c'est ainsi qu'on appelle *Cercles*, en général, toutes les courbes dans lesquelles une puissance quelconque de l'ordonnée, est égale au produit de deux puissances quelconques des deux distances de cette ordonnée aux extrémités d'une ligne a , sur laquelle se comptent les abscisses. Leur équation est $y^{m+n} = x^m (a-x)^n$ qui comprend le cercle proprement dit, lorsque $m=n=1$. L'équation $y^{m+n} = \frac{c}{b} x^m (a-x)^n$ représente les ellipses de tous les genres; & $y^{m+n} = \frac{c}{b} x^m (a+x)^n$, ainsi que $y^{m+n} = \frac{c}{b} x^m (x-a)^n$ représente les hyperboles de tous les genres. On détermine la figure de ces courbes, par le moyen de

leur équation , comme nous l'avons vu pour les sections coniques (*Alg.* 283) , mais en observant que y n'a qu'une valeur réelle , lorsque son exposant est impair , & deux lorsqu'il est pair , voyez (*Alg.* 172) ; ce qui fait qu'à une même abscisse , il ne répond qu'une branche de courbe , dans le premier cas , & deux dans le second , mais qui tombent de différens côtés de ce même axe.

32. Lorsqu'on fait déterminer les tangentes , normales , &c. , on peut facilement résoudre les deux questions suivantes , 1°. *D'un point donné hors d'une courbe , mener une tangente à cette courbe.* 2°. *D'un point donné par-tout où l'on voudra dans le plan d'une ligne courbe , mener une perpendiculaire à cette courbe.*

En effet , concevons que DM (*fig.* 8) est la tangente demandée. La valeur générale de PT ou $\frac{y dx}{dy}$ sera facile à trouver par le moyen de l'équation de la courbe. Si l'on mène DB parallèle aux ordonnées PM , la ligne DB & sa distance BA à l'origine A des abscisses , sont censées connues , puisque le point D est supposé donné. Nommant donc DB, h ; AB, g ; AP, x ; & PM, y , on aura $BP = g + x$, & $TB = PT - BP = \frac{y dx}{dy} - x - g$. Or les triangles semblables TBD, TPM , donnent $TB : BD :: TP : PM$; c'est-à-dire , $\frac{y dx}{dy} - x - g : h :: \frac{y dx}{dy} : y$ ou

$\therefore \frac{dx}{dy} : 1$; donc $\frac{y dx}{dy} - x - g = \frac{h dx}{dy}$. Mettant donc dans cette équation, la valeur de $\frac{dx}{dy}$ tirée de l'équation de la courbe différenciée, on aura une équation en x, y & constantes, dans laquelle mettant pour y sa valeur en x & constantes, tirée de l'équation même de la courbe, on aura l'équation qui donnera la valeur de x , qui répond au point M où doit aboutir la tangente ; & s'il est possible de mener du point D plus d'une tangente, l'équation donnera les valeurs de x qui conviennent aux différens points où doivent aboutir ces tangentes.

S'il s'agit d'une perpendiculaire, alors imaginant que ce soit DQ (*fig. 5*) ; PQ fera $\frac{y dy}{dx}$ (30) ; or les triangles semblables DBQ & MPQ donnent $DB : BQ :: PM : PQ$, c'est-à-dire, (en employant les mêmes dénominations que ci-dessus) $h : g + x + \frac{y dy}{dx} :: y : \frac{y dy}{dx}$ ou $:: 1 : \frac{dy}{dx}$; donc $\frac{h dy}{dx} = g + x + \frac{y dy}{dx}$, équation dont on fera le même usage que dans le cas précédent.

Les deux solutions que nous venons de donner, peuvent être simplifiées en faisant passer l'axe des abscisses par le point donné D , & le laissant parallèle à sa première position ; c'est-à-dire, en prenant DK (*fig. 8*) pour axe des abscisses, ce qui n'exige autre chose en faisant $KM = z$, & par conséquent $z = y - h$, ou $y = z + h$, que de

substituer, tant dans l'équation de la courbe, que dans celle du problème, $z + h$ au lieu de y . On peut aussi prendre le point D pour origine des abscisses.

Lorsque la courbe a un centre, comme le cercle, l'ellipse &c., on peut toujours supposer que le point D est sur un diamètre, alors la solution devient beaucoup plus simple.

33. Remarquons encore que $\frac{dx}{dy}$ exprime la tangente de l'angle que la courbe fait en chaque point, avec l'ordonnée; & $\frac{dy}{dx}$ exprime celle de l'angle que la courbe fait avec l'axe des abscisses. En effet, dans le triangle rectangle Mmr (*fig. 1*), on a (en supposant le rayon des Tables = 1) $rm : rM :: 1 : \text{tang. } rmM$; donc $\text{tang. } rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$. Donc si l'on veut savoir en quel endroit une courbe, ou sa tangente, fait avec l'ordonnée, un angle donné, ou dont la tangente est connue, ayant représenté cette tangente par m , on aura $m = \frac{dx}{dy}$; ainsi déterminant, par différenciation de l'équation de la courbe, la valeur de $\frac{dx}{dy}$, & l'égalant à m , on aura une équation dans laquelle substituant pour y sa valeur en x & constantes tirée de l'équation de la courbe, ou aura la valeur ou les valeurs de x , qui répondent aux points où la courbe fait un pareil angle avec l'ordonnée; & si la courbe ne fait nulle

part avec l'ordonnée un angle égal à l'angle donné, on trouvera que la valeur ou les valeurs de x seront imaginaires, ou bien l'équation indiquera une absurdité manifeste.

Par exemple, dans l'hyperbole qui auroit pour équation $yy = 2(ax + xx)$ on trouvera $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2a + 4x}$, lequel étant égalé à m , donne $\frac{2y}{2a + 4x}$ ou $\frac{y}{a + 2x} = m$; d'où l'on tire $y = ma + 2mx$: mais l'équation de la courbe donne $y = \sqrt{2(ax + xx)}$; donc $ma + 2mx = \sqrt{2(ax + xx)}$ ou, en quarrant, $m^2aa + 4mmax + 4mmxx = 2ax + 2xx$. Si l'on demande maintenant, en quel endroit cette hyperbole fait, avec l'ordonnée, un angle de 45° ; comme la tangente de 45° est égale au rayon, on aura $m = 1$, ce qui réduit l'équation à $aa + 4ax + 4xx = 2ax + 2xx$ ou $2xx + 2ax + aa = 0$, qui étant résolue donne $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-\frac{1}{4}aa)}$, valeurs imaginaires, & qui font voir que l'hyperbole dont l'équation particulière est $yy = 2(ax + xx)$, ne fait nulle part, avec l'ordonnée, un angle de 45° .

Quoique ce que nous venons de dire dans cette dernière remarque, & dans la résolution des deux questions précédentes, semble s'appliquer également aux courbes dont on auroit l'équation différentielle; en y faisant attention, on verra cependant que pour celles-ci, le calcul ne peut pas satisfaire entièrement comme pour celles dont on a l'équation en termes finis. En effet, lorsque l'équation qui résout la question, renferme encore x & y après la substitution de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, l'équation de la courbe ne peut servir à chasser y , puisque par la supposition elle renferme dx & dy .

Et quand même elle ne renfermeroit que x , on ne seroit pas sûr que cette valeur de x satisfait à la question, il faudroit, pour cela, mettre cette valeur de x dans l'équation de la courbe, & en déduire pour y une valeur réelle; or on ne peut en aucune manière, tirer de cette équation la valeur de y .

La seule manière de résoudre ces questions, en pareil cas, est (en supposant la courbe déjà construite) de construire aussi l'équation que l'on a eue en exprimant les conditions de la question, ce qui donne une seconde ligne dont l'intersection, ou les intersections avec la première, donnent la solution ou les solutions demandées.

34. On peut encore, par les mêmes principes, déterminer les asymptotes rectilignes des lignes courbes.

En effet une courbe a une asymptote rectiligne, lorsqu'ayant quelque branche qui s'étend à l'infini, la tangente à l'extrémité de cette branche, rencontre l'axe des abscisses ou celui des ordonnées, à une distance finie de l'origine. Ainsi (fig. 6) si de la soutangente PT ou $\frac{y \, dx}{dy}$ on retranche l'abscisse AP ou x , on aura $\frac{y \, dx}{dy} - x$ pour la valeur de AT ou de la distance de l'origine A jusqu'à la rencontre de la tangente: il n'y aura donc, après avoir calculé la valeur de $\frac{y \, dx}{dy} - x$, qu'à égaler cette valeur à une quantité finie s ; par le moyen de cette équation, on chassera y pour avoir une équation en x & s , ou bien on chassera x pour avoir une équation en y & s . Alors supposant y ou x infinie, s'il en résulte une ou plusieurs valeurs finies pour s , ce seront les distances AC où doivent passer les asymptotes de la courbe. Mais comme une seule distance n'en détermine pas la position, on imaginera, par l'origine A , la

ligne AK parallèle aux ordonnées, & on remarquera que les triangles semblables TPM , TAK , donnent $TP : PM :: TA : AK$; c'est-à-dire, $\frac{y \, dx}{dy} : y :: \frac{y \, dx}{dy} - x : AK = y - \frac{x \, dy}{dx}$. On calculera donc, de même, la valeur de $y - \frac{x \, dy}{dx}$, & l'ayant supposée égale à une quantité finie t , par le moyen de cette équation & de celle de la courbe, on éliminera x ou y ; & supposant y ou x infini, la valeur ou les valeurs de t qui en résulteront, donneront les distances AR où passe l'asymptote.

Par exemple, si l'équation de la courbe étoit $y^3 = x^2(a + x)$, on auroit $3y^2 dy = 2x dx (a + x) + x^2 dx = 2ax dx + 3x^2 dx$; donc $\frac{y \, dx}{dy} - x = \frac{3y^3}{2ax + 3x^2} - x$, ou (en mettant pour y^3 , sa valeur) $\frac{y \, dx}{dy} - x = \frac{3ax^2 + 3x^3}{2ax + 3x^2} - x = \frac{ax^2}{2ax + 3x^2} = \frac{ax}{2a + 3x} = s$: supposant donc x infini (c'est-à-dire, négligeant $2a$ vis-à-vis de $3x$) on aura $s = \frac{a}{3}$. On trouvera de même, $y - \frac{x \, dy}{dx} = y - \frac{2ax^2 + 3x^3}{3y^2} = \frac{3y^3 - 2ax^2 - 3x^3}{3y^2}$, qui, en mettant pour y sa valeur, se réduit à $\frac{ax^2}{x \sqrt[3]{(a+x)^2 x}} = t$; supposant donc x infini, on aura $t = \frac{1}{3}a$.

Si la valeur de s étant finie, on trouvoit celle de t infinie, ce seroit une preuve que l'asymptote est parallèle aux y . Elle seroit, au contraire, parallèle aux x , si s étant infinie, t étoit fini, ou zéro ou infiniment petit.

35. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les ordonnées étoient parallèles, & qu'elles étoient comptées

depuis la ligne même sur laquelle se comptent les abscisses. Mais il arrive assez souvent que l'on fait partir les ordonnées d'un point fixe ; quelquefois on prend pour abscisses les arcs d'une ligne courbe, & pour ordonnées des lignes droites ou des lignes courbes. Mais en général, à quelques lignes que soient rapportés les points de la courbe principale, on a toujours, ou l'on peut toujours avoir une équation qui exprime la relation des abscisses aux ordonnées. Lorsqu'on veut en faire usage pour déterminer les tangentes, ou d'autres lignes, il faut faire en sorte que les lignes que l'on emploiera pour déterminer ces tangentes, ne renferment d'autres différentielles que celles des variables qui entrent dans l'équation de la courbe. Nous allons en donner quelques exemples.

36. Supposons d'abord que AM (fig. 9) étant une courbe connue dont on fait mener les tangentes, BS soit une courbe qui ait pour abscisses les arcs AM de la première, & pour ordonnées les lignes MS parallèles à une ligne donnée : la relation de AM à MS étant exprimée par une équation quelconque, on demande comment on mèneroit une tangente en un point donné S de la courbe BS .

On imaginera, comme ci-devant, l'arc infiniment petit Ss , dont le prolongement SQ , ou la tangente, rencontre en Q la tangente MT au point correspondant M de la courbe AM ; & ayant mené la ligne Sk parallèle à MT ou à Mm , le triangle $Sk s$ fera semblable au triangle QMS , en sorte que l'on aura $fk : Sk :: MS : MQ$; or en nommant l'arc AM , x ; & l'ordonnée MS , y ; on a $Mm = Sk = dx$, & $fk = fm - SM = dy$; donc $dy : dx :: y : MQ = \frac{y dx}{dy}$; prenant donc sur la tangente MT la partie MQ égale à la valeur de $\frac{y dx}{dy}$ déterminée par la

différenciation de l'équation de la courbe, on aura le point Q , par lequel & par le point S , menant QS , elle fera la tangente demandée.

Supposons, par exemple, que la courbe BS soit construite en prenant toujours l'ordonnée MS égale à une partie déterminée de l'arc AM ; c'est-à-dire, que MS soit toujours à AM dans le rapport donné de a à b , on aura donc $y : x :: a : b$, en sorte que l'équation de la courbe sera $by = ax$. Différenciant, on a $b dy = a dx$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{a}$; donc $\frac{y dx}{dy}$ ou MQ , fera $\frac{by}{a}$; or par l'équation, on a $\frac{by}{a} = x$; donc $MQ = x$. Ainsi dans toutes les courbes dont les ordonnées parallèles seront toujours en même rapport avec les abscisses correspondantes, droites ou courbes, la sous-tangente MQ fera toujours égale à l'abscisse correspondante AM .

37. Lorsque la courbe AM sur laquelle on prend les abscisses, est un cercle; l'ordonnée MS étant toujours à l'arc AM dans un rapport constant, la courbe BS est ce qu'on appelle une cycloïde. C'est la cycloïde ordinaire (ou celle que trace le point d'une circonférence de cercle roulant sur un plan), lorsqu'on prend toujours l'ordonnée $MS = AM$. Si l'on prend MS plus grand que AM , mais toujours en même rapport entre eux, on a la cycloïde allongée; au contraire, on a la cycloïde accourcie en prenant MS plus petit que AM .

38. Si l'équation de la courbe à laquelle il s'agit de mener une tangente, au lieu d'exprimer le rapport de AM à MS , exprimoit celui de AM à PS ; c'est-à-dire, si les arcs AM étoient les abscisses x , & que les ordonnées PMS , y , se comptassent depuis une ligne droite déterminée AP ; alors

en menant Su parallèle à AP , on détermineroit la soutangente PI sur la ligne AP , en cette manière.

Comme la courbe AM est supposée connue, on est censé connoître sa soutangente & sa tangente en chaque point; ainsi nommant PT , s , & TM , t , on aura, en menant Mr parallèle à AP , & comparant les triangles TPM & Mrm , $TP : TM :: Mr : Mm$; c'est-à-dire, $s : t :: Mr : dx$; donc $Mr = \frac{s dx}{t} = Su$ (en menant Su parallèle à AP). Comparant donc les triangles semblables Suf & IPS , on aura $uf : Su :: PS : PI$; or PS étant actuellement y , uf est dy ; donc $dy : \frac{s dx}{t} :: y : PI = \frac{s y dx}{t dy}$. Ainsi, différenciant l'équation de la courbe, on aura la valeur de $\frac{dx}{dy}$, qui étant substituée dans $\frac{s y dx}{t dy}$ donnera la valeur de PI , débarrassée de différences.

39. Quelquefois on ne donne pas l'équation de la courbe, par la relation des abscisses aux ordonnées, mais par celle que chaque ordonnée de cette courbe, est supposée avoir avec les ordonnées correspondantes de quelques autres courbes connues. Pour mener les tangentes, dans ce cas, voici comment on s'y prendra. Supposons, par exemple, que la courbe BMf (fig. 10) résulte des deux courbes connues AL & CN , au moyen d'une équation entre les ordonnées correspondantes PL , PM , PN , que nous nommerons respectivement x , y , z . Puisque les courbes AL & CN sont supposées connues, leurs soutangentes PS & PR sont supposées connues; nommons donc PS , s , & PR , s' ; & imaginons l'ordonnée infiniment proche $pnm l$, & les lignes Lu , Mr , no parallèles à AP . Les triangles semblables LPS , luL donnent $PS : PL :: Lu : ul$, c'est-à-dire, $s : x :: Lu : dx$; donc $Lu = \frac{s dx}{x} = Mr$. Or les triangles semblables TPM ,

Mrm , donnent $rm : Mr :: PM : PT$, c'est-à-dire, $dy : \frac{s dx}{x} :: y : PT$; donc $PT = \frac{sy dx}{x dy}$; donc si l'équation de la courbe ne renfermoit que x & y , on auroit, en différenciant cette équation, la valeur de $\frac{dx}{dy}$, laquelle étant substituée dans $\frac{sy dx}{x dy}$, donneroit la valeur de PT , débarassée de différences; mais comme cette équation renferme x , y & z , sa différentielle renfermera dx , dy & dz ; il faut donc avoir la valeur de dz exprimée en dx ou dy . Or les triangles semblables Non & NPR , donnent $No : on$ ou $Lu :: NP : PR$; c'est-à-dire (en faisant attention que PM augmentant, PN diminue, en sorte que sa différence NO ou dz est négative) — $dz : \frac{s dx}{x} :: z : s'$; donc $dz = -\frac{s' dz}{s' x}$; ainsi, en mettant, dans l'équation différenciée de la courbe, la quantité $-\frac{s' dz}{s' x}$ au lieu de dz , on aura aisément la valeur de $\frac{dx}{dy}$, que l'on substituera dans la formule $\frac{sy dx}{x dy}$ de la foutangente.

Pour donner un exemple, supposons que AL & CN étant deux courbes connues quelconques, on prenne toujours l'ordonnée PM moyenne proportionnelle entre PL & PN : alors on aura $x : y :: y : z$; ou $xz = y^2$, pour l'équation de la courbe BM . Différenciant, il vient $x dz + z dx = 2y dy$, substituant pour dz sa valeur générale $-\frac{s' dz}{s' x}$, on a $-\frac{s' dz}{s' x} + z dx = 2y dy$, d'où l'on tire $\frac{dx}{dy} = \frac{2s'y}{z(s' - s)}$; donc PT ou $\frac{sy dx}{x dy}$ devient $\frac{2ss'y^2}{xz(s' - s)}$, ou en mettant pour y^2 sa valeur xz , & réduisant, $PT = \frac{2ss'}{s' - s}$.

Il est aisé de varier ces exemples, en prenant telle équation que l'on voudra, entre x , y & z . On peut, si l'on veut, supposer que AL & CN sont des lignes droites (fig. 11). Dans ce cas, & en prenant toujours PM moyenne proportionnelle entre PL & PN , la courbe BM est une section conique. Savoir, une parabole, quand le point C est infiniment éloigné, ou que la ligne droite CN est parallèle à AC ; une ellipse, quand les deux angles HAC & HCA sont aigus; & particulièrement un cercle, quand ils sont chacun de 45° ; une hyperbole, quand l'un de ces deux angles est obtus.

40. Lorsque les ordonnées partent d'un point fixe, alors on prend pour abscisses les arcs d'une courbe connue, qui le plus souvent est un cercle; c'est-à-dire, que dans ce dernier cas, l'équation exprime la relation de l'ordonnée CM (fig. 12), avec l'angle ACM que cette ligne fait avec une ligne fixe AC ; ou bien elle exprime la relation de cette même ordonnée CM avec l'arc OS décrit d'un rayon déterminé.

Pour mener les tangentes, lorsqu'on a l'équation entre l'ordonnée CM & l'angle ACM ou l'arc OS , on imagine, que pour chaque point M , on élève sur CM une perpendiculaire CT qui rencontre la tangente TM en T ; alors imaginant l'arc infiniment petit Mm , & menant l'ordonnée mC , on conçoit que du rayon CM , on ait décrit l'arc Mr que l'on peut regarder comme une ligne droite perpendiculaire en r à Cm . Comme l'angle Mmr diffère infiniment peu de l'angle TMC , les triangles Mrm & TCM sont semblables, & donnent $rm : Mr :: CM : CT$; c'est-à-dire (en nommant CM , y), $dy : Mr :: y : CT = \frac{Mr \times y}{dy}$; nommant l'arc OS , x , & son rayon a , les secteurs semblables

CSs & CMr donnent $CS : CM :: Ss : Mr$, c'est-à-dire, $a : y :: dx : Mr = \frac{y dx}{a}$; mettant cette valeur de Mr , dans celle de CT , on a CT , ou la sous-tangente $= \frac{y^2 dx}{a dy}$. Or puisqu'on est supposé avoir la relation entre y & x , il fera facile, en différenciant l'équation qui exprime cette relation, d'avoir la valeur de $\frac{dx}{dy}$, laquelle substituée dans la valeur de CT , donnera une nouvelle expression de CT , délivrée de différences.

Si l'on suppose, par exemple, que l'ordonnée CM (figure 13) soit toujours à l'arc correspondant OS , dans le rapport de m à n , c'est-à-dire, que $y : x :: m : n$, on aura $ny = mx$, donc $ndy = m dx$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{n}{m}$; donc $CT = \frac{y^2 dx}{a dy} = \frac{y^2}{a} \times \frac{n}{m} = \frac{y}{a} \times \frac{ny}{m}$; or, par l'équation, on a $\frac{ny}{m} = x$; donc $CT = \frac{yx}{a}$. Donc si du point C comme centre, & du rayon CM , on décrit l'arc MQ , on aura CT égal à l'arc MQ ; en effet, les secteurs semblables COS & CQM donnent $CS : OS :: CM : MQ$, c'est-à-dire, $a : x :: y : MQ = \frac{yx}{a}$; donc $CT = MQ$.

La courbe que nous venons de considérer, est la spirale d'Archimède.

41. Concevons encore que OS (fig. 14) étant une ligne connue, ou dont on fait mener les tangentes, on construise la courbe BM , par cette condition, que CS , x , & CM , y , aient entre elles une relation déterminée & exprimée par une équation donnée. Si l'on conçoit l'arc infiniment petit Mm , les ordonnées CM , Cm , & les arcs Mr , Sq ,

décrits du centre C & des rayons CM , CS , il est clair que la différenciation de l'équation ne donnera que le rapport de dy à dx ou de rm à sq , puisque y & x sont les seules variables qui entrent dans cette équation; or, pour déterminer la soutangente CT , il faut avoir le rapport de rm à rM ; voyons donc comment on peut déterminer rM en vertu des conditions de la question.

Puisque la courbe OS est connue, la soutangente CQ est donnée pour chaque point S ; or les triangles semblables QCS , Sqf donnent $CS : CQ :: qf : qS$; donc nommant CQ , s , on aura $x : s :: dx : qS = \frac{s dx}{x}$; mais les secteurs semblables CSq , CMr donnent $CS : CM :: Sq : Mr$, ou $x : y :: \frac{s dx}{x} : Mr = \frac{s y dx}{x x}$; il est donc aisé, maintenant, d'avoir la soutangente CT , en comparant les triangles semblables Mrm & TCM qui donnent $rm : rM :: CM : CT$, ou $dy : \frac{s y dx}{x x} :: y : CT = \frac{s y^2 dx}{x^2 dy}$.

Pour appliquer ceci, supposons que la courbe BM soit construite, en prenant toujours SM de même grandeur, ou égale à une ligne donnée a , quelle que soit d'ailleurs la ligne OS . Nous aurons donc $x + a = y$. Donc $dx = dy$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = 1$; la soutangente CT devient donc $CT = \frac{s y^2}{x^2}$ que l'on construira en cette manière.

Ayant mené la tangente SQ , on lui mènera, par le point M la parallèle MX ; puis tirant SX , on mènera, par le point M , la ligne MT parallèle à SX ; MT fera la tangente demandée. En effet, les triangles semblables CSQ &

CMX donnent $CS : CQ :: CM : CX$, ou $x : s :: y : CX = \frac{s \cdot y}{x}$. Pareillement, les triangles semblables CSX & CMT , donnent $CS : CX :: CM : CT$, ou $x : \frac{s \cdot y}{x} :: y : CT$; donc $CT = \frac{s \cdot y^2}{x^2}$.

On voit, par ces exemples, comment on doit se conduire dans l'application de ces méthodes à d'autres cas. Remarquons, en terminant cette matière, que lorsque OS est une ligne droite, la courbe BM que l'on forme en prenant toujours SM de même grandeur, est ce qu'on appelle la *Conchoïde de Nicomède*.

*Application aux limites des Lignes courbes,
& en général, aux limites des quantités,
& aux questions de maximis & minimis.*

42. Nous avons vu (33) que $\frac{dx}{dy}$ exprimoit la tangente de l'angle que la courbe, ou sa tangente, fait, en chaque point, avec l'ordonnée; & que $\frac{dy}{dx}$ exprimoit celle de l'angle que la courbe ou sa tangente fait avec l'axe des abscisses.

Donc, pour savoir en quel endroit la tangente d'une courbe devient parallèle aux ordonnées, il faut chercher en quel endroit la valeur de $\frac{dx}{dy}$ devient zéro, ou, ce qui revient au même, en quel endroit dx devient zéro; & pour savoir en quel endroit la tangente de la courbe est parallèle aux abscisses, il

faut chercher en quel endroit $\frac{dy}{dx}$ devient zéro, ou ce qui revient au même, en quel endroit dy est zéro. Car il est évident que dans le premier cas, l'angle de la courbe, avec les ordonnées est nul; & dans le second cas, l'angle de la courbe, avec les abscisses est nul; & dans le second cas, l'angle de la courbe, avec les abscisses, est nul.

Il suit évidemment de-là, que si l'on veut savoir si une courbe dont on a l'équation, a, dans quelque endroit, sa tangente parallèle aux ordonnées ou aux abscisses, il faut différencier cette équation, & en ayant tiré la valeur de $\frac{dx}{dy}$, si l'on égale le numérateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, à zéro, on aura une équation qui, conjointement avec l'équation même de la courbe, donnera la valeur de x & celle de y qui déterminent en quel endroit la tangente est parallèle aux ordonnées; enforte que si cela arrive en plusieurs endroits, on aura plusieurs valeurs pour x & plusieurs valeurs pour y .

Au contraire, si l'on égale le dénominateur à zéro, cette équation conjointement avec celle de la courbe, déterminera les valeurs de x & de y , qui répondent aux endroits où la tangente de la courbe devient parallèle aux abscisses.

Pour éclaircir ceci par un exemple familier, prenons la

courbe qui a pour équation $yy + xx = 3ax - 2aa + 2by - bb$, qui en supposant les x & les y perpendiculaires entre elles, appartient au cercle (*Alg.* 392).

Les lignes AP (*fig.* 15) sont x , & les lignes PM , PM' sont les deux valeurs de y que la résolution de cette équation donne pour chaque valeur de x .

Si l'on différencie cette équation, on aura $2ydy + 2xdx = 3adx + 2bdy$, d'où l'on tire $\frac{dx}{dy} = \frac{2y - 2b}{3a - 2x}$.

Égalons d'abord le numérateur à zéro, pour avoir les endroits où la tangente devient parallèle aux ordonnées. Nous aurons $2y - 2b = 0$, ou $y = b$. Substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, il vient $bb + xx = 3ax - 2aa + 2bb - bb$, ou $xx - 3ax = -2aa$, qui étant résolue donne $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa\right)}$; c'est-à-dire, $x = 2a$, & $x = a$; ce qui nous apprend que la courbe, ou sa tangente, devient parallèle aux ordonnées, en deux points R & R' , qui ont chacun pour ordonnée la ligne b , & dont l'un R , a pour abscisse la ligne $AQ = a$, & l'autre R' , a pour abscisse la ligne $AQ' = 2a$.

Égalons maintenant à zéro, le dénominateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$, pour favoir en quel endroit la courbe, ou sa tangente, devient parallèle aux abscisses : nous aurons $3a - 2x = 0$, ou $x = \frac{3}{2}a$. Substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, nous aurons $yy + \frac{9}{4}aa = \frac{9}{2}aa - 2aa + 2by - bb$, ou $yy - 2by + bb = \frac{1}{4}aa$; & tirant la racine quarrée, $y - b = \pm \frac{1}{2}a$; donc $y = b \pm \frac{1}{2}a$; c'est-à-dire, $y = b + \frac{1}{2}a$, & $y = b - \frac{1}{2}a$; ce qui nous apprend que la tangente devient parallèle aux abscisses, en deux endroits ou points T & T' qui ont pour

abscisse commune la ligne $AS = \frac{3}{2}a$, & dont l'un T' a pour ordonnée $ST' = b + \frac{1}{2}a$, & l'autre T , a pour ordonnée la ligne $ST = b - \frac{1}{2}a$.

Les points Q & Q' sont ce qu'on appelle les *limites* des abscisses, parce qu'entre Q & Q' , à chaque abscisse AP , répondent des valeurs réelles PM & PM' pour y ; au lieu qu'entre Q & A , & au-delà de Q' par rapport à A , il n'y a aucun point de la courbe, enforte que si on suppose x plus petit que AQ ou a , ou bien plus grand que AQ' ou $2a$, on ne trouve aucune valeur réelle pour y . En effet, si dans l'équation on met au lieu de x une quantité $a - q$, plus petite que a , ou une quantité plus grande que $2a$, ou telle que $2a + q$, on trouvera, en résolvant l'équation, que les deux valeurs de y sont imaginaires.

Pareillement, si par le point A on conçoit AL parallèle aux ordonnées, c'est-à-dire, l'axe des ordonnées; & que par les points T & T' , on mène les lignes TL , $T'L'$ parallèles aux abscisses; les lignes $AL = ST = b - \frac{1}{2}a$, & $AL' = ST' = b + \frac{1}{2}a$, sont les limites des ordonnées; car il est évident qu'il ne peut y avoir d'ordonnée plus grande que AL' , ni plus petite que AL , la tangente devant être parallèle aux abscisses. Aussi, si l'on met dans l'équation de la courbe, au lieu de y , une quantité plus petite que $b - \frac{1}{2}a$, qu'on mette, par exemple, $b - \frac{1}{2}a - q$, on verra, en résolvant l'équation, que les valeurs de x sont imaginaires. La même chose arrivera si on met au lieu de y , la quantité $b + \frac{1}{2}a + q$, plus grande que $b + \frac{1}{2}a$.

43. L'ordonnée ST' est la plus grande de toutes celles qui aboutissent à la partie concave $RT'R'$ de

la circonférence. L'ordonnée ST est la plus petite de toutes celles qui aboutissent à la partie convexe; & les ordonnées QR & $Q'R'$ sont, tout-à-la-fois, les plus petites qui aboutissent à la partie concave, & les plus grandes qui aboutissent à la partie convexe.

44. Ainsi la même méthode sert en même temps, 1°. à déterminer les limites des abscisses & des ordonnées; 2°. à déterminer dans quels cas la tangente devient parallèle aux abscisses, ou aux ordonnées; 3°. enfin, à déterminer les plus grandes & les plus petites abscisses ou ordonnées.

45. Or, de quelque manière qu'une quantité soit exprimée algébriquement, on peut toujours regarder l'expression algébrique qui la représente, comme étant celle de l'ordonnée d'une ligne courbe. Par exemple, si $\frac{x^2 \times (a - x)}{a a}$ est l'expression d'une quantité que j'appelle y , auquel cas j'ai $y = \frac{x^2 (a - x)}{a a}$, je puis regarder cette équation, comme étant celle d'une ligne courbe dont x seroit l'abscisse, & y l'ordonnée. Alors si la quantité $\frac{x^2 \times (a - x)}{a a}$ peut, dans un certain cas, devenir plus grande ou plus petite que dans tout autre, (ce qu'on appelle être susceptible d'un *maximum* ou d'un *minimum*), il est visible qu'il faut suivre exactement la même méthode que ci-dessus;

c'est-à-dire, différencier cette équation, & en ayant tiré la valeur de $\frac{dx}{dy}$, évaluer à zéro le numérateur ou le dénominateur de cette valeur.

46. C'est à cela que se réduit la méthode qu'on appelle de *maximis & minimis*, qui est une des plus utiles de l'analyse, & qui a pour objet de faire trouver, entre plusieurs quantités qui croissent ou décroissent suivant une même loi, quelle est la plus grande ou la plus petite, ou en général celle qui a certaines propriétés dans le plus haut degré à l'égard de toutes ses semblables. Nous allons en donner quelques exemples, pris dans la géométrie & dans le calcul; la mécanique nous en fournira par la suite, qui seront tout-à-la-fois & plus curieux & plus utiles.

47. Proposons-nous d'abord de partager un nombre donné a en deux parties, telles que leur produit soit plus grand qu'en le partageant de toute autre manière. Nommons x , l'une de ces parties; l'autre sera $a - x$, & le produit sera $ax - xx$; supposons-le $= y$; nous aurons $y = ax - xx$; donc en différenciant, $dy = adx - 2xdx$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - 2x}$; si on égale le numérateur à zéro, on aura $1 = 0$, ce qui est absurde; par conséquent s'il y a un *maximum*, ce n'est qu'en égalant le dénominateur à zéro, qu'on le trouvera. Égalons donc le dénominateur à zéro; nous aurons $a - 2x = 0$, qui donne $x = \frac{1}{2}a$, & nous apprend que de quelque manière qu'on partage un nombre en deux parties, le produit de ces deux

parties sera le plus grand qu'il est possible, lorsqu'elles seront chacune la moitié de ce nombre.

48. Lorsque, comme dans cet exemple, on a l'expression algébrique de la quantité, on peut se dispenser de l'égaliser à une nouvelle variable y ; il n'y a qu'à la différencier tout simplement, & égaliser à zéro le numérateur ou le dénominateur, lorsque cette différentielle est une fraction. Ainsi, dans ce même exemple, je différencierois simplement $ax - xx$, & égalant à zéro la différentielle $adx - 2xdx$, j'aurois $adx - 2xdx = 0$, d'où je tire également $x = \frac{1}{2}a$.

49. Proposons-nous une question plus générale. Qu'il s'agisse, par exemple, de partager un nombre connu a , en deux parties telles que le produit d'une puissance déterminée de l'une des parties, par la même ou une autre puissance de l'autre partie, soit le plus grand qu'il est possible. Représentons par x la première partie, & par m la puissance à laquelle elle doit être élevée; la seconde partie sera $a - x$; représentons par n la puissance à laquelle elle doit être élevée; alors le produit en question sera $x^m (a - x)^n$. Différencions ce produit, & égalons la différentielle à zéro, nous aurons $mx^{m-1}dx (a - x)^n - nx^m \cdot (a - x)^{n-1}dx = 0$. Divisant tout par $x^{m-1}dx (a - x)^{n-1}$, nous aurons $m(a - x) - nx = 0$, ou $ma - mx - nx = 0$, qui donne $x = \frac{ma}{m+n}$. Supposons, par exemple, qu'il ait été question de partager le nombre a en deux parties, telles que le carré de l'une, multiplié par le cube de la seconde,

soit le plus grand qu'il est possible; alors $m = 2$, $n = 3$.

On a donc $x = \frac{2a}{2+3} = \frac{2}{5}a$; c'est-à-dire, que l'une des parties doit être les $\frac{2}{5}$ du nombre ou de la quantité proposée; & l'autre doit, par conséquent, en être les trois cinquièmes.

Ce que nous avons dit ci-dessus, à l'occasion de la figure 15, fait voir qu'une quantité peut devenir la plus grande de toutes ses semblables, en deux manières différentes: lorsque, comme PM' elle a été d'abord en croissant pour diminuer ensuite; ou lorsque, comme $P'M''$ elle va en croissant pour s'arrêter brusquement en devenant $Q'R'$; mais dans ce dernier cas, elle est tout-à-la-fois la plus grande de toutes les ordonnées qui aboutissent à la partie convexe, & la plus petite de celles qui aboutissent à la partie concave. Pareillement une quantité peut devenir la plus petite de toutes ses semblables, en deux manières différentes: lorsque, comme PM , elle va d'abord en diminuant pour augmenter ensuite; ou lorsque, comme $P''M'''$, elle va en diminuant pour s'arrêter brusquement, & alors elle est tout-à-la-fois un *minimum* & un *maximum*; elle est un *minimum* à l'égard de la branche $M'T'M'''$, & un *maximum* à l'égard de la branche MTM'' .

50. Ainsi, pour distinguer si une quantité est un *maximum*, ou un *minimum*, ou l'un & l'autre, il

faut, en supposant que a marque la valeur de x , qui convient au *maximum* ou *minimum*, substituer dans la quantité proposée au lieu de x , successivement $a + q$, a , & $a - q$. Si les deux résultats extrêmes sont réels & plus petits que celui du milieu, la quantité est un *maximum*; si, au contraire, les deux résultats extrêmes sont plus grands que celui du milieu, la quantité est un *minimum*: enfin, si des deux résultats extrêmes l'un est imaginaire & l'autre réel, la quantité est tout-à-la-fois un *maximum* & un *minimum*.

51. Lorsque dans la détermination d'un *maximum* ou d'un *minimum*, la valeur que l'on trouve pour la variable rend celle du *maximum* ou du *minimum* négative, on doit conclure que le *maximum* ou le *minimum* qu'elle indique, n'appartient point à la question actuelle, mais qu'il appartient à une question où quelques-unes des conditions seroient contraires.

Par exemple, si l'on demandoit de partager la ligne AB (fig. 16) au point C , de manière que le carré de la distance AC au point A , étant divisé par la distance au point B , donne le plus petit quotient possible; alors nommant a la ligne donnée AB , & x la partie AC ; la partie restante CB seroit $a - x$, & par conséquent le quotient seroit $\frac{x^2}{a - x}$; différencions donc cette quantité, ou $x^2 (a - x)^{-1}$; nous aurons $2x dx \cdot (a - x)^{-1} + x^2 dx (a - x)^{-2} = 0$,

ou $\frac{2x dx}{a-x} + \frac{x^2 dx}{(a-x)^2} = 0$, où $2ax dx - x^2 dx = 0$,
 ou $(2a - x)x = 0$, qui donne ou $x = 0$, ou $2a - x = 0$; la 1^{re}. valeur indique un *minimum*, mais qui est évident sans le calcul. Quant à la seconde qui donne $x = 2a$, si on substitue cette valeur dans $\frac{x^2}{a-x}$, celle-ci devient $\frac{4a^2}{-a}$ ou $-4a$. Le *minimum* n'appartient donc pas à la question actuelle. Mais si l'on fait attention à la valeur $x = 2a$ que l'on trouve, on verra que le point *C* ne peut être entre *A* & *B*; mais que la question aura une solution, s'il s'agit de le trouver sur le prolongement de *AB*, au-delà de *B* par rapport à *A*. Or dans ce cas, si nous nommons *AC'*, x ; la distance *BC'* ne sera plus $a - x$, mais $x - a$, & la quantité dont il s'agissoit, sera $\frac{x^2}{x-a}$, laquelle étant différenciée & égalée à zéro, donne $\frac{2x dx}{x-a} - \frac{x^2 dx}{(x-a)^2} = 0$, ou après les réductions faites $x^2 dx - 2ax dx = 0$, qui donne $x = 2a$, comme ci-devant; mais cette quantité substituée dans $\frac{x^2}{x-a}$, la change en $4a$. Il y a donc un *minimum* pour ce cas.

Si l'on égale le dénominateur $x - a$ de la différentielle, à zéro, on a $x = a$, qui indique un *maximum*: & en effet, lorsque $x = a$, la quantité devient infinie. Mais il n'a pas moins le vrai caractère du *maximum*, car soit qu'on suppose x plus petit ou plus grand que a , on trouve une quantité plus petite qu'en supposant $x = a$.

52. Lorsque l'expression d'une quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, renferme quelque multiplicateur ou quelque diviseur constant, on

peut supprimer ce multiplicateur ou ce diviseur, avant que de différencier ; en effet supposons que $\frac{a}{b}y$ représente généralement une quantité qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, a & b étant des constantes ; il faut donc que $\frac{a}{b}dy = 0$; or puisque a & b ne sont pas zéro, il faut que $dy = 0$; la conclusion est donc la même que si y seul eût dû être un *maximum* ou un *minimum*, c'est-à-dire, la même qu'en supprimant les facteurs & les diviseurs constants. Cette remarque sert à simplifier les calculs, dans plusieurs cas.

53. Proposons-nous, maintenant, de trouver entre toutes les lignes que l'on peut mener par un même point D donné dans l'angle connu ABC (fig. 17), quelle est celle qui forme avec les côtés de cet angle, le plus petit triangle possible.

Menons par le point D , la ligne DG parallèle au côté AB , & supposant EF une droite quelconque tirée par le point D , abaissons DK perpendiculaire sur BC , & du point E où EF rencontre AB , abaissons EL aussi perpendiculaire sur BC . La ligne BG est censée connue, ainsi que la perpendiculaire DK ; nommons donc $BG = a$, $DK = b$, & la base BF du triangle BEF , nommons-la x . On voit que depuis un certain terme, plus BF croîtra, & plus le triangle augmentera. Au contraire, si BF diminue, on conçoit que le triangle diminuera, mais jusqu'à un certain terme seulement ; car si BF devenoit presque égal à BG , la droite EDF seroit presque parallèle à AB , puisqu'elle seroit prête à se confondre avec GD : le triangle

seroit alors extrêmement grand. Il y a donc une certaine valeur de BF qui donne le plus petit triangle possible. Pour la trouver, cherchons l'expression générale du triangle BEF . Or les triangles semblables BEF , GDF donnent $GF : BF :: DF : EF$; & les triangles semblables DKF & ELF donnent $DF : EF :: DK : EL$; donc $GF : BF :: DK : EL$; c'est-à-dire, $x - a : x :: b : EL = \frac{bx}{x - a}$; donc la surface du triangle BEF , qui est $\frac{EL \times BF}{2}$, fera $\frac{bx}{x - a} \times \frac{x}{2}$, ou $\frac{\frac{1}{2} b x x}{x - a}$. Il faut donc qu'en différenciant cette quantité, le numérateur ou le dénominateur devienne zéro, ou bien, comme on peut (52) supprimer le facteur constant $\frac{1}{2}b$, il suffira de différencier $\frac{xx}{x - a}$; mais sans refaire ce calcul que nous avons déjà rencontré (51), nous concluons de même, que $x = 2a$; donc si l'on prend $BF = 2a = 2BG$, la ligne FDE que l'on tirera par le point D , donnera le triangle FBE pour le plus petit triangle demandé.

54. Cherchons maintenant parmi tous les parallépipèdes de même surface & de même hauteur, quel est celui qui a la plus grande capacité.

Nommons h la hauteur, cc la surface du parallépipède; x & y les deux côtés du rectangle qui sert de base. La surface totale est composée de six rectangles, dont deux ont chacun h pour côté ou pour hauteur, & x pour base; deux autres ont h pour hauteur, & y pour base; enfin les deux derniers ont x pour base, & y pour hauteur; ainsi la surface totale a pour expression $2hx + 2hy + 2xy$; c'est-à-dire, que l'on a $2hx + 2hy + 2xy = cc$. Quant à la capacité ou solidité, elle est hxy . Puis donc qu'elle doit être la plus grande de toutes celles de même surface, il faut

que sa différentielle $hxdy + hydx$ soit $= 0$, ou (ce qui revient au même) il faut que $xdy + ydx = 0$. Mais l'équation $2hx + 2hy + 2yx = cc$, qui exprime que la surface de tous ces parallépipèdes est constante ou la même, donne $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$. Substituant donc, dans cette équation, la valeur de dx , tirée de la première, on aura, après les réductions faites, $y = x$; la base doit donc être un carré. Pour en connoître le côté, il faut mettre pour y sa valeur x dans l'équation $2hx + 2hy + 2xy = cc$, qui deviendra par-là, $4hx + 2x^2 = cc$, & qui étant résolue, donne $x = -h \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$, dont la racine $x = -h - \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$, étant négative, ne peut servir à la question présente; ainsi la valeur convenable de x , est $x = -h + \sqrt{hh + \frac{1}{2}cc}$.

55. Si l'on demande, à présent, quelle doit être la hauteur h , pour que le parallépipède ait la plus grande solidité de tous ceux de même surface; on remarquera que puisque la hauteur étant h , la base doit être un carré, cette solidité sera exprimée par hxx ; il faut donc que la différentielle de hxx , en regardant h & x comme variables, soit $= 0$; on a donc $2hxdx + xxdh = 0$, ou $2hdx + xdh = 0$, en divisant par x . Mais l'équation $4hx + 2x^2 = cc$, qui exprime alors que la surface est constante, donne, en différenciant, $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$; mettant donc, dans celle-ci, pour dh , sa valeur tirée de l'équation $2hdx + xdh = 0$, on aura, après les réductions faites, $h = x$; donc le parallépipède cherché doit être un cube, puisque son côté, ou sa hauteur h , doit être égal au côté x du carré qui sert de base. Pour trouver maintenant le côté de ce cube, il faut mettre pour h , sa valeur x dans l'équation $4hx + 2x^2 = cc$, qui deviendra $4x^2 + 2x^2 = cc$ ou $6x^2 = cc$, qui donne

$x =$

$x = \sqrt{\left(\frac{c}{6}\right)}$. Donc, de tous les parallépipèdes de même surface, celui qui a la plus grande solidité, est le cube qui a pour côté une ligne égale à la racine quarrée de la sixième partie de cette surface.

56. Cherchons maintenant, entre tous les triangles de même contour & de même base, quel est celui qui a la plus grande surface.

Soit a la base AB , & c le contour du triangle ABC (fig. 18). Abaissons la perpendiculaire CP , & nommons AP , x ; CP , y ; nous aurons $PB = a - x$, $AC = \sqrt{xx + yy}$, & $CB = \sqrt{[(a - x)^2 + yy]}$. Donc le contour fera $\sqrt{xx + yy} + \sqrt{[(a - x)^2 + yy]} + a$, & la surface fera $\frac{ay}{2}$; on aura donc $\sqrt{xx + yy} + \sqrt{[(a - x)^2 + yy]} + a = c$, & il faudra que la différentielle de $\frac{ay}{2}$ soit $= 0$; c'est-à-dire, qu'on aura $\frac{ady}{2} = 0$, & par conséquent $dy = 0$. Or l'équation qui exprime que le contour est constant, étant différenciée, donnera $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}} + \frac{(a - x) \cdot -dx + ydy}{\sqrt{[(a - x)^2 + yy]}} = 0$, qui à cause que $dy = 0$, se réduit à $\frac{xdx}{\sqrt{xx + yy}} - \frac{(a - x)dx}{\sqrt{[(a - x)^2 + yy]}} = 0$, ou divisant par dx , & chassant les fractions, $x\sqrt{[(a - x)^2 + yy]} = (a - x) \cdot \sqrt{xx + yy}$. Quarrant on aura $xx \cdot (a - x)^2 + xxyy = (a - x)^2 \cdot xx + (a - x)^2 \cdot yy$; faisant les opérations indiquées, supprimant de part & d'autre les termes égaux, & réduisant, nous aurons $xx = (a - x)^2$, ou $xx = aa - 2ax + xx$, qui donne $x = \frac{1}{2}a$, & nous fait voir que le triangle doit être isoscèle. Ainsi il faut du milieu

de AB , élever une perpendiculaire, & ayant décrit du point B comme centre & d'un rayon égal à la moitié de l'excès du contour c sur la base a , un arc qui coupe cette perpendiculaire en C , si l'on tire CB & CA , on aura le triangle qui a la plus grande surface de tous ceux de même contour & de même base.

57. Si l'on veut savoir maintenant, *quel est généralement, entre tous les triangles de même contour, celui qui a la plus grande surface*, il faut remarquer que quelle que soit la base, on voit par la solution précédente, que x doit toujours en être la moitié; c'est-à-dire, que quel que soit a , on doit toujours avoir $x = \frac{1}{2}a$. Cela étant, l'équation qui exprime le contour, se réduira à $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + a = c$, ou $2\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} = c - a$; quarrant, on aura $aa + 4yy = cc - 2ac + aa$, qui donne $y = \sqrt{(\frac{cc - 2ac}{4})}$. La surface du triangle qui est généralement $\frac{ay}{2}$, fera donc $\frac{a}{2} \sqrt{(\frac{cc - 2ac}{4})}$. Puis donc qu'elle doit être la plus grande de toutes celles de même contour, quelle que soit d'ailleurs la base a , il faut égaler à zéro la différentielle de $\frac{a}{2} \sqrt{(\frac{cc - 2ac}{4})}$ ou de $a \sqrt{(cc - 2ac)}$, prise en regardant a comme variable. Nous aurons donc $d[a \sqrt{(cc - 2ac)}]$ ou $d[a(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}}]$, c'est-à-dire, $da(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}} - a.cda(cc - 2ac)^{-\frac{1}{2}} = 0$, ou $da \sqrt{(cc - 2ac)} - \frac{cada}{\sqrt{(cc - 2ac)}} = 0$, ou $da(cc - 2ac) - cada = 0$, ou $ccda - 3cada = 0$, d'où l'on tire $a = \frac{c}{3}$; donc la base a doit être le tiers du contour: & puisque nous avons vu d'ailleurs que le triangle devoit être isoscèle, il s'ensuit donc qu'il doit être équilatéral.

Donc de tous les triangles de même contour, le triangle équilatéral est celui qui a la plus grande surface.

58. Dans ces deux solutions, nous n'avons pas égalé le dénominateur à zéro ; parce que, dans la première, cela nous auroit donné pour x une valeur imaginaire ; & dans la seconde, nous aurions trouvé $a = \frac{1}{2}c$, qui n'auroit point satisfait, non plus, à la question ; puisque si la base étoit la moitié du contour, les deux autres côtés se confondroient avec cette base, & le triangle est alors zéro. A l'avenir, lorsque le numérateur ou le dénominateur, égalé à zéro, ne nous conduira point à une solution admissible : nous n'en ferons pas mention pour ne pas nous arrêter à des recherches inutiles.

59. Dans l'avant-dernière question nous ne sommes parvenus à déterminer, entre tous les parallépipèdes de même surface, celui qui avoit la plus grande capacité, qu'après avoir considéré les parallépipèdes de même hauteur. Pareillement, dans la dernière question, nous avons déterminé entre tous les triangles de même contour, quel étoit celui qui avoit la plus grande surface ; mais en commençant par résoudre la question pour les triangles de même base.

Il est ordinairement plus simple d'en user ainsi ; c'est-à-dire, de résoudre la question en ne faisant varier ensemble que le plus petit nombre possible de

quantités, & faisant varier ensuite & successivement chacune des quantités qui ont été traitées comme constantes.

Par exemple, si l'on demandoit de partager un nombre donné, en trois parties, de manière que le produit de ces trois parties fût le plus grand qu'il est possible; en nommant x & y deux de ces parties, & a le nombre donné, la troisième seroit $a - x - y$, & le produit des trois parties seroit $xy(a - x - y)$, dont il faudroit égaler la différentielle à zéro. Mais au lieu de différencier en regardant x & y comme variables en même temps, je ne regarderai d'abord que x comme variable; j'aurai donc $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}(a - y)$. Le produit $xy(a - x - y)$ se change donc en $\frac{1}{4}y(a - y)^2$. Je différencie maintenant, en faisant varier y , & j'ai $\frac{1}{4}dy(a - y)^2 - \frac{1}{2}ydy(a - y)$ que j'égalé pareillement à zéro, & j'ai $dy(a - y)^2 - 2ydy(a - y) = 0$, d'où je tire $y = \frac{1}{3}a$; donc x , & la troisième partie $a - x - y$, sont chacune $\frac{1}{3}a$.

60. On peut aussi faire varier ensemble, si l'on veut, toutes les quantités variables, puis rassemblant tous les termes qui sont multipliés par la différentielle d'une même variable, égaler leur somme à zéro, & faire la même chose à l'égard de la différentielle de chaque variable.

Ainsi, dans le dernier exemple, j'aurois $aydx + axdy - 2xydx - x^2dy - 2xydy - y^2dx = 0$, égalant séparément à zéro, la somme des termes affectés de dx , & celle des termes affectés de dy , j'ai $aydx - 2xydx - y^2dx = 0$, & $axdy - x^2dy - 2xydy = 0$; ou,

en divisant la première par $y dx$, & la seconde par $x dy$,
 $a - 2x - y = 0$, & $a - x - 2y = 0$, équation
 dont il est facile de conclure $x = \frac{1}{3}a$, & $y = \frac{1}{3}a$, comme
 ci-dessus.

La raison de ce procédé est facile à appercevoir, en remarquant qu'il n'y a ici d'autre condition à remplir, sinon que la différentielle totale soit zéro. Or, cette condition ne peut être remplie généralement, que de deux manières; ou, en supposant que chacune des deux différentielles dx & dy , est égale à zéro, ce qui satisferoit en effet, mais ne feroit rien connoître; ou bien, en supposant que la somme des termes qui multiplient dx , ainsi que celle des termes qui multiplient dy , sont chacune zéro; ce qui est précisément ce que nous avons prescrit.

61. Lorsque les conditions de la question sont exprimées par plusieurs équations, il faut avant d'appliquer cette règle à l'équation différentielle qui doit déterminer le *maximum* ou le *minimum*, tirer des autres équations différenciées, les valeurs des différentielles d'autant de variables qu'il y a d'équations outre celle-là, & les introduire dans cette même équation, alors on applique la règle comme s'il n'y avoit eu que cette seule équation.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, du plus grand parallélogramme, nous avons cette équation $2hx + 2hy + 2xy = cc$, & la condition que hxy devoit être un *maximum*. Si donc nous voulons regarder tout-à-la-fois, h , x & y comme variables, l'équation $2hx + \&c.$ donnera en différenciant,

$$2h dx + 2x dh + 2h dy + 2y dh + 2x dy + 2y dx$$

$= 0$; & la condition du *maximum* donnera $hxdy + hydx + xydh = 0$. De la première je tire $dh = -\frac{ydx - xdy - hdy - hdx}{x + y}$; substituant cette valeur dans

la seconde, j'ai, après les réductions ordinaires, $hx^2dy + hy^2dx - xy^2dx - x^2ydy = 0$. Je puis maintenant égaler à zéro, la somme des termes qui multiplient dx , & celle des termes qui multiplient dy . J'aurai $hy^2 - xy^2 = 0$, ou $h = x$, & $hx^2 - x^2y = 0$, d'où en divisant tout, par le facteur commun x^2 , on tire $h - y = 0$, qui donne $h = y$; & puisque l'on a $h = x$, on a donc aussi $y = x$; les trois dimensions h, x, y , font donc égales, ce qui s'accorde avec la première solution: & en mettant ces valeurs dans l'équation $2hx + 2hy + 2xy = cc$, on a $6h^2 = cc$, qui donne $h = \frac{\sqrt{cc}}{6}$, comme dans cette même solution.

62. Non-seulement on peut ne faire varier les quantités que successivement, ou les faire varier toutes à la fois, mais on peut encore prendre pour constantes telles fonctions que l'on voudra de ces quantités, pourvu que le nombre de ces nouvelles conditions arbitraires, réuni à celui des conditions de la question, ne soit pas plus grand que le nombre des variables, x, y, z , qui entrent dans la question. Cette remarque peut être de la plus grande utilité dans plusieurs questions, principalement quand il y a des quantités radicales.

En voici un exemple. Qu'il s'agisse de trouver entre tous les quadrilatères de même contour, quel est celui qui auroit la plus grande surface. Si des angles C & D (*fig. 19*) on abaisse les

perpendiculaires DE & CF sur le côté AB , & que du point D on mène DK parallèle à AB ; alors nommant AE , s ; DE , t ; AF , u ; CF , x ; & BF , y ; à cause des triangles rectangles, on aura $DA = \sqrt{(ss + tt)}$, $DC = \sqrt{[(s + u)^2 + (x - t)^2]}$, $CB = \sqrt{(xx + yy)}$; donc si a marque le contour, on aura $\sqrt{(ss + tt)} + \sqrt{[(s + u)^2 + (x - t)^2]} + \sqrt{(xx + yy)} + u + y = a$. D'un autre côté, la surface $ABCD$, vaut le trapèze $DEFC$, moins le triangle DAE , plus le triangle CFB ; c'est-à-dire $(t + x) \left(\frac{s + u}{2} \right) - \frac{st}{2} + \frac{xy}{2}$. Cela posé, il faudroit donc différencier cette quantité & l'équation précédente. Mais les quantités radicales, rendroient la suite du calcul très-compiquée. Pour éviter ces difficultés, nous supposons d'abord que les trois quantités radicales sont constantes, ce qui nous donnera $d[\sqrt{(ss + tt)}] = 0$, ou $\frac{sds + tdt}{\sqrt{(ss + tt)}} = 0$. & par conséquent $sds + tdt = 0$; on trouvera de même, par la seconde quantité radicale $(s + u)(ds + du) + (x - t)(dx - dt) = 0$; & par la troisième, $x dx + y dy = 0$. Or, l'équation du contour étant différenciée dans cette même supposition, donne $du + dy = 0$, & la condition du maximum de la surface, donne $(s + u)(dt + dx) + (t + x)(ds + du) - tds - sdt + xdy + ydx = 0$, ou $u dt + s dx + u dx + t du + x ds + x du + x dy + y dx = 0$. La première équation différentielle, donne $ds = -\frac{t dt}{s}$; la troisième donne $dx = -\frac{y dy}{x}$; & la quatrième donne $du = -dy$. Substituant dans la seconde & dans la cinquième, on a, après les réductions faites, $-(tdt + sdy)(u + s) - (tdt + sdt)(x - t) = 0$, & $suxdt - suydy - ssydy - tsxdy - x^2tdt - sy^2dy = 0$; si l'on tire de celle-ci la valeur de dt , on verra

que tous les termes sont affectés de s , & qu'en substituant dans la précédente, tous les termes seront aussi affectés de s , on aura donc $s = 0$; ce qui nous apprend que l'angle DAB doit être droit: cela posé, l'équation du contour devient $t + \sqrt{[uu + (x - t)^2]} + \sqrt{xx + yy} + u + y = a$, & l'expression de la surface devient $(t + x) \frac{u}{2} + \frac{xy}{2}$. Différencions donc en ne supposant plus que les deux radicaux constants. Nous aurons $udu + (x - t)(dx - dt) = 0$; $x dx + y dy = 0$, $dt + du + dy = 0$, & $u(dt + dx) + (t + x)du + xdy + ydx = 0$. La seconde de ces équations donne $dy = -\frac{x dx}{y}$; la troisième donne $dt = -du - dy$, ou $dt = \frac{x dx - y du}{y}$; ces valeurs substituées dans la première & la quatrième, donnent $yudu + (x - t)(ydx - xdx + ydu) = 0$, & $u(xdx - ydu + ydx) + (t + x)ydu - x^2dx + y^2dx = 0$; or, si de l'une des deux on tire la valeur de dx , & qu'on la substitue dans l'autre, on aura une équation dont tous les termes seront multipliés par y , & qui par conséquent donne $y = 0$, & fait voir que l'angle CBA doit aussi être droit. Cela étant, l'équation du contour devient $t + \sqrt{[uu + (x - t)^2]} + x + u = a$; & l'expression de la surface devient $(t + x) \times \frac{u}{2}$. Différencions donc en ne supposant plus d'autre quantité constante, que le radical. Nous aurons $udu + (x - t)(dx - dt) = 0$, $dt + dx + du = 0$, $u(dt + dx) + (t + x)du = 0$; la seconde donne $dt = -dx - du$; substituant dans les deux autres on a $udu + (x - t)(2dx + du) = 0$, & $-udu + (t + x)du = 0$; or celle-ci donne $du = 0$; donc la précédente se réduit à $(x - t)2dx = 0$, qui

donne $x = t$. Cela posé, l'équation du contour se réduit à $2t + 2u = a$, & celle de la surface, à tu ; on a donc $dt + du = 0$, & $tdu + udt = 0$; la première donne $dt = -du$, ce qui change la seconde en $tdu - udu = 0$; & par conséquent $t = u$; donc les lignes AB , AD , AC , CB sont toutes égales, & puisque l'angle A doit être droit, le quadrilatère cherché doit être un carré.

Au reste, on pourroit trouver cette propriété plus facilement; mais ce n'étoit point là notre objet principal: il s'agissoit de faire voir comment la liberté de prendre telle ou telle quantité pour constante, peut dans bien des occasions, donner les moyens de faciliter le calcul; & cet exemple y étoit très-propre, car sans cela le calcul seroit très-composé. On peut appliquer des idées semblables, aux autres polygones, & on trouvera qu'en général, de toutes les figures d'un même contour & d'un même nombre de côtés, celle qui a la plus grande surface est toujours le polygone régulier de ce même nombre de côtés; d'où il suit que de toutes les figures de même contour, le cercle est celle qui a la plus grande surface.

Des Points multiples.

63. Nous avons examiné ce qui arrivoit lorsque l'une des deux différentielles dx ou dy , ou (ce qui revient au même) lorsque le numérateur ou le dénominateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$ devenoit zéro, & nous avons vu que l'un de ces deux cas avoit toujours lieu lorsqu'il y avoit un *maximum* ou un *minimum*. Mais lorsque le numérateur & le dénominateur de la valeur de $\frac{dx}{dy}$ deviennent zéro en même temps, qu'arrive-t-il alors, & à quoi se réduit la valeur de $\frac{dx}{dy}$?

Pour répondre à ces questions, nous observerons d'abord que lorsqu'on a différencié l'équation d'une courbe, comme il n'y a plus que des termes multipliés par dx & des termes multipliés par dy , on peut en appelant A la somme des premiers, & B celle des seconds, représenter l'équation différentielle, par $A dx + B dy = 0$. Cette équation donne $\frac{dx}{dy} = -\frac{B}{A}$; or, pour que B & A deviennent zéro en même temps, il faut qu'ils aient un commun diviseur, qui devenant zéro lorsque x & y ont certaines valeurs, rend B & A égaux à zéro en même temps. Par exemple, dans la courbe qui a pour équation $y^2 = \frac{x \cdot (a - x)^2}{a}$, on a $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{(a - x)^2 - 2x(a - x)}$, ou en mettant pour y , sa valeur, $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2a(a - x) \sqrt{\frac{x}{a}}}{(a - x)^2 - 2x(a - x)}$, quantité qui devient $\frac{0}{0}$, lorsque $x = a$; mais on voit en même temps, que $a - x$ est diviseur commun du numérateur & du dénominateur, & que la valeur de $\frac{dx}{dy}$ se réduit à $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2a \sqrt{\frac{x}{a}}}{a - 3x}$, qui dans le cas particulier de $x = a$, se réduit à ∓ 1 , c'est-à-dire, que dans cet exemple, la valeur de $\frac{0}{0}$ est ∓ 1 .

Il paroît donc que pour avoir, en pareil cas, la valeur de $\frac{dx}{dy}$, il n'y a autre chose à faire qu'à chercher le commun diviseur des deux termes de la fraction qui l'exprime, & diviser ces deux termes par leur commun diviseur.

On peut, en effet, en user ainsi; mais cet expédient n'est pas toujours suffisant lorsque la valeur de $\frac{dx}{dy}$ renferme plus

d'une variable, non plus que lorsqu'il renferme des quantités radicales; n'y eût-il même, dans ce dernier cas, qu'une seule variable. C'est pourquoi nous allons donner un moyen plus général & plus facile. Mais auparavant il faut faire connoître la nature des points des lignes courbes, où cette singularité arrive. On va voir que cela arrive dans les *points multiples*; c'est-à-dire, dans ceux où plusieurs branches d'une même courbe se rencontrent.

64. Concevons donc que *SOMZM'ON* (*fig. 20*) soit une courbe dont deux branches, au moins, se rencontrent au point *O*. Il est clair qu'à chaque abscisse *AP*, ou *x*, il répond (au moins dans un certain intervalle) un certain nombre de valeurs *PM*, *PM'* pour *y*, & que celles qui répondent aux branches qui doivent se rencontrer, deviennent égales dans le point de rencontre *O*.

Pareillement, *AZ* étant l'axe des ordonnées, il faut qu'à chaque ordonnée *AQ*, il réponde (au moins dans un certain intervalle) un certain nombre d'abscisses *QN*, *QN'*, *QN''*, & que celles qui répondent aux branches qui doivent se rencontrer, deviennent égales dans ce point de rencontre.

Donc, si l'on représente par *a* la valeur de *x*, & par *b* la valeur de *y*, qui conviennent au point multiple, l'équation de cette courbe doit être telle, que lorsqu'on y mettra *a* pour *x*, on trouve que *y* aura autant de valeurs égales à *b* qu'il y a de branches qui passent par le point multiple, & il faudra de même qu'en mettant *b* pour *y*, on trouve un pareil nombre de valeurs *a* pour *x*.

Il suit de-là que l'équation doit être telle, qu'elle puisse être ramenée à cette forme.... $(x - a)^m F + (x - a)^{m-1} (y - b) F' + (x - a)^{m-2} (y - b)^2 F'' + (x - a)^{m-3}$

$(y - b)^3 F''' + \dots (y - b)^m T = 0$, m marquant le degré de multiplicité du point en question, & $F, F', \&c.$, T marquant des quantités composées, comme on le voudra, de x, y & de constantes, ce que, pour abrégér, on appelle des *fonctions* de x, y & de constantes.

En effet, il est clair que si on fait $x = a$, l'équation qui se réduit alors à $(y - b)^m T = 0$, sera divisible, m fois, par $y - b$, & donnera par conséquent m fois, l'équation $y - b = 0$, ou $y = b$. Il en est de même si l'on fait $y = b$; l'équation qui se réduit alors à $(x - a)^m F$, sera divisible, m fois, par $x - a$, & donnera, par conséquent, autant de fois, l'équation $x - a = 0$, ou $x = a$; ce qui ne peut arriver, si l'équation n'est pas réductible à la forme que nous venons d'exposer.

Concevons maintenant qu'on différencie cette équation, m fois de suite, en faisant même (si l'on veut) varier aussi dx & dy . En réfléchissant sur le principe de la différenciation, on verra facilement (& nous allons le faire voir par un exemple), 1°. qu'il n'y aura que la dernière équation différentielle dans laquelle il y ait quelques termes qui ne soient plus affectés de $y - b$ ou de $x - a$. Donc, lorsqu'il y aura un point multiple, les différentielles première, seconde, troisième, &c. de l'équation, doivent, lorsqu'on y mettra pour x & y , leurs valeurs a & b qui répondent au point multiple, s'anéantir toutes, excepté celle dont le degré de différentielle est marqué par m ; 2°. on verra de même, que dans cette dernière équation différentielle, les termes affectés de ddx, ddy, d^3x &c., & de toutes les différentielles de degrés ultérieurs, auront tous pour facteurs quelque puissance de $x - a$ ou de $y - b$; & que par conséquent ces différentielles disparaissent au point multiple.

De ces principes, il suit, 1°. qu'au point multiple on ne peut avoir la valeur de $\frac{dx}{dy}$ autrement exprimée que par 0, si ce n'est par la dernière équation différentielle; puisque toutes les autres équations différentielles s'anéantissant alors, tout ce qui multiplie dx est zéro, & tout ce qui multiplie dy est zéro; 2°. que cette dernière équation différentielle ne contenant point ni ddx , ni ddy , ni toutes les autres différentielles ultérieures, peut résulter immédiatement de l'équation proposée différenciée m fois de suite, en supposant dx & dy constans: 3°. que dans cette même dernière équation différentielle dx & dy monteront au degré m ; & que par conséquent si l'on divise par dy^m , on aura en résolvant cette équation, m valeurs de $\frac{dx}{dy}$ qui serviront à trouver les tangentes qu'ont au point multiple les différentes branches qui passent par ce point.

Pour éclaircir & confirmer tout cela par un exemple, prenons la courbe qui a pour équation $a(y - b)^2 - x(x - a)^2 = 0$. Si l'on différencie cette équation m fois, c'est-à-dire, ici, deux fois, on aura 1°. $2ady(y - b) - dx(x - a)^2 - 2xdx(x - a) = 0$; 2°. $2addy(y - b) + 2ady^2 - ddx(x - a)^2 - 2dx^2(x - a) - 2xddx(x - a) - 2dx^2(x - a) - 2xdx^2 = 0$; où l'on voit, qu'en mettant a pour x , & b pour y , la première équation différentielle s'évanouit; & que dans la seconde, les termes affectés de ddx & de ddy s'évanouissent, en sorte qu'elle se réduit à $2ady^2 - 2xdx^2 = 0$.

Mais si au lieu de différencier pour la seconde fois, en traitant dx & dy comme variables, nous eussions différencié en les traitant comme constans, nous aurions eu $2ady^2 - 2dx^2(x - a) - 2xdx^2 = 0$, qui en mettant a pour x ,

se réduit également à $2ady^2 - 2xdx^2 = 0$, & donne $\frac{dx}{dy} = \pm 1$, qui indique deux tangentes au point où $x = a$ & $y = b$; ce point est donc un point double; & la valeur $\frac{y \, dx}{dy}$ de la sous-tangente, devenant alors $\pm b$, ces deux tangentes font un angle de 45° avec l'ordonnée; c'est ce que confirmera la description de la courbe par le moyen de son équation, qui donnant $y = b \pm (x - a) \sqrt{\frac{x}{a}}$, fait voir que la courbe a deux branches parfaitement égales & semblables, qui se croisent au point O où $x = a$ & $y = b$. Sa figure est telle qu'on la voit (fig. 20).

65. D'après ces principes, il est donc facile de déterminer si une courbe dont on a l'équation, a des points multiples, quels ils sont & où ils sont. Il faut différencier cette équation; évaluer à zéro le coefficient ou multiplicateur de dx , & celui de dy . Ces deux équations détermineront la valeur qui convient à x & celle qui convient à y , s'il y a un point multiple; ou les valeurs s'il y en a plusieurs; mais pour s'assurer de l'existence de ce point multiple, il faudra examiner si ces valeurs de x & de y satisfont à l'équation proposée. Alors pour déterminer le degré de multiplicité du point ou des points trouvés, on différenciera de nouveau l'équation, mais en traitant (pour plus de simplicité) dx & dy comme constants. Si les valeurs qu'on a trouvées pour x & pour y , étant substituées dans cette seconde équation différentielle, tous les termes ne s'annulent point, alors le point trouvé n'est que double. Si au contraire ils s'annulent, il est plus que double. On procédera donc, dans ce dernier cas, à une troisième différenciation, en traitant toujours dx & dy comme constants: & ayant substitué les valeurs de x & de y , le point sera triple

si tous les termes ne s'anéantissent point : & si au contraire ils s'anéantissent tous, il fera au moins quadruple. On continuera de différencier & de substituer, jusqu'à ce qu'on arrive à une différentielle dont les termes ne s'anéantissent pas tous par la substitution des valeurs de x & de y .

Par exemple, si l'on demande les points multiples de la courbe, qui a pour équation $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$; je différencie cette équation, & j'ai $4y^3dy - 2axydy - ay^2dx + 3bx^2dx = 0$. Égalant à zéro le coefficient de dx & celui de dy , j'ai $4y^3 - 2axy = 0$, & $3bx^2 - ay^2 = 0$. La première de ces deux équations donne ou $y = 0$, ou $4y^2 - 2ax = 0$. La valeur $y = 0$ substituée dans l'équation $3bx^2 - ay^2 = 0$, donne $3bx^2 = 0$, ou $x = 0$; or, en mettant dans l'équation proposée 0 pour x , & 0 pour y , on satisfait à cette équation; donc la courbe a un point multiple dans l'endroit où $x = 0$ & $y = 0$; c'est-à-dire, à l'origine.

Quant à la valeur $4y^2 - 2ax = 0$, ou $y^2 = \frac{ax}{2}$, en la substituant dans $3bx^2 - ay^2 = 0$, on a $3bx^2 - \frac{a^2x}{2} = 0$, qui donne ou $x = 0$, ou $x = \frac{a^2}{6b}$; mais la première, savoir $x = 0$, donne $y = 0$, ce qui nous donne le même point que ci-devant, & la seconde donne $y^2 = \frac{a^3}{12b}$; mais ces valeurs de x & de y^2 ne satisfont point à l'équation proposée; ainsi il n'y a pas d'autre point multiple que celui qui doit être à l'origine.

Pour connoître sa multiplicité, différencions une seconde fois; nous aurons $12y^2dy^2 - 2axdy^2 - 2aydx dy - 2aydx dy + 6bxdx^2 = 0$, dont tous les termes s'anéantissent en mettant pour x & y leurs valeurs, zéro. Donc le point est plus que double.

Passons donc à une troisième différenciation : nous aurons $24ydy^3 - 2adx dy^2 - 2adx dy^2 - 2adx dy^2 + 6bdx^3 = 0$; ou en mettant pour y & x , leur valeur zéro, $6bdx^3 - 6adx dy^2 = 0$; comme cette troisième différentielle ne s'anéantit point, le point en question est un point triple.

Pour en déterminer les tangentes, je divise cette équation par $6b$, & par dy^3 ; j'ai $\frac{dx^3}{dy^3} - \frac{a dx}{b dy} = 0$, qui donne $\frac{dx}{dy} = 0$, & $\frac{dx^2}{dy^2} - \frac{a}{b} = 0$, ou $\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$. La première valeur de $\frac{dx}{dy}$, fait voir que l'une des tangentes au point multiple, est parallèle aux ordonnées, c'est-à-dire, qu'une des branches touche l'axe des ordonnées, puisque le point multiple est d'ailleurs à l'origine. Les deux valeurs $\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$ font voir que les deux autres branches font avec l'axe des ordonnées, chacune, un angle dont la tangente est $\sqrt{\frac{a}{b}}$, & s'étendent de différens côtés de cet axe. On peut voir la figure de cette courbe en résolvant son équation, qui donne $y = \pm \sqrt{\left[\frac{ax}{2} \pm \frac{x}{2} \sqrt{(aa - 4bx)}\right]}$; prenant pour a & b deux nombres à volonté, & donnant successivement à x plusieurs valeurs tant positives que négatives : on trouvera qu'elle est telle que la représente la figure 21.

Au reste, lorsqu'on a déterminé un point multiple, par les opérations ci-dessus, il ne faut pas toujours en conclure que toutes les branches qui sont censées passer par ce point, soient visibles. Il peut se faire que l'équation qui détermine les tangentes ait des racines imaginaires; & alors il y a autant de branches invisibles. Les points où cela arrive, sont quelquefois

quelquefois détachés du cours de la courbe, à laquelle ils n'appartiennent pas moins; on les appelle alors des points *conjugués*; mais soit qu'ils soient ou ne soient point détachés, ils ne sont pas moins censés rassembler le nombre de branches marqué par le degré de leur multiplicité, la courbe à laquelle ils appartiennent, est un individu d'une famille plus étendue, dans laquelle toutes ces branches sont visibles; mais elles deviennent invisibles dans celle-là, parce que quelqu'une des quantités constantes qui entrent dans l'équation commune à toute la famille, devient zéro dans le cas particulier de cette courbe individuelle. C'est ainsi que dans la courbe qui a pour équation $m(y - b)^2 - x(x - a)^2 = 0$, & dont celle de la figure 20 est un cas particulier, & devient la même lorsque $m = a$; c'est ainsi, dis-je, que dans cette courbe qui aura aussi une feuille, cette feuille n'a plus lieu lorsqu'on suppose $a = 0$, ce qui réduit l'équation à $m(y - b)^2 - x^3 = 0$; les deux branches OMZ , $OM'Z$ qui étoient au-dessus du point O , n'auront plus lieu dans cette dernière; ou du moins n'y seront pas visibles. Car on peut supposer qu'elles y sont encore, en regardant a , non comme zéro absolument, mais seulement comme infiniment petit. Il n'y aura pas moins deux tangentes, à la vérité; mais cet exemple suffit pour faire entrevoir comment l'anéantissement de certaines branches peut avoir lieu.

66. On peut tirer plusieurs conséquences utiles de ce que nous venons de dire, à l'occasion des points multiples.

67. 1°. Lorsqu'une expression algébrique fractionnaire, dans laquelle il entrera une ou deux variables, fera telle qu'en y mettant, pour chacune de ces variables, certaines valeurs déterminées, elle deviendra $\frac{0}{0}$; on aura la valeur

que doit avoir alors cette expression, en différenciant séparément le numérateur & le dénominateur, autant de fois de suite qu'il sera nécessaire pour qu'ils ne deviennent plus zéro en même temps; & dans cette différenciation, on traitera les différences premières, comme constantes. En effet, on peut toujours regarder toute expression fractionnaire algébrique $\frac{B}{A}$, dans laquelle il entreroit deux variables, par exemple, comme étant la valeur de $\frac{dx}{dy}$ (x & y étant ces deux variables); c'est-à-dire, qu'on peut toujours supposer $\frac{dx}{dy} = \frac{B}{A}$, & par conséquent $A dx - B dy = 0$. Or puisque, par la supposition, A & B deviennent zéro en même temps, lorsque x & y ont certaines valeurs, il suit de ce qui précède, que pour avoir la valeur de $\frac{dx}{dy}$, il faut différencier cette équation en regardant dx & dy comme constants, la différencier, dis-je, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation qui ne s'anéantisse point par la substitution des valeurs de x & y . Or ces différenciations consécutives, donnent $d A dx - d B dy = 0$, $dd A dx - dd B dy = 0$, $d^3 A dx - d^3 B dy = 0$, &c., qui donnent $\frac{dx}{dy} = \frac{dB}{dA}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{dd B}{dd A}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{d^3 B}{d^3 A}$; c'est-à-dire, qu'il faut différencier séparément le numérateur & le dénominateur, ainsi qu'il a été dit: & la dernière de ces équations donnera la valeur, ou les valeurs de dx .

68. 2°. Lorsqu'une équation qui renfermera plusieurs variables sera telle, qu'à certaines valeurs de l'une de ces variables, moins une, il devra répondre un certain nombre de valeurs égales de la dernière, & qu'il en fera de même de toutes, on trouvera ces valeurs en différenciant autant

de fois de suite, moins une, l'équation proposée; supposant dans ces différenciations dx, dy, dz , &c. constantes, si x, y, z , &c. sont les variables, & égalant à zéro les multiplicateurs de dx, dy, dz , &c., ceux de $dx^2, dxdy, dzdy$, &c., & ainsi de suite. Si toutes ces équations s'accordent entre elles & avec l'équation proposée, les valeurs de x, y, z , &c. qu'elles auront données, seront les valeurs demandées.

69. Remarquons au sujet des points multiples, que puisque les valeurs de x & de y , que l'on trouve en égalant à zéro le coefficient de dx & celui de dy doivent satisfaire à l'équation finie proposée, on ne peut, lorsque cette équation n'est pas donnée en termes finis, ou ne peut pas y être ramené par les méthodes du calcul intégral, s'assurer par le calcul seul, de l'existence de ces points.

Des Points d'inflexion visibles & invisibles.

70. Il arrive quelquefois qu'une même branche de courbe après avoir tourné sa concavité vers un certain point, tourne ensuite sa convexité vers ce même point, en continuant néanmoins sa marche. Telle est la courbe que l'on voit représentée (fig. 22). Le point O où ce changement arrive, s'appelle point d'inflexion.

Pour déterminer ces sortes de points, il faut remarquer que la tangente au point O , doit être tangente commune de la branche OB , & de la branche Ob , qui se touchent mutuellement au point O ; si donc de part & d'autre du point O , on prend deux arcs égaux ou inégaux, mais infiniment petits, la tangente doit être le prolongement de l'un & de l'autre, en sorte que ces deux petits arcs doivent être en ligne droite,

Cela posé, ayant mené les ordonnées MP , OQ , mp , & nommé AP , x , & PM , y ; on aura $Mr = dx$, $Or = dy$; & supposant OM & Om infiniment peu différens l'un de l'autre, on aura $Or' = dx + ddx$, & $mr' = dy + ddy$; puis donc que MO & Om sont en ligne droite, les triangles MrO , $Or'm$ sont semblables; donc si l'on suppose (ainsi qu'on en est bien le maître) que les arcs MO & Om sont égaux, ces mêmes triangles seront aussi égaux, & l'on aura $Mr = Or'$, & $Or = mr'$; c'est-à-dire, $dx = dx + ddx$, & $dy = dy + ddy$; donc $ddx = 0$, & $ddy = 0$.

Donc, pour déterminer les points d'inflexion simples, il faut différencier deux fois de suite l'équation de la courbe, & supposer dans la seconde équation différentielle, $ddx = 0$, & $ddy = 0$. Or, il est évident qu'alors cette seconde équation est la même que si l'on eût différencié en faisant dx & dy constans. Donc, pour avoir les points d'inflexion simples, il faut d'abord différencier l'équation de la courbe; puis différencier cette première équation différentielle, en regardant dx & dy comme constans. Alors si de la première équation différentielle on tire la valeur de dx ou celle de dy pour la substituer dans la seconde, on aura une équation qui étant divisée par dy^2 ou dx^2 , ne renfermera plus que des x , des y & des constantes, & qui étant comparée avec l'équation même de la courbe, donnera les valeurs de x & de y , qui conviennent au point d'inflexion simple.

Prenons pour exemple, la courbe qui a pour équation $x^3 - by^2 = a^3$. Nous aurons $3x^2dx - 2bydy = 0$; différenciant de nouveau, & traitant dx & dy comme constans, nous aurons $6xdx^2 - 2bdy^2 = 0$; or, la première donne $dy = \frac{3x^2dx}{2by}$; substituant dans la seconde, on aura $6xdx^2 - \frac{18bx^4dx^2}{4b^2y^2} = 0$, ou $4by^2 - 3x^3 = 0$. Or, celle-ci

donne $y^2 = \frac{3x^3}{4b}$, qui étant substitué dans l'équation de la courbe, donne $x^3 - \frac{3}{4}x^3 = a^3$ ou $x^3 = 4a^3$; donc $x = a\sqrt[3]{4}$, & par conséquent $y = \sqrt{\frac{3a^3}{b}} = a\sqrt{\frac{3a}{b}}$. Ce sont les valeurs qui déterminent le point d'inflexion.

Prenons, pour second exemple, la courbe qui a pour équation $y = a + (x - a)^{\frac{3}{5}}$, nous aurons $dy = \frac{3}{5}(x - a)^{-\frac{2}{5}}dx$; différenciant de nouveau en traitant dx & dy comme constans, nous aurons $0 = -\frac{6}{25}(x - a)^{-\frac{7}{5}}dx$, ou $\frac{-\frac{6}{25}dx}{(x - a)^{\frac{7}{5}}} = 0$; donc $dx = 0$; or la première équation différentielle $dy = \frac{3}{5}(x - a)^{-\frac{2}{5}}dx$ revient à $dy = \frac{\frac{3}{5}dx}{(x - a)^{\frac{2}{5}}}$ ou $(x - a)^{\frac{2}{5}}dy = \frac{3}{5}dx$; donc puisque $dx = 0$, on a $(x - a)^{\frac{2}{5}}dy = 0$, qui donne ou $dy = 0$, ou $(x - a)^{\frac{2}{5}} = 0$; mais comme il n'est pas possible qu'on ait en même temps dx & dy égaux à zéro, il s'ensuit que $(x - a)^{\frac{2}{5}} = 0$, est la véritable solution, qui donne $x = a$, & par conséquent $y = a$.

71. Remarquons en passant, 1°. Que puisqu'on trouve $dx = 0$, la tangente au point d'inflexion de cette courbe, est parallèle aux ordonnées.

2°. La méthode que l'on donne ordinairement pour trouver les points d'inflexion, consiste à différencier deux fois de suite l'équation, en supposant dx constant, & à égaler ddy à zéro ou à l'infini. Quoique cette méthode conduise aux mêmes résultats, nous avons néanmoins évité de l'employer, parce qu'en effet ddy n'est point infini, ainsi qu'on doit bien

le voir par ce qui précède. Ce qui est réellement infini alors, c'est la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$, & non pas ddy qui ne peut être que zéro, dans ce cas comme dans tout autre; & comme dx est zéro dans les mêmes cas de points d'inflexion, où l'on a coutume de supposer ddy infini, $\frac{d^2y}{dx^2}$ est réellement $\frac{0}{0}$, qui en regardant zéro comme une quantité infiniment petite, est en effet infini.

3°. Si la courbe devoit avoir plusieurs points d'inflexion, l'équation finale donneroit plusieurs valeurs de x ; c'est-à-dire, qu'elle passeroit le premier degré. Cela arrive dans les courbes qui vont en serpentant, comme dans la figure 23.

72. Si l'on conçoit que les deux points d'inflexion O & O' (fig. 23), s'approchent continuellement & soient enfin infiniment voisins l'un de l'autre; alors si l'on se représente, comme ci-devant, les deux arcs infiniment petits OM & Om , & les deux arcs infiniment petits $O'M'$, $O'm'$ de part & d'autre des points d'inflexion O & O' , les deux côtés Om & $M'O'$, seront ou pourront être supposés l'un sur l'autre; & puisqu'au point d'inflexion, MO est en ligne droite avec Om , & $M'O'$ avec $O'm'$, il y aura donc trois petits arcs consécutifs en ligne droite.

Cela posé, soient Mm , mm' , $m'm''$ (fig. 24) ces trois arcs infiniment petits. Abaissons les ordonnées MP , mp , $m'p'$, $m''p''$, & menons les lignes Mr , mr' , $m'r''$ parallèles à AP . Nommons AP , x , & PM , y ; nous aurons $Mr = dx$, $rm = dy$, $mr' = dx + ddx$, $r'm' = dy + ddy$, $m'r'' = dx + ddx + d^3x$, $r''m'' = dy + ddy + d^3y$. Or les trois triangles Mrm , $mr'm'$, $m'r''m''$ sont semblables,

puisque les côtés Mm , mm' & $m'm''$ sont en ligne droite; donc si l'on suppose ces mêmes côtés égaux (ce dont on est le maître), les triangles seront égaux; on aura donc $dx = dx + ddx$, $dy = dy + ddy$, $dx + ddx = dx + ddx + d^3x$, $dy + ddy = dy + ddy + d^3y$; c'est-à-dire, $ddx = 0$, $ddy = 0$, $d^3x = 0$, $d^3y = 0$.

Donc, si l'on différencie l'équation de la courbe trois fois de suite, en faisant varier dx , dy , ddx & ddy , & qu'ensuite on mette 0 pour chacune des quantités ddx , ddy , d^3x , d^3y , il faudra que chacune des trois équations résultantes de ces différenciations ait lieu. Or il est évident qu'elles deviennent alors les mêmes, que si l'on eût différencié trois fois de suite, en supposant dx & dy constants.

En raisonnant de la même manière, on verra que si trois points d'inflexion consécutifs viennent à se réunir, il y aura, au point de réunion, quatre élémens en ligne droite, & l'on démontrera de même, que si l'on différencie l'équation quatre fois de suite, en supposant dx & dy constants, les quatre équations qui en résulteront, doivent toutes avoir lieu; & ainsi de suite.

Donc, si de la première équation différentielle on tire la valeur de dx pour la substituer dans toutes les autres, on aura, après avoir divisé la seconde par dy^2 , la troisième par dy^3 , & ainsi de suite, autant d'équations qui doivent avoir lieu conjointement avec l'équation proposée, pour qu'il y ait une, deux, trois &c. inflexions réunies. Donc, si de deux de ces équations on tire les valeurs de x & de y , il faudra que ces valeurs substituées dans les autres équations y satisfassent.

Lorsqu'il n'y a que deux inflexions réunies, l'inflexion est

invisible; elle redevient visible, lorsqu'il y en a trois; en général l'inflexion est visible ou invisible, selon que le nombre des inflexions réunies est impair ou pair. Donc si $E = 0$ représente, en général, l'équation d'une courbe; il faudra, pour qu'il y ait m points d'inflexion réunis, il faudra qu'en différenciant E , $m + 1$ fois, en supposant dx & dy constans, toutes les différentielles ddx , ddy , d^3x , d^3y , &c. jusqu'à celle du degré $m + 1$ soient zéro; & l'inflexion sera visible ou invisible, selon que m sera impair ou pair.

73. Jusqu'ici nous avons supposé les ordonnées parallèles. Si elles partoient d'un point fixe, voici comment on s'y prendroit, pour déterminer les points d'inflexion. Ayant imaginé les deux arcs infiniment petits & consécutifs, qui au point d'inflexion doivent être en ligne droite, on mèn timer (fig. 25) les ordonnées CM , Cm & Cm' , & l'on décrira les arcs Mr , $m'r'$ que l'on pourra regarder comme perpendiculaires sur Cm & Cm' . Cela posé, il est facile de voir que l'angle $r'mm'$ ne diffère de l'angle rMm que de l'angle mCr' . Car on a $Cmm' + rMm = 180^\circ$, ou $Cm'r' + r'mm' + 90^\circ - rMm = 180^\circ$; donc $r'mm' - rMm = 90^\circ - Cm'r'$; mais à cause du triangle $Cr'm$ rectangle en r' , on a $90^\circ - Cm'r' = mCr'$; donc $r'mm' - rMm = mCr'$.

Si l'on mène la ligne mn qui fasse l'angle $m'mn = mCr'$, l'angle nmr' fera donc égal à mMr , & par conséquent le triangle tmr' sera semblable au triangle mMr . Nommons CM , y , & Mr , dx , nous aurons $mr = dy$, $m'r' = dx + ddx$, & $m'r' = dy + ddy$; nommons $Mm = ds$; mm' sera $= ds + dds$. Décrivons du point m , & du rayon mm' , l'arc $m'n$; alors les secteurs $Cm'r'$ & $nm'm'$ seront semblables, & donneront $Cm : m'r' :: mm' : m'n$; c'est-à-dire, $y + dy : dx + ddx$

$:: ds + dds : m'n$, qui, en omettant ce qu'on doit omettre, fera $= \frac{ds dx}{y}$; mais le triangle $m'tn$ semblable à $tr'm$, fera aussi semblable à mrM ; on aura donc $Mr : Mm :: m'n : m't$; c'est-à-dire, $dx : ds :: \frac{ds dx}{y} : m't = \frac{ds^2}{y}$; donc $r't = dy + ddy - \frac{ds^2}{y}$. Or les triangles semblables Mrm & $m'r't$ donnent $Mr : rm :: m'r' : r't$, ou $dx : dy :: dx + ddx : dy + ddy - \frac{ds^2}{y}$; donc $dx dy + dx ddy - \frac{dx ds^2}{y} = dx dy + dy ddx$, ou $dx ddy - dy ddx - \frac{dx ds^2}{y} = 0$; c'est-là la formule pour trouver les points d'inflexion simples, quand les ordonnées partent d'un point fixe; qui revient à celle des coordonnées parallèles, lorsqu'on suppose le point $\hat{C}$ infiniment éloigné, & dx & dy constans. Car alors le terme $\frac{dx ds^2}{y}$ doit être rejeté, puisque y est infini. Dans l'usage de cette formule, il fera toujours plus simple de supposer dx constant, ce qui la réduit à $ddy = \frac{ds^2}{y}$; & il faudra observer de traiter aussi dx comme constant, dans la différenciation de l'équation de la courbe: mais comme les dx sont des arcs décrits d'un rayon variable, au lieu que quand les co-ordonnées partent d'un point fixe, on les rapporte à des arcs décrits d'un rayon constant CO , comme nous l'avons dit (40); on aura soin de mettre, au lieu de dx sa valeur, qui sera toujours facile à avoir, en remarquant que les secteurs CSf & CMr sont semblables. Nous ne nous arrêtons pas à donner, dans la même supposition, les formules pour les autres points d'inflexion. Cela n'est pas difficile à présent.

Observation sur les Maxima & Minima.

74. Soit F une fonction d'une ou plusieurs variables, &

qui soit susceptible d'un *maximum* ou d'un *minimum*. Si nous la considérons comme représentant l'ordonnée ou l'abscisse x d'une courbe, c'est-à-dire, si nous supposons $x = F$, il suit, de ce que nous avons dit à l'occasion des points d'inflexion, que s'il est vrai que dF ou dx soit zéro, lorsqu'il y a un *maximum* ou un *minimum*, l'inverse n'est pas toujours vraie; car nous avons vu (70) un cas où l'on avoit au point d'inflexion $dx = 0$; c'est-à-dire, la tangente parallèle aux ordonnées; or il est évident que ni l'ordonnée ni l'abscisse ne sont alors ni un *maximum* ni un *minimum*. Que faut-il donc pour s'assurer de l'existence du *maximum* ou du *minimum*? Il faut différencier plusieurs fois de suite la quantité, en faisant les différences premières de chaque variable, constantes; & si les valeurs qu'ont les variables au point de *maximum* ou *minimum* cherché, anéantissent non-seulement dF , mais aussi ddF , sans anéantir d^3F , il n'y a pas de *maximum* dans la courbe qui a pour équation $x = F$, mais bien un point d'inflexion visible; ainsi la quantité F n'a point de *maximum* ou de *minimum*. Mais si d^3F s'anéantit, sans que d^4F s'anéantisse, il y aura *maximum* ou *minimum*. En général, il y aura *maximum* ou *minimum*, si la dernière différentielle qui s'anéantit, est de degré impair.

Des points de Rebroussement de différentes espèces, & des différentes sortes d'attouchement des branches d'une même Courbe.

75. Lorsque deux branches de courbe viennent à se toucher, elles peuvent s'opposer leurs convexités, comme dans la fig. 26, ou s'embrasser comme dans la fig. 27; & dans l'un & dans l'autre cas, il peut arriver qu'elles continuent leur cours de part & d'autre du point d'attouchement, ou qu'elles s'arrêtent brusquement à ce point, comme on le voit (fig. 28

& 29). Dans ce dernier cas, le point d'attouchement s'appelle point de *rebroussement* ; c'est-à-dire, point de *rebroussement simple*, dans la figure 28, & *rebroussement en bec*, dans la figure 29. Si plus de deux branches se réunissent, toutes ces différentes variétés peuvent se trouver à la fois dans le même point, & il peut s'y en trouver encore une infinité d'autres ; par exemple, les branches peuvent, en se touchant, subir une ou plusieurs inflexions. Il peut arriver qu'une inflexion & un point de rebroussement se trouvent réunis, & ne semblent former qu'un seul rebroussement. Dans la figure 30, si la branche *EBD* qui forme en *E* un rebroussement simple avec la branche *EC*, avoit un point d'inflexion en *B* ; lorsque ce point d'inflexion se trouveroit infiniment près du point *E*, on n'auroit plus que l'apparence d'un rebroussement en bec. Ces variétés peuvent aller à l'infini, sur-tout en considérant que plusieurs branches peuvent se toucher à la fois. Nous n'entreprendrons donc pas d'assigner le caractère de chacune : nous observerons seulement, que toutes les fois que plusieurs branches de courbe viendront à se toucher, on le reconnoîtra à ce que 1°. ce point étant multiple, doit avoir les conditions mentionnées (64). 2°. L'équation qui sert à déterminer les tangentes des points multiples, doit alors avoir autant de racines égales qu'il y a de branches qui se touchent, puisqu'alors il y a autant de tangentes réunies. Ainsi pour le rebroussement simple, il doit avoir les conditions communes aux points doubles ; & l'équation qui en donne les tangentes, ou qui donne $\frac{dx}{dy}$, doit avoir deux racines égales. Comme la considération de ces points n'est pas d'une assez grande utilité, pour nous engager à nous livrer aux détails qu'elle exige, nous n'en dirons pas davantage. On peut consulter sur cette matière, l'*Analyse des lignes courbes de Cramer*. Genève 1750.

Des Rayons de courbure, ou de la développée.

76. Si l'on conçoit que sur chacun des points $M, m, m', \&c.$ d'une ligne courbe quelconque (*fig. 31*), on ait élevé des perpendiculaires $MN, mn, m'n', \&c.$; les intersections consécutives, $n, n', \&c.$ formeront une ligne courbe à laquelle on a donné le nom de *développée*, parce que si on la conçoit enveloppée d'un fil ABN qui la touche en son origine B , alors en développant cette courbe, l'extrémité A du fil trace la courbe AM . En effet, dans le développement de Nn , par exemple; en considérant Nn comme une petite ligne droite, le fil MNn décrit, autour du point n comme centre, l'arc Mm auquel il est nécessairement perpendiculaire, puisque le rayon d'un cercle est perpendiculaire à sa circonférence.

77. La courbe AM étant donnée, si l'on veut, pour un point quelconque M , déterminer la valeur de Mn , qu'on appelle *Rayon de la développée*, on remarquera que Mn est déterminé par le concours de deux perpendiculaires infiniment voisines MN & mn . C'est pourquoi (*fig. 32*), on imaginera deux arcs consécutifs Mm, mm' infiniment petits, & infiniment peu différens, que l'on considérera comme deux lignes droites: on imaginera aussi MN perpendiculaire en M sur Mm , & mN perpendiculaire en

m sur mm' . Alors dans le triangle NMm rectangle en M , on aura $1 : \sin. MNm :: mN$ ou $MN : Mm$, ou (à cause que l'angle MNm est infiniment petit) $1 : MNm :: MN : Mm$; donc $MN = \frac{Mm}{MNm}$; or, si on prolonge Mm , l'angle $umm' = MNm$, parce que ces deux angles sont complémens du même angle MmN , à cause des angles droits NMm , & Nmm' ; donc $MN = \frac{Mm}{umm'}$.

Si l'on mène Mr & mr' parallèles à AP , il est facile de voir que l'angle umr' étant égal à mMr , l'angle umm' est la quantité dont l'angle mMr diminue, ou la différentielle de l'angle rMm , laquelle doit être prise négativement ici, où la courbe est concave, & au contraire, doit être prise positivement, quand la courbe est convexe; on a donc $MN = \frac{Mm}{\mp d(rMm)}$. Cherchons donc l'expression de $d(rMm)$. Or la tangente de rMm , est $\frac{dy}{dx}$, & son cosinus [en nommant ds l'arc Mm ou $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$] est $\frac{dx}{ds}$, ainsi qu'il est aisé de le conclure de ce que le triangle rMm est rectangle: & nous avons vu (24) que ζ étant un angle quelconque, on avoit $d\zeta = (\cos. \zeta)^2 d(\tan. \zeta)$; donc $d(rMm) = \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$; donc enfin $MN = \frac{ds}{\mp \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{ds^3}{\mp dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. C'est-là la formule

pour trouver les rayons de la développée, quand les ordonnées sont parallèles.

78. Quand les ordonnées partent d'un point fixe (fig. 33), on a, comme ci-dessus, & par les mêmes raisons, $MN = \frac{Mm}{m'mu}$; mais $m'mu$ n'est pas $= \mp d(rMm)$; voici comment on trouve alors la valeur de $m'mu$.

Décrivant les arcs Mr , mr' , on a $m'mu = r'mu - r'mm'$; or, selon ce que nous avons vu (73), $r'mu$ diffère de rMm , de la quantité angulaire mCr' ou MCr , (car ces deux dernières quantités ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite par rapport à elles); donc $r'mu = MCr + rMm$; donc puisque $m'mu = r'mu - r'mm'$, on a $m'mu = MCr + rMm - r'mm' = MCr - d(mMr)$. Or en nommant Mr , dx , on a 1 : fin. MCr ou $MCr :: CM : Mr$; c'est-à-dire, 1 : $MCr :: y : dx$; donc $MCr = \frac{dx}{y}$, & puisque $d(mMr) = \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, on a $m'mu = \frac{dx}{y} - \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$; & si la courbe étoit convexe, on trouveroit de même $m'mu = \frac{dx}{y} + \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$; donc $MN = \frac{ds}{\frac{dx}{y} \mp \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{y ds^3}{ds^2 dx \mp y dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$.

79. Pour appliquer ces formules à quelques exemples, supposons que la courbe AM soit un cercle qui ait pour équation $yy = 2ax - xx$; nous aurons $y = \sqrt{2ax - xx}$; donc $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$; $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ fera donc $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; & $\frac{dy}{dx}$ fera $\frac{a - x}{\sqrt{2ax - xx}}$; donc $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a^2 dx}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$; la formule qui convient au cas présent, où la courbe est concave, & où les ordonnées sont parallèles, est $\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$,

elle se changera donc en $\frac{\frac{a^3 dx^3}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a^2 dx^2}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}} = a$; c'est-à-dire, que

le rayon de la développée est toujours de même grandeur & égal au rayon du cercle, en sorte que la développée se réduit à un point qui est le centre; ce qui s'accorde avec ce que l'on connoît.

Prenons, pour second exemple, la parabole, qui a pour équation $y^2 = ax$, ou $y = \sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$, nous aurons $dy = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx$; donc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{1}{4} ax^{-1} dx^2} = dx \sqrt{1 + \frac{a}{4x}} = dx \sqrt{\frac{4x+a}{4x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{4x+a}$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$; donc $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx$, la formule $\frac{ds^3}{-dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ devient donc $\frac{\frac{1}{8} x^{-\frac{3}{2}} dx^3 (4x+a)^{\frac{3}{2}}}{dx^2 \times \frac{1}{4} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx^2} = \frac{1}{2} \frac{(4x+a)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{4x+a}{2} \sqrt{\frac{4x+a}{a}}$.

80. Les rayons de la développée servent à mesurer la courbure d'une courbe en chaque point. Puisque dans le développement de l'élément Nn de la courbe BN (*fig. 31*), le fil trace le petit arc mm' , cet arc mm' a donc même courbure que le cercle qui auroit pour rayon mn . Ainsi, quand on a l'expression du rayon de la développée, on a pour chaque point, le rayon du cercle qui a même courbure que la courbe, en ce point. Et comme la courbure

d'un cercle est d'autant plus grande que son rayon est plus petit ; c'est-à-dire , que les courbures des cercles sont en raison inverse de leurs rayons , il fera donc facile de comparer la courbure d'une courbe , en un point quelconque , avec la courbure de cette même courbe ou d'une autre , en un point quelconque. Ainsi , si je voulois comparer la courbure de la parabole , à son origine , avec celle qu'elle a à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le foyer , je remarquerois qu'à l'origine on a $x = 0$, & que l'abscisse qui répond au foyer , est $\frac{1}{4}a$ (*Alg.* 356). Faisant donc successivement , dans l'expression du rayon de la développée $x = 0$, & $x = \frac{1}{4}a$, j'ai $\frac{1}{2}a$ & $a\sqrt{2}$, le rayon de la développée est donc $\frac{1}{2}a$ à l'origine , & il est $a\sqrt{2}$ à l'extrémité de l'ordonnée qui passe par le foyer ; donc la courbure , au premier de ces points , est à la courbure au second $:: a\sqrt{2} : \frac{1}{2}a$, ou $:: 2\sqrt{2} : 1$.

Puisque le rayon MN de la développée n'est autre chose que le fil qui enveloppoit , ou que l'on peut concevoir avoir enveloppé la courbe BN , il s'en suit donc qu'il est égal en longueur à l'arc BN plus la partie AB dont le fil excédoit la courbe , lorsque le développement a commencé , c'est-à-dire , plus le rayon de la développée à l'origine A . Donc la courbe BN est rectifiable , c'est-à-dire , qu'on peut assigner la longueur de chacun de ses arcs BN .

Ceux

Ceux qui désireront plus de détails sur les développées, peuvent consulter l'*Analyse des infiniment petits* du Marquis de l'Hôpital, où ils trouveront d'ailleurs d'autres applications du Calcul différentiel.

R E M A R Q U E.

81. Nous avons, ci-dessus (70), déterminé les points d'inflexion, en supposant que les deux élémens de la courbe, voisins du point d'inflexion, étoient en ligne droite. De cette supposition, il semble suivre, qu'au point d'inflexion le rayon de la développée devrait toujours être infini, parce que les deux perpendiculaires sur les deux côtés consécutifs seroient parallèles. Cependant il y a plusieurs courbes qui, au point d'inflexion, ont le rayon de la développée égal à zéro; par exemple, la parabole qui a pour équation $y = x^{\frac{3}{2}}$.

Mais il faut observer que rien, dans la supposition que nous avons faite, ne détermine de quelle grandeur sont ces deux élémens consécutifs. Or, s'ils se réduisoient chacun à un point, ils n'en seroient pas moins sur une même ligne droite, & les deux perpendiculaires tombant l'une sur l'autre, se rencontreroient dans le point même d'où elles partent. Or, c'est ce qui arrive dans les courbes où le rayon de la développée est zéro au point d'inflexion. Car la courbure étant alors infinie, les deux élémens consécutifs se confondent, chacun avec la tangente, infiniment moins que dans tout autre cas, & par conséquent doivent être considérés comme deux points réunis. Les deux élémens peuvent donc être en ligne droite, sans que pour cela le rayon de la développée soit infini; mais on voit par-là, qu'au point d'inflexion, le rayon de la développée est toujours infini, ou nul.

É L É M E N S

D U C A L C U L I N T É G R A L.

82. **I**L s'agit ici de revenir des quantités différentielles, aux quantités finies dont la différenciation a produit celles-là : la méthode qui enseigne comment se fait ce retour, s'appelle *le Calcul intégral*.

Il n'y a point de quantité variable exprimée algébriquement, dont on ne puisse trouver la différentielle ; mais il y a un grand nombre de quantités différentielles (*) que l'on ne peut intégrer : les unes, parce qu'en effet elles n'ont pu résulter d'aucune différenciation ; telles sont les quantités $x dy$, $x dy - y dx$, &c. ; les autres, parce qu'on n'a point encore trouvé de méthodes pour les intégrer ; & parmi celles-ci, il y en a dont on a lieu de désespérer d'avoir jamais l'intégrale.

Quoi qu'il en soit, on peut tirer un parti très-avantageux de celles que l'on fait intégrer ; nous allons tâcher de les faire connoître : nous verrons ensuite ce qu'on doit faire à l'égard de celles qui

(*) Par *quantité différentielle*, nous entendons ici, non-seulement celle qui résulte d'une différenciation, mais en général,

toute quantité affectée des différentielles dx , dy , &c. d'une ou de plusieurs variables.

se refusent à l'intégration. Commençons par nous expliquer sur quelques façons de parler dont nous ferons usage.

Nous appellerons *fonction* d'une quantité, toute expression de calcul dans laquelle cette quantité entrera, de quelque manière qu'elle y entre d'ailleurs. Ainsi, x , $a + bx^2$, $\sqrt[n]{(ax^n + bx^p)}$, &c. sont des fonctions de x .

Nous entendons par *quantités algébriques*, celles dont la valeur exacte peut être assignée, en exécutant un nombre déterminé d'opérations de l'Algèbre & de l'Arithmétique, autres que celles qui dépendent des logarithmes. Au contraire, nous appellerons *quantités non algébriques*, celles dont on ne peut assigner que des valeurs approchées, ou qui supposent des approximations : les logarithmes sont dans ce cas, & il y en a une infinité d'autres.

Pour indiquer l'intégrale d'une différentielle, nous nous servirons de la lettre $\int$ que nous mettrons devant cette quantité : cette lettre équivaldra à ces mots *somme de*, parce que *intégrer*, ou *prendre l'intégrale*, n'est autre chose que sommer tous les accroissemens infiniment petits que la quantité a dû prendre pour arriver à un état déterminé.

Des différentielles à une seule variable, qui ont une intégrale algébrique ; & premièrement des différentielles monomes.

83. Règle fondamentale. Pour intégrer une différentielle monome, il faut 1°. augmenter l'exposant de la variable d'une unité : 2°. diviser par cet exposant ainsi augmenté de l'unité, & par la différentielle de la variable ; c'est-à-dire, diviser par ce nouvel exposant multiplié par la différentielle de la variable.

La raison de cette règle ne doit pas être cherchée ailleurs que dans le principe même de la différenciation (10). Comme il s'agit de retrouver la quantité qui avoit été différenciée, il est visible qu'il faut appliquer des opérations contraires à celles qui ont été prescrites pour la différenciation.

Cela posé, appliquons la règle.

$$\int 2x dx \text{ ou } \int 2x^1 dx = \frac{2x^{1+1} dx}{(1+1) dx} = x^2, \int x dx = \frac{x^2 dx}{2 dx} = \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{En effet, } d(x^2) = 2x dx; d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2x dx}{2} = x dx.$$

$$\text{De même } \int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1} dx}{(\frac{2}{3}+1) dx} = \frac{ax^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}ax^{\frac{5}{3}}. \text{ Pareille-}$$

$$\text{ment } \int \frac{a dx}{x^3}, \text{ ou } \int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-3+1} dx}{(-3+1) dx} = \frac{ax^{-2}}{-2} = \frac{-a}{2x^2}.$$

En général, m étant un exposant positif, ou négatif, entier ou fractionnaire, on aura $\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1} dx}{(m+1) dx} = \frac{ax^{m+1}}{m+1}.$

On n'a pas besoin de cette règle pour trouver l'intégrale de dx , ni de adx , que l'on voit aisément devoir être x pour la première, & ax pour la seconde. Mais si l'on vouloit y appliquer la règle, on remarqueroit que l'exposant de x dans ces différentielles est zéro, & qu'elles sont la même chose que $x^0 dx$ & $ax^0 dx$, dont l'intégrale, suivant la règle, est $\frac{x^{0+1} dx}{(0+1) dx}$ & $\frac{ax^{0+1} dx}{(0+1) dx}$, ou dx & ax .

Il n'y a qu'un cas qui échappe à la règle fondamentale; c'est celui où l'exposant m auroit pour valeur -1 ; car alors l'intégrale devient $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$ ou $\frac{ax^0}{0}$ ou $\frac{a}{0}$, quantité inassignable, parce qu'elle est infinie: en effet, si l'on conçoit que le dénominateur, au lieu d'être zéro, soit une quantité infiniment petite, on voit qu'il doit être contenu une infinité de fois dans la quantité finie a , & que par conséquent la fraction seroit infinie. Nous expliquerons, par la suite, pourquoi le calcul donne ici une quantité infinie; mais en attendant, nous ferons remarquer que la différentielle proposée $ax^m dx$ qui est alors $ax^{-1} dx$, ou $\frac{a dx}{x}$ est une différentielle de logarithme; c'est celle de alx ou de lx^a , ainsi qu'on peut le voir aisément en différenciant (27).

Si la différentielle monome avoit un radical, on substituerait au radical, un exposant fractionnaire. Ainsi pour intégrer $adx \sqrt[3]{x^2}$, on intégrera $adx \cdot x^{\frac{2}{3}}$ ou $ax^{\frac{2}{3}} dx$, ce qui se fera comme ci-dessus.

R E M A R Q U E.

84. Nous avons vu (8) que lorsque dans les

quantités qu'on avoit à différencier , il se trouvoit des termes tout constans, ces termes ne se trouvoient plus dans la différentielle. Donc , lorsqu'on remonte à l'intégrale , il faut avoir soin d'ajouter une quantité constante à l'intégrale. Cette constante aura telle valeur que l'on voudra , tant qu'on n'aura pas d'autre objet que de trouver l'intégrale, c'est-à-dire , de trouver une quantité telle qu'en la différenciant , on reproduise la différentielle proposée ; en effet , $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ & $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + C$, C étant une constante quelconque, auront également pour différentielle la quantité $ax^m dx$, quelque valeur qu'on donne à C . Mais lorsque l'intégration se fait dans la vue de satisfaire à une question que l'on s'est proposée , alors cette constante a une valeur que l'état de la question détermine : nous verrons cela par la suite ; mais , à l'avenir , nous aurons toujours soin d'en ajouter une à la suite de chaque intégration ; & afin qu'on la reconnoisse pour telle , nous la désignerons toujours par la même lettre C .

Des Différentielles complexes dont l'intégration rentre dans la règle fondamentale.

85. 1°. On peut encore intégrer par la règle précédente toute quantité dans laquelle il n'entrera point de puissances de quantités complexes, ni des diviseurs

complexes, à moins que ces derniers ne fussent des quantités constantes.

Ainsi pour intégrer $ax^3dx + \frac{bx^2dx}{c} + edx$, j'intégrerai séparément chaque terme, & j'aurai $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} + ex + C$. Pareillement l'intégrale de $ax^3dx + \frac{bdx}{x^4}$, ou de $ax^3dx + bx^{-4}dx$, est $\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^{-3}}{-3} + C$, ou $\frac{ax^4}{4} - \frac{b}{3x^3} + C$.

86. 2°. Quand même il entreroit des puissances de quantités complexes, on intégreroit encore par la règle fondamentale, pourvu qu'elles ne se trouvassent point au dénominateur, & qu'en même temps leur exposant fût un nombre entier positif.

Par exemple, $(a + bx^2)^3 \times dx$ s'intégreroit par la règle précédente, en élevant actuellement $a + bx^2$ à la troisième puissance, ce qui (*Algèbre* 149) donneroit $a^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x^4 + b^3x^6$, & par conséquent $(a + bx^2)^3 dx = a^3dx + 3a^2bx^2dx + 3ab^2x^4dx + b^3x^6dx$, dont l'intégrale, prise terme à terme, est $a^3x + \frac{3a^2bx^3}{3} + \frac{3ab^2x^5}{5} + \frac{b^3x^7}{7} + C$.

87. Comme il n'y a pas de quantité complexe élevée à une puissance dont l'exposant seroit un nombre entier positif, que l'on ne puisse, par la même règle donnée (*Alg.* 149), réduire, ainsi, à une suite finie de monomes, on pourra donc toujours intégrer toute quantité complexe qui ne renfermeroit d'autres parties complexes que des puissances dont l'exposant seroit un nombre entier positif.

Ainsi, si j'avois à intégrer $g x^3 d x (a + b x^2)^2 + a^2 x^7 d x (c + e x^2 + f x^3)^4$, je développérois, par la règle citée, la valeur de $(a + b x^2)^2$, & je multiplierois chaque terme du résultat, par $g x^3 d x$; je développérois pareillement la valeur de $(c + e x^2 + f x^3)^4$, & je multiplierois chaque terme du résultat, par $a^2 x^7 d x$; alors je n'aurois plus à intégrer qu'une suite de monomes, ce qui est le cas de la règle fondamentale.

88. Il faut excepter ici, le cas où quelqu'un des exposans étant négatif, il arriveroit qu'après le développement & la multiplication, l'exposant de la variable, dans quelqu'un des termes, seroit -1 ; mais dans ce cas on intégreroit par logarithmes.

Par exemple, si j'avois $\frac{a d x}{x^3} (a + b x^2)^2$, ou $a x^{-3} d x (a + b x^2)^2$; je le changerois en $a x^{-3} d x (a^2 + 2 a b x^2 + b^2 x^4)$ qui revient à $a^3 x^{-3} d x + 2 a^2 b x^{-1} d x + a b^2 x d x$, dont les deux termes $a^3 x^{-3} d x + a b^2 x d x$ ont pour intégrale $\frac{-a^3 x^{-2}}{2} + \frac{a b^2 x^2}{2}$; mais le terme $2 a^2 b x^{-1} d x$ qui est la même chose que $2 a^2 b \frac{d x}{x}$, est (27) la différentielle logarithmique de $2 a^2 b l x$; enforte que l'intégrale totale est $-\frac{a^3 x^{-2}}{2} + \frac{a b^2 x^2}{2} + 2 a^2 b l x + C$.

89. 3°. Si la quantité différentielle proposée renferme même une quantité complexe, élevée à une puissance quelconque (dont l'exposant soit entier, ou fractionnaire, positif, ou négatif), on intégrera encore, si la totalité des quantités qui multiplie cette

quantité complexe, est la différentielle de cette même quantité complexe, considérée sans son exposant total; ou si elle est cette différentielle multipliée ou divisée par un nombre constant. Il ne faudra pour cela, que regarder la quantité complexe dont il s'agit, comme une seule variable, & appliquer mot à mot la règle fondamentale.

Par exemple, $g dx (a + bx)^p$ est dans ce cas, parce que $g dx$ est la différentielle de $a + bx$, multipliée par $\frac{g}{b}$ qui est une quantité constante; ainsi pour l'intégrer, j'écris

$$\int g dx (a + bx)^p = \frac{g dx (a + bx)^{p+1}}{(p+1) d(a + bx)} + C = \frac{g dx (a + bx)^{p+1}}{(p+1) b dx} + C = \frac{g (a + bx)^{p+1}}{(p+1) b} + C.$$

En effet, si l'on différencie cette nouvelle quantité, on retrouve $g dx (a + bx)^p$.

En examinant de même la différentielle $\frac{a^2 dx + 2ax dx}{V(ax + xx)}$, ou $(a^2 dx + 2ax dx)(ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$, on trouvera qu'elle est intégrable, parce que $a^2 dx + 2ax dx$ est la différentielle de $ax + xx$, multipliée par une constante a . Appliquant donc la règle, on aura $\int (a^2 dx + 2ax dx)(ax + xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(a^2 dx + 2ax dx)(ax + xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(a dx + 2x dx)} + C = 2a(ax + xx)^{\frac{1}{2}} + C.$

Le seul cas à excepter est celui où l'exposant de la quantité complexe seroit -1 ; alors on intègre par logarithmes, ainsi que nous le verrons par la suite.

Des différentielles Binomes qui peuvent s'intégrer algébriquement.

90. Nous entendons par différentielle binome , celle où la quantité complexe la plus composée , est une puissance quelconque d'un binome.

Ainsi $gx^i dx (a + bx^2)^{\frac{3}{5}}$ est une différentielle binome. Il en est de même de $gx^m dx (a + bx^n)^p$ qui peut représenter toute différentielle binome , parce que , par g, a, b, m, n, p , on peut entendre tous les nombres imaginables positifs ou négatifs.

On ne fait pas intégrer généralement , toute différentielle binome. Mais on voit , par ce qui précède , qu'on fait intégrer une différentielle binome $gx^m dx (a + bx^n)^p$, dans les deux cas suivans.

1°. Quand p est un nombre entier positif quelconque , quels que soient d'ailleurs les exposans m & n (86), à l'exception du cas mentionné (88).

2°. Quand l'exposant m de x hors du binome , est moindre d'une unité que l'exposant n de x dans le binome ; c'est-à-dire , qu'on peut intégrer généralement $gx^{n-1} dx (a + bx^n)^p$, quels que soient n & p , excepté le cas où $p = -1$. En effet $gx^{n-1} dx$ est la différentielle de $a + bx^n$, multipliée par $\frac{g}{nb}$, c'est-à-dire , par une constante ; on rentre donc dans

le cas dont il est question (89); & par conséquent on intégrera, comme il y a été enseigné, c'est-à-dire, par la règle fondamentale, en regardant $a + bx^n$ comme une seule quantité.

Outre ces cas, il y en a encore deux autres que l'on peut comprendre en un seul, & qui comprennent le précédent : nous allons les faire connoître.

91. 1°. On peut intégrer toute différentielle binome, dans laquelle l'exposant de x hors du binome, étant augmenté d'une unité, pourra être divisé exactement par l'exposant de x dans le binome, & donnera pour quotient un nombre entier positif. Le procédé qu'il faut suivre dans ce cas, pour intégrer, ainsi que pour démontrer que cela est général, consiste à égaler la quantité binome (sans son exposant total), à une seule variable, & à exprimer la différentielle proposée à l'aide de cette variable seule & de constantes; ce à quoi on peut toujours parvenir facilement, en opérant comme dans les exemples suivans.

Proposons-nous d'abord d'intégrer $gx^3dx(a + bx^2)^{\frac{4}{3}}$. Je vois que cette différentielle est intégrable, parce que l'exposant de x hors du binome, c'est-à-dire, 3, étant augmenté d'une unité, donne 4, qui, divisé par l'exposant 2 de x dans le binome, donne pour quotient 2, nombre entier positif.

Je fais donc $a + bx^2 = z$. De cette équation je tire la

valeur de x^2 ; c'est $x^2 = \frac{z-a}{b}$. Je remarque que $x^3 dx$ qui précède la quantité binôme, vient (à un multiplicateur constant près) de la différenciation de x^4 quarré de x^2 : j'élève donc, au quarré, l'équation $x^2 = \frac{z-a}{b}$, & j'ai $x^4 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2$; donc, en différenciant, j'aurai $4x^3 dx = 2 \cdot \left(\frac{z-a}{b}\right) \cdot \frac{dz}{b}$, & par conséquent $x^3 dx = \left(\frac{z-a}{b}\right) \frac{dz}{2b} = \frac{(z-a) dz}{2b^2}$. Substituant pour $x^3 dx$, & pour $(a + bx^2)$, leurs valeurs en z , dans $gx^3 dx (a + bx^2)^{\frac{4}{5}}$, j'ai $\frac{g \cdot (z-a) dz}{2b^2} \times z^{\frac{4}{5}}$ ou $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1} dz}{2b^2} - \frac{ga z^{\frac{4}{5}} dz}{2b^2}$. Donc $\int gx^3 dx (a + bx^2)^{\frac{4}{5}} = \int \frac{gz^{\frac{4}{5}+1} dz}{2b^2} - \int \frac{ga z^{\frac{4}{5}} dz}{2b^2} = \frac{gz^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2b^2} - \frac{ga z^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2b^2} + C$, ou (à cause que $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}$ est multiplicateur commun), $= \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2} \left(\frac{z}{(\frac{4}{5}+2)} - \frac{a}{\frac{4}{5}+1} \right) + C = \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2} \left(\frac{5}{14}z - \frac{5}{9}a \right) + C$; remettant donc pour z , sa valeur $a + bx^2$, nous aurons $\frac{g}{2b^2} (a + bx^2)^{\frac{4}{5}+1} \left[\frac{5}{14} (a + bx^2) - \frac{5}{9}a \right] + C$.

92. On opérera d'une manière semblable, pour tout autre cas assujéti aux mêmes conditions. Prenons, par exemple, $gx^8 dx (a + bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, qui doit être intégrable, puisque l'exposant 8 augmenté de 1, c'est-à-dire, 9, étant divisé par l'exposant 3 de x , dans le binôme, donne un nombre entier positif. Je ferai donc $a + bx^3 = z$; j'aurai $x^3 = \frac{z-a}{b}$; & comme $x^8 dx$ qui précède le binôme, vient (à un multiplicateur constant près) de la différenciation de x^9 , pour avoir x^9 je cuberai l'équation $x^3 = \frac{z-a}{b}$: j'aurai $x^9 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^3$;

différenciant pour avoir $x^8 dx$, j'ai $9 x^8 dx = 3 \cdot \left(\frac{\zeta - a}{b}\right)^2 \frac{d\zeta}{b}$,

& par conséquent $x^8 dx = \left(\frac{\zeta - a}{b}\right)^2 \frac{d\zeta}{3b}$. La différentielle

$g x^8 dx (a + b x^3)^{-\frac{2}{3}}$, se changera donc en $g \cdot \left(\frac{\zeta - a}{b}\right)^2 \cdot \frac{d\zeta}{3b} \cdot \zeta^{-\frac{2}{3}}$,

ou (en faisant les opérations indiquées, c'est-à-dire, élevant

$\frac{\zeta - a}{b}$ au quarré, & multipliant par $\zeta^{-\frac{2}{3}}$) $\frac{g \zeta^{2 - \frac{2}{3}}}{3 b^3} d\zeta -$

$\frac{2 g a \zeta^{1 - \frac{2}{3}} d\zeta}{3 b^3} + \frac{g a^2 \zeta^{-\frac{2}{3}} d\zeta}{3 b^3}$, dont l'intégrale est $\frac{g \zeta^{3 - \frac{2}{3}}}{3 b^3 (3 - \frac{2}{3})}$

$- \frac{2 g a \zeta^{2 - \frac{2}{3}}}{3 b^3 (2 - \frac{2}{3})} + \frac{g a^2 \zeta^{1 - \frac{2}{3}}}{3 b^3 (1 - \frac{2}{3})} + C$, qui, à cause du mul-

tiplicateur commun $\frac{g}{3 b^3} \zeta^{1 - \frac{2}{3}}$, se réduit à.

$\frac{g}{3 b^3} \zeta^{1 - \frac{2}{3}} \left(\frac{\zeta^2}{3 - \frac{2}{3}} - \frac{2 a \zeta}{2 - \frac{2}{3}} + \frac{a^2}{1 - \frac{2}{3}} \right) + C$, ou

$\frac{g}{3 b^3} \zeta^{1 - \frac{2}{3}} \left(\frac{3 \zeta^2}{7} - \frac{6 a \zeta}{4} + 3 a^2 \right) + C$, ou enfin,

en remettant pour ζ , sa valeur $a + b x^3$, l'intégrale est $\frac{g}{3 b^3} (a + b x^3)^{1 - \frac{2}{3}} \left[\frac{3}{7} (a + b x^3)^2 - \frac{6 a}{4} (a + b x^3) + 3 a^2 \right] + C$.

Telle est la méthode qu'il faudra suivre toutes les fois que l'exposant de x hors du binome, étant augmenté d'une unité, & divisé par l'exposant de x dans le binome, donnera pour quotient un nombre entier positif.

93. 2°. Quoiqu'une quantité différentielle binome ne soit pas dans le cas dont nous venons de parler, il arrive néanmoins, assez souvent, qu'on peut l'y ramener, à l'aide d'une préparation assez simple, & qui consiste à rendre négatif l'exposant de x dans le

binome, lorsqu'il est positif, ou positif lorsqu'il est négatif. Pour cet effet, il faut diviser les deux termes du binome par la puissance de x qui se trouve dans ce binome, & multiplier hors du binome, par cette même puissance élevée à la puissance marquée par l'exposant total du binome.

Par exemple, pour rendre négatif l'exposant 2 de x , dans le binome $gx^4dx(a+bx^2)^5$, je divise $a+bx^2$ par x^2 , ce qui me donne $gx^4dx\left(\frac{a}{x^2}+b\right)^5$, ou $gx^4dx(ax^{-2}+b)^5$; mais comme la quantité x^2 par laquelle on a divisé, est censée élevée à la cinquième puissance, puisqu'elle est comprise sous l'exposant total 5 du binome, il faut, par compensation, multiplier au-dehors, par $(x^2)^5$, c'est-à-dire (*Alg.* 123), par x^{10} , ce qui donne $gx^{14}dx(ax^{-2}+b)^5$.

En appliquant cette préparation, on trouvera que plusieurs différentielles binomes qui ne seroient pas comprises dans le cas précédent, y reviendront.

Par exemple, si l'on me donnoit à intégrer $\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$, ou $aadx(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$; je vois que l'exposant de x hors du binome, c'est-à-dire, 0, étant augmenté de 1, ce qui fait 1, ne peut être divisé exactement par l'exposant 2 de x dans le binome; mais j'aurois tort d'en conclure que la quantité proposée n'est pas intégrable; car si je rends négative la puissance de x dans le binome, en écrivant $aa(x^2)^{-\frac{3}{2}}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$ qui se réduit à $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$, je vois alors que -3 augmenté de 1, c'est-à-dire, $-3+1$ ou -2 , étant divisé par l'exposant -2 de x dans le binome, donne

pour quotient un nombre entier positif: ainsi faisant $aa x^{-2} + 1 = z$, j'en tire $x^{-2} = \frac{z-1}{a}$; & comme $x^{-3} dx$ est (à un multiplicateur constant près) la différentielle de x^{-2} , je différencie, & j'ai $-2 x^{-3} dx = \frac{dz}{a}$, d'où je tire $x^{-3} dx = -\frac{dz}{2a}$. La différentielle $aa x^{-3} dx (aa x^{-2} + 1)^{-\frac{3}{2}}$ se change donc en $\frac{-aa \cdot dz}{2a} \cdot z^{-\frac{3}{2}}$, ou $-\frac{z^{-\frac{3}{2}} dz}{2}$, dont l'intégrale est $\frac{-z^{-\frac{1}{2}}}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} + C$, ou $z^{-\frac{1}{2}} + C$, ou (en remettant pour z sa valeur) $(aa x^{-2} + 1)^{-\frac{1}{2}} + C$, ou $\frac{1}{\sqrt{aa x^{-2} + 1}} + C$, qui se réduit à $\frac{x}{\sqrt{aa + xx}} + C$. Ainsi le procédé pour intégrer est le même, dans ce cas, que dans le précédent.

94. Nous avons supposé qu'il n'y avoit de puissance de x , que dans l'un des deux termes du binome. S'il y en avoit dans tous les deux, on ramèneroit la quantité à n'en avoir que dans un, en divisant le binome par l'une des deux puissances de x , qui se trouvent dans l'un de ses termes, & multipliant au dehors par la même puissance élevée à la puissance marquée par l'exposant du binome; & cela par la même raison que nous venons de donner (93), pour rendre l'exposant négatif.

Ainsi, si l'on me propoisoit d'intégrer $\frac{aa dx}{x \sqrt{ax + xx}}$, ou $aa x^{-1} dx (ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$, je le changerois en $aa x^{-1} (x)^{-\frac{1}{2}} dx (a + x)^{-\frac{1}{2}}$, en divisant le binome par x , & multipliant, au dehors, par x élevé à la puissance $-\frac{1}{2}$

qui est celle du binôme. Cette quantité se réduit à....
 $aax^{-\frac{3}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$. Si on lui applique la règle du
 premier cas (91), on ne trouvera point que cette quantité
 soit intégrable; mais en rendant négatif l'exposant de x dans
 le binôme, on aura $aax^{-\frac{3}{2}} \cdot (x)^{-\frac{1}{2}}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$,
 ou $aax^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ qui (93) est intégrable.
 Faisant donc $ax^{-1}+1=\zeta$, on aura $x^{-1}=\frac{\zeta-1}{a}$;
 différenciant, on a $-x^{-2}dx=\frac{d\zeta}{a}$, ou $x^{-2}dx=-\frac{d\zeta}{a}$;
 donc $aax^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ se change en $-ad\zeta \cdot \zeta^{-\frac{1}{2}}$,
 ou $-a\zeta^{-\frac{1}{2}}d\zeta$, dont l'intégrale est $\frac{-a\zeta^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$, ou
 $-2a\zeta^{\frac{1}{2}}+C$, ou (en remettant pour ζ sa valeur)
 $-2a(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}+C$, ou enfin $-2a\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)}+C$.

Lorsqu'on aura fait sur une différentielle binôme,
 l'examen des deux cas que nous venons d'exposer,
 si elle ne se rapporte à aucun, alors il est inutile
 d'attendre une intégrale purement algébrique.

Quant aux différentielles trinomes, quatinomes,
 &c., c'est-à-dire, dont la quantité complexe ren-
 ferme trois, quatre, &c. termes, elles sont inté-
 grales dans les cas énoncés (85 & *suiv.*). Il y a
 encore quelques cas où elles admettent une intégrale
 algébrique; mais ces cas sont en fort petit nombre,
 & se présentent rarement; ainsi nous ne nous en
 occuperons point ici.

Nous

Nous donnerons plus bas la méthode de découvrir celles qui sont intégrables, & celles dont l'intégrale peut être rapportée à une intégrale donnée.

Application des règles précédentes, à la quadrature des Courbes.

95. Pour trouver la surface ou (ce qui revient au même) la quadrature des lignes courbes , on se représente ces lignes comme des polygones d'une infinité de côtés ; & , des extrémités M & m de chaque côté (*fig. 34*) , on imagine les perpendiculaires MP , mp sur l'axe des abscisses , ce qui décompose la surface en une infinité de trapèzes infiniment petits. Alors on regarde chaque trapèze , tel que $PpmM$ comme la différentielle de l'espace fini APM ; parce qu'en effet, $PpmM = Apm - APM = d(APM)$ (6). Il ne s'agit donc que d'exprimer algébriquement le petit trapèze $PpmM$, & d'intégrer ensuite cette expression , à l'aide des règles précédentes.

Mais en considérant $PpmM$ comme différentielle de la surface, il faut remarquer , qu'il n'est pas plutôt la différentielle de la surface comptée depuis l'origine A des abscisses , qu'il n'est la différentielle de tout autre espace $KPML$ compté depuis un point fixe & déterminé K , puisqu'on a également $PpmM = KpmL - KPML = d(KPML)$. Donc, lorsqu'on

intégrera , on n'a pas droit d'attribuer l'intégrale que donnera immédiatement le calcul , plutôt à l'espace APM , qu'à tout autre espace $KPLM$ qui en diffère d'un espace déterminé & constant KAL . Il faudra donc ajouter à l'intégrale trouvée par le calcul , une constante qui exprime ce dont l'espace que l'on a dessein de déterminer , diffère de celui que donne immédiatement le calcul : nous verrons dans les exemples que nous allons donner , comment on détermine cette constante. Cherchons d'abord l'expression de l'espace $PpmM$.

Nommons AP, x ; PM, y ; nous aurons $Pp = dx$, $pm = y + dy$. La surface du trapèze $PpmM$ (*Géom.* 148) est $\frac{PM + pm}{2} \times Pp = \frac{y + dy}{2} \times dx = y dx + \frac{dy dx}{2}$.

Mais pour exprimer que Mm est infiniment petit , il faut rejeter $\frac{dy dx}{2}$ qui est infiniment petit à l'égard de $y dx$; on aura donc $y dx$ pour l'expression générale de la différentielle ou de l'élément de la surface de toute courbe.

Pour appliquer cette formule à une surface proposée dont on auroit l'équation , il faut tirer de cette équation , la valeur de y , que l'on mettra dans la formule $y dx$; alors on aura une quantité toute en x & dx , qui , lorsqu'elle pourra être intégrée par les règles précédentes , donnera , en y ajoutant une

constante, l'expression de la surface de cette courbe, comptée depuis tel point qu'on voudra. Il ne s'agira plus que de déterminer la constante, ce que l'on fera en exprimant de quel point l'on prétend compter la surface; nous allons voir comment cela se fait.

Prenons, pour exemple, la parabole ordinaire, qui a pour équation $yy = px$. Nous aurons $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; donc ydx deviendra $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$; or l'intégrale de cette quantité (83) est $\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{\frac{3}{2}dx} + C$, ou $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; cette dernière expression est donc celle de la surface de la parabole; en sorte que connoissant l'abscisse x , & le paramètre p , on auroit la valeur de l'espace APM , ou de l'espace $KPML$ compté depuis un point déterminé K , si la constante C étoit déterminée, c'est-à-dire, si cette intégrale exprimoit actuellement de quel point on compte.

Supposons donc que nous voulons compter les espaces depuis le point A ; alors on aura $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$. Pour savoir ce que doit valoir C , pour que cette équation ait lieu, il faut remarquer que lorsque x devient 0, l'espace APM est aussi zéro; dans ce cas l'équation se réduit à $0 = 0 + C$; donc $C = 0$; donc pour que l'intégrale exprime les espaces comptés depuis le point A , il faut que la constante C soit zéro; c'est-à-dire, qu'alors il n'y a point de constante à ajouter, & l'on a, en général, l'espace indéfini $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$.

Mais si l'on vouloit compter les espaces depuis le point K , tel que $AK = b$ (b étant une quantité connue); alors



on auroit $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; or ces espaces $KPML$ deviennent 0, lorsque AP ou x devient $= b$; on a donc alors $0 = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$; donc $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, & par conséquent $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$.

On voit par-là, à quoi sert la constante que l'on ajoute en intégrant, & comment l'état de la question, seul, peut la déterminer.

Remarquons que $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x$; or $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$; donc $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ ou $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3}xy$; donc puisque $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ exprime l'espace APM , cet espace aura aussi pour expression $\frac{2}{3}xy$, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}AP \times PM$, ou les $\frac{2}{3}$ du rectangle $APMO$, quel que soit AP .

Pareillement $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b$; or, lorsque $x = AK = b$, l'équation $yy = px$ donne $yy = pb$, & par conséquent $y = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire, $KL = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; donc $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ ou $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b = \frac{2}{3}KL \times AK$; donc, puisque l'espace $KPML$ a pour expression $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, il aura aussi pour expression $\frac{2}{3}AP \times PM - \frac{2}{3}AK \times KL$, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}APMO - \frac{2}{3}AKLI$.

La parabole est la seule des quatre sections coniques, qui soit quarrable.

Prenons pour second exemple, les paraboles de tous les genres, dont l'équation (30) est $y^{m+n} = a^m x^n$; nous aurons $y = \sqrt[m+n]{(a^m x^n)} = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$; donc.
 $y dx = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} dx$, dont l'intégrale est.

$$\frac{a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} + 1}{\frac{n}{m+n} + 1} + C, \text{ qui se réduit à } \dots\dots\dots$$

$$\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} + 1 + C, \text{ qui est la même chose}$$

$$\text{que } \frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} \times x + C, \text{ ou (à cause que}$$

$$y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}) \text{ se réduit à } \frac{m+n}{m+2n} xy + C. \text{ En-}$$

forte que si l'on veut compter les espaces APM depuis l'origine A des x (*fig. 35*), ce qui exige que l'intégrale soit zéro, quand APM est zéro, & par conséquent quand x est zéro, alors la constante C est zéro, & l'on a simplement $\frac{m+n}{m+2n} xy$; c'est-à-dire, que l'espace APM est toujours une portion déterminée du produit xy ou du rectangle

$APMO$; il en est une partie exprimée par la fraction $\frac{m+n}{m+2n}$, dont la valeur dépend de celles de m & de n ; c'est-à-dire, du degré de la parabole. Ainsi toutes les paraboles sont quarrables.

On trouvera, de même, que toutes les hyperboles rapportées à leurs asymptotes (excepté l'hyperbole ordinaire) sont quarrables. Mais comme dans la détermination de la constante, on trouve quelquefois une quantité infinie, il n'est pas inutile d'examiner ici ce qu'elle signifie. Soit donc $y^m = a^{m+n} x^{-n}$ l'équation de ces courbes: on aura

$$y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}; \text{ donc } ydx = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}} dx, \text{ dont l'in-}$$

$$\text{tégrale est } \frac{a^{\frac{m+n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}}}{1-\frac{n}{m}} + C, \text{ ou } \frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}} + C;$$

quantité ou il n'y a aucune difficulté pour déterminer la

constante, lorsque m surpasse n . Mais lorsque m est plus petite que n , on trouve une quantité infinie pour constante, lorsqu'on veut compter les espaces depuis l'origine des x ; & une quantité finie, quand on compte de tout autre point. Supposons, par exemple, $m = 1$ & $n = 2$; auquel cas l'équation est $y = a^3 x^{-2}$; la surface se réduit alors à $-a^3 x^{-1} + C$, ou $C - \frac{a^3}{x}$. Donc si l'on veut compter les espaces depuis l'origine A des x , il faudra que $C - \frac{a^3}{x}$ soit zéro, lorsque $x = 0$; c'est-à-dire, que $C - \frac{a^3}{0} = 0$, & par conséquent $C = \frac{a^3}{0}$, c'est-à-dire, est infini. Au contraire, si on veut compter les espaces depuis le point K , tel que $AK = b$, on a $C - \frac{a^3}{b} = 0$, qui donne $C = \frac{a^3}{b}$. Voici ce que cela signifie.

La courbe qui a pour équation $y = a^3 x^{-2}$ ou $y = \frac{a^3}{x^2}$ s'étend à l'infini le long des asymptotes AZ , AY (fig. 36); mais s'approche beaucoup plus près de l'asymptote AZ que de l'asymptote AY , ainsi qu'on peut le déduire de son équation; enforte que si l'on compte les espaces depuis l'asymptote AY , ils sont infinis, parce que l'espace compris entre cette asymptote & la branche infinie BS , est infini. Ainsi, il n'est pas possible d'assigner les espaces $APMS$ comptés depuis l'asymptote AY . Au contraire, les espaces compris entre la branche BM & l'asymptote AZ jusqu'à l'infini, ont une valeur finie, parce qu'après un intervalle assez court, la branche s'approche très-rapidement de son asymptote, enforte que l'espace infiniment long $KLM OZ$ a pour expression $\frac{a^3}{b}$, & $PM OZ = \frac{a^3}{x}$; & par conséquent $KLMP = \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{x}$. D'où il suit, que quoiqu'on ne puisse pas avoir

les espaces comptés depuis AY , on peut néanmoins avoir les espaces $KLMP$ comptés depuis un point K pris si près qu'on le voudra de AY .

Prenons pour troisième exemple, la courbe qui auroit pour équation $y = \frac{aax - x^3}{aa}$, & que l'on reconnoitra avoir la figure marquée (*fig. 37*), en donnant consécutivement à x des valeurs arbitraires, & une valeur déterminée à a .

Ou aura donc $ydx = \frac{aaxdx - x^3dx}{aa}$, dont l'intégrale (83) est $\int ydx$ ou $APM = \frac{2aax^2 - x^4}{4aa} + C$; & si l'on veut compter les espaces APM depuis le point A origine des x , il faut que cette intégrale devienne 0 avec x , ce qui fait voir que la constante C est zéro. Ensorte que l'espace indéfini APM est simplement $\frac{2aax^2 - x^4}{4aa}$. Et en général, si la valeur de y n'est composée, comme dans le cas présent, que de monomes, on aura toujours aisément la surface (85).

96. Nous avons vu (*Alg. 413*) comment, à l'aide de l'Algèbre, on pouvoit imiter un contour quelconque $ABCD$ (*fig. 38*), en faisant passer par un certain nombre A, B, C, D , de ses points, une ligne courbe dont l'équation auroit cette forme $y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$ &c.; & comment on devoit déterminer a, b, c , &c. pour cet effet. Supposons maintenant que l'on voulût trouver la surface $ABCDLK$, quoiqu'on n'ait pas l'équation de la courbe $ABCD$.

On feroit passer (*Alg.* 413) par un certain nombre de points A, B, C, D une courbe $AeBfCgD$, qui se confondroit avec celle-là, d'autant plus intimement, qu'on prendroit plus de points; & comme alors on auroit l'équation de cette dernière, on pourroit la regarder comme l'équation de la courbe $ABCD$, du moins dans l'étendue $ABCD$; mais cette équation étant alors de cette forme $y = a + bx + cx^2 + ex^3$, &c. dont tous les termes sont monomes, on auroit aisément la surface, selon ce qui vient d'être dit. On peut appliquer ceci à la mesure des surfaces des coupes des vaisseaux.

En général, on peut l'appliquer à trouver par approximation, les surfaces des courbes, & l'intégrale approchée des quantités qu'on ne peut pas intégrer exactement. En effet, toute différentielle peut être regardée comme exprimant l'élément de la surface d'une courbe, dont l'ordonnée feroit égale à tout ce que dx multiplie; par exemple, $dx \sqrt{aa + xx}$ est l'élément de la surface de la courbe qui auroit pour ordonnée $y = \sqrt{aa + xx}$. Ainsi, calculant par le moyen de cette équation, quelques valeurs de y pour quelques valeurs de x , & faisant passer par les extrémités de ces ordonnées, une courbe de la nature de celles dont il vient d'être question, la surface de celle-ci étant trouvée, feroit la valeur approchée de l'intégrale de $dx \sqrt{aa + xx}$, dans l'étendue qu'on auroit donnée à x .

Prenons encore un exemple. Ce sera celui de la surface

de la courbe, qui a pour équation $a^5 yy = x^4 (a^3 - x^3)$; cette équation donne $y = \pm \sqrt{\left(\frac{x^4(a^3 - x^3)}{a^5}\right)} = \pm \frac{x^2}{a^2 \sqrt{a}} \sqrt{(a^3 - x^3)}$; donc (en ne prenant qu'une des valeurs de y), $y dx = \frac{x^2 dx}{a^2 \sqrt{a}} \sqrt{(a^3 - x^3)} = \frac{x^2 dx}{a^2 \sqrt{a}} (a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}}$; or cette quantité est intégrable (89), parce que $x^2 dx$ est la différentielle de x^3 , divisée par le nombre constant 3. Donc (89) on a $\int y dx = \frac{x^2 dx \cdot (a^3 - x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} a^2 \sqrt{a} \cdot -3 x^2 dx} + C$
 $= -\frac{2(a^3 - x^3)^{\frac{3}{2}}}{9 a^2 \sqrt{a}} + C$. A l'égard de la constante C , on la déterminera en décidant de quel point on veut compter la surface.

On peut encore trouver la surface des courbes en la décomposant en triangles, au lieu de trapèzes. Par exemple, on pourroit trouver la surface du segment ANQ (fig. 34), en le considérant comme composé d'une infinité de triangles infiniment petits, tels que AQq . Ce triangle auroit pour expression $\frac{Aq \times Qt}{2}$, en abaissant la perpendiculaire Qt , ou (ce qui revient au même) en décrivant du centre A & du rayon AQ l'arc infiniment petit Qt . Alors nommant AQ, t , & l'arc Qt, dx ; on auroit $Aq = t + dt$, & par conséquent le triangle $AQq = \frac{t + dt}{2} dx = \frac{t dx}{2} + \frac{dt dx}{2}$, c'est-à-dire, $= \frac{t dx}{2}$, en rejetant le terme $\frac{dt dx}{2}$ pour exprimer que dx & dt sont infiniment petits. Il ne s'agiroit plus que d'avoir l'équation entre x &

ι , pour pouvoir mettre au lieu de ι sa valeur en x , & intégrer.

Application à la rectification des lignes courbes.

97. Rectifier une ligne courbe, c'est déterminer sa longueur, ou assigner une ligne droite qui lui soit égale, ou égale à un arc proposé de cette courbe. Voici comment on y parvient quand cela est possible.

En considérant toujours la courbe AM (fig. 34), comme un polygone d'une infinité de côtés, le petit côté Mm peut être regardé comme la différentielle de l'arc AM , parce que $Mm = Am - AM = d(AM)$. Or en menant Mr parallèle à AP , on a $Mm = \sqrt{(Mr^2 + rm^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; il ne s'agit donc que d'intégrer $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Pour cet effet on différenciera l'équation de la courbe, & en ayant tiré la valeur de dy exprimée en x & dx , ou celle de dx exprimée en y & dy , on la substituera dans $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ qui ne contiendra plus que des x & dx^2 , ou des y & dy^2 ; on fera sortir dx^2 ou dy^2 , hors du radical (Alg. III), & l'on intégrera.

Pour en donner un exemple, prenons parmi les paraboles généralement exprimées par $y^{m+n} = ax^n$, celle qui a pour équation particulière $y^3 = ax^2$, nous en tirerons x^2

$$= \frac{y^3}{a} \text{ \& } x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}, \text{ donc } dx = \frac{\frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy}{a^{\frac{1}{2}}}; \text{ \& } dx^2 =$$

$$\frac{9y dy^2}{4a}; \text{ donc } \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + \frac{9y dy^2}{4a}} =$$

$dy \sqrt{1 + \frac{9y}{4a}}$ (Alg. 111). Or, cette quantité s'intègre aisément (90), puisque l'exposant de y hors du binome, est moindre d'une unité que dans le binome. On aura donc

$$\int dy \sqrt{1 + \frac{9y}{4a}} \text{ ou } \int dy \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{dy \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9 dy}{4a}}$$

+ $C = \frac{8a}{27} \cdot \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C$. A l'égard de la constante C , voici comment on la déterminera. Si c'est depuis le point A , origine des y , que nous voulons compter les arcs AM , il faudra que l'intégrale, ou la valeur de l'arc AM , devienne zéro en même temps que y . Or, lorsque $y = 0$, l'intégrale se réduit à $\frac{8a}{27} (1)^{\frac{3}{2}} + C$ ou $\frac{8a}{27} + C$; on a donc $\frac{8a}{27} + C = 0$; donc $C = -\frac{8a}{27}$. Donc, la longueur de l'arc quelconque AM compté depuis le sommet A , est $\frac{8a}{27} \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8a}{27}$.

Si l'on veut savoir quelles sont les autres paraboles que l'on peut rectifier, on le trouvera en cette manière; l'équation $y^{m+n} = a^m x^n$, qui appartient à ces courbes, donne

$$y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}. \text{ Faisons, pour simplifier, } \frac{m}{m+n} = k,$$

$$\text{ \& } \frac{n}{m+n} = l; \text{ nous aurons } y = a^k x^l; \text{ donc } dy = l a^k x^{l-1} dx,$$

$$\text{ \& } dy^2 = l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2; \text{ donc } \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$\sqrt{dx^2 + l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2} = dx \sqrt{1 + l^2 a^{2k} x^{2l-2}},$$

quantité qui n'est intégrale dans cet état, que lorsque $2l - 2 = 1$. Mais si l'on change le signe de l'exposant de x

sous le radical, on aura $x^{-l+1}dx \sqrt{(x^{-2l+2} + l^2 a^{2k})}$, qui (91) est intégrable, si $-l+1$ augmenté d'une unité & divisé par $-2l+2$, donne un nombre entier positif; c'est-à-dire, si $\frac{-l+2}{-2l+2} = t$, t étant un nombre entier positif. De-là on tire $-l+2 = -2tl + 2t$, & $l = \frac{2t-2}{2t-1}$; or $l = \frac{n}{m+n}$, donc $\frac{n}{m+n} = \frac{2t-2}{2t-1}$, d'où $m = \frac{n(2t-1)}{2t-2} - n$; ainsi les paraboles qui peuvent être rectifiées, sont celles qui sont comprises dans l'équation $y^{\frac{n(2t-1)}{2t-2}} = a^{\frac{n(2t-1)}{2t-2}} - n x^n$, ou (en extrayant la racine n) $y^{\frac{2t-1}{2t-2}} = a^{\frac{2t-1}{2t-2}} - x$.

Application aux Surfaces courbes.

98. Nous nous bornerons aux surfaces des solides de révolution. On appelle ainsi les solides que l'on conçoit engendrés par le mouvement d'une courbe AM (fig. 39), qui tourneroit autour d'une ligne droite AP .

Il faut concevoir que tandis que la courbe AM tourne autour de AP le petit côté Mm décrit une zone, ou portion de cône tronqué, qui est l'élément de la surface, & qui (Géom. 220) est égal au produit de Mm par la circonférence qui auroit pour rayon la perpendiculaire menée du milieu de Mm sur AP , ou (ce qui revient au même, puisque Mm est infiniment petit) par la circonférence qui

auroit pour rayon PM . Or l'arc $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; & si l'on représente par $r : c$ le rapport du rayon à la circonférence d'un cercle, on aura $r : c :: y$ est à la circonférence qui a pour rayon PM , laquelle fera $\frac{cy}{r}$; on a donc $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ pour l'élément de la surface des solides de révolution.

99. Pour appliquer ceci, supposons qu'on demande la surface de la sphère. Le cercle générateur AMB (fig. 40), a pour équation $yy = ax - xx$, en nommant AP , x ; & PM , y . Donc, $y = \sqrt{(ax - xx)}$ & $dy = \frac{\frac{1}{2} adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}}$;

$$\text{donc } dy^2 = \frac{\frac{1}{4} a^2 dx^2 - ax dx^2 + x^2 dx^2}{ax - xx}; \text{ donc } \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \\ = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{\frac{1}{4} a^2 dx^2 - ax dx^2 + x^2 dx^2}{ax - xx}\right)} = \frac{\frac{1}{2} adx}{\sqrt{(ax - xx)}}.$$

Substituant donc dans la formule $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, pour y & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ leurs valeurs, on aura.

$$\frac{c \sqrt{(ax - xx)}}{r} \cdot \frac{\frac{1}{2} adx}{\sqrt{(ax - xx)}}, \text{ qui se réduit à } \frac{\frac{1}{2} ac dx}{r},$$

dont l'intégrale est $\frac{\frac{1}{2} acx}{r} + C$, ou simplement $\frac{\frac{1}{2} acx}{r}$ en

comptant la surface depuis le point A . Or $\frac{\frac{1}{2} acx}{r}$, ou $\frac{\frac{1}{2} ac}{r} \cdot x$ exprime la surface du cylindre qui auroit pour base un grand cercle de la sphère, & x pour hauteur; ce qui s'accorde parfaitement avec ce qui a été démontré (Géom. 222).

100. Si l'on veut avoir la surface du paraboloïde (c'est ainsi qu'on appelle le solide engendré par la révolution de la parabole AM (fig. 39), autour de son axe); on a pour

équation $yy = px$; donc $x = \frac{yy}{p}$, $dx = \frac{2y dy}{p}$, &c
 $dx^2 = \frac{4y^2 dy^2}{pp}$; donc $\sqrt{(dx + dy^2)} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{4y^2 dy^2}{pp}\right)}$
 $= dy \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)}$; donc $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ devient
 ici, $\frac{cy dy}{r} \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)}$, quantité qui est intégrable (90);

& dont l'intégrale est $\frac{\frac{cy dy}{r} \left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3} \cdot 8y dy}$ + C, qui se ré-

duit à $\frac{ppc}{12r} \left(\frac{1 + 4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}} + C$. Or pour que cette quantité
 exprime la surface comptée depuis le sommet A, il faut
 qu'elle soit zéro, quand $y = 0$; mais, dans ce cas, elle
 devient $\frac{ppc}{12r} (1)^{\frac{3}{2}} + C$, ou $\frac{ppc}{12r} + C$; on a donc $\frac{ppc}{12r} +$
 $C = 0$: c'est-à-dire, $C = -\frac{ppc}{12r}$; donc la surface du
 paraboloïde indéfini *AMLA* est $\frac{ppc}{12r} \left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{ppc}{12r}$.

Application à la mesure des Solidités.

101. Pour mesurer la solidité des corps, on peut
 les imaginer composés de tranches infiniment minces
 & parallèles entre elles; ou bien les imaginer com-
 posés d'une infinité de pyramides, dont les sommets
 se réunissent en un même point. Lorsqu'on se les
 représente comme composés de tranches infiniment
 minces, & parallèles entre elles, la différence des
 deux surfaces opposées qui terminent chaque tranche,
 est infiniment petite, & par conséquent on doit

Pomettre dans le calcul, si l'on veut exprimer que cette tranche est infiniment mince. De-là il suit qu'on doit prendre pour expression de la solidité de cette tranche, le produit de l'une de ses deux bases opposées par sa hauteur infiniment petite. Par exemple, si je considère la pyramide $SABC$ (*fig. 41*) comme composée de tranches infiniment minces, telles que $abcdef$; je puis prendre pour mesure de cette tranche, le produit de la surface abc ou de la surface def par l'épaisseur de cette tranche.

De même, si je considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe AM , autour de la droite AP (*fig. 39*), si je le considère comme composé de tranches parallèles entre elles & infiniment minces, je dois prendre, pour mesure de chaque tranche, le produit de la surface du cercle qui a pour rayon PM , par l'épaisseur Pp .

Ce principe posé, voici comment on évaluera la solidité de tout le corps. On considérera chaque tranche comme étant la différentielle du solide, parce qu'en effet la tranche $MmLL$ est $= AmlA - AMLA = d(AMLA)$; & ayant déterminé l'expression algébrique de cette tranche, on l'intégrera.

Par exemple, s'il s'agit de la pyramide $SABC$: supposant que la surface ABC de sa base, est égale à la quantité connue bb , & sa hauteur $ST = h$, on représentera par x

la distante St d'une tranche quelconque; ce qui donnera dx pour l'épaisseur de cette tranche. Quant à la surface abc , on la trouvera (*Géom.* 201) par cette proportion $ST^2 : St^2 :: ABC : abc$; c'est-à-dire, $hh : xx :: bb : abc = \frac{b b x x}{h h}$; ainsi la solidité de la tranche fera $\frac{b b x x dx}{h h}$, dont l'intégrale est $\frac{b b x^3}{3 h h} + C$, ou simplement $\frac{b b x^3}{3 h h}$, si l'on compte la solidité depuis le sommet S . Cette quantité qui exprime la solidité de la portion pyramidale quelconque $Sabc$, est la même chose que $\frac{b b x x}{h h} \times \frac{x}{3}$, qui n'est autre chose que $abc \times \frac{St}{3}$; ce qui s'accorde avec ce que nous avons démontré (*Géom.* 240).

102. Quant aux solides de révolution, on peut avoir d'une manière générale, l'expression de la tranche élémentaire, ou différentielle. En effet, supposant que $r : c$ marque le rapport du rayon à la circonférence, on aura la circonférence qui a pour rayon PM (*fig.* 39) ou y , en faisant cette proportion $r : c :: y : \frac{c y}{r}$; si l'on multiplie cette valeur $\frac{c y}{r}$ de la circonférence qui a pour rayon PM , par $\frac{1}{2}y$ moitié du rayon, on a $\frac{c y^2}{2 r}$ pour la surface, laquelle étant multipliée par l'épaisseur Pp ou dx , donne $\frac{c y^2 dx}{2 r}$ pour l'expression de l'élément de la solidité de tout solide de révolution. Pour en faire usage dans chaque cas particulier, il n'y aura autre chose à faire, que de mettre, au lieu de y , sa valeur en x tirée de l'équation de la courbe génératrice AM , & intégrer.

103. Prenons, pour exemple, le sphéroïde engendré par la révolution de l'ellipse autour de son grand axe (*fig. 42*). L'équation de l'ellipse est $yy = \frac{bb}{aa} (ax - xx)$, en nommant AP, x ; PM, y , & les axes AB & Dd, a & b . La formule $\frac{cy^2dx}{2r}$, devient donc $\frac{cbb}{2raa} dx (ax - xx)$, ou $\frac{cbb}{2raa} \cdot (ax dx - x^2 dx)$, dont l'intégrale est $\frac{cbb}{2raa} \times \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C$, ou simplement $\frac{cbb}{2raa} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$ si l'on compte la solidité depuis le point A .

Pour avoir le sphéroïde entier, on supposera $x = AB = a$, & l'on aura $\frac{cbb}{2raa} \times \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right)$ qui se réduit à $\frac{cabb}{12r}$, qui est la même chose que $\frac{cbb}{4r} \times \frac{1}{3}a$, ou que $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$; or $\frac{cbb}{8r}$ exprime la surface du cercle qui a b ou Dd pour diamètre; & $\frac{cbb}{8r} \times a$ exprimerait, par conséquent, la solidité du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde; donc puisque la solidité de l'ellipsoïde est ici $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$, il faut en conclure que la solidité de l'ellipsoïde est les $\frac{2}{3}$ de celle du cylindre circonscrit. Et comme la sphère n'est autre chose qu'une ellipsoïde dont les deux axes sont égaux, la sphère est donc aussi les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit, ce qui s'accorde avec ce que nous avons démontré (*Géom. 246*).

104. Si l'on vouloit avoir la solidité comptée depuis un point déterminé K , tel que $AK = e$; alors on prendroit l'intégrale générale $\frac{cbb}{2raa} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C$; & puisqu'on veut que la solidité commence au point K , il faut que cette intégrale devienne 0 en ce même point, c'est-à-dire, lorsque

$x = e$; or, dans ce cas, elle devient $\frac{c b b}{2 r a a} \left(\frac{a e^2}{2} - \frac{e^3}{3} \right) + C$; donc $\frac{c b b}{2 r a a} \left(\frac{a e^2}{2} - \frac{e^3}{3} \right) + C = 0$, & par conséquent $C = -\frac{c b b}{2 r a a} \left(\frac{a e^2}{2} - \frac{e^3}{3} \right)$; ainsi la solidité, comptée depuis le point K , a pour expression $\frac{c b b}{2 r a a} \left(\frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) - \frac{c b b}{2 r a a} \cdot \left(\frac{a e^2}{2} - \frac{e^3}{3} \right)$. C'est-là l'expression d'une tranche de sphéroïde elliptique comprise entre deux plans parallèles, auxquels l'axe est perpendiculaire, & dont la distance est $x - e$.

On peut, par cette formule, calculer la solidité, & par conséquent la pesanteur des mâts & des vergues des vaisseaux, parce que, selon ce que nous avons dit (*Alg.* 305), ce sont des portions de sphéroïde elliptique. Cette même formule peut servir aussi à mesurer la capacité des tonneaux, dont la surface extérieure pourroit être regardée comme portion d'un pareil sphéroïde.

105. Prenons, pour second exemple, la paraboloïde (*fig.* 39). L'équation de la parabole est $yy = px$; ainsi la formule $\frac{c y^2 dx}{2 r}$ devient $\frac{c p x dx}{2 r}$, dont l'intégrale est $\frac{c p x^2}{4 r} + C$, ou $\frac{c p x}{2 r} \times \frac{x}{2} + C$, ou (en mettant pour px , sa valeur yy) $\frac{c y y}{2 r} \times \frac{x}{2} + C$. Si l'on veut le solide, à compter du point A ; alors, comme ce solide est zéro, quand x est zéro, la constante C doit être zéro, & la solidité se réduit à $\frac{c y y}{2 r} \times \frac{x}{2}$; or $\frac{c y y}{2 r}$ exprime la surface du cercle qui auroit PM pour rayon, ou la base du paraboloïde $AMLA$; donc le paraboloïde est la moitié du produit de sa base, par sa hauteur x ; donc il est la moitié du cylindre de même base & de même hauteur.

Si l'on veut compter la solidité depuis un point K connu , & tel que $AK = e$; alors la solidité devant être zéro au point K , c'est-à-dire , quand $x = e$, l'intégrale générale doit être zéro dans ce même cas ; c'est-à-dire , que $\frac{c p x^2}{4 r} + C$, devenant $\frac{c p e^2}{4 r} + C$, doit être 0 ; donc $\frac{c p e^2}{4 r} + C = 0$; & par conséquent $C = -\frac{c p e^2}{4 r}$; donc la solidité d'une tranche de paraboloïde , comprise entre deux plans parallèles dont les distances au sommet sont x & e , est $\frac{c p x^2}{4 r} - \frac{c p e^2}{4 r}$. Ceci peut servir à roiser l'excavation des mines.

106. On peut prendre encore , pour exemple , l'hyperboloïde , ou le solide engendré par la révolution de l'hyperbole autour de l'un de ses axes. On peut prendre aussi l'ellipsoïde engendré par la révolution de l'ellipse autour de son petit axe , & que l'on appelle *Ellipsoïde applati* ; on nomme au contraire *Ellipsoïde allongé* celui qui est engendré pour la révolution autour du grand axe. On trouvera de même , que l'ellipsoïde applati est les $\frac{2}{3}$ du cylindre qui lui feroit circonscrit ; c'est-à-dire , que a & b étant le grand & le petit axe de l'ellipse génératrice , le sphéroïde allongé a pour solidité $\frac{c a b b}{12 r}$; & le sphéroïde applati , a pour solidité $\frac{c a a b}{12 r}$; ainsi le sphéroïde allongé , est au sphéroïde applati :: $\frac{c a b b}{12 r} : \frac{c a a b}{12 r} :: b : a$, comme le petit axe est au grand axe.

En voilà assez pour les solides de révolution.

Mais pour accoutumer les Commençans à étendre l'usage de ces méthodes, nous allons les appliquer encore à deux exemples.

107. Dans le premier, il s'agit, de trouver la solidité d'un onglet cylindrique formé en coupant un cylindre par un plan oblique à sa base, & que (pour plus de simplicité) nous supposons passer par le centre : c'est le solide $ADBE$ qu'on voit représenté (*fig. 43*).

Si l'on conçoit ce solide coupé par des plans parallèles, infiniment près, & perpendiculaires à la base AEB (*fig. 44*), les sections seront des triangles semblables dont les surfaces seront, par conséquent, comme les quarrés de leurs côtés homologues. Ainsi nommant r le rayon CE de la base, h la hauteur DE , & y la base PM du triangle PMN , on aura $CED : PMN :: rr : yy$; or $CED = \frac{rh}{2}$; donc $PMN = \frac{rhyy}{2rr} = \frac{hyy}{2r}$; donc nommant AP , x , ce qui donne dx pour l'épaisseur Pp de la tranche comprise entre deux plans voisins, on aura $\frac{hyy dx}{2r}$ pour cette tranche. Or y est l'ordonnée du cercle qui sert de base; & l'on a par conséquent $yy = 2rx - xx$. La tranche élémentaire devient donc $\frac{h dx \cdot (2rx - xx)}{2r}$, ou $\frac{h}{2r} \cdot (2rx dx - xx dx)$, dont l'intégrale, à compter du point A , est $\frac{h}{2r} \left(rx^2 - \frac{x^3}{3} \right)$. Donc

pour avoir tout le solide, il n'y a qu'à supposer $x = 2r$, ce qui donne $\frac{h}{2r} \times \left(4r^3 - \frac{8r^3}{3} \right)$, ou $\frac{2}{3} hr^2$, ou $\frac{hr}{2} \times \frac{4}{3} r$, ou $CED \times \frac{4}{3} AC$, ou enfin $CED \times \frac{2}{3} AB$; c'est-à-dire, les deux tiers du prisme qui auroit le triangle CED pour base, & le diamètre AB pour hauteur. Ceci peut servir dans un cas du Toisé des fortifications.

108. Pour second exemple, nous chercherons la solidité d'une tranche d'ellipsoïde allongé, comprise entre deux plans parallèles entre eux & au grand axe.

Avant de procéder à cette recherche, il faut démontrer que les coupes de l'ellipsoïde faites parallèlement au grand axe, sont des ellipses semblables à l'ellipse génératrice du solide, c'est-à-dire, dont les axes ont le même rapport entre eux que ceux de cette ellipse.

Pour cet effet, concevons l'ellipsoïde coupé par un plan, que (pour fixer les idées) nous supposons vertical, & passant par le grand axe AB (fig. 45); la section sera l'ellipse $ADBE$ égale à l'ellipse génératrice. Concevons aussi l'ellipsoïde coupé par trois autres plans, dont deux verticaux & le troisième horizontal. Que DE petit axe de l'ellipse & sa parallèle MN soient les sections des deux premiers avec le plan $ADBE$, & ST celle du troisième avec le

même plan $ADBE$. Cela posé, je dis que la coupe de l'ellipsoïde par le plan représenté par ST , est une ellipse semblable à $ADBE$.

Concevons qu'aux points O & R on ait élevé des perpendiculaires au plan $ADBE$, & qui rencontrent la surface de l'ellipsoïde. Ces perpendiculaires seront, en même temps, ordonnées de la coupe faite par ST , & des sections ou coupes circulaires faites par MN & DE . Or par cette dernière raison, on doit avoir (en nommant z la perpendiculaire élevée au point R , & t la perpendiculaire élevée au point O), on doit avoir $zz = DR \times RE$, & $tt = MO \times ON$. Mais en nommant $CD = \frac{1}{2}b$, $PM = y$, $CA = \frac{1}{2}a$, & $CR = OP = u$, on a $DR = \frac{1}{2}b + u$, $RE = \frac{1}{2}b - u$, $MO = y + u$ & $ON = y - u$, en sorte que $DR \times RE = \frac{1}{4}bb - uu$ & $MO \times ON = yy - uu$. Donc $zz = \frac{1}{4}bb - uu$, & $tt = yy - uu$. Mais par la nature de l'ellipse (*Alg.* 307) on a $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{4}aa - xx)$ en nommant CP, x . Et nommant k l'ordonnée SR au petit axe, on a (*Alg.* 304) $kk = \frac{aa}{bb} (\frac{1}{4}bb - uu)$, d'où l'on tire $uu = \frac{1}{4}bb - \frac{bbkk}{aa}$; substituant ces valeurs de uu & de yy , dans celles de zz & de tt , on a $zz = \frac{bbkk}{aa}$, & $tt = \frac{bbkk}{aa} - \frac{bbxx}{aa}$; d'où il est évident que $zz : tt :: \frac{bbkk}{aa} : \frac{bbkk}{aa} - \frac{bbxx}{aa} :: kk : kk - xx :: (SR)^2$ ou $SR \times RT : SO \times OT$;

c'est-à-dire, le quarré de l'ordonnée z qui répond au point R , est au quarré de celle t , qui répond au point O , comme le produit des deux abscisses qui répondent à la première, est au produit des abscisses qui répondent à la seconde; la coupe faite par ST , est donc une ellipse.

D'ailleurs l'équation $zz = \frac{bbkk}{aa}$, ou $z = \frac{bk}{a}$, donne $z : k :: b : a$; or z ou l'ordonnée qui répond au point R est la plus grande demi-largeur, ou le demi-petit axe de cette ellipse, & k ou SR , en est la plus grande demi-longueur, ou le demi-grand axe; les deux axes de cette ellipse, sont donc en même rapport que ceux de l'ellipse génératrice; & puisque rien ne détermine, dans tout ce raisonnement, la grandeur de la distance CR à laquelle on suppose cette coupe faite, la même chose a donc lieu pour toute autre coupe parallèle à AB .

Cela posé, si l'on veut avoir la solidité d'une tranche quelconque de l'ellipsoïde, comprise entre deux plans parallèles représentés par AB & ST , on représentera par S la surface de l'ellipse génératrice; & puisque l'ellipse dont ST est le grand axe, est semblable à celle-là, on aura la surface de celle-ci, par cette proportion $\frac{1}{4}aa : kk :: S : \frac{Skk}{\frac{1}{4}aa}$; multipliant cette surface par l'épaisseur infiniment petite Rr , ou du ,

de la tranche élémentaire, on aura $\frac{S k k d u}{\frac{1}{4} a a}$, pour la valeur de cette tranche; or selon ce que nous venons de dire ci-dessus, on a $k k = \frac{a a}{b b} \times (\frac{1}{4} b b - u u)$; donc la tranche élémentaire fera $\frac{S d u (\frac{1}{4} b b - u u)}{\frac{1}{4} b b}$ ou $\frac{S}{\frac{1}{4} b b} \cdot (\frac{1}{4} b b d u - u u d u)$, dont l'intégrale est $\frac{S}{\frac{1}{4} b b} (\frac{1}{4} b b u - \frac{1}{3} u^3)$, si l'on veut compter depuis le centre C . Mais si l'on veut compter depuis un autre point K , l'intégrale fera $\frac{S}{\frac{1}{4} b b} (\frac{1}{4} b b u - \frac{1}{3} u^3) + C$, C étant une constante convenable. Pour la déterminer, on nommera CK, e ; alors il faut que l'intégrale soit zéro au point K où $u = e$; on aura donc $\frac{S}{\frac{1}{4} b b} \cdot (\frac{1}{4} b b e - \frac{1}{3} e^3) + C = 0$, & par conséquent $C = -\frac{S}{\frac{1}{4} b b} (\frac{1}{4} b b e - \frac{1}{3} e^3)$; donc toute tranche d'ellipsoïde allongé, comprise entre deux plans parallèles au grand axe, a pour expression $\frac{S}{\frac{1}{4} b b} (\frac{1}{4} b b u - \frac{1}{3} u^3) - \frac{S}{\frac{1}{4} b b} (\frac{1}{4} b b e - \frac{1}{3} e^3)$, ou simplement $\frac{S}{\frac{1}{4} b b} \times (\frac{1}{4} b b u - \frac{1}{4} b b e - \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{3} e^3)$. Or $\frac{1}{4} b b u - \frac{1}{4} b b e$, est la même chose que $\frac{1}{4} b b (u - e)$; pareillement $\frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3} u^3$ est la même chose que $\frac{e - u}{3} (e e + e u + u u)$. D'ailleurs $u - e$ est la distance des deux plans parallèles, ou la hauteur de la tranche

qu'ils comprennent ; donc si on fait $u - e = h$, en appelant h cette hauteur, & qu'on substitue pour e sa valeur $u - h$ tirée de cette équation, on aura (après réduction faite) $\frac{S}{\frac{1}{4}bb} \left(\frac{1}{4}bbh - huu + h^2u - \frac{h^3}{3} \right)$, ou $\frac{Sh}{\frac{1}{4}bb} \left(\frac{1}{4}bb - uu \right) + \frac{Sh^2}{\frac{1}{4}bb} \left(u - \frac{h}{3} \right)$; or nous avons eu, ci-dessus, $kk = \frac{aa}{bb} \left(\frac{1}{4}bb - uu \right)$, & par conséquent $\frac{1}{4}bb - uu = \frac{bbkk}{aa}$. La valeur de la tranche solide se change donc en $\frac{Shkk}{\frac{1}{4}aa} + \frac{Sh^2}{\frac{1}{4}bb} \left(u - \frac{h}{3} \right)$. Mais nous avons vu que $\frac{Skk}{\frac{1}{4}aa}$ exprime la surface de la coupe faite par ST , ou de la coupe inférieure ; donc en nommant s cette surface, on aura $sh + \frac{Sh^2}{\frac{1}{4}bb} \left(u - \frac{h}{3} \right)$; enfin si on nomme s' la surface de la coupe faite par LK & l sa demi-largeur, ou son demi-petit axe, on aura, à cause que toutes les coupes sont semblables, $\frac{1}{4}bb : ll :: S : s'$; donc $S = \frac{1}{4} \frac{bb s'}{l}$; ce qui donnera pour dernière expression réduite, $sh + \frac{s' h^2}{ll} \times \left(u - \frac{h}{3} \right)$. C'est-à-dire, qu'il faut 1°. multiplier la surface de la plus petite coupe, par la hauteur de la tranche ; 2°. multiplier celle de la plus grande coupe par le rapport $\frac{h^2}{l^2}$ du carré de la hauteur de la tranche au carré de la demi-largeur de la coupe supérieure, & par la distance

du centre jusqu'à la coupe supérieure, moins le tiers de la hauteur de la tranche.

Cette règle peut être appliquée utilement à la mesure de la solidité de la partie de la carène que la charge fait plonger dans les vaisseaux, lorsque la figure de cette partie peut être comparée à une portion d'ellipsoïde. s représentera la coupe faite à fleur d'eau, pour le vaisseau hors de charge; s' la coupe lorsqu'il est en charge; h la distance des deux coupes; l la plus grande largeur de s' , & enfin u la distance de s jusqu'à la plus grande coupe horizontale du vaisseau.

Quant à la manière de mesurer s & s' , on observera que l'une de ces surfaces se détermine par l'autre, puisqu'appartenant à des ellipses semblables, elles doivent être entre elles comme les quarrés de leurs grands axes ou de leurs petits axes. Il ne s'agit donc que de savoir comment on peut déterminer l'une des deux. Or, nous verrons dans peu, que la surface d'une ellipse, est à celle du cercle qui auroit pour diamètre le grand axe de cette ellipse, comme le petit axe est au grand axe; ainsi comme on fait évaluer la surface du cercle (du moins aussi près qu'on le juge à propos), on déterminera toujours facilement celle d'une ellipse dont les axes seront connus.

*De l'intégration des quantités qui renferment
des Sinus & Cofinus.*

109. Nous avons vu (22) que $d(\sin. z) = dz \cos. z$,
& que $d(\cos. z) = -dz \sin. z$; donc réciproque-
ment, l'intégrale de $dz \cos. z$ fera $\sin. z$, ou plus
généralement $\sin. z + C$, qui a la même différentielle.
De même l'intégrale de $-dz \sin. z$ fera $\cos. z + C$.

Si l'on avoit $dz \cos. 3z$, on l'écriroit ainfi $\frac{3 dz \cos. 3z}{3}$,
& alors l'intégrale feroit $\frac{\sin. 3z}{3} + C$. De même, l'intégrale
de $dz \sin. 3z$, se trouveroit en écrivant ainfi $\frac{-3 dz \sin. 3z}{-3}$;
& alors l'intégrale est $\frac{\cos. 3z}{-3} + C$.

En général, $\int dz \sin. mz$ (m étant un nombre constant),
se change en $\frac{\int -m dz \sin. mz}{-m}$, & devient $\frac{-\cos. mz}{m} + C$.

Si l'on avoit $(\sin. z)^n dz \cos. z$, on remarqueroit que cette
quantité est la même chose que $(\sin. z)^n d(\sin. z)$; or en
regardant $\sin. z$ comme une simple variable, on intègre par
la règle fondamentale, & l'on a $\frac{(\sin. z)^{n+1}}{n+1} + C$.

Si la différentielle proposée est $(\sin. mz)^n dz \cos. mz$, on écrira
 $\frac{(\sin. mz)^n m dz \cos. mz}{m}$ qui revient à $\frac{(\sin. mz)^n d(\sin. mz)}{m}$
dont l'intégrale est $\frac{(\sin. mz)^{n+1}}{m(n+1)}$.

Pareillement, pour avoir l'intégrale de $(\cos. mz)^n dz \sin. mz$,

on écrira $\frac{(\cos. m\zeta)^n \cdot -m d\zeta \sin. m\zeta}{-m}$, qui a pour intégrale $\frac{(\cos. m\zeta)^{n+1}}{-m(n+1)} + C$.

Si l'on avoit à intégrer $d\zeta \sin. p\zeta \cos. q\zeta$; alors selon ce qui a été enseigné (*Alg.* 418) on changeroit $\sin. p\zeta \cos. q\zeta$ en $\frac{1}{2}\sin. (p\zeta + q\zeta) + \frac{1}{2}\sin. (p\zeta - q\zeta)$, ou $\frac{1}{2}\sin. (p+q)\zeta + \frac{1}{2}\sin. (p-q)\zeta$; ainsi l'on auroit à intégrer $\frac{1}{2}d\zeta \sin. (p+q)\zeta + \frac{1}{2}d\zeta \sin. (p-q)\zeta$, qui, étant écrit ainsi... $\frac{1}{2} \frac{(p+q)d\zeta \sin. (p+q)\zeta}{p+q} + \frac{1}{2} \frac{(p-q)d\zeta \sin. (p-q)\zeta}{(p-q)}$, a évidemment pour intégrale $\frac{-\frac{1}{2}\cos. (p+q)\zeta}{p+q} - \frac{\frac{1}{2}\cos. (p-q)\zeta}{p-q} + C$.

On intégrera de même $d\zeta \sin. p\zeta \cos. q\zeta \sin. r\zeta$, &c. en convertissant ces produits en sinus ou cosinus de la somme & de la différence des arcs $p\zeta$, $q\zeta$, $r\zeta$, &c. (*Alg.* 418).

Si l'on avoit $d\zeta (\sin. \zeta)^3$; on le changeroit en $d\zeta \sin. \zeta (\sin. \zeta)^2$, or $(\sin. \zeta)^2$ ou $\sin. \zeta \times \sin. \zeta$ est (*Alg.* 418) $= \frac{1}{2}\cos. (\zeta - \zeta) - \frac{1}{2}\cos. (\zeta + \zeta) = \frac{1}{2}\cos. 0 - \frac{1}{2}\cos. 2\zeta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos. 2\zeta$, parce que $\cos. 0 = 1$; donc $\sin. \zeta (\sin. \zeta)^2 = \frac{1}{2}\sin. \zeta - \frac{1}{2}\sin. \zeta \times \cos. 2\zeta$. Donc $d\zeta (\sin. \zeta)^3 = \frac{1}{2}d\zeta \sin. \zeta - \frac{1}{2}d\zeta \sin. \zeta \cos. 2\zeta$; on réduira donc $\sin. \zeta \cos. 2\zeta$, ainsi qu'on vient de le faire pour $\sin. p\zeta \cos. q\zeta$, & l'intégration sera facile. On voit donc comment on intégreroit $d\zeta (\sin. \zeta)^n$, n étant un nombre entier positif. On s'y prendroit d'une manière semblable pour $d\zeta (\cos. \zeta)^n$. Donc on peut, par les mêmes principes que nous venons d'exposer, intégrer les quantités de cette forme $d\zeta (\sin. p\zeta)^m (\cos. q\zeta)^n (\sin. r\zeta)^s$, &c. m, n, s , étant des nombres entiers positifs.

Enfin, ces principes, ce qui a été enseigné (*Alg.* 418), &

ce que nous avons dit , ci-dessus , sur l'intégration des quantités , mettent en état d'intégrer les différentielles affectées de sinus & de cosinus , lorsqu'elles ont une intégrale algébrique ; & lorsqu'il y entre des tangentes , on les ramène aux différentielles de sinus & cosinus , en observant que $\text{tang. } \zeta = \frac{\sin. \zeta}{\cos. \zeta}$.

*De la manière d'intégrer par approximation ,
& quelques usages de cette méthode.*

110. Ceci ne peut regarder les différentielles monomes : nous avons vu qu'elles s'intégroient toujours facilement. C'est donc pour les différentielles complexes qui échappent aux cas que nous avons examinés plus haut.

L'art d'intégrer par approximation , consiste à convertir la quantité proposée , en une suite de monomes dont la valeur aille continuellement en diminuant ; chaque terme s'intègre alors aisément , & il suffit d'en prendre un certain nombre pour avoir une valeur suffisante de l'intégrale.

La règle que nous avons donnée (*Alg.* 151) pour élever une quantité à une puissance proposée , & qui s'applique également aux polinomes , est le moyen que nous emploierons pour intégrer ainsi par approximation. En voici des exemples.

111. Proposons-nous de trouver la longueur d'un arc de cercle *AM* (*fig.* 40) , par le moyen de son sinus versé *AP*,

Supposant l'arc Mm infiniment petit, si l'on mène Mr parallèle à AP , & le rayon CM ; les triangles semblables CPM , Mrm , donneront $PM : CM :: Mr : Mm$. Or, nommant AP , x , le diamètre AB , a , ou 1 (pour plus de simplicité); on aura $Mr = dx$, $CM = \frac{1}{2}$, & $PM = \sqrt{(x - xx)}$. Donc $\sqrt{(x - xx)} : \frac{1}{2} :: dx : Mm$; donc $Mm = \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx)}}$, & par conséquent $AM = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(x - xx)}}$. Cette quantité ne peut être intégrée par les règles que nous avons données ci-devant; c'est pourquoi je la change en $\int \frac{\frac{1}{2} dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(1 - x)}}$ (*Algèbre* 112), puis en $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1 - x)^{-\frac{1}{2}}$ (*Alg.* 141). Je réduis $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$, en série (*Alg.* 151); & je trouve, toute réduction faite, $(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \&c.$; donc $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1 - x)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx (1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \&c.) = \int (\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{16} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{5}{32} x^{\frac{5}{2}} dx + \&c.) = \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{16} x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{5}{32} x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \&c. = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40} x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112} x^{\frac{7}{2}} + \&c.$, quantité à laquelle il n'y a point de constante à ajouter, parce que lorsque $x = 0$, elle devient zéro, ainsi que cela doit être, puisqu'alors l'arc AM qu'elle exprime, est zéro.

On peut, à cause du multiplicateur commun $x^{\frac{1}{2}}$, donner à la série qui exprime l'arc AM , cette dernière forme, $x^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \&c.)$. Remarquons, maintenant, que le sinus verse x étant toujours plus petit que le diamètre 1 (excepté lorsqu'il s'agit de la demi-circonférence), x est une fraction; que par conséquent les

valeurs des termes de la série décroîtront d'autant plus, que le sinus verse de l'arc en question sera plus petit. Ainsi, si l'on vouloit, par exemple, la longueur de l'arc dont le sinus verse est la centième partie du diamètre, on aurait $x = \frac{1}{100}$, $= 0,01$, & par conséquent $x^{\frac{1}{2}} = 0,1$; on auroit donc pour la valeur de cet arc $0,1 \left(1 + \frac{0,01}{6} + \frac{3(0,01)^2}{40} + \frac{5}{112} \cdot (0,01)^3 \right)$, & comme le terme suivant de cette série feroit au moins cent fois plus petit que le dernier de ceux-ci, puisque chacun est plus de cent fois plus petit que celui qui le précède, en examinant quelle est la valeur du terme $\frac{5}{112} (0,01)^3$, nous pourrons, en prenant le centième de cette valeur, juger du degré d'exactitude auquel nous aurons l'arc en nous en tenant à ces quatre premiers termes. Or $\frac{5}{112} (0,01)^3$, revient à $\frac{5}{112} \cdot (0,000001) = \frac{0,000005}{112} = 0,0000000446$, dont la centième partie est $0,00000000446$; donc nous pouvons, en toute sûreté, évaluer chaque terme de notre série jusqu'à 10 décimales, sans craindre que la valeur de l'arc qui en résultera, soit fautive d'une unité dans la neuvième. Ainsi nous aurons, $\frac{5}{112} (0,01)^3 = 0,0000000446$; $\frac{3}{40} (0,01)^2 = 0,0000075000$; $\frac{0,01}{6} = 0,0016666666$; donc la totalité de la série fera $0,1 (1,0016742112)$, ou enfin $0,100167421$, en se bornant à 9 décimales; & l'on pourroit même en toute sûreté admettre la dixième.

Telle est la valeur de l'arc dont le sinus verse est la centième partie du rayon. Donc si l'on savoit combien de fois le nombre de degrés de cet arc est contenu dans 360° , en multipliant cette longueur par ce nombre de fois, on auroit la longueur approchée de la circonférence. Mais c'est ce que l'on ne fait pas.

Comme nous savons (*Géom.* 271) que le sinus de 30° est la moitié du rayon, & que connoissant le sinus d'un

arc, on peut aisément avoir son sinus verse (*Géom.* 270), on pourroit calculer le sinus verse de 30° , le substituer pour x dans la série ci-dessus, & alors multipliant le résultat par 12, qui est le nombre de fois que 30° sont dans 360° , on auroit la longueur approchée de la circonférence. Mais comme la série seroit peu convergente, en sorte qu'il faudroit en calculer un assez grand nombre de termes, pour avoir une valeur un peu approchée de la circonférence, nous allons enseigner un autre moyen qui nous servira de second exemple de la méthode d'approximation.

Menons la tangente AN (*fig.* 46), la sécante CMN & la sécante infiniment voisine Cmn ; du centre C & du rayon CN , décrivons l'arc infiniment petit Nr , que l'on peut regarder comme une perpendiculaire sur Cn . Le petit triangle rectangle Nrn sera semblable au triangle rectangle CAn , parce qu'outre l'angle droit, ils ont un angle commun en n : il sera donc aussi semblable au triangle CAN qui diffère infiniment peu de CAn ; on aura donc $CN : CA :: Nn : Nr$, d'où $Nr = \frac{CA \times Nn}{CN}$; or les secteurs semblables CNr , CMm , donnent $CN : CM$ ou $CA :: Nr$ ou $\frac{CA \times Nn}{CN} : Mm$; donc $Mm = \frac{CA^2 \times Nn}{CN^2}$. Nommons donc AN , x ; le rayon CA , a ; nous aurons $Nn = dx$; & $CN = \sqrt{(aa + xx)}$; donc la valeur de Mm deviendra $\frac{a a d x}{a a + x x}$; c'est-à-dire, que $Mm = \frac{a a d x}{a a + x x}$; donc $\int Mm$ ou $AM = \int \frac{a a d x}{a a + x x}$. Cette quantité ne peut pas être intégrée exactement. Pour l'intégrer par approximation, il faut la mettre sous cette forme $\int a a d x (a a + x x)^{-1}$; alors ayant trouvé (*Alg.* 151) que $(a a + x x)^{-1} = a^{-2} (1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \&c.)$, on

aura

$$\begin{aligned}
& \text{aura } faadx (aa + xx)^{-1} \\
& = \int dx \left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \&c. \right) \\
& = \int \left(dx - \frac{x^2 dx}{a^2} + \frac{x^4 dx}{a^4} - \frac{x^6 dx}{a^6} + \frac{x^8 dx}{a^8} - \&c. \right) \\
& = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} - \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \&c. \\
& = x \left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} - \frac{x^6}{7a^6} + \frac{x^8}{9a^8} - \&c. \right).
\end{aligned}$$

Il reste donc à savoir si nous connoissons quelque arc qui étant contenu un nombre connu de fois dans la circonférence, ait une tangente connue. Or l'arc de 45° est dans ce cas, il est 8 fois dans la circonférence, & sa tangente est égale au rayon (*Géom.* 272); donc supposant $x = a$, nous aurons pour la longueur de l'arc de 45° , la valeur de cette série . . . $a \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c. \right)$. Mais comme les termes de cette série décroissent encore fort lentement, il faut voir si nous ne pourrions pas décomposer l'arc de 45° en deux autres arcs dont les tangentes fussent connues. Peu importe que le nombre de degrés de ces arcs soit connus; pourvu qu'ils fassent 45° , quand nous aurons calculé leurs longueurs par le moyen de leurs tangentes, en ajoutant ces longueurs nous aurons celle de l'arc de 45° . Comme ces arcs seront plus petits que 45° , leurs tangentes seront plus petites que le rayon, & par conséquent la série sera plus convergente, & plus facile à calculer.

Or ce que nous avons dit (*Alg.* 416), nous fournit le moyen de trouver deux pareils arcs. En effet, nous avons vu que a & b étant deux arcs quelconques, on avoit $\text{tang. } (a + b) = \frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}$, en supposant le rayon $= 1$. Donc si nous supposons $a + b = 45^\circ$, auquel cas $\text{tang. } (a + b) = 1$, nous aurons

$\frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b} = 1$, équation d'où, par les règles ordinaires, on tire $\text{tang. } b = \frac{1 - \text{tang. } a}{1 + \text{tang. } a}$. Prenons donc $\text{tang. } a = \frac{1}{2}$; alors nous aurons $\text{tang. } b = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Nous n'avons donc qu'à calculer, par le moyen de la série ci-dessus, la longueur de l'arc dont la tangente x est $\frac{a}{2}$ ou la moitié du rayon; & la longueur de l'arc dont la tangente x est $\frac{a}{3}$; ces deux longueurs réunies formeront celle de l'arc de 45° . Or en mettant pour x , $\frac{a}{2}$, & ensuite $\frac{a}{3}$, on a

$$\frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^4} - \frac{1}{7 \cdot 2^6} + \frac{1}{9 \cdot 2^8} - \frac{1}{11 \cdot 2^{10}} + \frac{1}{13 \cdot 2^{12}} \&c. \right)$$

$$\& \frac{a}{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} - \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8} - \frac{1}{11 \cdot 3^{10}} + \frac{1}{13 \cdot 3^{12}} \&c. \right).$$

Si l'on veut avoir les valeurs de chacun de ces arcs, exprimées exactement jusqu'à la neuvième décimale, il faut calculer les 15 premiers termes de la première, & les 10 premiers termes seulement de la seconde. Or ce calcul est fort aisé à faire, en observant que dans la première, on peut calculer les termes consécutifs, en formant d'abord une série, dont chaque terme soit égal au précédent multiplié par $\frac{1}{2^2}$, c'est-à-dire, soit le $\frac{1}{4}$ du précédent : on multiplie ensuite cette série terme à terme, par la série $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \&c.$ enfin réunissant les termes de numéro pair entre eux, & ceux de numéro impair, aussi entre eux, on retranchera la somme des derniers, de la somme des premiers, & on multipliera le reste par $\frac{a}{2}$. Pareillement le calcul de la seconde, se réduit à former une série, dont chaque terme soit formé du précédent

multiplié par $\frac{1}{3^2}$ ou par $\frac{1}{9}$, c'est-à-dire, soit la neuvième partie du précédent; on multiplie ensuite cette série, terme à terme, par la série $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \dots$; & on opère ensuite comme pour la première, excepté qu'on multipliera le résultat par $\frac{a}{3}$ au lieu de $\frac{a}{2}$. Si l'on exécute cette opération en portant l'approximation jusqu'à 10 décimales, on aura pour la première série $\frac{a}{2} (0,9272952180)$, ou $a (0,4636476090)$; & pour la seconde, $\frac{a}{3} (0,9652516632)$, ou $a (0,3217505544)$; donc l'arc de 45° , qui est la somme de ces deux-là, fera $a (0,7853981634)$. Prenant donc le quadruple, pour avoir la demi-circonférence, on aura $a (3,1415926536)$; donc le rayon est à la demi-circonférence (ou le diamètre est à la circonférence), :: $a : a (3,1415926536) :: 1 : 3,1415926536$, rapport qui ne diffère pas d'une demi-unité décimale du dixième ordre, de celui que nous avons donné (*Géom.* 152), & que l'on pourroit, très-facilement, trouver encore avec une beaucoup plus grande précision.

112. Pour troisième exemple d'approximation, nous nous proposerons de trouver le logarithme d'un nombre quelconque. Mais, avant tout, il faut se rappeler ce que nous avons déjà dit ailleurs (27); savoir, que les logarithmes dont il s'agit ici, ne sont pas ceux qu'on trouve dans les tables ordinaires. Mais ceux-là étant calculés, il est aisé d'en conclure les derniers, comme nous le verrons immédiatement après avoir enseigné à calculer les premiers.

J'imagine le nombre proposé, décomposé en deux parties, & représenté par $a + x$; a étant la plus grande partie. Selon ce que nous avons dit (27), on aura $d \log.(a + x) = \frac{dx}{a + x}$, quantité qui ne peut être intégrée algébriquement. Il faut donc la réduire en série, & pour cet effet, la mettre sous cette forme... $dx (a + x)^{-1}$. Or (*Alg.* 151) on a $(a + x)^{-1} = a^{-1} (1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3}, \&c.) = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4}$; donc, $dl(a + x) = dx (a + x)^{-1} = \left(\frac{dx}{a} - \frac{x dx}{a^2} + \frac{x^2 dx}{a^3} - \frac{x^3 dx}{a^4} \&c. \right)$; donc, en intégrant, on a $l(a + x) = \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c. \right) + C$. Pour déterminer la constante C , je remarque que cette équation devant avoir toujours lieu, quel que soit x , doit aussi avoir lieu lorsque $x = 0$; or, dans ce dernier cas, elle se réduit à $la = C$; donc $C = la$; donc $l(a + x) = la + \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4}, \&c. \right)$. Connoissant donc le logarithme d'un seul nombre, on peut, par cette série, calculer le logarithme de tout autre nombre. Par exemple, si l'on suppose $a = 10$, & $a + x = 11$; on aura $x = 1$, & par conséquent $\frac{x}{a} = \frac{1}{10}$, d'où l'on trouvera $l11 = l10 + \left(0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} + \frac{(0,1)^3}{3} \&c. \right)$ qui fait connoître ce qu'on doit ajouter au logarithme de 10, pour avoir celui de 11.

Mais comme la série générale que nous venons de trouver, n'est souvent pas assez convergente, voici une autre manière de s'y prendre. Proposons-nous de trouver le logarithme d'une fraction dont le numérateur

soit plus grand que le dénominateur; nous verrons, dans peu, qu'on peut toujours réduire à cela, la recherche de tout logarithme.

Représentons par a la somme du numérateur & du dénominateur de cette fraction, & par x leur différence; alors (*Géom.* 301), nous aurons $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$ pour le numérateur, & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$ pour le dénominateur; & par conséquent $\frac{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x}$ pour la fraction, ou (en supprimant le facteur commun $\frac{1}{2}$) $\frac{a+x}{a-x}$ sera cette fraction, & par conséquent $l\frac{a+x}{a-x}$, ou $l(a+x) - l(a-x)$ représentera son logarithme. Différencions maintenant, en regardant a comme constante, & x seule comme variable (*); nous aurons (27) $\frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$ qui se réduit à $\frac{2a dx}{aa-xx}$, ou $2a dx(aa-xx)^{-1}$, réduisons donc $(aa-xx)^{-1}$, en série; & (*Alg.* 151) nous aurons $(aa-xx)^{-1} = a^{-2}(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \&c.)$; donc $2a dx(aa-xx)^{-1} = 2a^{-1} dx(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \&c.) = 2(\frac{dx}{a} + \frac{x^2 dx}{a^3} + \frac{x^4 dx}{a^5} + \frac{x^6 dx}{a^7} + \frac{x^8 dx}{a^9} + \&c.)$.

(*) Quoique cette fraction doive représenter toute fraction proposée, cela n'empêche pas qu'on ne puisse regarder la somme a du numérateur & du dénominateur, comme constante; parce qu'il n'y a pas de fraction que l'on ne puisse préparer de manière à rendre la somme du numérateur & du dénominateur égale à tel nombre qu'on voudra. Par exemple, pour amener la fraction $\frac{3}{5}$

à avoir 12 pour la somme du numérateur & du dénominateur, il suffit, ayant multiplié les deux termes par un même nombre n , ce qui donne $\frac{3n}{5n}$, de supposer $3n + 5n$ ou $8n = 12$; d'où l'on tire $n = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, donc $\frac{3}{5} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$, dont la somme du numérateur & du dénominateur est, en effet, 12.

Donc $\int \frac{2 a d x}{a a - x x}$, ou $\int \frac{a + x}{a - x} = 2 \left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3 a^3} + \frac{x^5}{5 a^5} + \frac{x^7}{7 a^7} + \frac{x^9}{9 a^9} + \&c. \right) + C$. A l'égard de la constante C , nous déterminerons sa valeur comme ci-dessus, en examinant ce que devient l'équation, quand $x = 0$. Or, alors elle se réduit à $\int \frac{a}{a} = C$; donc $C = \int \frac{a}{a} = \int 1 = 0$; on a donc tout simplement $\int \frac{a + x}{a - x} = 2 \left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3 a^3} + \frac{x^5}{5 a^5} + \frac{x^7}{7 a^7} + \&c. \right)$, où l'on voit que chaque terme se forme du précédent, en multipliant celui-ci constamment par le carré de $\frac{x}{a}$ ou du premier terme; puis on prend le premier, le $\frac{1}{3}$ du second, le $\frac{1}{5}$ du troisième, &c. & l'on double la somme.

Appliquons à quelques exemples. Cherchons, par exemple, le logarithme de 2. Pour cet effet nous chercherons celui de la fraction $\frac{2}{3}$, nous aurons donc $a = 3$, & $x = 1$; donc $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$, & $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}$. Chaque terme sera donc très-facile à former, puisqu'il ne s'agit que de prendre la $\frac{1}{9}$ partie du terme précédent, pour avoir la suite $\frac{x}{a}$, $\frac{x^3}{a^3}$, $\frac{x^5}{a^5}$, &c. ainsi nous aurons,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{a} = 0,33333333 \\ \frac{x^3}{a^3} = 0,037037037 \\ \frac{x^5}{a^5} = 0,004115226 \\ \frac{x^7}{a^7} = 0,000457247 \\ \frac{x^9}{a^9} = 0,000050805 \\ \frac{x^{11}}{a^{11}} = 0,000005645 \\ \frac{x^{13}}{a^{13}} = 0,000000627 \\ \frac{x^{15}}{a^{15}} = 0,000000069 \end{array} \right\} \text{donc} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = 0,33333333 \\ \frac{x^3}{3 a^3} = 0,012345679 \\ \frac{x^5}{5 a^5} = 0,000823045 \\ \frac{x^7}{7 a^7} = 0,000065321 \\ \frac{x^9}{9 a^9} = 0,000005645 \\ \frac{x^{11}}{11 a^{11}} = 0,000000513 \\ \frac{x^{13}}{13 a^{13}} = 0,000000048 \\ \frac{x^{15}}{15 a^{15}} = 0,000000004 \end{array} \right.$$

donc la somme est. 0,346573588; & le double, qui doit être *log. 2*, est = 0,693147176, qui, en se bornant à 8 décimales (car pour répondre de la neuvième, il auroit fallu pousser l'approximation plus loin), est 0,69314718.

Puisque 4 est le carré de 2, & que 8 en est le cube, le double de ce logarithme sera donc celui de 4; & le triple de ce même premier logarithme sera celui de 8.

Pour avoir celui de 3, on peut calculer, de même, le logarithme de la fraction $\frac{4}{3}$, lequel étant retranché de celui de 4 donnera celui de 3, puisque 3 est 4 divisé par $\frac{4}{3}$, donc $l_3 = l_4 - l_{\frac{4}{3}}$; mais on l'aura plus facilement, en calculant le logarithme de la fraction $\frac{8}{9}$, & le retranchant du logarithme de 8 que l'on connoît à présent; le reste sera le logarithme de 9, dont la moitié sera celui de 3. Ajoutant celui de 3 à celui de 2, on aura le logarithme de 6. Pour avoir celui de 5, on calculera d'abord celui de 10 en calculant celui de $\frac{10}{8}$, qui étant ajouté au logarithme de 8, donnera celui de 10. Retranchant, de ce dernier, le logarithme de 2, on aura celui de 5.

On voit par-là, ce qu'il y a à faire pour calculer tout autre logarithme. Mais il faut remarquer que le calcul devient de plus en plus court, à mesure que le nombre devient plus grand, en sorte que dès qu'on a les logarithmes jusqu'à 10 seulement, on peut calculer les autres jusqu'à 100, sans employer plus de trois termes de la série, lorsqu'on se borne à 8 décimales: & lorsqu'on a passé le nombre 100, les deux premiers termes suffisent jusqu'à mille; & par-de-là, le premier terme suffit.

Pour savoir, maintenant, comment on ramène ces logarithmes, à ceux des Tables ordinaires, il nous faut

préalablement avoir le logarithme de 10. Or, si l'on calcule le logarithme de $\frac{10}{8}$, par la formule précédente, on trouvera $\log. \frac{10}{8} = 0,22314355$; ajoutant à celui-ci, celui de 8 que l'on a en triplant celui de 2 qu'on a eu ci-dessus, on a $\log 10 = 2,30258509$.

113. Cela posé, rappelons-nous que l'équation $dx = \frac{dy}{y}$ sur laquelle (27) est fondé le calcul actuel des logarithmes, ne convient qu'au système de logarithmes où l'on suppose le module = 1; mais que l'équation qui convient à tous les systèmes possibles de logarithmes, est $dx = \frac{m \, a \, dy}{y}$; & celle qui convient à tous les systèmes de logarithmes où l'on suppose que le premier terme a de la progression géométrique fondamentale est 1, est $dx = \frac{m \, dy}{y}$. La première, savoir $dx = \frac{dy}{y}$, donne, en intégrant, $x = ly$; & la seconde, savoir $dx = \frac{m \, dy}{y}$ donne $x = m \, ly$, qui fait voir, puisque x représente le logarithme, que pour ramener les logarithmes que donne immédiatement le calcul, à ceux d'un autre système dont le module est m , il faut multiplier ceux-là par le module m . Or le logarithme de 10 dans les Tables ordinaires, est 1; & nous venons de voir que le logarithme de 10 tel que le calcul le donne immédiatement, est 2,30258509; on a donc $m \times 2,30258509 = 1$; donc le module m des Tables ordinaires, est

$\frac{1}{2,30258509}$ qui se réduit (en faisant la division) à 0,43429448.

Donc, pour ramener aux logarithmes des Tables, les logarithmes donnés immédiatement par le calcul, il faut multiplier ceux-ci par 0,43429448. Et réciproquement, pour ramener les logarithmes des Tables à ceux que donneroit immédiatement le calcul, il faut diviser ceux-là par 0,43429448, ou (ce qui est plus commode, & revient au même), les multiplier par 2,30258509.

Ainsi, si l'on multiplie 0,69314718 que nous avons trouvé ci-dessus, pour le logarithme de 2, si on le multiplie, dis-je, par 0,43429448, on trouve 0,3010300 pour le logarithme de 2, tel qu'il est en effet dans les Tables ordinaires.

114. Lorsqu'on veut revenir, du logarithme au nombre même, voici comment on doit s'y prendre.

Nous avons vu ci-dessus, qu'en représentant un nombre quelconque par $a + x$, on avoit

$$l(a+x) = la + \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c. \right);$$

$$\text{donc } l(a+x) - la, \text{ ou } l \frac{a+x}{a} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} \&c. \text{ } a \text{ étant un nombre}$$

arbitraire, mais tel que son logarithme diffère peu de celui qui est donné, & qui est supposé appartenir à $a + x$.

Faisons, pour plus de simplicité, $l \frac{a+x}{a} = z$, & nous

aurons $\zeta = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} \&c.$ il s'agit donc d'avoir la valeur de $\frac{x}{a}$ en ζ .

Supposons que cette valeur puisse être exprimée par $\frac{x}{a} = A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + \&c.$ $A, B, C, \&c.$ étant des coefficients constans qu'il s'agit de déterminer. On aura donc $\zeta = A\zeta + B\zeta^2 + C\zeta^3 + D\zeta^4 + \&c.$

$$\begin{aligned} & - \frac{A^2}{2} \zeta^2 - \frac{2AB}{2} \zeta^3 - \frac{BB}{2} \zeta^4 \\ & + \frac{A^3}{3} \zeta^3 - \frac{2AC}{2} \zeta^4 \\ & + \frac{3A^2B}{3} \zeta^4 \\ & - \frac{A^4}{4} \zeta^4 \end{aligned}$$

Or pour que cette équation ait lieu, quel que soit ζ , il faut 1°. que $A = 1$; 2°. que la somme des termes qui multiplient chaque puissance de ζ dans les autres colonnes, soit zéro. On a donc $B - \frac{A^2}{2} = 0$, $C - AB + \frac{A^3}{3} = 0$, $D - \frac{BB}{2} - AC + \frac{A^4}{4} = 0$; d'où l'on tire $B = \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2}$, $C = \frac{1}{6} = \frac{1}{1.2.3}$, $D = \frac{1}{24} = \frac{1}{1.2.3.4}$; & si l'on supposoit un plus grand nombre de termes, tels que $E\zeta^5$, $F\zeta^6$, &c. dans la série, on trouveroit de même $E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$, $F = \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$ &c. on a donc $\frac{x}{a} = \zeta + \frac{\zeta^2}{1.2} + \frac{\zeta^3}{1.2.3} + \frac{\zeta^4}{1.2.3.4} + \frac{\zeta^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$ Donc $1 + \frac{x}{a}$, ou $\frac{a+x}{a} = 1 + \frac{\zeta}{1} + \frac{\zeta^2}{1.2} + \frac{\zeta^3}{1.2.3} + \frac{\zeta^4}{1.2.3.4} + \frac{\zeta^5}{1.2.3.4.5} + \&c.$

Pour faire usage de cette formule, on retranchera du logarithme donné (qui est celui de $a+x$), le logarithme connu le plus approchant, dont on prendra le nombre correspondant pour a . Alors on aura $l \frac{a+x}{a}$, ou z , que l'on substituera dans la formule précédente : le résultat sera la valeur de $\frac{a+x}{a}$; d'où il sera facile de conclure $a+x$, puisque a sera connu.

Comme il s'agit ici des logarithmes qui ont 1 pour module, si le logarithme donné étoit de la nature de ceux des Tables ordinaires, il faudroit commencer par le réduire, ainsi que celui que l'on prendroit pour logarithme de a (ou seulement réduire leur différence), aux logarithmes actuels, ce que l'on feroit comme il a été enseigné (113).

Si l'on veut savoir quel est le nombre dont le logarithme est 1, dans le système de logarithmes dont il s'agit ici, il faut supposer $l \frac{a+x}{a}$, ou $z = 1$, & l'on aura $\frac{a+x}{a} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \&c.$, que l'on trouvera $= 2,7182818$, en se bornant à 7 décimales.

Le nombre dont le logarithme est 1, se rencontre fréquemment dans les calculs : nous aurons occasion de le voir par la suite ; & c'est pour cette raison que nous venons de donner la méthode de le calculer.

115. On peut avoir une autre expression d'un nombre par le moyen de son logarithme : la voici.

Soit x ce nombre , & soit $lx = z$. Si l'on multiplie le second membre de cette équation , par $\log. e$, e étant le nombre dont le logarithme est 1, on aura $lx = zle$, ce qui ne change rien , puisque $le = 1$. Or l'équation $lx = zle$, se change , par la nature des logarithmes , en $lx = le^z$; d'où l'on tire $x = e^z$; puisque les logarithmes étant égaux, les quantités auxquelles ils appartiennent doivent être égales.

Selon ce que nous venons de voir , si l'on a $lx = z$, on a $x = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \&c$. Puis donc qu'on a, en même temps, $x = e^z$, on aura $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \&c$.

R E M A R Q U E.

116. La méthode que nous venons d'employer pour conclure la valeur de x , de l'équation $z = \frac{x}{a} - \&c$. s'appelle *Méthode inverse* des séries. Elle consiste, comme on le voit , à supposer la variable dont on veut avoir la valeur, exprimée par une série, où l'autre variable ait des exposans en progression arithmétique, & où chaque terme ait un coefficient constant indéterminé.

Si l'on avoit plusieurs termes en x & en z dans la même équation , mais que x & z ne fussent pas multipliés entre eux, on détermineroit la série des exposans, en faisant l'exposant du premier terme de la série supposée, égal au plus petit exposant de la même variable dans l'équation; & on prendroit, pour différence commune des exposans de la même série,

le plus grand commun diviseur des exposans de cette même variable dans l'équation.

Par exemple, si j'avois $z^{\frac{2}{3}} + 3z = 2x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{7}x^3 + \&c.$; je ferois $x = Az^{\frac{2}{3}} + Bz + Cz^{\frac{4}{3}} + Dz^{\frac{5}{3}} + Ez^2 + \&c.$, parce que le plus petit exposant de z , est $\frac{2}{3}$; & que le plus grand commun diviseur des exposans $\frac{2}{3}$ & 1, de z , est $\frac{1}{3}$.

Mais si les x & les z étoient multipliés entre eux, alors il faudroit suivre une méthode dont le détail n'est pas trop de notre objet, mais que l'on peut voir dans les ouvrages de Newton, & dans l'*Analyse des lignes courbes* de Cramer.

Usage des approximations précédentes, pour l'intégration des diverses quantités.

117. Comme on a des Tables toutes calculées, des différentes parties du cercle, ainsi que des logarithmes, lorsqu'on aura à intégrer quelque différentielle qui pourra se rapporter au cercle, ou aux logarithmes, il sera inutile désormais de réduire ces différentielles en séries. Ce qu'il y a de plus utile à faire actuellement sur cette matière, est de faire connoître celles de ces différentielles que l'on rencontre le plus fréquemment, & de faire voir comment on détermine les arcs de cercle, ou les logarithmes qui en sont l'intégrale. En voici des exemples.

118. Nous avons vu (99) que $\frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{(ax - xx)}}$ exprimoit l'élément d'un arc de cercle AM (*fig. 40*, dont a feroit le diamètre, & x l'abscisse ; en sorte que l'intégrale de cette quantité ou $\int \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{(ax - xx)}}$ a pour expression l'arc AM . Supposant donc que l'on demande la valeur de cette intégrale pour une valeur déterminée de x ; alors de CA ou $\frac{1}{2} a$, on retranchera la valeur connue de x , ou AP , & l'on aura CP . Dans le triangle rectangle CPM , on connoîtra donc l'angle droit, l'hypothénuse $CM = \frac{1}{2} a$, & le côté CP ; on pourra donc calculer l'angle ACM ; or connoissant l'angle ACM , ou le nombre de degrés de l'arc AM , & son rayon CM , il est facile de calculer la longueur de cet arc (*Géométrie 153*).

119. Si l'on avoit $\frac{h dx}{\sqrt{(gkx - pxx)}}$, h , g , p & k étant des quantités connues, on rendroit cette différentielle semblable à la précédente, en divisant d'abord, haut & bas,

par $\sqrt{p}$, ce qui donneroit $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}} dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p} x - xx\right)}}$ ou $\frac{h}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p} x - xx\right)}}$; or si l'on avoit ici, pour multiplicateur

de dx , la moitié de la quantité $\frac{gk}{p}$ qui multiplie x dans le radical, alors cette différentielle feroit semblable à celle de l'article précédent ; donnons-lui donc cette condition, en multipliant & divisant en même temps par $\frac{1}{2} \cdot \frac{gk}{p}$ ou $\frac{gk}{2p}$;

nous aurons $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}}{\frac{gk}{2p}} \times \frac{\frac{gk}{2p} dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p} x - xx\right)}}$ ou $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$.

$\frac{\frac{g^k}{2p} dx}{\sqrt{\left(\frac{g^k}{p} x - xx\right)}}$. Dans cet état, on voit que l'intégrale de notre différentielle, est un arc de cercle dont le diamètre est $\frac{g^k}{p}$, & l'abscisse x ; est, dis-je, cet arc multiplié par $\frac{2ph}{g^k \sqrt{p}}$: elle est donc facile à assigner, par ce qui vient d'être dit.

120. Si au lieu de compter les abscisses depuis le point A , nous les eussions comptées depuis le centre C , en nommant b le rayon CA , & x l'abscisse CP ; nous aurions eu $\frac{-b dx}{\sqrt{(bb - xx)}}$ pour l'élément de l'arc AM ; ce que l'on trouve aisément en comparant les triangles semblables CPM , Mrm , & se rappelant que $PM = \sqrt{(bb - xx)}$, & que, puisque l'arc AM diminue à mesure que CP ou x augmente, sa différentielle doit être négative. Ainsi quand on aura une différentielle telle que $\frac{k dx}{\sqrt{(gh - pxx)}}$, on la changera comme ci-dessus, en $\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$; or $\frac{gh}{p}$ représentant ici, bb , la quantité $-b$ qu'on doit avoir dans le numérateur, est $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$; je multiplie donc & je divise en même temps, par $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$, & j'ai $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}}$.

$\frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}} dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$. Donc en supposant que $CA = \sqrt{\frac{gh}{p}}$,

& CP, x , on aura $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM$, pour l'intégrale,

ou plus généralement $\frac{\frac{k}{\sqrt{P}}}{-\sqrt{\frac{g h}{P}}} \times AM + C$, ou $\frac{-k}{\sqrt{g h}} \times$

$AM + C$. A l'égard de la constante C , elle se détermine par les conditions de la question particulière qui aura conduit à la différentielle dont il s'agit ; & l'arc AM se détermine comme nous venons de le dire (118) ; c'est-à-dire, par le calcul du triangle CPM , &c.

121. Nous avons vu (111) que $\frac{a a d x}{a a + x x}$ exprimoit un arc de cercle dont a est le rayon, & x la tangente ; arc que l'on peut déterminer aisément pour une valeur déterminée de x , en calculant l'angle ACN du triangle rectangle ACN (fig. 46), puis la longueur de l'arc AM par le moyen du nombre des degrés de l'angle ACN & du rayon a .

Si donc on avoit $\frac{k d x}{g b^2 + h x x}$, on diviseroit, haut & bas, par h ; ce qui donneroit $\frac{k}{h} \cdot \frac{d x}{\frac{g b^2}{h} + x x}$, puis multi-

pliant, haut & bas, par $\frac{g b^2}{h}$, on auroit $\frac{\frac{k}{h}}{\frac{g b^2}{h}} \times \frac{\frac{g b^2}{h} d x}{\frac{g b^2}{h} + x x}$

ou $\frac{k}{g b^2} \times \frac{\frac{g b^2}{h} d x}{\frac{g b^2}{h} + x x}$; on auroit donc l'intégrale, en cal-

culant la longueur de l'arc qui a x pour tangente, & $\sqrt{\left(\frac{g b^2}{h}\right)}$ pour rayon, & la multipliant par $\frac{k}{g b^2}$.

122. Ces trois différentielles s'intègrent donc par les arcs de cercle. En voici qui s'intègrent par le moyen de la surface du cercle.

L'élément

L'élément du demi-segment APM (fig. 40), est $dx \sqrt{(ax - xx)}$ en nommant AP, x ; puis que $y = \sqrt{(ax - xx)}$ & par conséquent $y dx$ ou $P p m M = dx \sqrt{(ax - xx)}$; donc toute différentielle qui aura cette forme, ou qui pourra y être ramenée par des préparations semblables à celles que nous venons d'indiquer, s'intégrera par le moyen d'un demi-segment de cercle dont l'abscisse est x & le diamètre a ; segment qui est facile à déterminer, tant par ce qui précède, que par ce qui a été dit (Géom. 153).

123. Par exemple, si l'on veut avoir la surface du demi-segment elliptique APM (fig. 47); on aura $y = \frac{b}{a} \sqrt{(ax - xx)}$ donc $y dx$ ou $d(APM) = \frac{b dx}{a} \cdot \sqrt{(ax - xx)}$; or $dx \sqrt{(ax - xx)}$ exprime l'élément du demi-segment circulaire APM' , en supposant qu'on ait décrit un cercle sur AB , comme diamètre; on a donc $d(APM) = \frac{b}{a} d(APM')$; & en intégrant, $APM = \frac{b}{a} APM'$, qui donne $APM : APM' :: b : a$; c'est-à-dire, que la surface du demi-segment elliptique, est à celle du demi-segment circulaire correspondant, comme le petit axe est au grand axe; d'où il est aisé de conclure que la surface entière de l'ellipse, est à celle du cercle décrit sur son grand axe, comme le petit axe, est au grand axe. C'est ce que (108) nous avons promis de démontrer.

Si au lieu de compter les abscisses depuis le point A (figure 40), on les compte du centre C , alors nommant CA, b ,
Marine, Mécan. I^{re}. Partie, L

& CP, x ; on aura $-dx \sqrt{(bb - xx)}$ pour l'élément du demi-segment APM ; parce qu'alors, $y = \sqrt{(bb - xx)}$, & que le segment APM diminue pendant que x augmente, ce qui rend la différentielle de APM négative.

Voici un exemple d'une différentielle qui se rapporte à cette forme.

123. Proposons-nous de trouver la surface du sphéroïde elliptique allongé. La formule générale de ces sortes de surfaces, est $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (98); or l'équation de l'ellipse est $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$; donc $y = \frac{b}{a} \times \sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)}$, & $dy = -\frac{b}{a} \times \frac{xdx}{\sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)}}$; donc $\frac{cy}{r} \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, devient $\frac{cb}{ra} \times \sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)} \times \sqrt{(dx^2 + \frac{bb}{aa} \times \frac{x^2 dx^2}{\frac{1}{4}aa - xx})}$, ou en faisant la multiplication indiquée, réduisant, & faisant sortir dx^2 hors du radical, $\frac{cb dx}{ra} \sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx + \frac{bbxx}{aa})}$, ou $\frac{cb dx}{ra} \cdot \sqrt{(\frac{\frac{1}{4}a^4 - aaxx + bbxx}{aa})}$; or si l'on nomme k la distance CF au foyer F (fig. 48), on a $kk = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; ou $4kk = aa - bb$ (Alg. 294); donc l'élément de la surface devient $\frac{cb dx}{ra} \sqrt{(\frac{\frac{1}{4}a^4 - 4kkxx}{aa})}$ ou $\frac{cb dx}{raa} \sqrt{(\frac{1}{4}a^4 - 4kkxx)}$. Divisons sous le radical par $4kk$, & multiplions au-dehors par sa racine $2k$, nous aurons $\frac{2cbk dx}{raa} \cdot \sqrt{(\frac{\frac{1}{4}a^4}{kk} - xx)}$, quantité à laquelle il faut donner le signe — pour qu'elle exprime la surface comptée depuis le point A , parce que cette surface diminue à mesure que x augmente;

ainfi nous avons $-\frac{2cbkdx}{raa} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)}$. Comparant donc avec $-dx \sqrt{(bb - xx)}$, que nous venons de voir être l'exprefſion d'un demi ſegment circulaire dont le rayon eſt b , nous en concluons que l'intégrale de $-dx \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)}$, eſt un demi ſegment de cercle OPM' dont le rayon eſt $\frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, & dont l'abſciſſe priſe du centre, eſt x , que cette intégrale, diſ-je, eſt égale à ce ſegment plus une conſtante. Donc ſi d'un rayon $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, c'eſt-à-dire, troiſième proportionnelle à CF & à CA , on décrit le cercle ONR , on aura $\int -dx \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)} = OPM' + C$; donc $\int -\frac{2cbkdx}{raa} \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{16}a^4}{kk} - xx\right)} = \frac{2cbk}{raa} \times OPM' + \frac{2cbk}{raa} \times C$.

Pour déterminer la conſtante C , il faut remarquer que la ſurface cherchée, devant commencer au point A , doit être zéro à ce point; or au point A , le demi ſegment OPM' devient OAN ; on a donc $0 = \frac{2cbk}{raa} \times OAN + \frac{2cbk}{raa} C$, d'où l'on tire $C = -OAN$; donc l'intégrale complete eſt $\frac{2cbk}{raa} \times OPM' - \frac{2cbk}{raa} \times OAN$, ou $\frac{2cbk}{raa} (OPM' - OAN)$, ou enfin $\frac{2cbk}{raa} (APM'N)$. Donc la ſurface du demi ſphéroïde fera $\frac{2cbk}{raa} (ACRN)$, ou puifque $CO = \frac{\frac{1}{4}aa}{k}$, & que par conſéquent $\frac{2k}{aa} = \frac{1}{2CO}$, cette ſurface fera $\frac{c}{r} \times \frac{b}{2CO} \times ACRN$, ou $\frac{c}{r} \times \frac{CD}{CO} \times ACRN$; & celle du ſphéroïde entier, en eſt le double.

Quant à la manière de déterminer le rayon CO , elle est simple; du point C comme centre, & du rayon CA , on décrira l'arc AL , qui coupe, en L , la perpendiculaire FL élevée sur CA au point F ; on prolongera CL jusqu'à ce qu'elle rencontre en N la perpendiculaire AN , élevée au point A ; ce qui donnera CN pour la valeur cherchée de CO , ou pour $\frac{\frac{1}{2}aa}{k}$; en effet, les triangles semblables CFL & CAN , donnent $CF : CA :: CL : CN$, ou $k : \frac{1}{2}a :: \frac{1}{2}a : CN = \frac{\frac{1}{2}aa}{k} = CO$.

Cette détermination peut être appliquée à la mesure de la surface de la carène des vaisseaux, que l'on peut comparer à celle d'un ellipsoïde, plus légitimement que leur solidité ne peut l'être à celle du même ellipsoïde. Toute l'opération se réduit à calculer l'angle ACN du triangle rectangle CAN dont on connoît deux côtés, outre l'angle droit; alors l'angle NCR devient connu, & l'on peut aisément en conclure la surface du secteur NCR , à laquelle ajoutant celle du triangle CAN , on a $ACRN$ qu'il ne s'agit plus que de multiplier par $\frac{1}{2} \times \frac{CD}{CO}$. Quand on a la surface de la carène, en la multipliant par l'épaisseur du soufflage, on a la solidité du volume, dont la carène est augmentée par le soufflage.

124. A l'égard des quantités qui se rapportent immédiatement aux logarithmes, ce sont toutes celles

dans lesquelles la différentielle proposée est, ou peut être rendue, une fraction dont le numérateur soit la différentielle du dénominateur, ou cette différentielle multipliée ou divisée par un nombre constant.

Lorsque le numérateur est exactement la différentielle du dénominateur, l'intégrale est le logarithme du dénominateur.

$$\text{Ainsi } \int \frac{dx}{x} = l x + C; \int \frac{dx}{a+x} = l(a+x) + C;$$

$$\int \frac{2x dx}{a+xx} = l(a+xx) + C.$$

Mais lorsque le numérateur est la différentielle du dénominateur, multipliée ou divisée par un nombre constant, alors il faut décomposer la différentielle proposée, en deux facteurs dont l'un soit une fraction qui ait pour numérateur la différentielle exacte du dénominateur, & dont l'autre facteur soit un nombre constant. Alors l'intégrale sera le logarithme du dénominateur variable, sera, dis-je, ce logarithme multiplié par le facteur constant.

Par exemple, pour intégrer $\frac{ax^2 dx}{a^3 + x^3}$; comme la différentielle de $a^3 + x^3$ est $3x^2 dx$, il faut que je prépare ma différentielle de manière à avoir $3x^2 dx$ dans le numérateur; pour cet effet, je l'écris ainsi $\frac{a}{3} \cdot \frac{3x^2 dx}{a^3 + x^3}$, dont l'intégrale est $\frac{a}{3} l(a^3 + x^3) + C$.

Pareillement $\int \frac{dx}{a-x} = \int \frac{1}{-1} \cdot \frac{-1 dx}{a-x} = -l(a-x)$
 $+ C = 0 - l(a-x) + C = l1 - l(a-x) + C =$
 $l \frac{1}{a-x} + C$. De même $\int \frac{x dx}{a+xx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x dx}{a+xx} =$
 $\frac{1}{2} l(a+xx) + C = l\sqrt{a+xx} + C$. Enfin
 $\int \frac{ax^{n-1} dx}{k+bx^n} = \int \frac{a}{bn} \cdot \frac{nbx^{n-1} dx}{k+bx^n} = \frac{a}{bn} l(k+bx^n)$
 $+ C = l(k+bx^n)^{\frac{a}{bn}} + C$.

Voici un exemple de la manière de déterminer ces intégrales en nombres. Supposons qu'on demande la valeur de $l(a+x)$ (a étant 5), lorsque $x = 2$. C'est donc $l7$ qu'il faut avoir. Je prends dans les Tables ordinaires le logarithme de 7, qui est 0,8450980: je le multiplie (113) par 2,30258509 ou 2,3025851, & j'ai 1,9459100 ou 1,94591 pour la valeur de $l(a+x)$ ou de l'intégrale de $\frac{dx}{a+x}$, lorsque $a = 5$, & $x = 2$.

On rencontre, quelquefois, des différentielles qui s'intègrent directement par logarithmes, quoique cependant elles ne puissent pas être préparées comme les précédentes; par exemple $\frac{dx}{\sqrt{xx-1}}$ est dans ce cas. On réussit quelquefois à leur donner la forme de différentielle logarithmique, en essayant de les multiplier par une fonction de x , telle que le produit devienne la différentielle de cette fonction, ou cette même différentielle multipliée ou divisée par un nombre constant. Alors en divisant par cette même fonction, la différentielle seroit évidemment une différentielle logarithmique.

En appliquant cette réflexion à $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$, je la multiplie par $x + \sqrt{(xx-1)}$, & j'ai $\frac{x dx}{\sqrt{(xx-1)}} + dx$, qui est en effet la différentielle de $x + \sqrt{(xx-1)}$; enforte que j'ai

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}} = \int \frac{dx + \frac{x dx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x + \sqrt{(xx-1)}} = l[x + \sqrt{(xx-1)}] + C.$$

On trouvera de même l'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ en multipliant d'abord haut & bas par $\sqrt{(-1)}$, ce qui donne $\frac{dx \sqrt{(-1)}}{\sqrt{(xx-1)}}$, dont l'intégrale, selon ce qu'on vient de voir, est $\sqrt{(-1)} l[x + \sqrt{(xx-1)}] + C.$

125. Nous avons promis (83) d'expliquer comment il arrivoit que la règle fondamentale de l'intégration des monomes, donnoit une quantité infinie pour l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, tandis que cette intégrale a pour expression lx , ou du moins $lx + C.$

L'intégrale de $\frac{dx}{x}$ peut être finie ou infinie, selon la portion qu'on veut en avoir. Pour éclaircir ceci, remarquons d'abord que prendre l'intégrale de $\frac{dx}{x}$, n'est autre chose que quarrer l'hyperbole ordinaire, considérée par rapport à ses asymptotes. En effet, l'équation de cette courbe est $xy = aa$, ou $xy = 1$ en supposant, pour plus de simplicité, $a = 1$. Or de cette équation on tire $y = \frac{1}{x}$; donc l'élément $y dx$ de la surface, devient $\frac{dx}{x}$; donc si l'on veut avoir

les espaces comptés depuis l'asymptote AZ (*fig. 49*), l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ ou $lx + C$ doit être telle qu'elle devienne 0, lorsque le point P tombe au point A , ou lorsque $x = 0$; on a donc alors $l0 + C = 0$, & par conséquent $C = -l0$; donc l'intégrale est $lx - l0$ ou $l\frac{x}{0}$; c'est-à-dire, que les espaces $ZAPMV$ comptés depuis l'asymptote sont infinis, Z & V étant supposés les extrémités de l'asymptote & de la branche correspondante de l'hyperbole; ce qui n'a rien de surprenant.

Mais si, le point O étant le sommet de l'hyperbole (auquel cas l'abscisse correspondante $AN = 1$), on veut avoir les espaces comptés depuis le point N ; alors l'intégrale $lx + C$ doit être telle qu'elle devienne zéro, quand le point P tombera sur le point N , ou quand $x = 1$; on a donc $l1 + C = 0$, & par conséquent $C = -l1 = 0$; donc les espaces $NOMP$ sont exprimés par lx .

On voit par-là, 1°. que les logarithmes que donne immédiatement le calcul, expriment les espaces hyperboliques compris entre l'asymptote & la courbe, & comptés depuis le sommet O de la courbe. 2°. Que si l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ ou $x^{-1}dx$, prise d'après la règle fondamentale, est infinie, c'est qu'elle exprime les espaces comptés depuis l'origine des asymptotes.

126. Pour donner quelque application des intégrales par logarithmes, proposons-nous la construction des cartes réduites.

Ces cartes ont été imaginées pour faciliter la réduction des routes, dans la navigation. La route que l'on suit (au moins pendant un certain temps), est toujours dirigée suivant un même rhumb de vent; & par conséquent, fait toujours le même angle avec chaque méridien que l'on traverse successivement. D'où il suit que si l'on vouloit tracer cette route sur les cartes ordinaires, où les méridiens concourent en un point, elle seroit une ligne courbe, & par conséquent peu commode pour les opérations que l'on a besoin de faire. On a préféré de représenter les méridiens par des lignes droites parallèles, afin que la route qui fait un angle constant avec ces méridiens, fût une ligne droite.

Mais, en supposant que AMP , amP (fig. 50) sont deux méridiens; Aa une portion de l'équateur, comprise entre ces deux méridiens, & Mm la portion correspondante d'un parallèle quelconque; on voit que l'intervalle $M'm'$ qui (fig. 51) représente, alors, l'arc Mm , est de même grandeur que $A'a'$ qui représente la portion correspondante Aa de l'équateur, quoique Mm soit plus petit que Aa , dans le rapport de $P'M$ à CA ; ce qui est facile à voir en

menant MP' , mP' , AC & aC perpendiculaires à CP ; car ces lignes forment avec les arcs Aa , & Mm , des secteurs semblables CAa & PMm .

Pour compenser l'augmentation que l'on donne à Mm , en le représentant sur la carte, par $M'm'$, on représente la latitude AM , par une ligne $A'M'$ plus grande à l'égard de $A'a'$, que AM ne l'est à l'égard de Aa ; plus grande, dis-je, dans un certain rapport; & c'est ce rapport que nous nous proposons ici de déterminer.

Soient donc M & R deux points infiniment voisins sur le méridien AM ; Mm , Rr les deux portions correspondantes de deux parallèles. Si l'on veut représenter Mm , Rr par des lignes $M'm'$, $R'r'$ égales à celle $A'a'$ qui représente Aa , il faut rendre l'intervalle infiniment petit $M'R'$, qui séparera $M'm'$ & $R'r'$, le rendre, dis-je, d'autant plus grand à l'égard de MR , que Mm est plus petit à l'égard de Aa ; c'est-à-dire, qu'on doit avoir $M'R' : MR :: Aa : Mm :: CA : P'M ::$ le rayon, est au cosinus de la latitude AM .

Nommons donc la latitude AM , s ; la droite $A'M'$ qui la représente sur la carte (& qu'on appelle la *Latitude croissante*), nommons-la s' . Posons le rayon CA ou $CM = 1$; CP' ou le sinus de la latitude $AM = x$. Nous aurons $P'M = \sqrt{(1 - xx)}$;

$MR = ds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Donc $ds' : \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} ::$
 $1 : \sqrt{(1-xx)}$; & par conséquent $ds' = \frac{dx}{1-xx}$.
 Il s'agit donc, pour avoir s' , d'intégrer la valeur
 de ds' , c'est-à-dire, $\frac{dx}{1-xx}$. Or nous avons vu (112)
 que $\frac{2aadx}{aa-xx}$, venoit de la différenciation de $l \frac{a+x}{a-x}$;
 donc $\frac{2dx}{1-xx}$, vient de la différenciation de $l \frac{1+x}{1-x}$;
 & par conséquent l'intégrale de $\frac{dx}{1-xx}$, qui est la
 moitié de $\frac{2dx}{1-xx}$, fera $\frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$; on aura donc
 $s' = \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} = l \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$; intégrale à laquelle il
 n'y a point de constante à ajouter, parce que lors-
 que $x=0$, $l \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$, devient $l \sqrt{\frac{1}{1}}$, ou $l1$,
 c'est-à-dire, 0; or s' , ou la droite $A'M'$ doit en effet
 être alors zéro, puisque l'arc AM qu'elle représente
 est zéro, quand x est zéro.

Observons, maintenant, pour rendre cette ex-
 pression plus commode, que le rayon 1, est le sinus
 de 90° ; & puisque, par x , nous avons entendu CP
 ou le sinus de la latitude AM , nous aurons donc,
 au lieu de $s' = l \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$, cette autre équation,
 $s' = \log. \sqrt{\left(\frac{\sin. 90^\circ + \sin. AM}{\sin. 90^\circ - \sin. AM}\right)}$. Or (Géom. 286)
 $\sin. 90^\circ + \sin. AM : \sin. 90^\circ - \sin. AM ::$
 $\text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} AM) : \text{tang. } (45^\circ - \frac{1}{2} AM)$;

donc $\frac{\sin. 90^\circ + \sin. AM}{\sin. 90^\circ - \sin. AM} = \frac{\tan. (45^\circ + \frac{1}{2} AM)}{\tan. (45^\circ - \frac{1}{2} AM)}$; donc

$s' = \log. \sqrt{\left(\frac{\tan. (45^\circ + \frac{1}{2} AM)}{\tan. (45^\circ - \frac{1}{2} AM)} \right)}$. Mais $\tan. (45^\circ - \frac{1}{2} AM) : 1 :: 1 : \cot. (45^\circ - \frac{1}{2} AM)$ (*Géométrie* 280). D'ailleurs $\cotang. (45^\circ - \frac{1}{2} AM) = \tan. (45^\circ + \frac{1}{2} AM)$, parce que $45^\circ - \frac{1}{2} AM$ est le complément de $45^\circ + \frac{1}{2} AM$, puisque $45^\circ - \frac{1}{2} AM = 90^\circ - 45^\circ - \frac{1}{2} AM$; on a donc $\tan. 45^\circ - \frac{1}{2} AM : 1 :: 1 : \tan. (45^\circ + \frac{1}{2} AM)$; donc $\tan. (45^\circ - \frac{1}{2} AM) = \frac{1}{\tan. (45^\circ + \frac{1}{2} AM)}$. Substituant cette valeur dans s' , on a $s' = \log. \sqrt{[(\tan. 45^\circ + \frac{1}{2} AM)^2]}$, c'est-à-dire, $s' = \log. \tan. (45^\circ + \frac{1}{2} AM)$, ou $s' = \log. \cot. (45^\circ - \frac{1}{2} AM)$. Or $45^\circ - \frac{1}{2} AM$ est la moitié de $90^\circ - AM$, qui est le complément de la latitude; on a donc enfin, la latitude croissante $s' = \log. \cot. (\frac{1}{2} \text{ complément de la latitude})$.

On prendra donc, dans les Tables ordinaires, le logarithme de la cotangente de la moitié du complément de la latitude, & l'ayant multiplié (113) par 2,30258509, le produit fera la latitude croissante, exprimée en parties du rayon.

Mais comme il est plus commode d'avoir la latitude croissante, exprimée en degrés, voici comment on la déterminera. Nous avons vu (111) que la

longueur de la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est 1, est 3,1415926, &c. Ce nombre étant divisé par 180, donne 0,0174533 pour la longueur d'un degré. Il n'y a donc qu'à chercher combien de fois ce nombre est contenu dans la latitude croissante que nous venons de déterminer; c'est-à-dire, diviser cette latitude croissante, par 0,0174533; le quotient exprimera la latitude croissante, en degrés. On a donc la latitude croissante, exprimée en degrés, par $\frac{2,30258509 \times \log. \cot. (\frac{1}{2} \text{ compl. de lat.})}{0,0174533}$. Mais en divisant

2,30258509, par 0,0174533, on trouve, pour quotient, 131,9283 en se bornant à quatre décimales. Donc pour avoir la latitude croissante, exprimée en degrés, il faut prendre dans les Tables ordinaires, le logarithme de la cotangente de la moitié du complément de la latitude, & le multiplier par 131,9283. Le produit fera le nombre de degrés & parties de degré de la latitude croissante.

Par exemple, si je veux avoir la latitude croissante qui convient à 40° de latitude simple, je prends la moitié du complément de 40°; c'est-à-dire, la moitié de 50°, ou 25°. Le logarithme de la cotangente de 25°, est 0,3313275 (*), qui étant multiplié par

(*) Comme nous avons supposé le rayon, égal à l'unité, il faut diminuer ces logarithmes de tangente, du logarithme du rayon, qui est 10,000000; c'est à-dire, ôter 10, de leur caractéristique.

131,9283, donne 43,7115, c'est-à-dire, 43° , 7115, ou $43^{\circ} 43'$. C'est ainsi qu'on peut calculer des Tables de latitudes croissantes.

127. C'est par un calcul à peu près semblable, que l'on peut déterminer la différence en longitude, lorsqu'on connoît la latitude d'arrivée, celle de départ, & le rhumb de vent. Voici comment on y parvient.

Soit OQM (fig. 52) la route qu'on a suivie; Q le point de départ; OA l'équateur; AMP & $ampP$ deux méridiens consécutifs, infiniment voisins l'un de l'autre. En imaginant l'arc Mm , parallèle à l'équateur, le triangle infiniment petit mMr sera rectiligne & rectangle en m ; par conséquent, on aura $mr : Mm :: 1 : \text{tang. } mrM$, en supposant toujours le rayon $= 1$; donc $Mm = mr \times \text{tang. } mrM$. Or si l'on compare la figure 52 à la figure 50, on a (selon ce que nous avons déjà vu dans la question précédente) $Mm : Aa :: \text{cos. lat.} : 1$, c'est-à-dire, $mr \times \text{tang. } mrM : Aa :: \text{cos. lat.} : 1$.

Nommons donc x , le sinus de latitude AM (figure 52); son cosinus sera $\sqrt{1 - xx}$. L'arc mr qui est la différence des deux latitudes ar & AM , fera la différentielle de l'arc AM , & aura pour expression $\frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$ (126). Nommons de plus, a ,

l'angle mrM que la route fait avec le méridien, ou le rhumb de vent; & z , la différence BA de longitude, ce qui donne $Aa = dz$; alors la proportion que nous venons de trouver se change en $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$
 $\text{tang. } a : dz :: \sqrt{(1-xx)} : 1$; d'où l'on tire
 $dz = \text{tang. } a \cdot \frac{dx}{1-xx}$. Mais nous venons de voir, dans la question précédente, que l'intégrale de $\frac{dx}{1-xx}$, étoit $\frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$; nous aurons donc $z = \frac{1}{2} \text{tang. } a \cdot l \frac{1+x}{1-x} + C$.

Pour déterminer la constante C ; observons que lorsque $z = 0$, c'est-à-dire, au point de départ, la latitude AM , devient la latitude BQ du départ. Nommons donc t cette latitude. Il faut donc que la constante C soit telle, qu'en mettant t pour x , on ait $z = 0$. On a donc $0 = \frac{1}{2} \text{tang. } a \cdot l \frac{1+t}{1-t} + C$, & par conséquent $C = -\frac{1}{2} \text{tang. } a \cdot l \frac{1+t}{1-t}$.
 Donc $z = \frac{1}{2} \text{tang. } a \cdot l \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \text{tang. } a \cdot l \frac{1+t}{1-t} = \text{tang. } a \left(\frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} l \frac{1+t}{1-t} \right) = \text{tang. } a \left[l \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x} \right)} - l \sqrt{\left(\frac{1+t}{1-t} \right)} \right]$.

Or en raisonnant précisément comme dans la question précédente, nous trouverons que $\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x} \right)}$ se réduit à $\cot. \left(\frac{1}{2} \text{complément de } AM \right)$; & par la même

raison $\sqrt{\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}$, se réduit à $\cot. \left(\frac{1}{2} \text{ complément de } BQ\right)$; donc z , ou la différence en longitude, = $\text{tang. } a \left[\log. \cot. \left(\frac{1}{2} \text{ complément de latitude d'arrivée}\right) - \log. \cot. \left(\frac{1}{2} \text{ compl. de lat. du départ}\right) \right]$; ce qui donne une règle fort simple, pour trouver la différence en longitude, soit par les Tables des latitudes croissantes, soit par les cartes réduites, quel que soit d'ailleurs le rhumb de vent.

PAR LA TABLE DES LATITUDES CROISSANTES... Cherchez la latitude croissante, qui convient à la latitude d'arrivée. Faites la même chose pour la latitude du départ. Prenez la différence de ces deux latitudes croissantes, & multipliez-la par la tangente du rhumb de vent. Vous aurez en degrés, minutes, &c. la différence en longitude.

PAR LES CARTES RÉDUITES... Cherchez sur le méridien, la latitude d'arrivée, & celle du départ. Élevez par l'extrémité de chacune, une perpendiculaire qui rencontre la route prolongée. La différence de ces deux perpendiculaires, portée sur l'échelle des longitudes, vous donnera en degrés, minutes, &c. la différence de longitude.

En effet, AQ (fig. 53) étant le méridien; OL la route; AQ , AP , les deux latitudes croissantes; PQ ou RT est leur différence; or dans le triangle rectangle SRT , on a $1 : \text{tang. } TRS :: RT : TS$;
donc

donc $TS = RT \times \text{tang. } TRS$; or RT est la différence des deux latitudes croissantes, & l'angle TRS est égal à l'angle de la route avec le méridien.

La ligne courbe QM (fig. 52) qui marque la route du vaisseau sur la surface du globe, s'appelle *Loxodromie*.

A quelque endroit de la route que l'on suppose le point M , le triangle Mrm a toujours les mêmes angles, puisque l'angle mrM est toujours le même, & que l'angle m est droit; il y a donc toujours même rapport de Mr à mr , que du rayon au cosinus de l'angle mrM que nous avons appelé a . Donc le nombre de lieues courues suivant QM , est au nombre de lieues courues en latitude, c'est-à-dire, au nombre de lieues de IM , comme le rayon est au cosinus du rhumb de vent. Ce qui sert à déterminer la différence en latitude, quand on connoît le rhumb de vent & le nombre de lieues de la route. Cette même proportion sert aussi à trouver le rhumb de vent, quand on connoît la différence en latitude & le nombre de lieues de la route. Bien entendu qu'on réduit en lieues, les degrés de la différence en latitude, à raison de 20 lieues pour un degré.

*De la manière de ramener (lorsque cela est possible)
l'intégration d'une différentielle proposée , à celle d'une
autre différentielle connue , & de distinguer les cas où
cela se peut.*

128. Nous nous bornerons à exposer la méthode sur les différentielles binomes ; il sera aisé, ensuite, d'en faire l'application aux différentielles plus composées.

Supposons, d'abord, que la différentielle proposée, est $hx^i dx (a + bx^n)^p$, & que $x^m dx (a + bx^n)^p$ est celle dont elle doit dépendre ; c'est-à-dire, supposons d'abord que les deux exposans du binome soient les mêmes.

On supposera $\int hx^i dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p+1} (Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} + \dots Px^{k+tq}) + \int Rx^m dx (a + bx^n)^p$; k & q étant des exposans inconnus; t , un nombre entier positif; A, B, C, P, R &c., des coefficients constans pareillement inconnus. En différenciant, on aura $hx^i dx (a + bx^n)^p = (p+1)nbx^{n-1} dx (a + bx^n)^p (Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} \dots + Px^{k+tq}) + (a + bx^n)^{p+1} (kAx^{k-1} dx + (k+q)Bx^{k+q-1} dx + (k+2q)Cx^{k+2q-1} dx \dots + (k+tq)Px^{k+tq-1} dx) + Rx^m dx (a + bx^n)^p$, ou en divisant tout, par $(a + bx^n)^p dx$, on aura $hx^i = (p+1)nbx^{n-1} (Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} \dots + Px^{k+tq}) + (a + bx^n) (kAx^{k-1} + (k+q)Bx^{k+q-1} + (k+2q)Cx^{k+2q-1} \dots + (k+tq)Px^{k+tq-1}) + Rx^m$.

Pour que cette équation puisse avoir lieu, indépendamment de toute valeur de x , il faut qu'après les multiplications & la transposition faites, la somme des quantités qui multiplieront une même puissance de x , soit zéro ; c'est par cette

condition qu'on déterminera les coefficients A, B, C , &c. mais il faut, pour cela, que le nombre des puissances de x , qui entreront dans cette équation, ne surpasse pas le nombre de ces coefficients.

Or le nombre de ceux-ci est $t + 2$, comme il est aisé de le voir : voyons donc quel sera celui des puissances de x . Pour cela, il nous faut déterminer k & q .

Comme les exposans k & q sont indéterminés, voici comment on les déterminera. $k - 1$ est le plus petit exposant indéterminé qui se trouvera dans l'équation ; on l'égalera à m ou à s , selon que m ou s sera le plus petit exposant. Le plus grand exposant indéterminé qui se trouvera dans l'équation, sera (ainsi qu'il est aisé de le voir), $k + tq + n - 1$; on l'égalera à s , si on a égalé $k - 1$ à m ; ou à m , si on a égalé $k - 1$ à s .

Supposons $k - 1 = m$; on aura donc $k + tq + n - 1 = s$. Cela posé, pour que l'équation ne renferme pas plus de puissances de x , qu'il n'y a de coefficients indéterminés, il faut que les exposans de x , dans cette équation, forment aussi une progression arithmétique dont la différence soit q , ce qui ne peut manquer d'avoir lieu, dès qu'on a supposé $k - 1 = m$, $k + tq + n - 1 = s$, & t un nombre entier positif. Or le plus grand terme de cette progression étant $k + tq + n - 1$, & le plus petit, $k - 1$, il est aisé de trouver (*Alg.* 231) que le nombre des termes de cette progression, est $\frac{k + tq + n - 1 - k + 1}{q} + 1$, ou $\frac{tq + n}{q} + 1$; il faut donc que $\frac{tq + n}{q} + 1 = t + 2$, & par conséquent $q = n$; substituant pour q & k , leur

valeur, dans l'équation $k + tq + n - 1 = s$, on aura $tn + m + n = s$, & par conséquent $t = \frac{s - m - n}{n} = \frac{s - m}{n} - 1$; donc la réduction d'une différentielle à l'autre, sera possible, si la différence $s - m$ des exposans de x hors des deux binomes, divisée par l'exposant de x dans le binome, donne un nombre entier positif; & alors on supposera $\int x^s dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p+1} (Ax^{m+1} + Bx^{m+n+1} + Cx^{m+2n+1} + \dots Px^{s-n+1}) + \int R x^m dx (a + bx^n)^p$; & pour déterminer les coefficients A, B, C, P, R , &c. après avoir différencié, divisé par $(a + bx^n)^p dx$, & fait les opérations qui se trouveront indiquées, on transportera tout dans un même membre, & on égalera à zéro, la somme des quantités qui multiplieront une même puissance de x , ce qui donnera autant d'équations qu'on a de coefficients indéterminés.

129. Mais si l'on y fait attention, on verra que dès que $\int x^s dx (a + bx^n)^p$ dépend de $\int x^m dx (a + bx^n)^p$, réciproquement celle-ci dépend de la première; or en procédant, comme ci-dessus, pour réduire $\int x^m dx (a + bx^n)^p$ à $\int x^s dx (a + bx^n)^p$, on trouveroit qu'il faut que $\frac{m - s}{n}$ soit un nombre entier positif; & qu'il faut supposer $\int x^m dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p+1} (Ax^{s+1} + Bx^{s+n+1} + \&c. + Px^{m-n+1}) + \int R x^s dx (a + bx^n)^p$; donc soit que s soit plus grand ou plus petit que m , pourvu que $\frac{s - m}{n}$, ou $\frac{m - s}{n}$ donne un nombre entier positif, on pourra toujours ramener l'une de ces différentielles à l'autre, en mettant pour premier exposant de x , dans la suite $Ax^k + Bx^{k+q}$ &c., le plus petit des deux exposans m & s , augmenté d'une unité, & prenant pour q , l'exposant de x dans le binome.

Par exemple, si l'on veut réduire $x^4 dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, à $dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, qui dépend de la quadrature du cercle; je vois que $s - m$ est ici $4 - 0$, lequel divisé par n , c'est-à-dire, 2, donne 2, nombre entier; donc la réduction est possible; & puisque la formule $t = \frac{s - m}{n} - 1$ donne $t = 1$, que d'ailleurs le plus petit exposant $m = 0$, je mettrai donc 1 pour k ; je ferai donc $\int x^4 dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{\frac{3}{2}} (Ax + Bx^3) + \int R dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$; alors différenciant, divisant ensuite par $(bb - xx)^{\frac{1}{2}} dx$, & transposant, j'aurai

$$\begin{aligned} 0 &= Abb - Ax^2 - 3Bx^4 \\ &+ R + 3Bbbx^2 - x^4 \\ &- 3Ax^2 - 3Bx^4; \end{aligned}$$

d'où l'on tire $-6B - 1 = 0$, $-4A + 3Bbb = 0$, $Abb + R = 0$; donc $B = -\frac{1}{6}$, $A = -\frac{1}{8}bb$, $R = \frac{1}{8}b^4$; donc $\int x^4 dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{\frac{3}{2}} (-\frac{1}{8}bbx - \frac{1}{6}x^3) + \frac{1}{8}b^4 \int dx \sqrt{bb - xx} + C$.

Il est donc facile, par cette méthode, de trouver des différentielles qui se rapportent à une différentielle donnée, & par conséquent, celles qui se rapportent à la quadrature du cercle, de l'ellipse, & à celle de l'hyperbole; différentielles dont il est facile de trouver les différentes expressions, par le moyen des différentes équations de ces courbes.

130. Remarquons, en passant, que cette méthode donne aussi les différentielles binomes intégrables; en effet, chercher parmi les différentielles binomes telles que $hx^s dx (a + bx^n)^p$, quelles sont celles qui sont intégrables, c'est chercher celles qui dépendent de $Rx^{n-1} dx (a + bx^n)^p$, que nous avons vu (90) être intégrable immédiatement; or il résulte de ce

qui précède (128), que $\frac{s - n + 1}{n}$ doit être un nombre entier positif, c'est-à-dire, que $\frac{s + 1}{n}$ doit être un nombre entier positif, ce qui s'accorde avec ce que nous avons dit (91).

131. Supposons, maintenant, que les deux binomes qui entrent dans les différentielles dont il s'agit ici, aient des exposans différens; enforte que la différentielle proposée soit $hx^s dx (a + bx^n)^r$, & celle à laquelle on veut ramener celle-là, soit $x^m dx (a + bx^n)^p$, p ayant une valeur numérique plus petite que celle de r . Si r est positif, on changera la différentielle $hx^s dx (a + bx^n)^r$, en cette autre $hx^s dx (a + bx^n)^{r-p} \times (a + bx^n)^p$. Alors si $r - p$ est un nombre entier positif, on pourra réduire $hx^s dx (a + bx^n)^{r-p} (a + bx^n)^p$ en une suite de termes de cette forme $(A'x^s + B'x^{s+n} + C'x^{s+2n} + \&c.) dx (a + bx^n)^p$, dont chacun peut être ramené à $x^m dx (a + bx^n)^p$ par la méthode précédente, si $s - m$ peut être divisé par n ; & pour y ramener la totalité, on appliquera mot à mot ce qui est prescrit par cette méthode, en prenant, pour ce que nous y avons appelé s , le plus grand exposant de x dans la valeur développée de $hx^s dx (a + bx^n)^{r-p}$.

Par exemple, si j'avois $\int x^2 dx (bb - xx)^{\frac{3}{2}}$ à réduire à $\int dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, je changerois $\int x^2 dx (bb - xx)^{\frac{3}{2}}$ en

$\int x^2 dx (bb - xx) (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ ou $\int (bbx^2 dx - x^4 dx) (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$; alors ce que je dois prendre pour s , est 4. Je suppose donc, conformément à la méthode, $\int (bbx^2 dx - x^4 dx) (bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{\frac{3}{2}} (Ax + Bx^3) + \int R dx (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$.

Si au contraire la valeur de r est négative, on préparera la différentielle à laquelle on veut rapporter la proposée, on la préparera, dis-je, de cette manière, $x^m dx (a + bx^n)^{p-r} \times (a + bx^n)^r$; alors si $p - r$ est un nombre entier, comme il fera nécessairement positif (puisque nous supposons r négatif, & plus grand que p , quel que soit d'ailleurs p), on pourra réduire $x^m dx (a + bx^n)^{p-r} (a + bx^n)^r$ à une suite finie de termes de cette forme $(A'x^m + B'x^{m+n} + C'x^{m+2n} + \&c.) (a + bx^n)^r$. Alors on agira, comme s'il étoit question de réduire cette dernière à la forme $x^s dx (a + bx^n)^r$; c'est-à-dire, qu'on opérera d'une manière toute semblable à celle que nous venons de prescrire dans le cas où r étoit positif.

Par exemple, s'il s'agissoit de réduire $gx^{-2} dx (aa + xx)^{-2}$ à $dx (aa + xx)^{-1}$ ou $\frac{dx}{aa + xx}$, qui (III) s'intègre par un arc de cercle dont x est la tangente, & a le rayon; je changerois $dx (aa + xx)^{-1}$ en $(aa + xx) dx (aa + xx)^{-2}$, & comme le plus petit exposant hors du binôme proposé, est -2 , je supposerois $\int R (aa + xx) dx (aa + xx)^{-2} = (aa + xx)^{-1} (Ax^{-1} + Bx) + \int gx^{-2} dx (aa + xx)^{-2}$.

Et j'acheverois comme ci-dessus, pour déterminer les coefficients A , B & R . Alors, par la transposition, on auroit la valeur de $\int g x^{-2} dx (aa + xx)^{-2}$, dans laquelle je réduirois ensuite $R(aa + xx) dx (aa + xx)^{-2}$, à $R dx (aa + xx)^{-1}$.

Des Fractions rationnelles.

132. Toute quantité différentielle rationnelle, est toujours intrégrable, ou algébriquement, ou par des arcs de cercle, ou par des logarithmes, ou par ces trois moyens à la fois, ou par deux seulement.

Elle est toujours intégrable algébriquement, lorsqu'elle ne renferme point de dénominateur variable, à moins que ce dénominateur ne soit monome, en exceptant seulement dans ce dernier cas, la circonstance où le dénominateur ne seroit élevé à d'autre puissance que l'unité : c'est ce que nous avons vu (83).

Il nous reste donc à voir la vérité de notre proposition, dans les autres cas ; c'est-à-dire, dans les cas où la différentielle proposée a un dénominateur rationnel complexe.

Nous supposerons que dans le numérateur de la fraction différentielle proposée, la variable soit moins élevée que dans le dénominateur. Si elle n'étoit pas

dans cet état, on l'y ramèneroit en divisant le numérateur par le dénominateur, jusqu'à ce que la puissance restante fût plus petite que dans le dénominateur.

Par exemple, si j'avois à intégrer $\frac{x^3 dx}{aa + 3ax + xx}$, je commencerois par diviser $x^3 dx$ par $xx + 3ax + aa$; j'aurois $x dx$ pour quotient & $-3ax^2 dx - aax dx$ pour reste; je diviserois encore ce reste par le même dénominateur, & j'aurois $-3a dx$ pour quotient, & $+8a^2 x dx + 3a^3 dx$ pour reste; alors, au lieu de $\frac{x^3 dx}{aa + 3ax + xx}$, je prendrois $x dx - 3a dx + \frac{8a^2 x dx + 3a^3 dx}{aa + 3ax + xx}$.

Pour découvrir par quel moyen nous pourrions intégrer les fractions différentielles rationnelles, rappelons-nous que la différentielle du logarithme d'une quantité, étant la différentielle de cette quantité, divisée par cette quantité même, c'est-à-dire, étant toujours une fraction, il est assez naturel de soupçonner que l'intégration des fractions rationnelles pourra souvent dépendre des logarithmes. Prenons par exemple $2al(a+x) - 2al(2a+x)$; en différenciant, nous aurons $\frac{2a dx}{a+x} - \frac{2a dx}{2a+x}$, ou en réduisant au même dénominateur, $\frac{2a a dx}{2aa + 3ax + xx}$. Or, il est clair que pour intégrer cette fraction, il n'y aurait autre chose à faire qu'à la décomposer en deux fractions, dont l'une eût pour dénominateur $a+x$, & l'autre

$2a + x$; & dont les numérateurs feroient des nombres constans multipliés par dx ; ces deux fractions s'intégreroient alors par logarithmes.

133. Il est donc assez naturel de tenter, pour intégrer ces sortes de fractions, de les décomposer en autant de fractions simples, que le dénominateur peut avoir de facteurs, & dont chacune ait pour dénominateur un de ces facteurs; c'est en effet la méthode que l'on peut & que l'on doit suivre, lorsque tous les facteurs dont le dénominateur a pu être formé sont inégaux.

134. Mais lorsque parmi les facteurs du dénominateur, il s'en trouve qui sont égaux entre eux; alors on ne doit pas s'attendre que la méthode ait du succès, parce que l'intégration ne peut dépendre entièrement des logarithmes.

En effet, si l'on avoit, par exemple, $\frac{dx}{(a+x)^2}$ dont le dénominateur a deux facteurs égaux $a+x$ & $a+x$, on trouveroit (89) que l'intégrale de cette quantité, ou de son égale $dx(a+x)^{-2}$ est $-(a+x)^{-1} + C$ qui ne dépend point des logarithmes. Mais on voit, en même temps, que si l'on différencioit une quantité telle que $\frac{aa}{a+x} + 2al(a+x) + 2al(2a+x) - al(3a+x)$, on auroit $\frac{-aadx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{a+x} + \frac{2adx}{2a+x}$

— $\frac{a dx}{3a+x}$ ou $\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$, ou en réduisant tout au même dénominateur,
 $\frac{10a^4dx + 26a^3xdx + 17a^2x^2dx + 3ax^3dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}$; fraction qui, pour être intégrée, n'exigeroit autre chose que d'être ramenée à $\frac{2ax+aa}{(a+x)^2} dx + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$, c'est-à-dire, d'être décomposée en trois fractions, dont la première eût pour dénominateur tous les facteurs égaux, & dans son numérateur toutes les puissances de x , moindres que la plus haute puissance du dénominateur : à l'égard des deux autres fractions, elles auroient pour dénominateur, chacune, un des facteurs inégaux, & n'auroient aucune puissance de x au numérateur. C'est ainsi, en effet, qu'on peut intégrer toute fraction rationnelle ; & c'est ainsi que nous le pratiquerons, du moins lorsqu'il n'y aura pas de facteurs imaginaires dans le dénominateur ; cas que nous examinerons après.

Ainsi $\frac{(a+bx+cx^2+\dots kx^{n-1})dx}{(M+Nx+Px^2+\dots Tx^n)}$ représentant, en général, toute fraction rationnelle ; si l'on suppose que le dénominateur ait un nombre m de facteurs égaux à $x+g$, un nombre p de facteurs égaux à $x+h$, &c., & un nombre quelconque de facteurs inégaux, & représentés par $x+i$, $x+q$, $x+m$, &c., auquel cas la fraction proposée sera $\frac{(a+bx+cx^2+\dots kx^{n-1})dx}{(x+g)^m(x+h)^p \times \&c. (x+i)(x+q)(x+m)}$, &c., il faudra, pour intégrer cette fraction, supposer.

$$\begin{aligned}
& \frac{(a + bx + cx^2 + \dots kx^{n-1}) dx}{(x+g)^m (x+h)^p \times \&c.... (x+i) (x+q) (x+m) \times \&c.} \\
&= \frac{Ax^{m-1} dx + Bx^{m-2} dx \dots + R dx}{(x+g)^m} + \\
& \frac{A'x^{p-1} dx + B'x^{p-2} dx + \dots R' dx}{(x+h)^p}, \&c. + \frac{L dx}{x+i} + \\
& \frac{M dx}{x+q} + \frac{N dx}{x+n} + \&c., A, B, C, \&c., \text{étant des coefficients constants \& indéterminés. Alors, si par quelque moyen} \\
& \text{que ce soit, on détermine ces coefficients, il sera facile d'avoir} \\
& \text{l'intégrale. Cela est évident pour les fractions simples } \frac{L dx}{x+i}, \\
& \frac{M dx}{x+q}, \frac{N dx}{x+n}, \&c., \text{dont l'intégrale est } Ll(x+i), \\
& Ml(x+q), Nl(x+n), \&c.; \text{à l'égard des fractions} \\
& \frac{Ax^{m-1} dx + Bx^{m-2} dx + \dots R dx}{(x+g)^m}, \text{on fera, pour plus} \\
& \text{de simplicité, } x+g = \zeta, \text{ ce qui donnera } x = \zeta - g, \\
& \& dx = d\zeta. \text{ Substituant ces valeurs, on réduira la totalité} \\
& \text{à une suite de monomes faciles à intégrer, \& dont un seul} \\
& \text{fera de la forme } \frac{d\zeta}{\zeta}, \text{ c'est-à-dire, s'intégrera par logarithmes.} \\
& \text{De même, pour les termes.} \\
& \frac{A'x^{p-1} dx + B'x^{p-2} dx + \dots R' dx}{(x+h)^p}, \text{ on fera } x+h = \zeta'.
\end{aligned}$$

Ainsi, il ne nous reste que deux choses à examiner; la première, comment on trouve les facteurs du dénominateur de la fraction différentielle proposée; la seconde, comment on trouve les coefficients indéterminés.

135. Pour trouver les facteurs du dénominateur, il faut se conduire comme pour résoudre l'équation

qu'on auroit en égalant ce dénominateur à zéro; puis-
que (*Alg.* 178) résoudre une équation, revient à
chercher les facteurs binomes dont la multiplication
a produit cette équation. Ainsi, il faut employer les
méthodes données (*Alg.* 193 & suiv.).

136. Quant à la manière de trouver les coefficients
 A, B, C ; ce qui se présente de plus naturel, est
de réduire au même dénominateur toutes les fractions
où ils entrent; alors les deux membres de l'équation
formée de la fraction proposée & de ces nouvelles
fractions, ayant le même dénominateur, on peut
supprimer ce dénominateur de part & d'autre, &
ayant transposé tout dans un seul membre, il faut
pour que l'équation ait lieu, indépendamment de toute
valeur de x , il faut, dis-je, que la somme des termes
qui multiplieront une même puissance de x , soit zéro.
Cette condition donnera autant d'équations qu'on a
de coefficients indéterminés, & qui serviront à dé-
terminer ces mêmes coefficients. En voici des exemples.

Proposons-nous d'intégrer $\frac{dx}{aa - xx}$; je supposerai
 $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{A dx}{a + x} + \frac{B dx}{a - x}$, puisque les deux fac-
teurs du dénominateur $aa - xx$, sont $a + x$ &
 $a - x$. Alors, réduisant au même dénominateur,
j'ai $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{(Aa - Ax + Ba + Bx) dx}{aa - xx}$, suppri-
mant le dénominateur commun, divisant par dx ,

& transposant, j'ai $\left\{ \begin{array}{l} 1 + Ax \\ -Aa - Bx \\ -Ba \end{array} \right\} = 0;$

donc $1 - Aa - Ba = 0$, & $A - B = 0$,
d'où il est facile de conclure $A = \frac{1}{2a}$, & $B = \frac{1}{2a}$;

nous avons donc $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{2a} dx}{a + x} + \frac{\frac{1}{2a} dx}{a - x}$, dont
l'intégrale est $\int \frac{dx}{aa - xx} = \frac{1}{2a} l(a + x) -$
 $\frac{1}{2a} l(a - x) + C, = \frac{1}{2a} l \frac{a + x}{a - x} + C.$

Proposons-nous, pour second exemple, la fraction

$$\frac{10a^4 dx + 26a^3 x dx + 17a^2 x^2 dx + 3ax^3 dx}{(a + x)^2 (2a + x) (3a + x)}, \text{ que nous avons}$$

eue (134) en différenciant $\frac{aa}{a + x} + 2al(a + x) -$
 $a l(3a + x)$. Nous supposons donc.

$$\frac{10a^4 dx + 26a^3 x dx + 17a^2 x^2 dx + 3ax^3 dx}{(a + x)^2 (2a + x) (3a + x)} = \frac{(Ax + B) dx}{(a + x)^2}$$

+ $\frac{C dx}{2a + x} + \frac{D dx}{3a + x}$; réduisant au même dénomi-
nateur, on aura (après avoir supprimé le dénomi-
nateur commun, divisé par dx , & transposé) . . .

$$\begin{aligned} 10a^4 &+ 26a^3 x + 17a^2 x^2 + 3ax^3 = 0, \\ -6Baa &- 5Bax - Bx^2 - Ax^3 \\ -3Ca^3 &- 6Aaax - 5Aax^2 - Cx^3 \\ -2Da^3 &- 7Ca^2 x - 5Cax^2 - Dx^3 \\ &- 5Da^2 x - 4Dax^2 \end{aligned}$$

donc $3a - A - C - D = 0$, $17a^2 - B - 5Aa - 5Ca - 4Da = 0$, $26a^3 - 5Ba - 6Aa^2 - 7Ca^2 - 5Da^2 = 0$, $10a^4 - 6Ba^2 - 3Ca^3 - 2Da^3 = 0$, équation d'où l'on tirera $A = 2a$, $B = a^2$, $C = 2a$, $D = -a$; la différentielle proposée, se changera donc en $\frac{(2ax + aa)dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$, précisément comme on l'a trouvé ci-dessus. Les deux derniers termes ont évidemment pour intégrale $2al(2a+x) - al(3a+x)$; à l'égard du terme $\frac{2ax + aa}{(a+x)^2} dx$, je fais $a+x = z$, j'ai $x = z - a$, & $dx = dz$; j'aurai donc $\frac{(2az - aa)dz}{z^2}$ ou $\frac{2adz}{z} - \frac{aadz}{z^2}$, dont l'intégrale est $2alz + \frac{a}{z}$, ou $2al(a+x) + \frac{aa}{a+x}$; ainsi, l'intégrale totale est $\frac{aa}{a+x} + 2al(a+x) + 2al(2a+x) - al(3a+x)$, ainsi qu'elle doit être.

137. Cette méthode est générale. Mais on peut faciliter la recherche des coefficients, par plusieurs méthodes. Par exemple, on peut trouver, indépendamment les uns des autres, les coefficients des fractions simples, en cette manière. Soit $\frac{Ndx}{M}$ la fraction proposée; $hx + a$ un des facteurs du dénominateur; & soit P le quotient de M divisé par $hx + a$. Concevons $\frac{Ndx}{M}$ décomposé en $\frac{Adx}{hx+a} \& \frac{Qdx}{P}$; alors

nous aurons $\frac{Ndx}{M} = \frac{Adx}{hx+a} + \frac{Qdx}{P}$, ou $\frac{N}{M} = \frac{A}{hx+a} + \frac{Q}{P}$; donc en réduisant au même dénominateur, & ayant égard à la supposition que $P = \frac{M}{hx+a}$ ou $P \times (hx+a) = M$, on aura $N = AP + Q(hx+a)$. Mais en différenciant l'équation $(hx+a)P = M$, on a $hPdx + (hx+a)dP = dM$. Or cette équation, ainsi que l'équation $N = AP + Q(hx+a)$ devant avoir lieu pour toute valeur de x , auront également lieu, lorsqu'on mettra pour x une valeur quelconque. Mettons donc pour x la valeur qui donne le résultat le plus simple; c'est-à-dire, mettons pour x la valeur $-\frac{a}{h}$ que l'on a en supposant le dénominateur $hx+a=0$; alors nous aurons $hPdx = dM$, & $N = AP$. Mettant dans la seconde, la valeur $P = \frac{dM}{hdx}$ que donne la première, on a $A = \frac{hNdx}{dM}$; c'est-à-dire, que pour avoir le numérateur A de l'une quelconque des fractions simples, il faut diviser le numérateur Ndx de la proposée, par la différentielle dM de son dénominateur, & ayant substitué pour x la valeur que l'on auroit, en égalant à zéro le dénominateur de la fraction simple, on multipliera le tout, par le coefficient de x , dans ce dénominateur simple.

Par exemple, pour avoir les numérateurs A & B des fractions $\frac{A dx}{a+x}$ & $\frac{B dx}{a-x}$ dans lesquelles nous avons, ci-dessus, décomposé la fraction $\frac{dx}{a^2 - x^2}$, je différencie le dénominateur $a^2 - x^2$, ce qui me donne $-2x dx$. Je divise donc le numérateur dx de la proposée, par $-2x dx$, ce qui me donne $-\frac{1}{2x}$, dans lequel mettant successivement pour x , $-a$ & a (qui sont les valeurs que l'on trouve pour x , en égalant successivement à zéro, les dénominateurs $a+x$ & $a-x$ des fractions partielles), & multipliant par les valeurs 1 & -1 , de h , j'ai $\frac{1}{2a}$, & $\frac{1}{2a}$ pour les valeurs de A & de B , comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

On peut de même, trouver des règles générales pour déterminer les coefficients des numérateurs des fractions partielles qui ont pour dénominateur le produit des racines égales ; mais nous ne nous y arrêterons pas.

138. Quoique les règles que nous venons de donner pour intégrer les fractions rationnelles, soient générales ; cependant, lorsque quelques-uns des facteurs du dénominateur sont imaginaires, on a pour intégrale, des quantités composées d'imaginaires, intégrale qui n'est pas moins réelle, mais que l'on ne ramène pas toujours commodément à une forme réelle. Ce qu'il faut faire dans ce cas, est d'extraire d'abord du dénominateur tous ses facteurs réels ;

après quoi on décompose le reste, non en facteurs du premier degré, mais en facteurs du second, lesquels seront toujours réels (*Alg.* 229). Alors pour chaque facteur du second degré, qui peut toujours être représenté par $ax^2 + bx + c$, on forme une fraction de cette forme $\frac{Ax dx + B dx}{ax^2 + bx + c}$, & l'on détermine toujours les coefficients comme ci-dessus.

139. Si parmi les facteurs du second degré, il s'en trouve qui soient égaux entre eux, alors on formera, pour chaque groupe de facteurs égaux, une fraction de cette forme $\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \dots Qdx}{(ax^2 + bx + c)^n}$, n étant le nombre des facteurs $ax^2 + bx + c$, qui se trouvent égaux entre eux.

140. Il ne reste plus qu'à savoir comment on intègre ces quantités. Voyons d'abord la première.

Supposons, pour plus de simplicité, que la fraction partielle est réduite à cette forme $\frac{A'x dx + B' dx}{x^2 + a'x + b'}$, ce que l'on peut toujours faire, en divisant haut & bas, par a .

Alors on fera disparaître le second terme du dénominateur, en faisant $x + \frac{1}{2}a' = z$; ce qui donne $x = z - \frac{1}{2}a'$, & $dx = dz$; substituant, on aura

une quantité de cette forme $\frac{Czdz + Ddz}{zz + qq}$, dont la première partie $\frac{Czdz}{zz + qq}$ s'intègre par logarithmes (124); & la seconde s'intègre par un arc de cercle dont le rayon est q , & la tangente est z .

Quant aux quantités de la forme.....
 $\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \dots Qdx}{(x^2 + ax + b)^n}$; on fera, de même, disparaître le second terme du dénominateur, & l'on aura une quantité de cette forme $\frac{Mz^{2n-1}dz + Nz^{2n-2}dz + \dots Tdz}{(zz + qq)^n}$, que l'on intégrera, en se proposant de ramener à $\frac{dz}{zz + qq}$, selon la méthode donnée (131), l'intégrale de la somme des termes où z aura des exposans pairs. Quant à ceux où les exposans seront impairs, ils s'intégreront par ce qui a été dit (91) ou bien en les ramenant à $\frac{zdz}{(zz + qq)^n}$, selon la méthode donnée (130).

Ainsi, toute fraction rationnelle, ou s'intègre exactement, ou ne dépend, tout au plus, que des arcs de cercle & des logarithmes.

De quelques transformations qui peuvent faciliter les Intégrations.

141. On ne peut donner de règles générales sur cette matière. L'inspection des quantités, l'usage &

l'adresse dictent, dans chaque occasion, ce qu'on doit faire.

Le but des transformations dont il s'agit ici, est de rendre rationnelles, les différentielles proposées, parce qu'alors on fait les intégrer. Sur cela, voici quelques observations.

142. S'il n'y a de quantités radicales, que des monomes, on les ramenera d'abord à des exposans fractionnaires, que l'on réduira tous au même dénominateur. Alors, si $x^{\frac{k}{l}}$ représente une de ces quantités ainsi préparées, on fera $x^{\frac{1}{l}} = z$; ce qui donnera $x = z^l$, & $dx = l z^{l-1} dz$. On substituera, & l'on aura une quantité toute rationnelle.

Par exemple, si l'on avoit $\frac{dx\sqrt{x} + a dx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$, je l'écrirois ainsi $\frac{x^{\frac{1}{2}} dx + a dx}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}$; puis je la changerois en $\frac{x^{\frac{3}{6}} dx + a dx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}$.

Faisant donc $x^{\frac{1}{6}} = z$, j'aurois $x = z^6$, $dx = 6z^5 dz$; & par conséquent $\frac{6z^8 dz + 6az^5 dz}{z^4 + z^3}$, qui se réduit à $\frac{6z^5 dz + 6az^2 dz}{z + 1}$, & s'intègre facilement, par ce qui a été dit sur les fractions rationnelles.

143. Toute quantité dans laquelle il n'y aura qu'un radical complexe, qui ne passera pas le second degré, & où la variable, sous le radical, ne passera pas le

second degré, peut toujours être rendue rationnelle par l'un ou l'autre des deux moyens suivans. 1°. Après avoir dégagé le quarré de la variable sous le radical, on égalera ce radical à cette même variable, plus ou moins, une autre variable; 2°. ou bien on décomposera la quantité affectée du radical, en ses deux facteurs; & on l'égalera, ainsi décomposée, à l'un de ses facteurs, multiplié par une nouvelle variable.

Par exemple, si j'avois $\frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}}$; je puis faire $\sqrt{(xx - aa)} = x - z$; j'aurai $x = \frac{zz + aa}{2z}$. Donc $dx = \frac{(zz - aa) dz}{2z^2}$, & $\sqrt{(xx - aa)} = \frac{aa - zz}{2z} = -\frac{(zz - aa)}{2z}$; d'où $\frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}} = -\frac{dz}{z}$, qui est facile à intégrer.

Je pourrois aussi, dans ce même exemple, faire $\sqrt{(xx - aa)}$, ou $\sqrt{(x - a)(x + a)} = (x - a)z$; alors j'aurois, en quarrant & divisant ensuite par $x - a$, $x + a = (x - a)zz$; d'où $x = \frac{a + azz}{zz - 1}$; $\sqrt{(xx - aa)} = \frac{2az}{zz - 1}$; $dx = \frac{-4az dz}{(zz - 1)^2}$; donc $\frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}} = \frac{-2 dz}{zz - 1}$, qui s'intègre par les règles ci-dessus, pour les fractions rationnelles.

On peut appliquer ces méthodes à la rectification de la parabole, dont l'élément $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, est $\sqrt{(dy^2 + \frac{4y^2 dy^2}{p^2})}$, ou $dy \sqrt{(1 + \frac{4y^2}{p^2})}$. On dégagera d'abord y^2 , en écrivant $\frac{2 dy}{p} \sqrt{(\frac{p^2}{4} + y^2)}$; & on fera $\sqrt{(\frac{p^2}{4} + y^2)} = y + z$.

144. Quand il n'y a point de second terme sous le radical, on peut évaluer le radical à une nouvelle variable multipliée par la variable actuelle.

Par exemple, si j'avois $\sqrt{\frac{dx}{(aa - xx)}}$; je pourrois faire $\sqrt{(aa - xx)} = xz$. Et s'il y avoit un second terme, on pourroit encore faire usage de cette transformation, en faisant d'abord disparaître ce second terme.

145. Enfin, on peut, dans la vue de rendre rationnelle, tenter d'évaluer la variable, ou une fonction quelconque de la variable, à une nouvelle variable, ou à une fonction d'une nouvelle variable, dans laquelle on laisse quelque chose d'indéterminé, & qui puisse servir à l'objet qu'on a en vue.

Par exemple, pour savoir dans quels cas on peut rendre rationnelle, la quantité $x^m dx (a + bx^n)^p$, je ferois $(a + bx^n)^p = z^q$, q étant indéterminé. J'aurois $a + bx^n$

$$= z^{\frac{q}{p}}; x^n = \frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}; x = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}, \dots$$

$$x^m = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b} \right)^{\frac{m}{n}}; dx = \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p} - 1} dz \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b} \right)^{\frac{1}{n} - 1};$$

$$\text{donc } x^m dx (a + bx^n)^p = \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p} + \frac{m}{n} - 1} dz \cdot \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b} \right)^{\frac{m}{n} + \frac{1}{n} - 1},$$

qui est intégrable, quel que soit q , lorsque $\frac{m}{n} + \frac{1}{n} - 1$ est un nombre entier positif ou zéro (86); & qui peut être

rendue rationnelle, en faisant $q = p$, lorsque $\frac{m+1}{n} - 1$ est un nombre entier négatif. Et si p a pour valeur $\pm \frac{k}{2}$, k étant un nombre entier impair, on ramènera au cas mentionné (142), en faisant $q = k$, si $\frac{m+1}{n}$ a pour valeur $\pm \frac{k'}{2}$, k' étant un nombre entier impair.

146. Nous ne nous arrêterons pas à étendre ces sortes de transformations. Nous ferons seulement remarquer qu'on facilite souvent certaines intégrations, en égalant la variable à une fraction telle que $\frac{1}{x}$.

Par exemple, si j'avois $\frac{x^{15}dx + a dx}{x^{20} + x^{18}}$; en faisant $x = \frac{1}{z}$, j'aurois $\frac{-z^3dz - a z^{18}dz}{1 + z z}$, que, par la division, on réduira à une suite de monomes, & à une quantité de la forme $\frac{A dz}{1 + z z}$ dont on connoît actuellement l'intégrale.

De l'Intégration des Quantités exponentielles.

147. Il n'y a pas d'autres règles à donner sur l'intégration de ces quantités, que de tenter de les décomposer en deux facteurs, dont l'un soit la différentielle du logarithme de l'autre, ou en soit une partie constante (28); alors on divise par la différentielle du logarithme de ce second facteur.

Ainsi je vois que $xy \left(dylx + \frac{y dx}{x} \right)$ est intégrable,

parce que le facteur $dylx + \frac{y dx}{x}$ est la différentielle de ylx , qui est le logarithme de x^y ; j'aurai donc pour inté-

grale $\frac{x^y(dylx + \frac{y dx}{x})}{d(lx^y)} + C$; c'est-à-dire,

$x^y \frac{(dylx + \frac{y dx}{x})}{dylx + \frac{y dx}{x}} + C$, ou $x^y + C$. Par cette même

règle, je vois que $dx e^{ax}$ est intégrable, parce que dx est la différentielle du logarithme de e^{ax} , divisée par une constante. J'ai donc $\int dx e^{ax} = \frac{dx e^{ax}}{a dx e} = \frac{e^{ax}}{a e}$. Dans le cas où e est le nombre dont le logarithme est 1, la règle se réduit à diviser la différentielle proposée, par la différentielle de l'exposant de e .

Si l'on avoit à intégrer $x^m dx e^{ax}$, e étant le nombre dont le logarithme est 1, on le pourroit, lorsque m est un nombre entier positif, en faisant $\int x^m dx e^{ax} = e^{ax} (Ax^m + Bx^{m-1} + Ex^{m-2} + \&c. + k)$. Par exemple, si j'ai $\int x^2 dx e^{ax}$, je suppose $\int x^2 dx e^{ax} = e^{ax} (Ax^2 + Bx + E)$. En différenciant (28), & divisant ensuite par $dx e^{ax}$, j'ai

$$x^2 = Aax^2 + aBx + aE$$

$$+ 2Ax + B;$$

donc $Aa = 1$, $aB + 2A = 0$, $aE + B = 0$; c'est-à-dire, $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{2}{a^2}$, $E = \frac{2}{a^3}$; donc l'intégrale de

$\int x^2 dx e^{ax}$ est $e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) + C$.

On peut employer avantageusement le nombre e , dont le logarithme est 1, pour l'intégration de plusieurs quantités, principalement quand elles renferment des logarithmes.

Par exemple, si j'avois à intégrer $x^n dx (lx)^m$, je ferois $lx = z = zle$; donc $x = e^z$; $dx = dz e^z$; & par conséquent $x^n dx (lx)^m = z^m dz e^{(n+1)z}$, qui s'intègre dans le même cas que la précédente, & de la même manière.

De l'Intégration des quantités à deux, ou à un plus grand nombre de Variables.

148. Si l'on se rappelle la règle que nous avons donnée pour différencier les quantités à plusieurs variables, on verra que pour intégrer les différentielles à plusieurs variables (lorsque cela est possible) il faut rassembler tous les termes affectés de la différentielle d'une même variable, & les intégrer comme s'il n'y avoit d'autre variable que celle-là, c'est-à-dire, comme si toutes les autres étoient constantes. Alors si l'on différencie cette intégrale en faisant varier successivement toutes les variables, & que l'on retranche le résultat, de la différentielle proposée, l'intégrale qu'on a trouvée, est (en ajoutant une constante) la véritable intégrale, s'il ne reste rien. S'il y a un reste, il ne renfermera pas la variable par rapport à laquelle on a intégré: on suivra, à l'égard de ce reste, le même procédé qu'on a suivi d'abord, & ainsi de suite par rapport à chaque variable.

Par exemple, si j'avois $3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$: je prendrois les deux termes affectés de dx , savoir

$3x^2ydx + y^3dx$, & je les intégrerois comme si y étoit constant. L'intégrale est $x^3y + y^3x$. Or, cette quantité étant différenciée par rapport à x & à y , & le résultat étant retranché de la différentielle proposée, il ne reste rien : j'en conclus que l'intégrale est $x^3y + y^3x + C$.

Si j'avois $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$; en rassemblant tous les termes affectés de dx , & intégrant, en regardant y & z comme constantes, j'aurois $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$. Mais en retranchant la différentielle de cette quantité, prise en faisant varier x , y & z , en la retranchant, dis-je, de la proposée, il reste y^2dy ; je prends donc l'intégrale de y^2dy qui est $\frac{y^3}{3}$, & l'ajoutant à celle que j'ai déjà trouvée, j'ai (en y comprenant la constante) $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$, pour l'intégrale.

149. Mais comme il n'est pas toujours possible d'intégrer toute différentielle à plusieurs variables, il est bon de faire connoître à quel caractère on distinguera si cela se peut.

150. Pour y parvenir, il faut observer que si dans une quantité Q composée, comme on le voudra, de deux autres quantités x & y , on substitue d'abord pour x une quantité quelconque p , & que dans le résultat on substitue pour y une quantité q , on aura la même chose que si on avoit commencé par substituer q pour y , & ensuite p pour x : cela est évident.

151. Il suit de-là, que si on différencie une quantité quelconque Q composée de x , y & de constantes, en ne faisant d'abord que x variable, & qu'ensuite on différencie le résultat en ne faisant que y variable, on aura la même chose que si l'on eût d'abord différencié en regardant y seule comme variable, & qu'ensuite on eût différencié ce résultat, en regardant x seule comme variable.

En effet, concevons qu'en mettant d'abord $x + dx$, pour x , Q devienne Q' ; on aura $Q' - Q$ pour la différentielle. Concevons qu'en mettant $y + dy$ dans celle-ci, au lieu de y , Q' devienne Q'' , & que Q devienne Q''' , en sorte que $Q' - Q$ devienne $Q'' - Q'''$, on aura $Q'' - Q''' - Q' + Q$ pour la seconde différentielle.

Faisons maintenant nos substitutions en sens contraire; & puisqu'en mettant $y + dy$, au lieu de y dans Q , il devient Q''' , on aura $Q''' - Q$ pour la première différentielle dans la supposition de y variable. Si nous mettons maintenant $x + dx$, au lieu de x dans cette quantité, Q deviendra Q' , comme ci-dessus; & Q''' (150) deviendra Q'' , en sorte que $Q''' - Q$ deviendra $Q'' - Q'$; donc la seconde différentielle sera $Q'' - Q' - Q''' + Q$, précisément la même que la première.

Cela posé, convenons que si A représente une quantité composée de x & de y , $\frac{dA}{dy} dy$ marquera la différentielle de A prise en faisant varier y , $\frac{dA}{dx} dx$ celle de A prise en faisant varier x . De même,

$\frac{d d A}{d x d y} \cdot d x d y$ marquera que l'on différencie d'abord A , en supposant x seul variable, & qu'ensuite on différencie le résultat en faisant varier y seul.

152. Ces éclaircissemens posés, soit $A dx + B dy$ une différentielle exacte, & M son intégrale; on aura donc $\frac{d M}{d x} d x + \frac{d M}{d y} d y = A dx + B dy$; donc $\frac{d M}{d x} = A$, & $\frac{d M}{d y} = B$; donc aussi $\frac{d d M}{d x d y} d y = \frac{d A}{d y} d y$, & $\frac{d d M d x}{d y d x} = \frac{d B d x}{d x}$, ou $\frac{d d M}{d x d y} = \frac{d A}{d y}$, & $\frac{d d M}{d y d x} = \frac{d B}{d x}$; or nous venons de démontrer (151) que $\frac{d d M d x d y}{d x d y} = \frac{d d M d y d x}{d y d x}$; donc $\frac{d d M}{d x d y} = \frac{d d M}{d y d x}$; donc aussi $\frac{d A}{d y} = \frac{d B}{d x}$; c'est-à-dire, que si $A dx + B dy$ est une différentielle complète, la différentielle de A prise en faisant varier y seul, & divisant par dy , doit être égale à la différentielle de B prise en faisant varier x seul, & divisant par dx .

Ainsi je reconnois que $\frac{1}{3}y^3 dx + xy^2 dy$ est une différentielle complète, parce que $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$; en effet, le premier membre se réduit à $\frac{y^2 dy}{dy}$, & le second à $\frac{y^2 dx}{dx}$. Au contraire, je vois que $xy dx + 2x dy$ n'est pas intégrable, parce que $\frac{d(xy)}{dy}$ n'est pas égal à $\frac{d(2x)}{dx}$.

153. S'il entre plus de deux variables dans la différentielle proposée, c'est-à-dire, si elle est de cette

forme $A dx + B dy + C dz$, il faut, pour qu'elle soit intégrable, que l'on ait $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$; en effet, on peut regarder successivement z , y & x comme constantes; & la différentielle qui n'a plus alors que deux termes (puisque cette supposition donne ou $dz = 0$, ou $dy = 0$, ou $dx = 0$), n'en doit pas moins être une différentielle complète si la proposée l'est; elle doit donc, dans chacun de ces cas, avoir les qualités des différentielles complètes à deux variables.

Il est aisé, d'après cela, de trouver les conditions pour un plus grand nombre de variables.

R E M A R Q U E.

154. Supposons que Q soit une quantité inconnue composée de x , y & de constantes; & que l'on connoisse sa différentielle $A dx$, prise en regardant y comme constante. Si l'on veut avoir la différentielle totale de Q , on supposera qu'elle est $A dx + B dy$; alors B doit être tel que l'on ait $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; donc $dB = \frac{dA}{dy} dx$; intégrons en regardant x seul comme variable, puisque nous n'avons fait varier que x , dans B . Nous aurons $B = \int \frac{dA}{dy} dx$; donc $B dy = dy \int \frac{dA}{dy} dx$. Or puisque $A dx$ est supposé la différentielle de Q prise en faisant varier x , on a $Q = \int A dx$, l'intégration étant faite en regardant x seul comme variable; donc la différentielle complète de Q , ou de $\int A dx$ est

$A dx + dy \int \frac{dA}{dy} dx$; où l'intégration $\int \frac{dA}{dy} dx$ doit se faire en regardant y comme constante.

Des Équations différentielles.

155. Lorsque l'équation différentielle proposée ne renferme que deux variables, x & y ; & que l'on a, dans un seul membre, les x & dx , & les y & dy dans l'autre; alors l'intégration se réduit, pour chaque membre, aux règles que nous avons données pour les différentielles à une seule variable.

Ainsi, si l'on avoit $ax^m y^n dx = by^q x^r dy$, qui peut représenter toutes les équations différentielles à deux termes; cette équation dont les indéterminées se séparent tout de suite en divisant par y^n & par x^r , devient $ax^{m-r} dx = by^{q-n} dy$, dont l'intégrale est évidemment $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C$.

156. Mais comme il peut arriver que l'un ou l'autre, ou aucun des deux membres de l'équation différentielle séparée, ne soit intégrable algébriquement, & que néanmoins l'équation puisse être algébrique, ou du moins ramenée à une forme algébrique, il est bon d'examiner ceux de ces cas qui se rencontrent le plus fréquemment.

Par exemple, si dans l'équation précédente, on avoit $m-r = -1$, & $q-n = -1$; l'équation différentielle

se réduiroit à $\frac{a dx}{x} = \frac{b dy}{y}$, dont on ne peut avoir l'intégrale de chaque membre que par logarithmes; en sorte qu'on a $alx = bly + lC$ (*). Mais cette équation peut être rendue algébrique, en l'écrivant ainsi $lx^a = ly^b + lC$, ou $lx^a = lCy^b$; or il est évident que si les deux logarithmes sont égaux, les deux quantités auxquelles ils appartiennent, doivent être égales; donc $x^a = Cy^b$, équation algébrique.

157. Si l'on avoit seulement $q - n = -1$, l'équation différentielle seroit $ax^{m-r}dx = \frac{b dy}{y}$, dont l'intégrale est $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = bly + lC$; mais on peut donner à cette équation une forme algébrique, en multipliant le premier membre par le , e étant le nombre dont le logarithme est 1 (**); car alors on ne changera rien à l'équation. On aura donc $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} le = bly + lC$, ou (en faisant $m-r+1 = p$), $\frac{ax^p}{p} = lCy^b$, & par conséquent $e \frac{ax^p}{p} = Cy^b$. Dorénavant nous marquerons toujours par e , le nombre dont le logarithme est 1.

158. Prenons pour second exemple, l'équation $n dx = \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta\zeta)}}$; le second membre exprime l'élément d'un arc de cercle dont ζ est le sinus, & 1 le rayon. ζ est donc le sinus de $\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta\zeta)}}$, c'est-à-dire, de $\int n dx$ ou de $n x + C$.

(*) On est le maître de supposer que la Constante est un logarithme.

(**) Nous l'avons déterminé (114).

On a donc pour intégrale, $z = \sin. (nx + C)$. Pareillement, de l'équation $ndx = \frac{-dz}{\sqrt{(1-z^2)}}$, on concluroit $z = \cos. (nx + C)$.

159. De même, puisque $\frac{dz}{1+z^2}$, exprime l'élément d'un arc de cercle dont 1 est le rayon, & z la tangente; si l'on avoit $ndx = \frac{dz}{1+z^2}$, on concluroit $z = \tan. (nx + C)$. Mais si on avoit $ndx = \frac{b dz}{a + f z^2}$; pour la ramener à la forme de la précédente, on feroit $z = mu$, m étant un coefficient constant; alors on auroit $\frac{b m du}{a + f m^2 u^2}$; supposant donc $f m^2 = a$; on auroit $m = \sqrt{\frac{a}{f}}$, ce qui donneroit $ndx = b \frac{\sqrt{\frac{a}{f}} du}{a + a u u}$, d'où l'on tire $\frac{du}{1+uu} = \frac{n}{b} dx \sqrt{af}$; donc u , ou $\frac{z}{m}$ ou $z \sqrt{\frac{f}{a}} = \tan. \left(\frac{n}{b} x \sqrt{af} + C \right)$. Donc $z = \sqrt{\frac{a}{f}} \cdot \tan. \frac{n}{b} x \sqrt{af} + C$.

160. Dans les expressions $\sin. (nx + C)$, $\tan. (nx + C)$, que nous venons de trouver, $nx + C$ exprime la longueur absolue de l'arc en parties du rayon 1. Mais comme il est plus commode d'employer les nombres de degrés que les longueurs mêmes, il faudra, quand on rencontrera de pareilles expressions, évaluer les arcs en degrés; ce qui est facile en les divisant par le nombre de parties du rayon que contient un degré, c'est-à-dire, par 0,0174533, ou (ce qui revient au même) en les multipliant par 57,2974166.

Ainsi

Ainsi le sinus de l'arc qui a pour longueur b , ou le sinus de l'arc qui a un nombre de degrés exprimés par $b \times 57,2974166$, sont la même chose.

161. Si l'on avoit $\frac{n dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, dont les deux membres expriment les élémens de deux arcs qui sont l'un à l'autre :: $1 : n$, & dont les sinus sont x & y ; alors pour intégrer on rendroit chaque membre rationnel, en faisant pour le premier, $\sqrt{(1-xx)} = x\sqrt{(-1)} - z$; & pour le second, $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} - t$. L'équation se changeroit en $\frac{n dz}{z} = \frac{dt}{t}$, dont l'intégrale est $n \log z = \log t + C$, d'où l'on tire $Ct = z^n$; & en mettant pour z & t leurs valeurs, $C[y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-xx)}]^n$, qui exprime généralement, le rapport des sinus x & y de deux arcs multiples l'un de l'autre.

Mais pour faire usage de cette équation, il faut, auparavant, déterminer la constante C . Or supposons (comme on le peut) que les deux arcs ont une même origine; alors x & y doivent devenir zéro en même temps; mais dans ce cas, l'équation devient $-C\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^n$, ou $-C = (-1)^n$; or $(-1)^n$ est $+1$ ou -1 , selon que n est pair ou impair; on a donc $-C = \pm 1$, & $C = \mp 1$; le signe supérieur étant pour le cas de n , pair; & l'inférieur, pour n , impair; donc enfin $\mp [y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}]^n$.

Dans chaque cas particulier, on pourra toujours faire disparaître les imaginaires; mais le moyen le plus simple, fera d'égaliser à zéro (après avoir tout transposé dans un seul membre), la somme des quantités réelles; alors on verra

que l'équation restante sera divisible par $\sqrt{-1}$, & fera la même que celle qu'on aura formée, en égalant à zéro la somme des quantités réelles. Par exemple, si l'on fait $n = 2$, on aura $-y\sqrt{-1} + \sqrt{1-yy} = -xx - 2x\sqrt{-1} \cdot \sqrt{1-xx} + 1 - xx$, ou $\sqrt{1-yy} + 2xx - 1 + 2x\sqrt{-1} \cdot \sqrt{1-xx} - y\sqrt{-1} = 0$; égalant donc à zéro, la somme des quantités réelles, on aura $\sqrt{1-yy} + 2xx - 1 = 0$; & l'équation totale sera réduite à $2x\sqrt{-1} \cdot \sqrt{1-xx} - y\sqrt{-1} = 0$, qui étant divisée par $\sqrt{-1}$, donne $2x\sqrt{1-xx} - y = 0$, ou $y = 2x\sqrt{1-xx}$; or si l'on quarre cette équation, & l'équation $\sqrt{1-yy} + 2xx - 1 = 0$, ou plutôt $\sqrt{1-yy} = 1 - 2xx$, on aura le même résultat.

On peut, de la même manière, trouver les cosinus & les tangentes des arcs multiples. Pour ces dernières, on intégreroit $\frac{n dx}{1+xx} = \frac{dy}{1+yy}$ (111), en décomposant $1+xx$, en $(1+x\sqrt{-1})(1-x\sqrt{-1})$, & $1+yy$ en $(1+y\sqrt{-1})(1-y\sqrt{-1})$; on achèveroit ensuite, par ce qui a été dit, sur les fractions rationnelles.

162. Pendant que nous sommes sur cette matière, faisons connoître une manière d'exprimer le sinus & le cosinus d'un arc, laquelle peut être d'usage.

Soit donc $dx = \frac{dy}{\sqrt{1-yy}}$, l'équation qui exprime la relation, entre un arc x , & son sinus y . Si l'on fait $\sqrt{1-yy} = y\sqrt{-1} - \chi$; on aura $dx = \frac{-d\chi}{\chi\sqrt{-1}}$, ou $\frac{d\chi}{\chi} = -dx\sqrt{-1}$, dont l'intégrale est $l\chi = -x\sqrt{-1} + lC$, ou $l\chi = -x\sqrt{-1}le + lC$ (157), qui donne

$z = Ce^{-x\sqrt{-1}}$; & mettant pour z , sa valeur, on a
 $y\sqrt{-1} - \sqrt{1-yy} = Ce^{-x\sqrt{-1}}$. A l'égard de la
 constante C , on la déterminera en observant que l'arc x &
 son sinus, doivent devenir zéro en même temps; on aura
 donc $-\sqrt{1} = C$; donc $y\sqrt{-1} - \sqrt{1-yy} =$
 $-e^{-x\sqrt{-1}}$; & par conséquent $\sqrt{1-yy} = y\sqrt{-1}$
 $+ e^{-x\sqrt{-1}}$; quarrant, & réduisant, on aura $y =$
 $\frac{1 - e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1} \cdot e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; donc
 puisque y est sinus de x , on a $\sin. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

Si dans le second membre de l'équation $\sqrt{1-yy} =$
 $y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}$, on met pour y , la valeur qu'on
 vient de trouver, on aura $\sqrt{1-yy}$, c'est-à-dire,
 $\cosinus x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} + e^{-x\sqrt{-1}} =$
 $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$; donc $\cos. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$.

Revenons à l'intégration des équations.

163. Lorsque les indéterminées ne sont pas séparées dans l'équation différentielle proposée, alors avant d'entreprendre de les séparer, il faut voir si, par hasard, l'équation ne seroit pas intégrable dans l'état où elle est. Or c'est ce que l'on reconnoitra (152), en examinant si $\frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dy}$, supposant que $A dx + B dy = 0$ représente cette équation. Si cette condition avoit lieu, on intégreroit, comme il a été dit (148).

164. Cependant il pourroit se faire que cette condition n'eût pas lieu, & que l'équation n'en fût pas moins intégrable; mais ce feroit en la multipliant par un facteur convenable, composé de x , de y & de constantes.

Soit P , ce facteur. Alors $APdx + BPdy = 0$ fera donc une différentielle complète. Il faut donc que $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$. La question est donc réduite à trouver pour P une fonction de x , de y , & de constantes, qui satisfasse à cette équation. Mais comme cette recherche est d'une trop longue discussion, nous nous bornerons à trouver P dans le cas où il ne doit renfermer que des x & des constantes seulement, ou des y & des constantes seulement. Supposons donc que P ne doit contenir que des x , on aura simplement

$$P \frac{dA}{dy} = B \frac{dP}{dx} + P \frac{dB}{dx}, \text{ d'où l'on tire } \frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)}{B} dx,$$

on aura donc aisément P , si $\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$ se réduit à une fonction de x , comme cela est nécessaire pour que P soit, comme on le suppose, une fonction de x seule.

On pourroit encore trouver le facteur, s'il devoit être composé d'une fonction de x , multipliée ou divisée par une fonction de y d'une forme connue.

165. C'est par ce moyen qu'on peut intégrer généralement toute équation de la forme suivante, $Xy^q dy + X'y^{q+1} dx + X''y^r dx = 0$, X, X', X''

étant des fonctions quelconques de x ; q & r des exposans quelconques.

Je pourrois chercher si elle ne devient pas intégrable en la multipliant par un facteur de la forme $P y^n$, P étant une fonction de x , & n un exposant déterminé ; & je trouverois que cela se peut, en supposant $n = -r$. Mais il est plus simple de réduire tout de suite l'équation à cette forme $y^{q-r} dy + F y^{q-r+1} dx + F' dx = 0$, en divisant par X & par y^r , & représentant par F & F' les quotiens $\frac{X'}{X}$ & $\frac{X''}{X}$. Alors pour intégrer celle-ci, je suppose que P soit le facteur, P étant une fonction de x . J'aurai donc $P y^{q-r} dy + F P y^{q-r+1} dx + F' P dx = 0$. Or si P est une fonction de x , $F' P$ le sera aussi ; $\int F' P dx$ se réduira donc à l'intégration des quantités à une seule variable. Il ne s'agit donc que de rendre $P y^{q-r} dy + F P y^{q-r+1} dx$ une différentielle complete ; ce qui exige que $\frac{d(P y^{q-r})}{dx} = \frac{d(F P y^{q-r+1})}{dy}$; c'est-à-dire, que $y^{q-r} \frac{dP}{dx} = (q-r+1) y^{q-r} F P$; d'où l'on tire $\frac{dP}{P} = (q-r+1) F dx$; & en intégrant $\log P = \int (q-r+1) F dx = \int (q-r+1) F dx . \log$; donc $P = e^{\int (q-r+1) F dx}$. Substituant cette valeur de P dans l'équation $P y^{q-r} dy + \&c.$, & intégrant, on aura $\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1} e^{\int (q-r+1) F dx} + \int F' dx e^{\int (q-r+1) F dx} + C = 0$.

Je n'ai point ajouté de constante, dans l'intégration de l'équation qui a donné P , parce que n'y ayant aucune condition pour la déterminer, on est maître de la supposer nulle.

Prenons un exemple. Supposons qu'on ait à intégrer $dy + \frac{ay dx}{x} + (bx^2 + cx + f) dx = 0$. En multipliant par le facteur P , on aura $P dy + \frac{ay P dx}{x} + P(bx^2 + cx + f) dx = 0$; il faut donc que $\frac{dP}{dx} = d \frac{\left(\frac{ay P}{x}\right)}{dy} = \frac{aP}{x}$; donc $\frac{dP}{P} = \frac{a dx}{x}$; donc $lP = alx$, ou $P = x^a$. L'équation devient donc $x^a dy + ax^{a-1}y dx + bx^{a+2} dx + cx^{a+1} dx + fx^a dx$, dont l'intégrale est $x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+1} + C = 0$.

166. L'équation générale que nous venons d'intégrer, se rencontre assez fréquemment; & la méthode que nous avons employée, peut s'appliquer dans beaucoup d'autres cas.

En voici qui pourront nous être utiles par la suite.

Si l'on avoit les deux équations $(*) dx + a dy + (bx + cy) T dt = 0$, $k dx + a' dy + (b'x + c'y) T dt = 0$, x, y , & t , étant trois variables a, b, c, a' &c. des constantes, & T , une fonction quelconque de t , on réduiroit l'intégrale de ces deux équations, à la méthode précédente, en cette manière. Je multiplie l'une des deux, la première, par exemple, par un coefficient indéterminé & constant g , & ajoutant à la seconde, je multiplie la totalité par un facteur P , que je suppose être une fonction de t ;

(*) Voyez *Mém. Acad. de Berlin*, ann. 1748, une méthode qu'a donnée M. d'Alembert, pour l'intégration de ces équations.

j'aurai $(gP + kP) dx + (gaP + a'P) dy + [(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y] T dt = 0$. Supposons maintenant que cette équation soit une différentielle exacte; il faudra (153) que l'on ait, 1°. $\frac{d(gP + kP)}{dt} = \dots$
 $\frac{d[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]}{dx}$; 2°. $\frac{d(gaP + a'P)}{dt} =$
 $\frac{d[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]}{dy}$; 3°. $\frac{d(gP + kP)}{dy} =$
 $\frac{d(gaP + a'P)}{dx}$. Or P étant supposé une fonction de t , cette dernière équation se réduit à $0 = 0$. Et les deux autres donnent $(g + k) \frac{dP}{dt} = (gb + b')P$, & $(ga + a') \frac{dP}{dt} = (gc + c')P$; d'où l'on tire $\frac{dP}{P} = \frac{gb + b'}{g + k} dt$, & $\frac{dP}{P} = \frac{gc + c'}{ga + a'} dt$; donc, égalant ces deux valeurs de $\frac{dP}{P}$, & divisant par dt , on aura $\frac{gb + b'}{g + k} = \frac{gc + c'}{ga + a'}$, équation où g montera au second degré, & qui étant résolue, donnera deux valeurs de g .

Supposant donc g connu, on aura aisément P ; puisque l'équation $\frac{dP}{P} = \frac{gb + b'}{g + k} dt$, donne $P = e^{\frac{gb + b'}{g + k} t}$. Or l'équation $(gP + kP) dx + \&c.$ étant actuellement une différentielle exacte, si on l'intègre, on aura $(gP + kP)x + (gaP + a'P)y + C = 0$; donc si g marquant la première valeur de g donnée par l'équation du second degré ci-dessus, on représente par g' la seconde valeur de g , & par P' ce que devient P , en mettant g' pour g , on aura aussi $(g'P' + kP')x + (g'aP' + a'P')y + C' = 0$, C' étant une nouvelle constante. En effet, il n'y a aucune raison pour employer une des valeurs de g plutôt que l'autre.

Or de ces deux équations, il est facile de conclure les valeurs de x & de y , qui seront exprimées en t & en constantes.

Si l'on avoit quatre variables x, y, z & t , exprimées par trois équations de cette forme $adx + bdy + cdz + (ex + fy + hz) Tdt = 0$; on les intégreroit de la même manière, en multipliant la seconde & la troisième par des quantités indéterminées & constantes g & g' ; puis ajoutant les deux produits à la première, on multiplieroit le tout par un facteur P que l'on supposeroit être une fonction de t seulement. Supposant alors que cette nouvelle équation est une différentielle exacte, on trouveroit, par ce qui a été dit (153) les équations qui doivent déterminer g, g' & P . L'équation qui déterminera g , ou celle qui déterminera g' sera du troisième degré; on aura donc trois valeurs pour g , trois correspondantes pour g' , & trois correspondantes pour P ; ce qui donnera, en changeant la constante pour chaque valeur de g , trois intégrales, à l'aide desquelles il sera facile de déterminer x, y & z , en t .

On voit ce qu'il y auroit à faire, quand il y auroit un plus grand nombre de variables, pourvu que les équations fussent toujours de la forme des précédentes. La méthode seroit encore la même, quand même il y auroit un ou plusieurs termes exprimés purement en t, dt & constantes.

167. Mais si l'on avoit en général un nombre quelconque m d'équations renfermant $m + 1$ variables, combinées entre elles de quelque façon que ce soit; on multiplieroit la seconde, la troisième, &c. jusqu'à la dernière, respectivement par des quantités g, g', g'' &c., que l'on supposeroit être des fonctions indéterminées de ces variables; on les ajoutera à la

première, puis multipliant le tout par un facteur P que l'on supposera aussi être une fonction de ces variables, on supposera que l'équation totale est une différentielle complète. Par exemple, si j'avois les deux équations $A dx + B dy + C dz = 0$, $A' dx + B' dy + C' dz = 0$. Je multiplierois la seconde par g ; ajoutant à la première & multipliant le tout par P , j'aurois $P(A + A'g) dx + P(B + B'g) dy + P(C + C'g) dz = 0$. Or pour que celle-ci soit une différentielle complète, il faut (153) que $\frac{d[P(A + A'g)]}{dy} = \frac{d[P(B + B'g)]}{dx}$; $\frac{d[P(A + A'g)]}{dz} = \frac{d[P(C + C'g)]}{dx}$; $\frac{d[P(B + B'g)]}{dz} = \frac{d[P(C + C'g)]}{dy}$. C'est-à-dire,

$$\frac{dP}{dy}(A + A'g) + P \frac{d(A + A'g)}{dy} = \frac{dP}{dx}(B + B'g) + P \frac{d(B + B'g)}{dx};$$

$$\frac{dP}{dz}(A + A'g) + P \frac{d(A + A'g)}{dz} = \frac{dP}{dx}(C + C'g) + P \frac{d(C + C'g)}{dx};$$

$$\frac{dP}{dz}(B + B'g) + P \frac{d(B + B'g)}{dz} = \frac{dP}{dy}(C + C'g) + P \frac{d(C + C'g)}{dy}.$$

Si à l'aide des deux dernières équations, on tire les valeurs de $\frac{dP}{dx}$ & de $\frac{dP}{dy}$, & qu'on les substitue dans la première, on aura, après réduction faite,

$$(C + C'g) \left(\frac{d(A + A'g)}{dy} - \frac{d(B + B'g)}{dx} \right) + (A + A'g) \times \left(\frac{d(B + B'g)}{dz} - \frac{d(C + C'g)}{dy} \right) + (B + B'g) \left(\frac{d(C + C'g)}{dx} - \frac{d(A + A'g)}{dz} \right) = 0,$$

équation indépendante de P . On cherchera donc pour g , une fonction de x , y & z , la plus générale qui soit possible, & qui puisse satisfaire à cette équation. Ayant trouvé g , on cherchera pour P une fonction de x , de y & de z , qui satisfasse à deux quelconques des trois équations qu'on a

trouvées d'abord ci-dessus, ce qui, à la vérité, exige souvent beaucoup de recherches, mais du moins est toujours possible.

Remarquons que si l'on n'avoit qu'une seule équation, c'est-à-dire, si l'on avoit $A' = 0$, $B' = 0$, & $C' = 0$, la dernière équation que l'on vient de trouver, se réduiroit à $C \left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} \right) + A \left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} \right) + B \left(\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz} \right) = 0$; qui étant une équation de condition entre les coefficients A , B , C , fait voir que pour qu'une équation différentielle à trois variables $A dx + B dy + C dz = 0$ soit intégrable, même en la multipliant par un facteur, il faut que les coefficients A , B , C aient la relation marquée par l'équation $C \left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx} \right) + \&c. = 0$. Lorsque cette condition est remplie, on détermine le facteur P , de manière qu'il satisfasse à deux des trois équations $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$, $\frac{d(AP)}{dz} = \frac{d(CP)}{dx}$, $\frac{d(BP)}{dz} = \frac{d(CP)}{dy}$.

On voit par-là ce qu'il y a à faire, quand on a un plus grand nombre d'équations & un plus grand nombre de variables, & l'on peut, par ce même moyen, trouver quelles sont les équations où il suffira que g soit une constante, ou une fonction de l'une, ou de deux des variables, &c.

168. Lorsque l'équation différentielle proposée ne rentre pas dans les cas que nous avons exposés jusqu'à (167); alors il faut voir si l'on ne peut pas séparer les indéterminées. Quelquefois il ne faut, pour cela, que l'application des règles ordinaires de l'Algèbre : d'autres fois il faut des transformations. Mais

il y a beaucoup d'équations à l'égard desquelles on ignore quelle est la transformation convenable.

L'équation $ax^ndx + by^qx^ndx = y^kdy (e + fx^h)^r$ se sépare immédiatement par la division, parce qu'elle est la même chose que $(a + by^q) x^ndx = y^kdy (e + fx^h)^r$, qui devient $\frac{x^ndx}{(e + fx^h)^r} = \frac{y^kdy}{a + by^q}$, dont l'intégration dépend de celle des quantités binomes à une seule variable.

Mais si j'avois $gxdx = ax^4ydy + 2abx^2y^3dy + abby^5dy$, on voit d'abord facilement, qu'on peut l'écrire ainsi, $gxdx = (x^4 + 2bx^2y^2 + bby^4) aydy$. On voit ensuite qu'on peut lui donner cette autre forme $gxdx = (x^2 + by^2)^2 \times aydy$. Or avec un peu d'attention, on voit que la séparation réussira, si l'on fait $x^2 + by^2 = z$; en effet, on aura $x^2 = z - by^2$, & $x dx = \frac{1}{2} dz - by dy$ donc substituant, on aura $\frac{1}{2} g dz - bgy dy = azzy dy$. Équation d'où l'on tire $\frac{\frac{1}{2} g dz}{bg + azz} = y dy$, qui est facile à intégrer.

169. Comme on ne peut donner de règles générales sur les transformations, nous nous bornerons à quelques cas généraux, dans lesquels on fait que la séparation réussit.

On peut séparer, généralement, dans toutes les équations homogènes à deux variables; c'est-à-dire, dans celles où les deux indéterminées x & y , ont dans chaque terme, soit qu'elles se trouvent ensemble,

soit qu'elles soient seules, la même somme de dimensions.

En effet, concevons que $A dx + B dy = 0$, soit une équation homogène, & que l'on divise tout par une puissance de x , dont l'exposant soit égal au nombre des dimensions de l'équation; il est facile de sentir qu'il n'y aura plus dans A & dans B , que des puissances de $\frac{y}{x}$ & des constantes; en sorte que l'équation sera $F dx + F' dy = 0$, F & F' étant des fonctions de $\frac{y}{x}$ & de constantes. Cela posé, puisque $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x dy - y dx}{x^2}$, on aura $dx = -\frac{xx}{y} d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y} dy$; donc si l'on fait $\frac{y}{x} = z$, on aura $dx = -\frac{y dz}{z^2} + \frac{dy}{z}$; substituant donc pour $\frac{y}{x}$, & pour dx leurs valeurs, on aura $-\frac{F y dz}{z^2} + \frac{F dy}{z} + F' dy = 0$, F & F' étant actuellement des fonctions de z & de constantes. Or cette équation donne $\frac{dy}{y} = \frac{F dz}{Fz + F'z^2}$, équation toute séparée, puisque F & F' ne renferment plus d'autre variable que z .

Par exemple, si j'avois $y^3 dx + y^2 x dy + b x^3 dy = 0$, qui est homogène, & dont le nombre des dimensions est 3; je diviserois par x^3 , & j'aurois $\frac{y^3}{x^3} dx + \frac{y^2}{x^2} dy + b dy = 0$; faisant donc $\frac{y}{x} = z$, ou $x = \frac{y}{z}$, j'aurois $dx = \frac{y dz - y dz}{z^2}$; substituant dans l'équation proposée, il vient $z^2 dy - y z dz + z^2 dy + b dy = 0$, d'où je tire $\frac{dy}{y} = \frac{z dz}{2z^2 + b}$, dont l'intégrale est $ly = \frac{1}{4} l(z^2 + b) + lC$, qui donne $y = C(z^2 + b)^{\frac{1}{4}}$, ou $y^4 = C^4(z^2 + b)$, ou enfin $y^4 = C^4\left(\frac{y^2}{x^2} + b\right)$, en remettant pour z , sa valeur $\frac{y}{x}$.

170. Il feroit donc avantageux de pouvoir rendre les équations homogènes. On n'a pas de méthode générale pour cela. Il faut avoir recours aux transformations. Celles qui peuvent promettre quelque succès, consistent à égaler une des variables, ou une fonction de cette variable, ou même une fonction des deux, à une fonction d'une nouvelle variable avec des exposans indéterminés. On détermine ensuite ces exposans, par la condition que l'équation transformée soit homogène.

Par exemple, si je veux chercher des cas où l'équation $ax^m dx + by^n x^q dy + cy^k dy = 0$, à laquelle on peut réduire toute équation à trois termes, si je veux, dis-je, chercher des cas où elle puisse devenir homogène, je ferai $x = z^h$; alors j'aurai $ahz^{mh+h-1}dz + by^n z^{qh} dy + cy^k dy = 0$. Or il faut, pour que celle-ci soit homogène, que l'on ait $k = qh + n$, & $k = mh + h - 1$, d'où l'on tire $h = \frac{n+1}{m-q+1}$, & $k = \frac{mn+q+n}{m-q+1}$; ainsi, si les exposans k , q , m & n sont tels que cette dernière équation ait lieu, on pourra rendre l'équation homogène, & par conséquent séparer.

171. En général, au défaut des méthodes directes, on cherche à ramener les équations proposées, à d'autres équations dont l'intégration soit connue. C'est ainsi qu'on en use, par exemple, à l'égard de l'équation particulière $dy + ay^2 dx = bx^m dx$, connue sous le nom d'équation de *Riccati*, & que l'on ne fait intégrer que pour certaines valeurs de m .

Si m étoit zéro, on auroit alors $dy + ay^2 dx = b dx$

qui est séparable, & donne $\frac{dy}{b - ay^2} = dx$, dont l'intégration est facile.

Mais pour intégrer l'équation, lorsque m a d'autres valeurs, il faut tâcher de la changer en une autre, où ay^2 & b soient multipliés par une même puissance de x ; alors elle sera séparable. Voici comment on trouve les valeurs de m , qui permettent cette transmutation. Faisons $y = Ax^p + x^q t$; nous aurons $dy = pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt$; substituant, il vient
$$\left. \begin{aligned} pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt + ax^{2q}tdx \\ + aAAx^{2p}dx + 2aAAx^{p+q}tdx \end{aligned} \right\} = bx^m dx.$$

Supposons $p - 1 = 2p$, $pA + aAA = 0$, $p + q = q - 1$, $q + 2aA = 0$; nous aurons $p = -1$, $A = \frac{1}{a}$, $q = -2$; ce qui change la transformée, en $x^{-2}dt + ax^{-4}ttdx = bx^m dx$, ou $dt + ax^{-2}ttdx = bx^{m+2}dx$, qui sera séparable, si $m = -4$. Faisons, dans celle-ci, $t = \frac{1}{z}$, elle se changera en $dz + bx^{m+2}zdx = ax^{-2}dx$. Faisant donc $z = A'x^{p'} + x^{q'}t'$, & opérant comme ci-devant, on aura
$$\left. \begin{aligned} p'A'x^{p'-1}dx + q'x^{q'-1}t'dx + x^{q'}dt' + bx^{2q'+m+2}t't'dx \\ + bA'^2x^{2p'+m+2}dx + 2bA'x^{p'+q'+m+2}t't'dx \end{aligned} \right\} = ax^{-2}dx.$$

Supposant $2p' + m + 2 = p' - 1$, $p'A' + bA'^2 = 0$, $q' + 2bA' = 0$, $q' - 1 = p' + q' + m + 2$, on aura $p' = -m - 3$, $A' = \frac{m+3}{b}$, $q' = -2m - 6$, & $x^{-2m-6}dt' + bx^{-3m-10}t't'dx = ax^{-2}dx$, ou $dt' + bx^{-m-4}t't'dx = ax^{2m+4}dx$, qui sera séparable, si $-m - 4 = 2m + 4$, ou si $m = -\frac{8}{3}$.

Si l'on fait $t' = \frac{1}{z}$, puis $z' = A''x^{p''} + x^{q''}t''$, & que

l'on continue toujours de même, on trouvera successivement, que l'équation est séparable, lorsque $m = -\frac{1}{5}$, $m = -\frac{16}{7}$, $m = -\frac{20}{9}$, &c., c'est-à-dire, en général, lorsque $m = \frac{-4r}{2r-1}$, r étant un nombre entier positif.

Et en remontant aux substitutions précédentes, on verra que y a pour expression

$$y = Ax^{-1} + x^{-2} \left(\frac{1}{A'x^{-m-3} + x^{-2m-6}} \right. \\ \left(\frac{1}{A''x^{-2m-5} + x^{-4m-10}} \right. \\ \left. \left(\frac{1}{A'''x^{-3m-7} + \&c.} \right. \right.$$

en continuant jusqu'à ce que le premier terme en x dans l'un des dénominateurs, ait pour exposant $-rm - 2r - 1$; & alors le second terme doit être $x^{-2rm-4r-2}$; t étant une variable qui, après la substitution de cette valeur de y , se détermine par l'intégration de l'équation résultante, qui est séparable alors.

Reprenons l'équation $dy + ay^2dx = bx^m dx$; & concevons qu'au lieu de substituer d'abord $y = Ax^p + x^q t$, comme nous l'avons fait ci-dessus, nous fassions d'abord $y = \frac{1}{x}$, puis $z = Ax^p + x^q t$, & que nous continuions d'opérer comme ci-dessus; ou conclura, de même, que l'on séparera toutes les fois que $m = \frac{-4r}{2r+1}$, r étant un nombre entier positif. Et la valeur de y fera.

$$y = \frac{1}{Ax^{-m-1} + x^{-2m-2}} \\ \left(\frac{1}{A'x^{-2m-3} + x^{-4m-6}} \right. \\ \left(\frac{1}{A''x^{-3m-5} + \&c.} \right.$$

en continuant de même jusqu'à ce que le premier terme en x dans le dernier dénominateur, soit $-m(r+1)-2r-1$; & alors le second terme doit être $x^{-(2m+2)(r+1)-2}t$.

On ramènera aux mêmes cas, l'équation $x^r dy + ay^2 x^n dx = b x^m dx$, en divisant par x^r , puis faisant $x^{n-q+1} = z$.

Tels sont les moyens généraux que l'on emploie, lorsque les dx & les dy ne passent pas le premier degré. Quant aux équations qui renfermeroient différentes puissances de dx & dy ; comme elles ne peuvent manquer d'être homogènes à l'égard de dx & dy , on divisera tout par dx élevé à une puissance égale à la somme des dimensions de dx & dy ; on résoudra l'équation en considérant $\frac{dy}{dx}$ comme l'inconnue. Alors dx & dy n'étant plus qu'au premier degré, on verra, si on peut appliquer à cette équation les méthodes précédentes.

Des Équations différentielles du second, troisième, &c. ordre.

172. La liberté que l'on a (19) de prendre pour constante, dans une différenciation, l'une quelconque des différences premières, peut contribuer dans beaucoup de cas, à faciliter l'intégration. Mais comme il peut arriver que lors de la différenciation, on ait fait constante la différentielle qui n'est pas la plus propre à faciliter l'intégration, il faut commencer par montrer comment on peut ramener une équation différentielle dans laquelle on a supposé telle ou telle différence

différence constante, à une autre où il n'y en ait plus aucune de constante: on fera le maître ensuite de supposer constante celle que l'on voudra.

Soit donc $A dx^2 + B dx dy + C dy^2 + D ddy = 0$, l'équation à deux variables & à différences secondes, dans laquelle la première différence dx d'une des variables a été supposée constante. Après avoir divisé cette équation par dx , on l'écrira ainsi $A dx + B dy + \frac{C dy^2}{dx} + D d\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, qui est en effet la même, parce que, tant qu'on suppose dx constant, $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ est égal à $\frac{d dy}{dx}$. Mais si l'on ne veut plus que dx soit constant, alors $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx d dy - dy d dx}{dx^2}$; l'équation se change donc en $A dx + B dy + \frac{C dy^2}{dx} + D\left(\frac{dx d dy - dy d dx}{dx^2}\right) = 0$, dans laquelle il n'y a plus aucune différence constante.

Soit $A dx^3 + B dx^2 dy + C dy^2 dx + D dy^3 + E dx ddy + F dy ddy + G d^3 y = 0$; l'équation à différences troisièmes, dx étant toujours constant.

On divisera par dx^2 , & l'on aura $A dx + B dy + \frac{C dy^2}{dx} + D \frac{dy^3}{dx^2} + E \frac{d dy}{dx} + F \frac{dy}{dx} \frac{d dy}{dx} + G \frac{d^3 y}{dx^2} = 0$, que l'on pourra écrire ainsi, $A dx + B dy + \frac{C dy^2}{dx} + \frac{D dy^2}{dx^2} + E d\left(\frac{dy}{dx}\right) + F \frac{dy}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) + G d\left[\left(\frac{1}{dx}\right) d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$; & faisant tout varier dans ces différenciations indiquées, on aura l'équation où il n'y aura plus de différentielle constante.

Appliquons cela à un exemple. Soit $dx^2dy - dy^3 = adxdy + xdx dy$, dans laquelle on ait supposé dx constant. On ne voit pas, sur le champ, comment cette équation pourroit être intégrée; mais si nous rendons dx variable, en écrivant $dx dy - \frac{dy^3}{dx} = (adx + xdx) d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, alors nous pouvons, dans cette différenciation indiquée, prendre dy pour constante, & nous aurons $dx dy - \frac{dy^3}{dx} = -(adx + xdx) \frac{dy ddx}{dx^2}$, qui en réduisant, devient $dx^2 + xddx + addx - dy^2 = 0$, dont l'intégrale, ainsi qu'il est aisé de le voir, est $x dx + adx - y dy + C dy = 0$, en ajoutant une constante $C dy$ de même ordre que l'intégrale. Cette équation étant intégrée de nouveau, donne $\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{y^2}{2} + Cy + C' = 0$.

172. Examinons maintenant les équations à différences secondes, & à deux variables. Nous appellerons ainsi, celles dans lesquelles il n'y a pas de différences qui passe le second ordre, à quelque puissance que dx & dy y soient d'ailleurs élevés.

Nous supposerons qu'une des différences est constante; mais il sera facile d'en conclure comment on devroit se conduire si elles étoient toutes deux variables.

Soit donc $Addy + B = 0$, l'équation générale qui peut représenter toute équation différentielle du second ordre, à deux variables x & y , & dans laquelle dx est constante. A & B sont des fonctions quelconques de x , y , dx , dy & constantes.

J'écris ainsi cette équation. . . . $Addy + \left(\frac{B-k}{dy}\right) dy + \frac{k}{dx} dx = 0$; k étant une fonction inconnue, de même nature

que A & B . Je multiplie cette équation par un facteur P que je suppose être une fonction de x, y, dx, dy & constantes; & j'ai $AP ddy + P \left(\frac{B-k}{dy} \right) dy + \frac{Pk}{dx} dx = 0$, que je suppose être une différentielle complète.

Cela posé, nous avons trois différences, savoir ddy, dy & dx . Regardant donc ces différences comme celles d'autant de variables différentes, il faut (153) que l'on ait $d \left(\frac{AP}{dy} \right) = \frac{d \left[P \left(\frac{B-k}{dy} \right) \right]}{ddy}$; $d \left(\frac{AP}{dx} \right) = d \left(\frac{Pk}{dy} \right)$; $d \left[P \left(\frac{B-k}{dy} \right) \right] = \frac{d \left(\frac{Pk}{dx} \right)}{dx}$. De ces trois équations, on peut, en imitant ce qui a été fait (167), déduire une équation où P n'entre plus, & qui serviroit à déterminer k , en prenant pour k une fonction, la plus générale qu'il soit possible, de x, y, dx & dy ; avec des coefficients indéterminés que l'on substituerait dans cette même équation. Après quoi on détermineroit P , en prenant de même une fonction de même espèce, & telle qu'elle satisfît à deux de ces trois équations. Mais on peut simplifier cette recherche, & la borner à chercher pour P une fonction de x, y, dx, dy qui satisfasse à deux équations.

Les deux premières des trois équations que nous venons de trouver, donnent $\frac{d(AP)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} P(B-k) + \frac{1}{dy} \frac{d[P(B-k)]}{ddy}$, ou bien $\frac{d(AP)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} P(B-k) + \frac{1}{dy} \frac{d(PB)}{ddy} - \frac{1}{dy} \frac{d(Pk)}{ddy}$, & $\frac{d(AP)}{dx} = \frac{1}{dx} \frac{d(Pk)}{ddy}$. Substituant, dans l'avant-dernière équation, la valeur de

$\frac{d(Pk)}{ddy}$ tirée de la dernière, on aura $\frac{d(AP)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} \times P(B-k) + \frac{1}{dy} \frac{d(PB)}{dx} - \frac{dx}{dy} \frac{d(AP)}{dx}$; d'où l'on tire $P(B-k) = dy \frac{d(PB)}{dx} - dx dy \frac{d(AP)}{dx} - dy^2 \frac{d(AP)}{dy}$; d'où il sera facile d'avoir k , dès que P sera connu.

Or de cette dernière équation, on tire $Pk = PB - dy \frac{d(PB)}{dx} + dx dy \frac{d(AP)}{dx} + dy^2 \frac{d(AP)}{dy}$; substituant cette valeur dans l'équation $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d\left(P \frac{(B-k)}{dy}\right)}{ddy}$, & dans l'équation $d\left(\frac{P(B-k)}{dx}\right) = \frac{d\left(\frac{kP}{dx}\right)}{dy}$, on aura

$$\frac{d(AP)}{dy} = d\left(\frac{\frac{d(PB)}{dx} - dx \frac{d(AP)}{dx} - dy \frac{d(AP)}{dy}}{ddy}\right), \&$$

$$\frac{d\left(\frac{\frac{d(PB)}{dx} - dx \frac{d(AP)}{dx} - dy \frac{d(AP)}{dy}}{dx}\right)}{dy} = \dots$$

$$\frac{d\left(\frac{PB}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{d(PB)}{dy} + dy \frac{d(AP)}{dx} + \frac{dy^2}{dx} \frac{d(AP)}{dy}\right)}{dy}.$$

La question est donc réduite à trouver pour P une fonction de x, y, dx, dy & constantes, qui satisfasse à ces deux équations. Mais quoique cela soit toujours possible, cela n'est pas également facile; c'est pourquoi abandonnant cette recherche générale, nous allons examiner quelques équations plus limitées, mais cependant très-étendues.

Observons auparavant qu'il est facile, d'après ce que nous venons d'exposer, de déterminer si l'équation proposée est

intégrable dans l'état où elle est. Il n'y a qu'à supposer $P = 1$; alors il faut, pour que l'équation soit intégrable, qu'elle satisfasse aux deux équations suivantes.

$$\frac{dA}{dy} = \frac{\left(\frac{dB}{ddy} - dx \frac{dA}{dx} - dy \frac{dA}{dy} \right)}{ddy}, \&$$

$$\frac{d \left(\frac{dB}{ddy} - dx \frac{dA}{dx} - dy \frac{dA}{dy} \right)}{dx} =$$

$$\frac{d \left(\frac{B}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{dB}{ddy} + dy \frac{dA}{dx} + \frac{dy^2}{dx} \frac{dA}{dy} \right)}{dy} . \text{ Cela est gé-}$$

néral, quelle que soit l'équation différentielle du second ordre, dx étant constant.

173. Proposons-nous, maintenant, d'intégrer l'équation $Gdx^2 + Hdx dy + K dy^2 + Lddy = 0$, lorsque le facteur P qui manque à cette équation pour être intégrable, ne doit être qu'une fonction de x , de y & de constantes. Je suppose d'ailleurs que G, H, K & L ne renferment ni dx , ni dy ; mais seulement des fonctions de x, y & constantes.

Si l'on compare cette équation, à l'équation générale $A dy + B = 0$, on aura $A = L$, & $B = Gdx^2 + Hdx dy + K dy^2$. Substituant dans les deux équations que nous avons eues, ci-dessus, pour déterminer P , & faisant attention à la supposition que nous faisons, savoir que P, G, H, K & L ne renferment ni dx , ni dy , nous aurons $\frac{d(P L)}{dy} = K P$; & une seconde équation, laquelle, après y avoir substitué pour $\frac{d(P L)}{dy}$, sa valeur $K P$, se réduit à $d \frac{\left(P H dx + K P dy - dx \frac{d(P L)}{dx} \right)}{dx} =$

$\frac{d \left(P G dx + dy \frac{d(P L)}{dx} \right)}{dy}$. Mais à cause de $\frac{d(P L)}{dy} = K P$,

on a $\frac{d(K P)}{dx} = \frac{d \left(\frac{d(P L)}{dy} \right)}{dx} = \frac{d d(P L)}{dx dy}$; donc notre seconde équation se réduit (après avoir divisé chaque membre par dx) à $\frac{d(P H)}{dx} - \frac{d d(P L)}{dx dx} (*) = \frac{d(P G)}{dy}$. Cette équation & l'équation $\frac{d(P L)}{dy} = K P$, sont celles que nous avons à traiter actuellement, pour intégrer la proposée.

Observons maintenant que, dans cette dernière équation, il n'y a que y qui soit regardée comme variable. Cela posé, exécutant la différenciation indiquée, & tirant la valeur de $\frac{dP}{P}$, on aura $\frac{dP}{P} = \frac{K}{L} dy - \frac{dL}{L}$; prenant donc l'intégrale, en regardant y seule comme variable, puisque la différenciation a été faite dans cette supposition, on aura $lP = \int \frac{K}{L} dy - lL + lX$. J'ajoute, pour constante, la quantité lX , par laquelle j'entends une fonction de x & de constantes. C'est parce que x a été supposée constante dans la différenciation.

De cette équation je tire $P = \frac{X}{L} e^{\int \frac{K}{L} dy}$. Si l'on substitue cette valeur de P dans l'équation $\frac{d(P H)}{dx} - \&c.$, & que l'on divise ensuite par $e^{\int \frac{K}{L} dy}$, on aura l'équation qui doit déterminer X . Or comme X doit être une fonction de x ,

(*) Par cette expression $\frac{d d(P L)}{dx dx}$, & diviser ensuite par dx ; puis différencier le résultat, en faisant varier x , & diviser encore par dx . nous entendons qu'on doit différencier $P L$, en faisant varier x ,

il s'ensuit que, pour que l'équation proposée soit intégrable par la multiplication d'un facteur composé seulement de x , y & de constantes, il faut que, dans celle-ci, tous les y disparaissent.

Supposons, par exemple, que l'on ait l'équation $2ydx^2 + (2x + 3yx) dx dy + 2x^2dy + x^2yddy = 0$, qui n'est point intégrable dans l'état où elle est. J'ai donc $L = x^2y$, $G = 2y$, $H = 2x + 3yx$, $K = 2x^2$; donc $P = \frac{X}{x^2y} e^{\int \frac{2dy}{y}} = \frac{X}{x^2y} e^{ly^2} = \frac{X}{x^2y} y^2 = \frac{Xy}{x^2}$. Substituant cette valeur de P , & celles de L , G , H , &c. dans l'équation $\frac{d(PH)}{dx}$, &c., on aura, après avoir transposé, $-\frac{4Xy}{x^2} + \frac{2y dX}{x dx} - \frac{2Xy}{xx} + \frac{3y^2 dX}{x dx} - \frac{3Xy^2}{xx} - \frac{y^2 d dX}{dx^2} = 0$; égalant donc à zéro la somme des termes affectés de y , & divisant ensuite l'une des équations par y , & l'autre par y^2 , on aura, après réduction faite, $\frac{dX}{X} = \frac{3dx}{x}$, & $-x^2 d dX + 3x dX dx - 3X dx^2 = 0$. La première donne $X = x^3$; & cette valeur substituée dans la seconde, y satisfait; on a donc $X = x^3$, & par conséquent $P = \frac{x^3y}{x^2} = xy$.

Maintenant, si l'on remonte à la valeur de Pk , trouvée (172), on aura $Pk = 2xy^2dx^2 + 3x^2y^2dxdy$, & $P(B - k) = 2x^2y dxdy + 2x^3y dy^2$; en sorte que l'équation, rapportée à la forme générale (172), devient $x^3y^2ddy + (2x^2y dx + 2x^3y dy) dy + (2xy^2dx + 3x^2y^2dy) dx = 0$.

Pour intégrer, on suivra la même règle qui a été donnée (148); on regardera d'abord, dans x^3y^2ddy , dy seule comme variable, & l'on aura x^3y^2dy . Différenciant cette quantité en faisant tout varier, & retranchant de l'équation,

il reste $(2x^2y dx) dy + (2xy^2 dx) dx$. On intégrera le premier de ces termes, en regardant y seule comme variable, & l'on aura $x^2y^2 dx$, dont la différentielle, prise en regardant y & x comme variable, étant retranchée du reste précédent, ne laisse rien; ainsi l'intégrale est $x^3y^2 dy + x^2y^2 dx + C dx = 0$, en ajoutant une constante.

On peut prendre, pour second exemple, l'équation $2 dx^2 + (3x + y + 2) dy dx + 2x dy^2 + (x^2 + xy) ddy = 0$, qui s'intégrera de la même manière. On trouvera que X doit être égal à x , & $P = x + y$.

174. Si après la substitution de la valeur de P , dans l'équation $\frac{d(PH)}{dx}$, &c., tous les y disparaissent d'eux-mêmes, l'équation qui doit donner X , est alors différentielle du second ordre; en sorte qu'il semble que la méthode n'est, dans ce cas, d'aucune utilité. Mais il faut observer que l'équation qu'on aura alors, sera de cette forme $A dx^2 + B X dx^2 + C dX dx + E ddX = 0$, A, B, C, E étant des fonctions de x & de constantes. Or, pour intégrer cette équation, je l'écris ainsi $AP' dx^2 + BP'X dx^2 + (C - k') P' dx dX + k' P' dX dx + EP' ddX = 0$. Je suppose, maintenant, que P' & k' étant des fonctions de x seulement, les quatre derniers termes, forment ensemble une différentielle exacte: alors le premier terme étant une fonction de x , s'intégrera aisément. Or les équations qui résultent de cette supposition, sont $\frac{d(EP')}{dx} = \frac{d(k'P'dX + BP'X dx)}{dX}$, $\frac{d(EP')}{dX} = \frac{d[(C - k')P' dx]}{dX}$, $\frac{d(k'P'dX + BP'X dx)}{dX} = \dots\dots\dots$, $\frac{d[(C - k')P' dx]}{dx}$, & $\frac{d[(C - k')P' dx]}{dx} = \frac{d(BP'X dx)}{dX}$. Or ces quatre équations se réduisent aux deux suivantes (eu égard à ce que k', P', A, B , &c., ne renferment point X),

$\frac{d(EP')}{dx} = kP'$, & $BP' = \frac{d[(C-k')P]}{dx}$. Tirant de chacune de ces deux équations, la valeur de $\frac{dP'}{P'}$, & égalant l'une de ces valeurs à l'autre, on aura, après les réductions faites, $Edk' + (C-k')dE - k'(C-k')dx + Bedx - EdC = 0$, équation différentielle du premier ordre seulement, dont dépend la valeur de X , & par conséquent l'intégrale de la proposée. Supposant donc qu'on ait déterminé k' par le moyen de cette équation, on aura aisément P' , par le moyen de l'équation $kP' = \frac{d(EP')}{dx}$, qui donne $\frac{dP'}{P'} = \frac{k'dx}{E} - \frac{dE}{E}$, & par conséquent $P' = \frac{H}{E} e^{\int \frac{k'dx}{E}}$, H étant une constante. Alors k' & P' étant trouvés, on aura X , en mettant les valeurs de k' & P' dans l'équation $AP'dx^2 + BP'Xdx + (C-k')P'dxdX + kP'dXdX + EP'ddX = 0$, & intégrant. Or comme cette équation ne peut manquer à présent d'être une différentielle complète, on a pour son intégrale $dx \int AP'dx + Xdx \int BP'dx + dX \int kP'dx + Ldx = 0$, L étant une constante: & cette dernière s'intègre facilement par ce qui a été dit (165); on aura donc X dès qu'on aura k' ; ainsi, on peut dire généralement, que toutes les fois qu'il ne manquera à l'équation $Gdx^2 + Hdx dy + Kdy^2 + Lddy = 0$, qu'un facteur composé de x , de y & de constantes, pour être une différentielle exacte, cette équation sera toujours facilement réductible à une équation différentielle du premier ordre, quels que soient, d'ailleurs, G , H , K , L .

Mais si après la substitution de la valeur de P dans l'équation $\frac{d(PH)}{dx}$ &c., l'équation renferme encore des y que l'on ne puisse faire disparaître sans assujettir les coefficients G ,

H, K, L à certaines conditions, c'est une preuve que le facteur P doit, en outre, renfermer des dx & des dy ; alors il faut avoir recours à la méthode générale (172).

On s'y prendra de même pour trouver dans quels cas toute autre équation différentielle du second ordre, d'une forme connue, peut être intégrée par la multiplication d'un facteur composé de x, y & constantes, ou de x, dy, dx & constantes, ou de y, dx & constantes, &c.

175. A l'égard des équations différentielles du troisième ordre, en les supposant représentées généralement par $A d^3y + B = 0$, A & B étant des fonctions de x, y, dx, dy, ddy & de constantes, & supposant de plus que P est le facteur composé de x, y, dx, dy, ddy & constantes qui peut la rendre intégrable, on pourra l'écrire ainsi $AP d^3y + P \frac{B-k}{ddy} ddy + P \frac{k-l}{dy} dy + \frac{Pl}{dx} dx = 0$. Alors il faudra

$$\begin{aligned} \text{que } \frac{d(AP)}{ddy} &= \frac{d\left[P \frac{(B-k)}{ddy}\right]}{d^3y}; \quad \frac{d(AP)}{dy} = \frac{\left(P \frac{k-l}{dy}\right)}{d^3y}; \\ \frac{d(AP)}{dx} &= \frac{d\left(\frac{Pl}{dx}\right)}{d^3y}; \quad \frac{d\left[P \frac{(B-k)}{ddy}\right]}{dy} = \frac{d\left[P \frac{(k-l)}{dy}\right]}{ddy}; \\ \frac{d\left[P \frac{(B-k)}{ddy}\right]}{dx} &= \frac{d\left(\frac{Pl}{dx}\right)}{ddy}; \quad \frac{d\left(P \frac{k-l}{dy}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pl}{dx}\right)}{dy}. \end{aligned}$$

C'est à l'aide de ces équations qu'on déterminera k, l & P . Mais nous ne pousserons pas plus loin ces recherches.

On voit comment on doit s'y prendre pour les équations différentielles d'ordres plus élevés.

176. Observons en finissant, 1°. que lorsqu'il manque une des deux variables finies dans l'équation, on la ramène toujours à une équation d'un degré moindre en faisant $dy = p dx$, p étant une nouvelle variable.

177. 2°. Que l'équation générale $d^n y + a d^{n-1} y dx + b d^{n-2} y dx^2 + \&c. \dots + l y dx^n + X dx^n = 0$, a, b , &c. étant des constantes, X , une fonction de X & de constantes, & dx étant constant, peut toujours être intégrée facilement par une méthode semblable à celle que nous avons employée ci-dessus, pour l'équation $A dx^2 + B X dx^2 + C dX dx + E d dX = 0$.

Pour cet effet on l'écrira ainsi, $P d^n y + P(a - k) d^{n-1} y dx + P k d^{n-1} y dx + P(b - k') d^{n-2} y dx^2 + P k' d^{n-2} y dx^2 + \&c. \dots + P l y dx^n + P X dx^n = 0$; P étant le facteur, qui peut rendre l'équation intégrable, & que je suppose être une fonction de x ; k, k' , &c. sont des constantes indéterminées.

On supposera que les termes pris deux à deux, à commencer du premier, forment une différentielle exacte. Cette supposition donnera les équations nécessaires pour déterminer P, k, k' , &c. ayant égalé les valeurs de $\frac{dP}{P}$, on aura des équations en k, k' , &c. à l'aide desquelles on déterminera k , par une équation du degré n . La valeur de k étant trouvée, on aura aisément celle de k', k'' , &c. & on aura celle de P , en intégrant, ce qui sera très-facile. Alors pour chaque valeur de k , on aura une intégrale particulière, en observant d'ajouter à chacune une constante différente. De $n - 1$ de ces équations, on tirera les valeurs de dy^{n-1}, dy^{n-2} , &c. & les substituant dans la dernière, on aura la valeur de y en x .

178. 3°. Si l'on avoit plusieurs équations où les différences ne fussent point multipliées entre elles, si ce n'est par la différence constante, & où les variables ne passassent point le premier degré & ne fussent point multipliées entre elles, on les intégreroit en multipliant la seconde, la troisième, &c. chacune

par un facteur constant p, p' , &c. ajoutant à la première, & multipliant le tout par un facteur P que l'on supposeroit être une fonction de la variable dont la différence est constante; alors on décomposeroit les termes affectés des différences d'une même variable, comme on vient de faire dans l'équation précédente.

Par exemple, si j'avois $a ddz + b ddy + (cdz + edy) dx + (fz + gy) dx^2 = 0$, & $d ddz + b' ddy + (c'dz + e'dy) dx + (f'z + g'y) dx^2 = 0$; multipliant la seconde par p , ajoutant à la première & multipliant le tout par P , j'aurois $P(a + d'p) ddz + P(c + c'p) dz dx + P(f + f'p) z dx^2 + (b + b'p) ddy + P(e + e'p) dy dx + P(g + g'p) y dx^2 = 0$. Ensuite je décomposerois $c + c'p$, en $c + c'p - k$, & k ; je décomposerois pareillement $e + e'p$, en $e + e'p - k' & k'$. Et supposant ensuite que les termes pris deux à deux forment des différentielles exactes, j'aurois les équations nécessaires pour déterminer, $k, k' & P$. L'équation en k montera en général, au degré $2n$, ce qui donnera $2n$ intégrales, à l'aide desquelles on chassera toutes les différences, & l'on aura les équations en $z & x$; en $y & x$, &c.

179. 4°. Si les équations étoient plus générales, on regarderoit p, p' , &c. ainsi que P , comme des fonctions de toutes les variables & de leurs différences; & l'on détermineroit ces fonctions, par la condition que l'équation totale fût une différentielle complete. Les ouvrages qu'on peut consulter sur le calcul intégral, sont ceux de MM. *Euler, d'Alembert, Fontaine*, le Marquis de *Condorcet*, *Bougainville*, & le P. *Reynau*.





PRINCIPES

GÉNÉRAUX

DE LA

MÉCANIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

180. **S**ous le nom de *Mécanique*, nous comprenons la science du mouvement, & celle de l'équilibre.

Il y a du mouvement dans un corps, lorsque ce corps, ou quelques-unes de ses parties sont transportées d'un lieu en un autre.

Un corps, ou l'assemblage de plusieurs parties matérielles, ne peut de lui-même se mettre en mouvement. Il ne peut être mu que par une cause, sans laquelle il peut, d'ailleurs, exister.

Cette cause, telle qu'elle soit, qui est capable de

mouvoir un corps, est ce que nous appelons *Force* ou *Puissance*.

L'équilibre, est l'état d'un corps, ou d'un assemblage ou *Système* de corps, qui est sollicité par plusieurs forces dont les effets sont détruits par quelques obstacles, ou se détruisent mutuellement.

Le repos, est l'état d'un corps dont les parties, non-seulement ne sont point déplacées, mais ne sont pas même sollicitées par aucune force.

Pour établir les principes du mouvement & de l'équilibre, nous imaginerons, d'abord, qu'il n'existe rien autre chose dans la nature, que les corps dont nous parlerons, & les forces que nous leur supposons appliquées.

Ainsi, nous regarderons d'abord les corps, comme non pesans; comme parfaitement libres: nous supposerons que ni l'air, ni la pesanteur, ni le frottement, ni tout autre obstacle n'existent.

Nous aurons, ensuite, égard à ces obstacles; mais pour mesurer leurs effets, il faut commencer par examiner les choses, dans cet état de simplicité.

181. Ces suppositions faites, il est clair que si un corps a reçu du mouvement par une cause quelconque, il doit persévérer dans cet état de mouvement, sans aucune altération ni augmentation, sans

aucun détour, tant que la même ou une nouvelle force n'agira pas sur lui. En effet, nous venons de dire qu'un corps ne peut se donner du mouvement; il ne peut donc s'en ôter, puisque ce feroit s'en donner en sens contraire : d'ailleurs nous supposons qu'il n'existe aucun obstacle.

Ainsi, le mouvement est naturellement égal ou uniforme, & rectiligne. Examinons donc d'abord les propriétés de ce mouvement.

Du Mouvement uniforme.

182. Le mouvement *uniforme* est donc celui d'un corps qui se meut toujours de la même manière; c'est-à-dire, qui parcourt toujours le même espace dans le même intervalle de temps.

Pour comparer les mouvemens de deux corps qui se meuvent uniformément, il faut considérer l'espace que chacun décrit dans un même temps déterminé, comme d'une minute, d'une seconde, &c. Cet espace est ce qu'on appelle la *Vitesse*.

183. La vitesse d'un corps est donc, à proprement parler, l'espace que ce corps peut décrire uniformément dans un temps déterminé, que nous appelons l'*Unité de temps*.

Ainsi, dans les mouvemens uniformes de deux corps, si

l'on compte le temps en secondes ; & que l'un parcoure 5 pieds par seconde ; & l'autre , 6 pieds , par seconde ; je dirai que la vitesse du premier est de 5 pieds , & celle du second , de 6 pieds.

184. Mais si , en prenant toujours la seconde pour unité de temps , on me disoit qu'un corps a parcouru 100 pieds en cinq secondes , 100 pieds n'exprimeroient pas la vitesse mais je vois qu'à chaque seconde , il en parcourroit le cinquième , ou 20 pieds ; c'est-à-dire , que pour avoir la vitesse , je divise le nombre 100 , des parties de l'espace parcouru , par le nombre 5 des unités de temps qui se sont écoulées.

Donc , en général , *la vitesse est égale à l'espace divisé par le temps* ; c'est-à-dire , en nommant V la vitesse , E l'espace parcouru pendant un temps marqué par T , on a généralement $V = \frac{E}{T}$; c'est un des principes fondamentaux de la mécanique.

185. L'équation $V = \frac{E}{T}$, donne non-seulement la mesure de la vitesse , mais encore celle de l'espace & du temps. En effet , si l'on regarde successivement E & T comme inconnues , on aura par les règles ordinaires de l'Algèbre , $T = \frac{E}{V}$, & $E = VT$. Ainsi , *pour avoir le temps , il faut diviser l'espace , par la vitesse ; & pour avoir l'espace , il faut multiplier la vitesse par le temps.*

Au reste , si nous employons ici des caractères algébriques ,

algébriques, ce n'est pas qu'ils soient nécessaires pour faciliter l'intelligence de ces premières vérités. Mais ils sont utiles pour soulager la mémoire. On voit en effet par cet exemple, que le premier principe étant une fois dans la mémoire, on peut toujours facilement retrouver les deux autres, en appliquant les règles ordinaires à ce premier principe traduit algébriquement.

186. Il est donc facile maintenant de comparer les mouvemens uniformes de deux ou d'un plus grand nombre de corps.

Par exemple, si l'on me demande dans quel rapport sont les vitesses de deux corps, qui décrivent des espaces connus E & e , dans des temps connus T & t , respectivement. En nommant V & u les vitesses de ces deux corps, j'aurai $V = \frac{E}{T}$, & $u = \frac{e}{t}$ (184); donc $V : u :: \frac{E}{T} : \frac{e}{t}$; c'est-à-dire, que les vitesses sont comme les espaces divisés par les temps.

En un mot, qu'il s'agisse de comparer les vitesses, ou les espaces, ou les temps, le principe que nous venons de donner (184) donnera l'expression de chacune de ces choses, pour chaque corps; il n'y aura donc qu'à comparer ces expressions.

Par exemple, si je veux comparer les espaces: ce principe me donne $V = \frac{E}{T}$, d'où je tire $E = VT$; donc pour

le second corps j'aurai pareillement $e = ut$; donc $E : e :: VT : ut$; c'est-à-dire, que les espaces sont comme les vitesses multipliées par les temps.

187. De ces trois choses, l'espace, le temps & la vitesse, si l'on veut en comparer deux, lorsque la troisième est la même pour chaque corps, il n'y a qu'à chercher, de même, l'expression de cette troisième, pour chaque corps, & égaliser ces deux expressions.

Par exemple, si je veux savoir quel est le rapport des espaces quand les vitesses sont les mêmes, j'ai $V = \frac{E}{T}$ & $u = \frac{e}{t}$; donc puisqu'on suppose $V = u$, on a $\frac{E}{T} = \frac{e}{t}$, ou $Et = eT$, d'où l'on tire $E : e :: T : t$; c'est-à-dire, qu'à vitesses égales les espaces sont comme les temps. On trouvera de même qu'en temps égal, les espaces sont comme les vitesses; & que pour que deux corps décrivent le même espace, il faut que leurs vitesses soient réciproquement proportionnelles aux temps. En effet, on a $E = VT$ & $e = ut$; donc si $E = e$, on a $VT = ut$, d'où l'on tire $V : u :: t : T$.

Ainsi, le seul principe $V = \frac{E}{T}$, donne le moyen de comparer toutes les circonstances des mouvemens uniformes.

Des Forces & de la quantité de Mouvement.

188. La somme des parties matérielles dont un corps est composé, est ce qu'on appelle la *Massé*;

mais dans l'usage que nous ferons de ce mot, nous entendrons le nombre qui exprime de combien de parties matérielles le corps est composé.

La force, ainsi que nous l'avons déjà dit, est la cause qui meut, ou tend à mouvoir un corps.

Comme les forces ne nous intéressent que par leurs effets, ce n'est que par les effets dont elles sont capables, que nous devons les mesurer. Or l'effet d'une force est de faire passer dans chaque particule matérielle d'un corps, une certaine vitesse. Donc si toutes les parties reçoivent la même vitesse, comme nous le supposons ici, l'effet de la cause motrice a pour mesure la vitesse multipliée par le nombre des parties matérielles du corps, c'est-à-dire, par la masse. Donc *la force se mesure par la vitesse qu'elle peut imprimer à une masse connue, multipliée par cette masse.*

189. Le produit de la masse d'un corps, par sa vitesse, s'appelle la *quantité de mouvement* de ce corps. *Les forces se mesurent donc par la quantité de mouvement qu'elles sont capables de produire.*

Ainsi, si nous désignons ce produit, par F ; la masse, par M ; & la vitesse par V , nous aurons $F = MV$.

Cette équation donne $V = \frac{F}{M}$; & $M = \frac{F}{V}$; qui font voir 1°. que *connoissant la force motrice d'un corps & sa masse,*

on saura quelle vitesse il doit avoir, en divisant la force motrice par la masse. 2°. Que connoissant la force motrice & la vitesse, on saura quelle est la masse qui peut avoir cette vitesse & cette force motrice, en divisant la force motrice par la vitesse.

Mais il ne faut pas perdre de vue, que ce que nous entendons ici par F , ou par la force motrice, c'est l'effet dont est capable la cause qui engendre le mouvement. C'est cet effet seul qu'on peut faire entrer, & qu'on a besoin de faire entrer dans le calcul.

190. Donc si f marque la force motrice d'une autre masse m , & u la vitesse de cette masse, on aura de même $f = mu$; donc $F : f :: M V : m u$; c'est-à-dire, que les forces motrices sont comme les masses multipliées par les vitesses.

Et si de chacune des deux équations $F = M V$, & $f = m u$, on tire les valeurs de M & de m , puis celles de V & de u , on aura le rapport des masses, par celui des forces & des vitesses, & celui des vitesses par les forces & les masses; d'où l'on conclura 1°. qu'à masses égales les forces motrices sont comme les vitesses; 2°. qu'à vitesses égales, les forces motrices sont comme les masses; 3°. & qu'enfin si les forces motrices sont égales, les vitesses sont en raison inverse des masses; ce que l'on trouvera facilement en égalant successivement la valeur de M à celle de m ; celle de V à celle de u ; & enfin celle de F à celle de f ; l'équation résultante, réduite & convertie en proportion, démontre chacune de ces propositions.

R E M A R Q U E.

191. La masse ou le nombre des parties matérielles d'un corps, dépend de son volume & de ce qu'on

appelle sa *densité*. Comme les corps sont pénétrés d'un très-grand nombre de vides qu'on appelle *pores*, leur quantité de matière n'est pas proportionnelle à leur volume ; mais sous le même volume il y a d'autant plus de matière que les parties sont plus serrées : & c'est cette plus ou moins grande proximité des parties qu'on appelle *densité*. En sorte qu'on dit, un tel corps est plus *dense* qu'un tel autre corps, lorsqu'à volume égal il renferme plus de matière que ce dernier. On dit au contraire qu'il est moins *dense* ou plus *rare* lorsqu'à volume égal il renferme moins de matière.

La densité sert donc à juger du nombre des parties matérielles, lorsque le volume est connu ; ainsi on peut regarder la densité comme représentant le nombre des parties matérielles d'un volume déterminé ; quand on dit, l'or est 19 fois aussi dense que l'eau, cela veut dire, l'or contient 19 fois autant de parties que l'eau, dans un même espace.

En se représentant la densité comme exprimant le nombre des parties matérielles d'un volume déterminé que l'on prend pour *unité de volume* ; il est clair que pour avoir la masse, ou le nombre total des parties matérielles d'un corps dont le volume est connu, il faut multiplier la densité par le volume.

Par exemple , si la densité d'un pouce cube d'or est représentée par 19 , la quantité de matière de 10 pouces cube d'or , fera 10 fois 19. Ainsi , représentant généralement la masse par M , le volume ou la solidité par S & la densité par D , on aura $M = S \times D$; par où il sera facile de comparer les masses , les volumes & les densités des corps.

Nous verrons dans peu , que les masses des corps sont proportionnelles à leur poids ; ainsi , dans l'usage , on pourra substituer le poids à la masse.

Des mouvemens uniformément accélérés.

192. Un corps qui n'a reçu qu'une impulsion , persévère dans son mouvement avec la même vitesse , & dans la même direction qu'il a eue au premier instant (181). Mais s'il vient à recevoir une nouvelle impulsion dans le même sens , ou en sens contraire de la première , il se meut alors , avec une vitesse égale à la somme ou à la différence des deux vitesses qu'il a reçues successivement : cela est évident.

Donc si l'on conçoit qu'à des intervalles de temps déterminés , le corps reçoive de nouvelles impulsions , dans le même sens , ou en sens contraire de la première , il fera mu d'un mouvement *varié* ou inégal ; sa vitesse sera différente au commencement de chaque intervalle de temps.

Quoi qu'il en soit , sa vitesse au bout d'un temps

quelconque doit s'estimer par l'espace qu'il feroit alors capable de décrire pendant l'unité de temps, si son mouvement devenoit uniforme à compter de l'instant où l'on considère cette vitesse.

On appelle en général *Force accélératrice*, toute force qui agit sur un mobile pour faire varier son mouvement. Lorsqu'à des intervalles de temps égaux, elle agit également, on l'appelle *force accélératrice constante*, ou *force retardatrice constante*, selon qu'elle tend à augmenter ou à diminuer la vitesse actuelle du mobile.

Examinons présentement les circonstances du mouvement uniformément accéléré.

193. Puisque dans ce mouvement, la force accélératrice agit toujours de la même manière, si l'on suppose que g soit la vitesse qu'elle communique, à chaque unité de temps, il est clair que les vitesses successives du mobile feront g , $2g$, $3g$; en sorte qu'après un nombre d'unités de temps marqué par t , la vitesse acquise sera g pris autant de fois qu'il y a d'unités dans t ; c'est-à-dire, sera $g \times t$ ou gt .

194. Donc 1°. dans le mouvement uniformément accéléré, les nombres de degrés de vitesse que le mobile acquiert, croissent comme les nombres d'intervalles pendant lesquels dure le mouvement; ce que

l'on exprime, en disant : *Les vitesses acquises sont comme les temps écoulés depuis le commencement du mouvement.*

Ainsi, si l'on appelle u la vitesse que le mobile a acquise au bout du temps t , on a $u = gt$.

2°. Les vitesses que le mobile se trouve avoir successivement pendant la durée de chacun des intervalles consécutifs, forment donc une progression arithmétique $\div g. 2g. 3g. \&c.$ dont le dernier terme est gt ou u , & dont le nombre des termes est t , c'est-à-dire, est marqué par le nombre des actions de la force accélératrice.

3°. Et puisque ces vitesses $g, 2g, \&c.$ ne sont autre chose, chacune, que l'espace que le mobile peut décrire pendant l'intervalle correspondant (183), l'espace total décrit pendant le temps t , fera donc la somme des termes de cette progression arithmétique ; c'est-à-dire (*Alg.* 232), qu'il fera exprimé par $(g + u) \times \frac{t}{2}$. Donc si l'on nomme e cet espace total parcouru depuis le commencement du mouvement, on aura $e = (g + u) \frac{t}{2}$.

195. Concevons, maintenant, que la force accélératrice agit sans interruption, ou, ce qui revient au même, concevons que le temps t soit partagé en une infinité de parties infiniment petites que nous

Appellerons des instans; & qu'à la naissance ou à la fin de chaque instant, la force accélératrice donne une impulsions au mobile. Concevons de plus qu'elle agit par degrés infiniment petits. Alors g étant infiniment petite par rapport à u , on doit, dans l'équation $e = (g + u) \frac{t}{2}$, omettre g , & l'on a simplement $e = \frac{ut}{2}$.

196. Cela posé, imaginons qu'au bout du temps t la force accélératrice cesse d'agir; le corps (181) persévérera donc dans son mouvement avec la vitesse u qu'il aura acquise; c'est-à-dire, qu'à chaque unité de temps, il décrira un espace $= u$ (183); donc s'il continuoît de se mouvoir avec cette même vitesse pendant le temps t , il décriroit un espace $= u \times t$, c'est-à-dire, le double de celui e ou $\frac{ut}{2}$ qu'il a décrit (195) dans un temps égal, par l'action successive de la force accélératrice. Donc *dans le mouvement uniformément & continuellement accéléré, l'espace décrit, pendant un certain temps, est la moitié de celui que le mobile peut décrire dans un temps égal, avec la vitesse acquise, continuée uniformément.*

197. Puisque (194) les vitesses acquises croissent comme les temps écoulés, si l'on appelle p la vitesse acquise au bout d'une seconde, alors la vitesse acquise, après un nombre t de secondes, fera pt ; ainsi on

aura $u = pt$. L'équation $e = \frac{ut}{2}$, trouvée ci-dessus, deviendra donc $e = \frac{p t^2}{2}$. Donc si l'on représente par E , un autre espace décrit de la même manière pendant un autre temps T , on aura de même $E = \frac{p T^2}{2}$; d'où l'on conclura $e : E :: \frac{p t^2}{2} : \frac{p T^2}{2} :: tt : TT$; ce qui nous apprend que les espaces parcourus d'un mouvement uniformément & continuellement accéléré, sont comme les quarrés des temps.

198. Et puisque (194) les vîteses sont dans le rapport des temps, les espaces sont donc aussi, dans le rapport des quarrés des vîteses.

199. Donc les vîteses & les temps, sont comme les racines quarrées des espaces parcourus depuis le commencement du mouvement.

200. Tout cela s'applique également aux mouvemens uniformément retardés, pourvu que, par les temps, on entende ceux qui restent à s'écouler jusqu'à l'extinction de la vîtesse; & que par les espaces, on entende ceux qui restent à décrire jusqu'à l'extinction de la vîtesse.

201. Dans l'équation $e = \frac{p t^2}{2}$, que nous avons trouvée ci-dessus (197), la quantité p par laquelle nous avons entendu la vîtesse que la force

accélératrice est capable d'engendrer par son action successive pendant une seconde de temps, est ce que nous appellerons la force accélératrice ; parce que nous devons juger de cette force par l'effet qu'elle est capable de produire dans le mobile , dans un temps déterminé ; effet qui n'est autre que de lui communiquer une certaine vitesse.

Du Mouvement libre des corps pesans.

202. C'est à l'espèce de mouvement que nous venons de considérer, qu'on doit rapporter le mouvement des corps pesans. Mais avant d'appliquer à cet objet, la théorie que nous venons d'exposer, il est à propos de faire connoître quelques faits concernant la pesanteur.

Ce que nous entendons par pesanteur, c'est la force qui sollicite les corps à descendre suivant des lignes verticales ou perpendiculaires à la surface des eaux. Si la terre, ou si la surface des eaux étoit parfaitement sphérique, les directions de la pesanteur concourroient toutes au centre. Mais quoique cette surface ne soit pas parfaitement sphérique, elle s'en éloigne peu ; en sorte que, pour les objets que nous avons à traiter, nous pouvons regarder, sans aucune erreur sensible, les directions de la pesanteur, comme concourant au centre de la terre.

Nous avons déjà eu occasion de dire (*Géom.* 315) que le rayon de la terre considérée comme sphérique, est de 19611500 pieds. De-là il est aisé de conclure qu'il faut, sur la surface de la terre, une étendue de 16 toises pour répondre à un angle d'une seconde au centre de la terre. Ainsi, dans une machine qui auroit 16 toises de longueur, il ne s'en faudroit que d'un angle d'une seconde, que les directions de la pesanteur, aux deux extrémités, ne fussent parallèles. Donc, *dans un même lieu, on peut regarder les directions de la pesanteur comme parallèles.*

Quant à la grandeur de cette force; à parler rigoureusement, elle est différente à différentes distances de l'équateur, & à différens éloignemens du centre de la terre. Mais les quantités dont elle diffère, par les différentes distances où l'on peut être de l'équateur, sont très-petites, & ne nous importent en aucune manière, pour le présent. Il en est de même des diminutions qu'elle subit à mesure qu'on s'éloigne du centre de la terre : elles ne peuvent être sensibles que par des changemens de distance beaucoup plus considérables que ne sont les hauteurs auxquelles nous pouvons nous élever, ou les profondeurs auxquelles nous pouvons descendre ; ainsi nous regarderons, ici, la pesanteur comme une force qui est partout la même ; c'est-à-dire, qui sollicite les corps

à descendre d'une même quantité dans un même temps.

Il faut considérer cette force, comme agissant, & agissant également à chaque instant, sur chaque partie de la matière. Or il est clair que si chacune des parties d'un corps reçoit la même vitesse, la totalité ne sera mue qu'avec la même vitesse que recevrait une seule des parties détachée de la masse; ensorte que la vitesse que la pesanteur imprime à une masse quelconque, ne dépend point de la grandeur de cette masse: elle est la même pour une petite masse que pour une grande. Il est vrai, cependant, que nous ne voyons pas tous les corps tomber d'une même hauteur dans le même temps; mais cette différence est l'effet de la résistance de l'air, ainsi que nous le verrons par la suite: aussi lorsqu'on laisse tomber des corps dans un espace vide d'air, observe-t-on que des corps très-différens en masse, tombent néanmoins d'une même hauteur dans le même temps.

Il faut bien distinguer, ici, entre l'effet de la pesanteur & celui du poids. L'effet de la pesanteur est de faire passer ou de tendre à faire passer dans chaque partie de la matière une certaine vitesse, qui est absolument indépendante du nombre des parties matérielles. Mais le *poids* est égal à l'effort que l'on doit

exercer, pour empêcher qu'une masse proposée n'obéisse à sa pesanteur. Or cet effort dépend de deux choses; savoir, de la vitesse que la pesanteur tend à imprimer à chaque partie, & du nombre de parties qu'elle anime ou qu'elle tend à animer. Mais comme la vitesse que la pesanteur tend à imprimer, est la même pour chaque partie de la matière, l'effort que l'on a à exercer, est proportionnel au nombre des parties de la matière; c'est-à-dire, à la masse. Ainsi *le poids dépend de la masse, & la pesanteur n'en dépend nullement.* Cette observation, sur le poids des corps, établit ce que nous avons avancé (191), savoir, que la masse est proportionnelle au poids.

203. Après ces éclaircissemens sur la pesanteur, venons aux lois du mouvement des corps pesans.

Puisque la pesanteur agit également, & sans interruption, à quelque distance que le corps se trouve de la surface de la terre (du moins pour les distances auxquelles nous pouvons nous élever), la pesanteur est donc une force accélératrice constante, qui, à chaque instant, fait passer dans le mobile un nouveau degré de vitesse, qui est toujours le même pour chaque instant égal: en sorte que (194 & *suiv.*) les vitesses acquises augmentent comme les temps écoulés; les espaces parcourus sont comme les quarrés des temps, ou comme les quarrés des vitesses; les

vitesse font comme les racines quarrées des espaces parcourus ; les temps font aussi comme les racines quarrées des espaces parcourus : en un mot, tout ce que nous avons dit des forces accélératrices constantes, s'applique littéralement à la pesanteur. Bien entendu que dans tout ceci, nous faisons abstraction de la résistance de l'air & de tout autre obstacle.

Il ne s'agit donc, pour pouvoir déterminer les temps, les espaces & les vitesses dans le mouvement des corps graves, que de connoître un seul effet de la pesanteur dans un temps déterminé. Car les équations $u = pt$, $e = \frac{p t^2}{2}$, nous mettront en état de déterminer tous ces objets, dès qu'une fois nous saurons la valeur de p .

Rappelons-nous donc que par p (197), nous avons entendu la vitesse que le mobile acquiert au bout d'une seconde de temps. Or on fait par expérience (& nous verrons par la suite, comment on l'a trouvé) qu'un corps à qui l'air ne fait point de résistance sensible, tombe de 15 pieds & $\frac{1}{10}$, ou plus exactement, de 15^P, 098 dans la première seconde de sa chute.

D'ailleurs nous avons vu (196) qu'avec la vitesse acquise par une suite d'accélérations, le mobile pourroit décrire d'un mouvement uniforme, un espace

double, dans le même temps. Donc la vitesse qu'un corps pesant a acquise au bout de la première seconde de sa chute, est telle que si la pesanteur cessoit d'agir, il décriroit le double de 15 pieds & $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire $30^p, 2$ à chaque seconde. Donc $p = 30,2$.

204. Maintenant, l'équation $u = pt$, & l'équation $e = \frac{p t^2}{2}$, nous font voir; la première, que pour avoir la vitesse qu'un corps pesant a acquise après être tombé pendant un nombre t de secondes, il faut multiplier celle qu'il acquiert pendant la première seconde, par ce nombre t de secondes.

Donc, lorsqu'un corps pesant est tombé pendant un certain nombre de secondes, la vitesse qu'il a acquise, est telle que si la pesanteur cessoit d'agir, il décriroit, par chaque seconde, autant de fois $30^p, 2$ qu'il s'est écoulé de secondes.

Ainsi, un corps qui a employé 7 secondes à tomber, se meut au bout de 7 secondes avec une vitesse à parcourir 7 fois $30^p, 2$ ou 211 pieds & $\frac{2}{5}$ par seconde, sans aucune nouvelle accélération.

205. La seconde équation $e = \frac{p t^2}{2} = \frac{1}{2} p t^2$, fait voir que pour avoir l'espace e ou la hauteur e dont un corps pesant tombe dans un nombre t de secondes, il faut multiplier $\frac{1}{2} p$, c'est-à-dire, la quantité dont
il

il tombe dans la première seconde, la multiplier, dis-je, par le quarré du nombre des secondes.

Donc la hauteur dont un corps pesant tombe pendant un nombre t de secondes, est d'autant de fois 15 pieds & $\frac{1}{10}$, qu'il y a d'unités dans le quarré de ce nombre de secondes.

Ainsi quand un corps a employé 7 secondes à tomber, on peut être assuré qu'il est tombé de 49 fois 15^p, 1, c'est-à-dire, de 740 pieds à très-peu près; en supposant toujours que la résistance de l'air n'ait pas lieu. On voit donc que quand on connoît le temps écoulé, rien n'est plus aisé que de déterminer la vitesse acquise, & l'espace parcouru.

206. Si l'on veut savoir combien de temps un corps emploieroit à tomber d'une hauteur connue : l'équation $e = \frac{1}{2}pt^2$, donne $t^2 = \frac{e}{\frac{1}{2}p}$, & par conséquent $t = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}p}}$; c'est-à-dire, qu'il faut chercher combien cette hauteur e contient de fois la hauteur $\frac{1}{2}p$ dont un corps pesant tombe dans la première seconde, & tirer la racine quarrée de ce nombre de fois.

207. Veut-on savoir de quelle hauteur un corps pesant devroit tomber pour acquérir une vitesse connue; c'est-à-dire, une vitesse à parcourir uniformément un certain nombre de pieds, par seconde. Alors

de l'équation $u = pt$, je tire la valeur de t qui est $t = \frac{u}{p}$; je la substitue dans l'équation $e = \frac{1}{2}pt^2$; & j'ai $e = \frac{1}{2}p \times \frac{u^2}{p^2} = \frac{u^2}{2p}$, qui m'apprend que pour connoître la hauteur e dont un corps pesant devrait tomber pour acquérir une vitesse u d'un certain nombre de pieds par seconde, il faut diviser le quarré de ce nombre de pieds, par le double de la vitesse, qu'un corps pesant acquiert au bout de la première seconde; c'est-à-dire, par 60,4.

Ainsi, si je veux savoir de quelle hauteur un corps pesant devrait tomber pour acquérir une vitesse de 100 pieds par seconde, je divise le quarré de 100, c'est-à-dire, 10000, par 60,4; le quotient $165\frac{1}{2}$ m'apprend qu'un corps doit tomber de 165 pieds $\frac{1}{2}$, pour acquérir une vitesse de 100 pieds par seconde.

Il est évident qu'on se conduiroit de même, pour déterminer à quelle hauteur montera un corps jeté verticalement avec une vitesse connue.

208. Comme on peut, ainsi qu'on le voit par ces exemples, déterminer facilement toutes les circonstances du mouvement des corps pesans, c'est à ces mouvemens qu'on rapporte le plus communément, tous les autres mouvemens; enforte que souvent au lieu de donner immédiatement la vitesse d'un corps, on donne la hauteur d'où il auroit dû tomber pour acquérir cette vitesse, par l'action de

la pesanteur. Nous aurons occasion d'en voir des exemples.

Observons donc pour récapituler, que toutes les circonstances du mouvement accéléré, & par conséquent du mouvement des corps graves, sont comprises dans les deux équations $u = pt$, $e = \frac{1}{2}pt^2$; en sorte que p étant connu, dès que l'on connoîtra l'une de ces trois choses, le temps, l'espace & la vitesse, on peut toujours trouver les deux autres, soit immédiatement par l'une ou l'autre de ces deux équations, soit par le concours des deux, combinées comme nous venons de le faire (207).

Des Mouvements variés de quelque manière que ce soit.

209. Lorsque le mobile est soumis à l'action d'une force qui agit sur lui sans interruption, mais d'une manière différente à chaque instant, le mouvement s'appelle, en général, *mouvement varié*. On a des exemples de mouvement varié dans le débandement des ressorts : quoique la vitesse aille en augmentant, cependant les degrés par lesquels elle augmente vont en diminuant. Il en est de même des degrés par lesquels le mouvement du navire arrive à l'uniformité : l'action du vent sur les voiles diminue à mesure que le navire acquiert du mouvement, parce qu'il

échappe d'autant plus à cette action, qu'il a plus de vitesse.

210. Les principes nécessaires pour déterminer les circonstances de ces mouvemens, se déduisent facilement de ce que nous avons dit sur les mouvemens uniformes & sur les mouvemens uniformément accélérés : voici comment on y parvient. 1°. De quelle manière que le mouvement soit varié, si on le considère par rapport à des instans infiniment petits, on peut supposer que la vitesse ne change point pendant la durée de cet instant. Or lorsque la vitesse est uniforme, elle a pour expression l'espace décrit pendant un temps quelconque t , divisé par ce même temps t . Donc lorsqu'elle ne sera uniforme que pendant un instant, elle doit avoir pour expression, l'espace infiniment petit décrit pendant cet instant, divisé par cet instant. Donc si e représente l'espace décrit, d'un mouvement variable, pendant le temps quelconque t , de représentera ce qui est décrit uniformément pendant l'instant dt ; on aura donc $u = \frac{de}{dt}$, ou $de = u dt$, première équation fondamentale des mouvemens variés.

211. 2°. L'équation $u = pt$, trouvée (197), & qui exprime le rapport des vitesses aux temps, dans les mouvemens uniformément accélérés, donne

$p = \frac{u}{t}$. C'est-à-dire, que quand la force accélératrice, ou plutôt la quantité p par laquelle on la mesure (201) est constante, elle a pour expression la vitesse u qu'elle engendre pendant un certain temps t , divisée par ce temps t . Donc si cette force accélératrice p agit différemment d'un instant à l'autre; c'est-à-dire, si elle n'est constante que pendant un instant, elle doit avoir pour expression la vitesse qu'elle engendre pendant cet instant, divisée par cet instant; c'est-à-dire, qu'elle doit avoir pour expression l'accroissement de la vitesse, divisé par l'accroissement du temps; on aura donc $p = \frac{du}{dt}$, ou $du = p dt$,
seconde équation fondamentale des mouvemens variés.

212. Dans l'équation $u = pt$, nous avons entendu (197) par p , la vitesse que la force accélératrice engendreroit dans le mobile pendant un temps déterminé (comme d'une seconde), par une action continuée & toujours égale. Dans l'équation $du = p dt$, on doit entendre la même chose. Mais il faut observer que la force accélératrice étant supposée variable, la quantité p qui représente la vitesse qu'elle feroit capable d'engendrer si elle agissoit comme force accélératrice constante pendant une seconde, cette quantité p est différente pour tous les instans du mouvement. En effet, on conçoit aisément que lorsque la force accélératrice devient plus petite, la

vitesse qu'elle seroit capable d'engendrer dans une seconde, par son action actuelle répétée également pendant chaque instant de cette seconde, doit être plus petite, & *vice versa*.

213. Les deux équations $de = udt$, $du = p dt$, peuvent en fournir une troisième que l'on emploie encore avec avantage : la voici :

De l'équation $de = udt$, on tire $dt = \frac{de}{u}$; substituant cette valeur dans l'équation $du = p dt$, on a, toute réduction faite, $p de = u du$.

214. Remarquons, que dans le raisonnement par lequel nous sommes parvenus à l'équation $du = p dt$ (211), nous avons regardé la vitesse comme croissante. Si elle alloit en diminuant, il faudroit (21), au lieu de du , mettre $- du$; ensorte que les deux équations $du = p dt$, & $p de = u du$, doivent être écrites ainsi, $\pm du = p dt$, & $p de = \pm u du$, le signe supérieur étant pour le mouvement accéléré, & le signe inférieur, pour le mouvement retardé.

215. Il y a une quatrième équation qu'on peut déduire des deux équations fondamentales, & qu'il ne faut pas omettre : la voici.

L'équation $de = udt$, donne $u = \frac{de}{dt}$; donc

$du = d\left(\frac{dc}{dt}\right)$. Substituant cette valeur dans l'équation $pdt = \pm du$, on a $pdt = \pm d\left(\frac{dc}{dt}\right)$.

Si l'on suppose (comme on en est bien le maître) que dt soit constant, on a $pdt = \pm \frac{dde}{dt}$, ou $pdt^2 = \pm dde$.

Mais il faut bien se souvenir que l'équation $pdt^2 = \pm dde$ suppose dt constant. Lorsqu'on fait dt variable, on emploie l'équation $pdt = \pm d\left(\frac{dc}{dt}\right)$.

Nous aurons plus d'une occasion d'appliquer utilement ces formules. Mais ne perdons pas de vue que la quantité p qu'elles renferment, représente, pour chaque instant, la vitesse que la force accélératrice feroit capable de faire naître dans le mobile, dans un intervalle de temps connu, comme d'une seconde, si pendant cette seconde elle agissoit comme force accélératrice constante; en sorte que, comme cette quantité p mesure pour chaque instant l'effet dont la force accélératrice est capable, nous lui donnerons, pour abréger, le nom de force accélératrice.

De l'Équilibre entre des forces directement opposées.

216. Nous venons de considérer le mouvement que doit avoir un corps soumis à l'action d'une force

qui agit sur lui, toujours suivant une même direction. Mais nous n'avons pas encore fait mention de la manière dont le mouvement passe dans le mobile. C'est un objet qu'il n'est pas moins important d'examiner; mais comme les lois de la communication du mouvement, dépendent de celles de l'équilibre, ainsi que nous le verrons par la suite, il faut commencer par nous occuper de celles-ci. Il n'est question, pour le présent, que de l'équilibre entre des forces directement opposées.

Nous représenterons les forces, ainsi que nous l'avons déjà dit, par les effets qu'elles sont capables de produire; c'est-à-dire, chacune, par la quantité de mouvement d'une masse déterminée. Mais pour ne point embrasser trop d'objets à la fois, nous considérerons ces masses comme réduites chacune à un seul point auquel, par la pensée, nous attribuerons la même quantité de matière qu'au corps dont il tiendra lieu. Nous verrons par la suite qu'il y a, en effet, dans tous les corps, un point par lequel le mouvement se transmet, comme si toute la masse y étoit concentrée. Au surplus, nous considérerons les corps (jusqu'à ce que nous avertissions du contraire) comme composés de parties absolument dures & liées les unes aux autres de manière à ne pouvoir changer leurs situations respectives, par l'action d'aucune force.

217. Cela posé, concevons (*fig. 54*) deux masses M & m ; la première, mue de A vers C avec une vitesse V ; la seconde, mue de C vers A , avec une vitesse u ; lorsque ces deux masses viendront à se rencontrer, elles se feront équilibre si la quantité de mouvement de M , est égale à la quantité de mouvement de m ; c'est-à-dire (189), si $MP = mu$.

En effet, il est d'abord évident que si M est égal à m , & qu'en même temps les deux vitesses V & u soient égales, il y aura équilibre; car alors la même raison que l'on donneroit pour prouver que M doit l'emporter sur m , prouveroit aussi que m doit l'emporter sur M , puisque tout est égal de part & d'autre.

218. Supposons présentement que M est double de m ; mais qu'en même temps u est double de V ; que, par exemple, M parcoure un pied par seconde, & m deux pieds par seconde. Il est clair que je puis considérer M comme composé de deux masses égales à m ; & qu'à l'instant du choc je puis me représenter le corps m comme animé d'une vitesse d'un pied par seconde, à laquelle on ajoute dans le même instant une autre vitesse d'un pied par seconde. Alors je puis me représenter que dans le choc, la masse m consume une de ses vitesses contre une pareille portion de la masse M ; & son autre vitesse contre la portion égale & restante de la masse M .

Maintenant, si au lieu de supposer les masses M & m , dans le rapport de 2 à 1, & au contraire leurs vîteses dans le rapport de 1 à 2, on les supposoit dans tout autre rapport, on voit qu'on pourroit toujours supposer la plus grande masse décomposée en un certain nombre de masses égales à la plus petite, dont chacune détruit dans la plus petite une vîtesse égale à la sienne, en sorte qu'on peut établir comme général, le principe suivant.

PRINCIPE FONDAMENTAL. *Deux corps qui agissent l'un sur l'autre, suivant des lignes directement opposées, se font équilibre, lorsque leurs quantités de mouvement sont égales; c'est-à-dire, lorsque le produit de la masse de l'un, par la vîtesse avec laquelle il tend à se mouvoir, est égal au produit de la masse de l'autre, par la vîtesse avec laquelle il tend aussi à se mouvoir.*

Cette proposition a lieu généralement, soit qu'il s'agisse de deux corps qui marchent librement au-devant l'un de l'autre, soit qu'il soit question de deux corps qui se poussent à l'aide d'une ligne Mm inflexible & sans masse, soit enfin qu'ils se tirent en sens contraires, à l'aide d'un fil inextensible Mm . Et réciproquement si deux corps se font équilibre, on doit conclure que leurs mouvemens sont directement opposés, & que leurs quantités de mouvement sont égales.

219. Donc si trois, ou un plus grand nombre de corps M, m, m' &c. (*fig. 55*), qui se meuvent ou tendent à se mouvoir sur une même ligne, avec des vitesses V, u, u' se font équilibre, il faut que la somme des quantités de mouvemens de ceux qui agissent dans un sens, soit égale à la somme des quantités de mouvemens de ceux qui agissent en sens contraire.

Car s'ils se font équilibre, on peut toujours supposer que M & m allant du même sens, m détruit une partie du mouvement de m' , & que M détruit l'autre. Or si l'on nomme x la vitesse que m' perd par l'action de m , on aura $m'x$ pour la quantité de mouvement qu'il perd par cette même action; on aura donc $mu = m'x$: le corps M n'aura donc plus à détruire dans m' , que la quantité de mouvement restante; savoir, $m'u' - m'x$; on aura donc $MV = m'u' - m'x$; ou, à cause que $m'x = mu$, on aura $MV = m'u' - mu$; c'est-à-dire, $MV + mu = m'u'$.

Du Mouvement composé.

220. Nous supposerons encore que les masses auxquelles seront appliquées les forces dont nous allons parler, sont concentrées en un point.

On appelle *mouvement composé*, celui que prend un corps sollicité en même temps par plusieurs forces qui ont telles directions qu'on voudra.

Si un corps M mu suivant la ligne droite AB (*fig. 56*) reçoit, lorsqu'il est arrivé au point M , une

impulsion suivant une ligne MD perpendiculaire à la ligne AB ; cette impulsion ne peut produire d'autre effet que de l'écarter de la ligne AB ; elle ne peut ni augmenter ni diminuer la vitesse qu'il avoit pour s'éloigner de CD perpendiculairement à cette ligne.

En effet, la direction CD étant perpendiculaire à AB , il n'y a aucune raison pour que la force qui agit suivant CD , produise un effet plutôt à la droite qu'à la gauche de cette ligne; & comme elle ne peut en produire des deux côtés à la fois, elle n'en produira donc ni de l'un ni de l'autre.

Le raisonnement est le même, si l'on suppose que le corps M étant mu suivant CD , vient à être frappé suivant MB ; cette dernière force n'ajoutera ni n'ôtera rien à la vitesse avec laquelle le corps M tendoit à s'éloigner de MB .

221. PRINCIPE FONDAMENTAL. Si deux forces P & Q (fig. 57) dont les directions font un angle droit, agissent au même instant sur un mobile M ; que la force Q soit telle, que par son action instantanée sur le mobile, elle puisse seule lui faire parcourir MB dans un temps déterminé comme d'une seconde; & la force P telle qu'elle puisse seule lui faire parcourir MD dans le même temps; je dis que par l'action composée de ces deux forces, le mobile M décrira, dans le même temps, la diagonale ME du parallélogramme $DMBE$ qui a pour côtés ces mêmes lignes MB , MD .

Puisque les deux forces agissent au même instant

sur le mobile, on peut supposer qu'il étoit en mouvement sur la ligne PD , & qu'au moment où il arrive au point M , la force Q perpendiculaire à PD vient à agir sur lui; or selon ce qui vient d'être dit (220), cette force Q ne peut ni augmenter ni ralentir la vitesse qu'il avoit pour s'éloigner de QB ; donc si par le point D on tire DE parallèle à MB , il faudra qu'au bout d'une seconde il se trouve sur quelque point de la ligne DE dont tous les points sont éloignés de QB , d'une quantité égale à MD .

Or le même raisonnement que nous faisons pour la force P à l'égard de la force Q , s'applique mot à mot à la force Q par rapport à la force P ; donc si par le point B on tire BE parallèle à PD , le corps doit, au bout d'une seconde, se trouver sur quelque point de BE . Mais il n'y a que le point E qui soit tout à la fois sur DE & sur BE ; donc le mobile, au bout d'une seconde, fera en E .

Il est d'ailleurs évident (181), que quelque route que le mobile prenne par l'action instantanée des deux forces, elle doit être une ligne droite; puisque dès qu'elles ont agi, le mobile est abandonné à lui-même; donc puisque cette route doit passer par M & par E ; elle doit être ME , c'est-à-dire, la diagonale du parallélogramme $DMBE$.

Ajoutons que le mobile décrit ME d'un mouvement

uniforme, puisqu'immédiatement après l'action composée des deux forces, il est abandonné à lui-même (181).

222. Puisque les deux forces P & Q agissant conjointement sur le mobile, n'ont d'autre effet que de lui faire décrire la diagonale ME ; concluons donc 1°. qu'à deux forces dont les directions font un angle droit, on peut toujours en substituer une seule, pourvu que celle-ci puisse faire parcourir au mobile, la diagonale d'un parallélogramme rectangle, dont les côtés seroient décrits dans le même temps chacun séparément par l'action de la force dont il est la direction.

La force unique ME qui résulte de l'action des deux forces MB , MD , s'appelle la *résultante* de ces deux forces.

Comme les lignes MB , MD , représentent les effets dont les forces Q & P sont capables séparément, & ME celles dont elles sont capables conjointement, on peut regarder MB , MD , ME comme représentant ces forces elles-mêmes.

2°. On pourra donc, aussi, considérer une force unique quelconque ME , comme étant le résultat de deux autres forces MB , MD , dont les directions seroient entre elles un angle droit, pourvu que celle-là

étant représentée par la diagonale ME , ces deux-ci le soient par les côtés MB , MD d'un même parallélogramme rectangle. On pourra donc à la force unique ME , substituer les deux forces MB & MD ; puisqu'en effet ces deux forces ne produiroient que ME .

223. En général, quelque angle que fassent entre elles les directions des deux forces P & Q (fig. 58 & 59) qui agissent en même temps sur un mobile M ; ce mobile décrira la diagonale ME du parallélogramme $DMBE$, dont les côtés marquent sur les directions de ces forces, les effets dont elles sont capables séparément : & il décrira cette diagonale, dans le même temps que par l'action de l'une quelconque de ces deux forces, il eût décrit le côté qui représente cette dernière force.

En effet, concevons que par le point M , on mène FMH perpendiculaire à la diagonale ME ; & que par les points D & B on mène les lignes DF , BH parallèles, & les lignes DG , BI perpendiculaires à cette même diagonale. Au lieu de la force P représentée par MD diagonale du parallélogramme rectangle $FMGD$, on peut (222) prendre les deux forces MF & MG . Par la même raison, on peut, au lieu de la force Q représentée par la diagonale MB du parallélogramme rectangle $MHBI$, prendre les deux forces MH & MI . On peut donc, aux deux

forces P & Q , substituer les quatre forces MF , MG , MH , MI ; & celles-ci ne peuvent manquer d'avoir la même résultante que ces deux-là. Or de ces quatre forces, les deux MH , MF , ne contribuent en rien à la résultante, parce qu'elles agissent suivant des directions opposées, & qu'elles sont égales. En effet, il est aisé de voir que les deux triangles DGM , EIB sont égaux, par la nature du parallélogramme; donc $DG = BI$; donc aussi $MF = MH$.

Quant aux deux forces MI , MG , comme elles sont dirigées suivant une même ligne, l'effet qui en résulte doit être la somme des deux effets MG , MI (*fig. 58*), parce que ces forces agissent dans le même sens; & doit être leur différence (*fig. 59*), parce qu'elles agissent en sens contraires. Mais puisque le triangle EIB est égal au triangle DGM ; on a (*fig. 58*) $MI + MG = MI + EI = ME$; & (*fig. 59*) $MI - MG = MI - EI = ME$; donc les quatre forces MF , MH , MG , MI , & par conséquent les deux forces MD , MB , n'ont d'autre effet que la force ME représentée par la diagonale du parallélogramme $DMBE$, dont les deux côtés MB , MD représentent les deux forces Q & P .

224. Nous avons, dans ce qui précède, représenté les deux forces P & Q (*fig. 57, 58 & 59*) par les lignes MD , MB qu'elles feroient capables de faire
décrire

décrire dans un même temps, au mobile M , c'est-à-dire, par les vîteses qu'elles peuvent lui communiquer; quoique, selon ce que nous avons dit (189), la mesure véritable des forces, doit être la quantité de mouvement qu'elles sont capables de produire. Mais comme les quantités de mouvement (190) sont dans le rapport des vîteses, quand la masse est la même, ainsi que dans le cas présent, on peut toujours prendre, comme nous l'avons fait, les vîteses MD , MB , pour représenter ces deux forces.

Mais si au lieu d'avoir immédiatement les vîteses que les deux forces P & Q peuvent engendrer dans le mobile M , on avoit les quantités de mouvement qu'elles peuvent produire dans des masses connues, alors on prendroit MD & MB , dans le rapport de ces quantités de mouvement. Par exemple, si je ne connoissois les forces P & Q , que par ce caractère; que la force P est capable d'engendrer une vîtesse connue u , dans une masse connue m ; & que la force Q est capable d'engendrer une vîtesse connue u' , dans une masse connue m' , alors je prendrois $MD : MB :: mu : m'u'$. Car, selon ce que nous venons de voir, il faut prendre $MD : MB$ dans le rapport des vîteses que ces deux forces peuvent imprimer au mobile M ; or la première étant capable d'engendrer la quantité de mouvement mu , est capable de donner

au mobile M la vitesse $\frac{m u}{M}$ (189); par la même raison, la seconde, ou la force Q est capable de donner au mobile M , la vitesse $\frac{m' u'}{M}$; il faudroit donc prendre $MD : MB :: \frac{m u}{M} : \frac{m' u'}{M}$; mais $\frac{m u}{M} : \frac{m' u'}{M} :: m u : m' u'$; donc il faut, en effet, faire $MD : MB$ dans le rapport des quantités de mouvement qui mesurent les forces P & Q .

Cette réflexion est utile pour comparer les effets de différentes forces appliquées à différens mobiles.

La proposition générale que nous venons de démontrer (223), est d'une très-grande utilité; presque tout ce que nous dirons par la suite, n'en fera qu'une application.

225. On voit donc qu'il est absolument indifférent de regarder un corps comme sollicité par l'action combinée des deux forces MB , MD (fig. 58 & 59), qui font entre elles tel angle qu'on voudra, ou de le regarder comme sollicité par l'action unique de la force représentée par la diagonale ME .

Et réciproquement, il revient absolument au même, de considérer un corps comme sollicité par une force unique ME , ou de le considérer comme sollicité en même temps par deux forces qui seroient représentées par les côtés d'un parallélogramme,

dont celle-là feroit la diagonale. Par exemple, qu'un corps parvienne de M en E , par un mouvement uniforme, en une seconde de temps; ou bien qu'il se meuve sur la ligne MB , de manière à la parcourir dans une seconde de temps, & qu'en même temps cette ligne soit transportée parallèlement à elle-même le long de MD , & qu'elle parcoure MD aussi dans une seconde, le corps dans ce second mouvement se trouvera, également, ne décrire autre chose que la ligne ME .

226. Les deux forces MB , MD se reconstruant au point M , sont nécessairement dans un même plan (*Géom.* 174). Puis donc qu'elles ont pour résultante la diagonale ME , qui est dans le plan du parallélogramme, on peut dire généralement, que *deux forces qui se rencontrent, sont toujours dans un même plan avec leur résultante.*

De la Composition & de la Décomposition des forces.

227. Non-seulement on peut, par le principe que nous venons d'exposer, réduire à une seule, deux forces qui concourent; & décomposer une force en deux autres; mais on peut, en général, réduire à une seule force, tant d'autres forces que l'on voudra, lorsqu'elles sont dans un même plan, ou

qu'elles se rencontrent toutes en un même point. Et réciproquement, on peut décomposer une ou plusieurs forces, en tel autre nombre de forces que l'on voudra.

228. Mais avant de faire voir comment on y parvient, il faut observer que lorsqu'une force P (*fig. 60*) agit sur un corps, soit pour le pousser, soit pour le tirer, il importe peu à quel point de la direction de cette force, on suppose que son action soit appliquée.

Par exemple, c'est la même chose, que la force P tire le corps C par le point P à l'aide d'une verge inflexible & sans masse, ou d'un fil inextensible & sans masse; c'est la même chose, dis-je, qu'elle le tire par le point P , ou qu'elle le tire par le point A , ou par le point B , ou par le point C , ou qu'elle le pousse par tout autre point D lié avec ce corps. Tant que son action s'exercera suivant la même direction, elle aura toujours le même effet. La distance ne peut influer qu'autant que l'action de la puissance se transmettroit à l'aide de quelque instrument, comme levier ou corde, dont la masse partageroit l'action de la puissance; ce que nous excluons ici.

Ainsi, si deux forces P & Q (*fig. 61*) dirigées dans un même plan, suivant les lignes AQ , BP tirent ou poussent un corps par les deux points A & B ; ce corps n'est pas autrement sollicité qu'il le feroit, si les deux forces le tiroient toutes deux par

leur point de concours I , en restant toujours dirigées de la même manière.

Cela posé, venons à la composition & à la décomposition des forces.

229. Supposons (*fig. 62*) quatre forces P, Q, R, S dirigées suivant les lignes OP, AQ, BR, TS toutes dans un même plan. Prolongeons d'abord, par la pensée, la direction PO , jusqu'à ce qu'elle rencontre AQ , au point A : & supposant que AD, AE sont les espaces que les deux forces P & Q pourroient respectivement faire décrire à un même mobile, dans un temps déterminé, comme d'une seconde; si l'on forme le parallélogramme $AEID$, la diagonale AI , représentera (223) l'effort résultant des deux forces P & Q , & pourra par conséquent tenir lieu de ces deux forces.

Concevons maintenant, que AI prolongé rencontre en B la direction BR de la force R ; & ayant pris BM égale à AI , si l'on prend BF pour l'espace que la force R est capable de faire décrire en une seconde, au même mobile que ci-dessus; alors supposant la force AI appliquée en B ; puisque cette force est représentée par $BM = AI$, de son concours d'action avec la force R , il résultera une force unique représentée par la diagonale BG du parallélogramme $BMGF$: cette force tiendra donc

lieu de la force R & de la force AI ; c'est-à-dire, tiendra lieu des trois forces R , Q & P .

Enfin concevons que BG prolongée, rencontre en C , la direction TS de la force S , & faisons $CK = BG$; supposons que CH représente l'espace que la force S peut faire décrire dans une seconde, au même mobile que ci-dessus; alors concevant la force BG , appliquée en C suivant CG , & représentée par CK ; du concours de cette force avec la force S , il résultera un effort unique représenté par la diagonale CN du parallélogramme $CHNK$. Cette force tiendra donc lieu de la force S & de la force CK ou BG ; elle tiendra donc lieu des quatre forces P , Q , R , S : elle est donc la résultante de ces quatre forces.

On voit donc par-là qu'on peut toujours, & comment on peut réduire à une seule force, tant de forces que l'on voudra, lorsqu'elles sont dirigées dans un même plan.

230. Cet exemple fait voir en même temps, comment on peut, à une seule force, en substituer tant d'autres que l'on voudra; & quelles conditions ces autres doivent avoir.

Par exemple (*fig. 62*) au lieu de la force unique BG , on peut, en formant un parallélogramme quelconque $BFGM$, dont BG soit la diagonale, prendre deux forces représentées

par BF & BM . Et comme on peut supposer chacune de ces deux forces appliquées à tel point de leur direction que l'on voudra, on peut transporter BM en AI , le point A étant à telle distance qu'on voudra de B , & former sur AI un autre parallélogramme quelconque $AEID$; alors on peut substituer à la force AI , deux forces représentées par AE & AD ; enforte qu'à la force unique BG , on aura substitué les trois forces BF , AE , AD , qui produiront le même effet que celle-là.

231. Remarquons que puisqu'il n'y a d'autre condition pour déterminer les forces AD , AE , sinon qu'elles soient exprimées par les côtés AD , AE du parallélogramme $ADIE$ dont AI seroit la diagonale, ce qui peut avoir lieu d'une infinité de manières, soit que le parallélogramme $ADIE$ soit dans le plan du parallélogramme $FBMG$, ou qu'il soit dans tout autre plan; on peut décomposer une force quelconque BG , en tant d'autres qu'on voudra, & qui soient dans tels plans qu'on voudra.

Nous verrons par la suite l'usage de ces compositions & décompositions de forces.

232. On voit, par l'exemple de décomposition que nous venons de donner, qu'on peut assujettir, si on le veut, quelques-unes des forces à passer par certains points donnés, & même à être d'une grandeur déterminée; à être parallèles à certaines lignes

données; en un mot, à satisfaire à certaines conditions données.

Par exemple, si l'on avoit une force représentée par la ligne AB (*fig. 63*), & qu'on voulût substituer à cette force, deux autres, dont l'une passât par un point donné O , fût parallèle à une ligne donnée de position ST , & fût en même temps d'une certaine grandeur SK ; c'est-à-dire, telle qu'elle pût faire décrire SK à un mobile, dans le même temps que la force représentée par AB , feroit décrire au même mobile la ligne AB ; voici comment on satisferoit à cette question, d'après les principes précédens.

Par le point O , on meneroit OV parallèle à ST , & qui rencontreroit AB en quelque point V . On prendroit $VR=SK$, & $VQ=AB$; alors menant RQ , on lui meneroit par le point V , la parallèle VH , que l'on termineroit en H , par la ligne QH parallèle à VR ; VR feroit la force demandée, & VH feroit celle qui, conjointement avec VR , tiendrait lieu de VQ ou de AB .

La solution que nous donnons ne cesse d'avoir lieu que lorsque la ligne ST est parallèle à AB ; mais on verra dans peu, ce qu'il y a à faire dans ce cas.

233. Remarquons que puisque les deux forces composant P & Q (*fig. 58 & 59*) étant représentées par les deux côtés MD , MB du parallélogramme $DMBE$, leur résultante doit nécessairement être représentée par la diagonale ME du même parallélogramme, on a, en nommant R cette résultante, $P : R :: MD : ME$, & $Q : R :: MB :$

ME , c'est-à-dire, $P : Q : R :: MD : MB : ME$,
ou (à cause que $MD = BE$) $:: BE : MB : ME$.
or dans le triangle MBE , on a (*Géom.* 299)
 $BE : MB : ME :: \sin. BME : \sin. BEM : \sin. MBE$;
ou à cause des parallèles BE & MD qui donnent
l'angle $BEM = DME$, & l'angle MBE supplé-
ment de BMD , & par conséquent (*Géom.* 275)
 $\sin. MBE = \sin. BMD$, on a $BE : MB : ME$
 $:: \sin. BME : \sin. DME : \sin. BMD$; donc
 $P : Q : R :: \sin. BME : \sin. DME : \sin. BMD$;
où l'on voit que si l'on suppose la force P expri-
mée par $\sin. BME$, la force Q le fera par $\sin. DME$;
la force R le fera par $\sin. BMD$; c'est-à-dire, que
deux forces composantes & leur résultante, peuvent tou-
jours être représentées, chacune, par le sinus de l'angle
compris entre les directions des deux autres.

Ainsi, on peut employer indifféremment pour
représenter les forces, ou des lignes prises sur leurs
directions, ou les sinus des angles compris entre
leurs directions, pourvu qu'on prenne pour cha-
cune, le sinus de l'angle compris entre les directions
des deux autres.

Cette dernière manière d'exprimer les forces, a
aussi ses avantages particuliers, comme nous le
verrons par la suite.

234. Si du point M comme centre (*fig.* 64 & 65),

& d'un rayon quelconque ME' on décrit l'arc de cercle $HE'G$ qui rencontre en G & H les directions, prolongées, des forces P & Q ; & que du point E' on mène $E'F$, $E'I$ perpendiculaires sur MD , MB ; & du point H , HL perpendiculaire sur MD . Il est facile de voir que $E'F$, $E'I$, HL , sont respectivement les sinus des angles DME , BME & BMD ; on a donc $P : Q : R :: E'I : E'F : HL$.

235. Concevons maintenant que les directions des deux forces P & Q (fig. 66 & 67), passant constamment par deux points fixes K & N , leur point de concours M s'éloigne de plus en plus; il est visible que les sinus des angles BME , DME & BMD diminueront de plus en plus (*); que par conséquent ils approcheront, de plus en plus, de se confondre avec les arcs $E'H$, $E'G$, GH ; donc si le point M s'éloigne à l'infini, $E'F$, $E'I$ & HL se trouvent tous appliqués sur l'arc GH qui devient une ligne droite perpendiculaire aux deux lignes MK & MN , qui pour lors sont parallèles entre elles & à la ligne ME ; & puisqu'on a toujours $P : Q : R :: E'I : E'F : HL$; HL devenant alors égale à $E'I + E'F$ (fig. 66) & $= E'I - E'F$ (fig. 67),

(*) Il faut se rappeler (Géom. 275) que le sinus d'un angle obtus, est le même que celui de son supplément.

il s'enfuit que lorsque deux forces P & Q (fig. 68 & 69) ont des directions parallèles, 1°. leur résultante leur est parallèle. 2°. Que si on tire une ligne FI perpendiculaire à ces directions, chacune de ces forces est représentée par la partie de cette perpendiculaire, comprise entre les directions des deux autres. 3°. La résultante est égale à la somme des deux composantes, lorsque celles-ci agissent dans un même sens; & égale à leur différence, lorsqu'elles agissent en sens contraires.

236. Puisque l'on a (fig. 68 & 69) $P : Q : R :: EI : FE : FI$, on a donc $P : Q :: EI : FE$ & $P : R :: EI : FI$, c'est-à-dire, que, des deux composantes parallèles, & leur résultante, deux quelconques, sont toujours entre elles réciproquement comme les deux perpendiculaires menées sur leur direction, d'un même point pris sur la direction de la troisième.

237. Si l'on tire arbitrairement la ligne ABC , on aura (Géom. 102) $BC : AB : AC :: EI : FE : FI$. On aura donc aussi $P : Q : R :: BC : AB : AC$; c'est-à-dire, qu'en général, si l'on coupe les directions de deux forces parallèles, & de leur résultante, par une ligne droite menée comme on le voudra, chacune de ces forces peut toujours être représentée par la partie de cette droite, comprise entre les directions des deux autres.

238. De-là il est aisé de conclure comment on

doit s'y prendre pour trouver la résultante de plusieurs forces parallèles ; & réciproquement , pour substituer à une force quelconque , tant d'autres forces parallèles que l'on voudra.

Par exemple , s'agit-il de réduire à une seule , les deux forces P & Q (*fig. 68*) qui agissent dans le même sens. Je mène la ligne quelconque ABC : la résultante R doit être égale à $P + Q$ (235) : il ne s'agit donc que de trouver le point B , par où elle doit passer. Or (237) on a $P : R :: BC : AC$; c'est-à-dire , $P : P + Q :: BC : AC$; il faudra donc prendre entre les deux points A & C , un point B tel que l'on ait $BC = \frac{P \times AC}{P + Q}$.

Si les deux forces agissent en sens contraires (*fig. 69*) , la résultante sera égale à leur différence (235) , c'est-à-dire , sera $P - Q$, ou $Q - P$. Supposons P plus grand que Q . Ayant tiré arbitrairement la ligne AC , il faudra la prolonger au-delà de A par rapport à C d'une quantité AB , telle que l'on ait $P : R :: BC : AC$ (237) , ou $P : P - Q :: BC : AC$; c'est-à-dire , qu'il faudra prendre $BC = \frac{P \times AC}{P - Q}$.

Si Q étoit plus grand que P , le point B feroit sur le prolongement de AC , au-delà de C par rapport à A .

239. Si l'on avoit une troisième force K (*fig. 70*) ; alors , après avoir trouvé la résultante R des deux forces P & Q , on chercheroit la résultante S des deux forces R & K , comme s'il n'y avoit eu que ces deux-ci ; c'est-à-dire , précisément comme on vient de l'enseigner dans l'article précédent.

240. Donc réciproquement, si l'on vouloit décomposer une force quelconque R , en deux autres qui lui fussent parallèles (*fig. 68 & 69*).

On prendroit arbitrairement une ligne PF parallèle à la direction de la force R ; & ayant pris cette ligne pour la direction de l'une des composantes, on prendra arbitrairement pour la valeur de cette composante, une quantité quelconque P plus petite que R , si l'on veut que les deux composantes agissent de part & d'autre de la force R ; alors la seconde composante, que j'appelle Q , doit être égale à $R - P$; & pour avoir sa position, il ne s'agit plus que de mener la ligne quelconque CBA , & de prendre sur le prolongement de AB , la partie BC telle que l'on ait $Q : P :: AB : CB$; si par le point C on mène QC parallèle à RB , ce fera la direction de la force Q .

Mais si l'on veut que les deux composantes soient d'un même côté, auquel cas elles doivent agir en sens contraires; alors on peut prendre pour P , une quantité quelconque, plus petite ou plus grande que R , & ayant pris une ligne PF parallèle à RB , pour la direction de P , on prendra sur la ligne quelconque BAC , le point C de manière que l'on ait $P - R$ ou $R - P : R :: AB : AC$: le point C sera celui par où doit passer la force Q parallèle à la force donnée R : & ce point C fera au-delà de A par rapport à B , si P est plus grand que R ; au contraire, si P est plus petit que R , il sera entre A & B .

241. Ce que nous disons ici de la force R , à l'égard de ses composantes P & Q , pouvant évidemment s'appliquer à chacune de ces deux-ci; on voit donc comment on peut

substituer à une force quelconque, tant d'autres forces que l'on voudra, dont les directions soient parallèles.

Des momens, & de leurs usages pour la composition & la décomposition des forces.

242. Ce que nous venons de dire, suffit pour composer & décomposer les forces, quelques directions & quelques valeurs qu'elles aient, au moins quand elles agissent dans un même plan. Mais les différentes sortes de mouvemens que nous aurons à considérer, exigent des moyens plus simples & plus expéditifs pour déterminer la résultante des forces & sa direction : nous allons nous en occuper actuellement.

243. Si d'un point quelconque F (fig. 71 & 72) pris dans le plan d'un parallélogramme quelconque $ABCD$, on mène les lignes FE , FH , FG perpendiculaires sur les côtés contigus AB , AD & la diagonale AC ; la somme des produits de chaque perpendiculaire, par le côté sur lequel elle tombe, sera égal au produit de la diagonale par la perpendiculaire qui tombe sur elle, lorsque le point F (fig. 71) ne sera ni dans l'angle BAD , ni dans son opposé au sommet. Au contraire (fig. 72), si le point F est dans l'angle BAD , ou dans son opposé au sommet, ce sera la différence des produits de chaque perpendiculaire, par le côté sur lequel elle tombe, qui sera égale au produit

de la diagonale par la perpendiculaire qui tombe sur cette diagonale.

Prolongeons le côté BC jusqu'à ce qu'il rencontre en I , la perpendiculaire FH ; menons les lignes FA , FB , FC , FD . Le triangle FAC (fig. 71) est $= FAB + ABC + FBC = FAB + ADC + FBC$. Or, 1°. le triangle $FAC = \frac{AC \times FG}{2}$. 2°. Le triangle $FAB = \frac{AB \times FE}{2}$. 3°. Le triangle ADC ayant AD pour base, & IH pour hauteur, est $= \frac{AD \times IH}{2}$. 4°. Le triangle $FBC = \frac{BC \times FI}{2} = \frac{AD \times FI}{2}$; donc $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AB \times FE}{2} + \frac{AD \times IH}{2} + \frac{AD \times FI}{2}$; or $IH + FI = FH$; donc, & en doublant tout, on a $AC \times FG = AB \times FE + AD \times FH$.

Dans la figure 72, le triangle $FAC = ABC - FAB - FBC = ADC - FAB - FBC$; c'est-à-dire, $\frac{AC \times FG}{2} = \frac{AD \times IH}{2} - \frac{AB \times FE}{2} - \frac{BC \times FI}{2}$; ou (en faisant attention que $BC = AD$, & que $IH - FI = FH$, & en doublant tout) on a $AC \times FG = AD \times FH - AB \times FE$.

244. Puisque nous avons démontré ci-dessus, que deux forces quelconques, & leur résultante, peuvent être représentées par les côtés & la diagonale d'un parallélogramme formé sur leurs directions; concluons donc que si P & Q (fig. 71 & 72) sont deux

forces représentées par les lignes AB , AD , auquel cas leur résultante R sera représentée par AC ; concluons, dis-je, que si l'on prend hors de l'angle BAD & de son opposé au sommet, un point quelconque F , dans le plan de ces trois forces, on aura toujours $R \times FG = Q \times FH + P \times FE$; & que lorsque le point F sera pris dans l'angle BAD ou dans son opposé au sommet, on aura toujours $R \times FG = Q \times FH - P \times FE$.

245. Le produit d'une force par la distance de sa direction à un point fixe, est ce qu'on appelle le *moment* de cette force. Ainsi $Q \times FH$, est le moment de la force Q ; $R \times FG$, est le moment de la force R .

246. Comme les forces s'estiment (189) par la quantité de mouvement, c'est-à-dire, par le produit d'une masse déterminée, multipliée par la vitesse qu'elles sont capables de communiquer à cette masse; le moment d'une force quelconque, a donc pour valeur, le produit d'une masse, par sa vitesse, & par la distance de sa direction à un point fixe.

247. Si on conçoit que les perpendiculaires FH , FG , FE , soient des lignes inflexibles & sans masses, liées entre elles & fixées au point F de manière à ne pouvoir que tourner autour de ce point; & que les forces P , Q & leur résultante R , soient appliquées

aux

aux extrémités E, H, G ; on voit que (fig. 71) ces trois forces tendent toutes à faire tourner le système dans un même sens autour du point F ; & (fig. 72) les deux forces Q & R tendent à faire tourner le système dans un sens différent de celui selon lequel la force P tend à le faire tourner.

On peut donc dire que le moment de la résultante, pris par rapport à un point fixe quelconque F , est toujours égal à la somme ou à la différence des momens des deux composantes, selon que celles-ci tendent à faire tourner dans un même sens, ou dans des sens opposés, autour de ce point fixe.

248. De-là, on peut conclure en général, que quelque nombre de forces P, Q, S, T , &c. (fig. 73) que l'on ait; quelques grandeurs, & quelques directions qu'elles aient, pourvu qu'elles soient toutes dans un même plan; le moment de la résultante de toutes ces forces, pris par rapport à tel point F qu'on voudra, pris dans ce plan, sera toujours égal à la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens autour de ce point, moins la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire.

En effet, si l'on suppose que r soit la résultante des deux forces P & Q dirigées suivant AP & EQ ; r' celle de r & de S qui agit suivant GS ; & enfin R celle de r' & de T , qui agit suivant DT ; que l'on

suppose, de plus, que m soit le moment de r ; m' celui de r' . Alors en abaissant les perpendiculaires FA , FE , FG , FD , FB sur les composantes P , Q , S , T & leur résultante R ; on aura 1°. $m = P \times AF + Q \times EF$. 2° $m' = m - S \times FG$. 3°. $R \times FB = m' - T \times FD$; donc ajoutant ces trois équations, & détruisant les quantités semblables qui se trouveront dans chaque membre, on aura $R \times FB = P \times AF + Q \times EF - S \times FG - T \times FD$; où l'on voit que les momens des deux forces T & S qui tendent à faire tourner de droite à gauche, sont, en en effet, de signe contraire à ceux des forces P & Q , qui tendent à faire tourner de gauche à droite.

249. Si le point F étoit sur la direction même de la résultante, le moment de cette force seroit alors zéro; donc puisqu'il est égal à la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la somme de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire, il faut en conclure que la différence de ces deux sommes de momens pris par rapport à un point quelconque de la résultante, est zéro.

Et réciproquement si la somme des momens de plusieurs forces qui tendent à faire tourner autour d'un point, moins la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire autour de ce même point, est zéro, il faut en conclure que la résultante passe par ce point.

250. Puisque ces propositions sont généralement vraies, quelques angles que forment entre elles les directions des forces, elles le sont donc aussi, lorsque les forces forment entre elles des angles infiniment petits, ou, ce qui revient au même, lorsque les directions des forces sont parallèles entre elles.

251. De-là il est aisé de déduire une méthode fort simple pour avoir la position & la grandeur de la résultante de tant de forces que l'on voudra, lorsqu'elles agissent toutes dans un même plan.

Supposons d'abord qu'elles sont toutes parallèles entre elles; & pour ne point compliquer inutilement cette recherche, supposons qu'il n'y ait que trois forces; il sera facile d'en conclure ce qu'on doit faire pour un plus grand nombre.

Soient donc trois forces connues P, Q, S (fig. 74), dont les deux premières agissent suivant AP, BQ , & la dernière agit suivant CS . Ayant tiré arbitrairement une ligne quelconque $FABC$ perpendiculaire aux directions AP, BQ &c., on imaginera que le point D est celui par où doit passer la résultante R . Alors ayant pris arbitrairement un point F sur $FABC$, on aura, suivant ce qui précède, $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$; or les distances AF, FB, FC & les forces P, Q, S étant connues, il seroit très-facile de tirer de cette équation

la valeur de la distance DF à laquelle passe la résultante, si la valeur de cette résultante R étoit connue. Voyons donc quelle est la valeur de cette résultante.

Prenons un autre point F' sur le prolongement de AF ; le même principe nous donnera $P \times AF' + Q \times BF' - S \times CF' = R \times DF'$. Or si de cette seconde équation, on retranche la première, & qu'on fasse attention que $AF' - AF = FF'$, $BF' - BF = FF'$, $CF' - CF = FF'$, $DF' - DF = FF'$, on aura $P \times FF' + Q \times FF' - S \times FF' = R \times FF'$; c'est-à-dire, en divisant tout par FF' , $P + Q - S = R$.

Mais si l'on fait attention au raisonnement que nous venons de faire, il est facile de voir qu'il ne dépend nullement du nombre des forces; mais qu'il est applicable quel que soit le nombre de ces forces. On doit conclure, en général, que *la résultante de tant de forces parallèles que l'on voudra, est égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent dans un sens contraire*

Si dans l'équation $P \times AF + Q \times BF - S \times CF = R \times DF$, trouvée d'abord, on met pour R sa valeur $P + Q - S$ que nous venons de trouver, on aura $P \times AF + Q \times BF - S \times CF =$

$(P + Q - S) \times DF$; d'où l'on tire $DF = \frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P + Q - S}$; d'où , & ayant égard à ce que le raisonnement par lequel nous parvenons à ce résultat , ne dépend pas du nombre des forces , on conclura généralement que ,

Pour savoir à quelle distance d'un point donné, passe la résultante de plusieurs forces parallèles ; il faut , de la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, retrancher la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens opposé, & diviser le reste par la somme des forces qui agissent dans un sens , moins la somme de celles qui agissent en sens contraire ()*.

252. Si le point F , que l'on a pris d'abord arbitrairement , se trouvoit avoir été pris sur le point D même , par lequel passe la force résultante ; alors la distance DF étant zéro , sa valeur.....

$\frac{P \times AF + Q \times BF - S \times CF}{P + Q - S}$ qui devient $\frac{-P \times AD + Q \times BD - S \times CD}{P + Q - S}$

(parce que la force P tend à faire tourner autour du

(*) Il ne faut pas confondre les forces qui agissent dans des sens opposés , avec celles qui tendent à faire tourner dans des sens opposés. Deux forces qui agissent dans des sens opposés , tendent souvent à faire tourner dans le même sens ; cela dépend du point relativement auquel on considère la rotation , ou les

momens. Par exemple , les deux forces Q & S (*fig. 74*) agissent en sens opposés ; mais elles tendent toutes deux à faire tourner la ligne BC dans un même sens , autour d'un point pris entre B & C ; & si on considère la rotation , par rapport au point F , la force Q tend à faire tourner CF , en sens contraire de ce que tend à faire la force S .

point D en sens contraire de la force Q) feroit zéro ; on auroit donc $-P \times AD + Q \times BD - S \times CD = 0$; & comme le point F que l'on avoit pris d'abord arbitrairement , pouvoit être plus haut ou plus bas selon qu'on auroit voulu , enforte que le point D n'est pas censé être plutôt sur un point de la direction de la résultante R , que sur tout autre point de la même direction , il s'ensuit généralement que ,

Les momens de plusieurs forces parallèles pris par rapport à un point quelconque de la direction de la résultante , sont tels que la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens , est toujours égale à la somme des momens de celles qui tendent à faire tourner en sens contraire.

253. Donc , en prenant avec des signes contraires les momens des forces qui tendent à faire tourner dans des sens opposés , & prenant aussi , avec des signes contraires , les forces qui agissent dans des sens opposés , on peut dire généralement ,

1°. *Que la résultante de tant de forces parallèles que l'on voudra , est toujours égale à la somme de toutes ces forces.* 2°. *Que cette résultante , qui leur est parallèle , passe par une suite de points dont chacun a cette propriété , que la somme des momens par rapport à ce point , est zéro.*

Nous ferons le plus grand usage de ces principes, & nous verrons dans peu, avec quelle facilité on en déduit la position du centre de gravité des corps. Passons aux forces dont les directions font des angles entre elles.

254. Soient donc (*fig. 75*) tant de forces P , Q , S , &c. que l'on voudra, toutes dirigées dans un même plan. Que la force P agissant suivant AP , soit représentée par AB ; la force Q , agissant suivant EQ , soit représentée par EG ; la force S , agissant suivant IS soit représentée par IL . Par un point T pris arbitrairement dans le plan de ces forces, concevons deux droites indéfinies TE' , TE'' faisant entre elles un angle quelconque (que pour plus de simplicité nous supposons droit); & concevons les forces P , Q , S , ou AB , EG , IL , décomposées, chacune, en deux autres, dont l'une soit parallèle à la ligne TE' ; & l'autre parallèle à la ligne TE'' , & qui par conséquent (225) doivent être représentées, chacune, par le côté correspondant du parallélogramme, dont la diagonale représente la force principale. Il est clair, par ce qui précède (251), que les forces AD , EF , IM (*) étant parallèles, auront pour résultante une force unique VO qui leur

(*) Ne perdons pas de vue ce que nous avons dit (224). Par cette expression *les forces* AB , EG , &c. nous entendons que les lignes AB , EG , &c. sont entre elles comme les quantités de mouvement que

fera parallèle, dont la valeur sera $AD + EF - IM$, & qui passera à une distance VV' , telle que

$$VV' = \frac{AD \times AA' + EF \times EE' - IM \times II'}{AD + EF - IM}.$$

Parëillement, les forces AC , EH , IK , parallèles à TE'' se réduiront toutes à une seule VN qui leur sera parallèle, qui sera égale à $AC + EH + IK$; & qui (en supposant que V soit le point où la direction de cette force rencontre celle de la force OV) passera à une distance VV'' , telle que

$$VV'' = \frac{AC \times AA'' + EH \times EE'' + IK \times II''}{AC + EH + IK}.$$

Cela posé, les forces P , Q , S & leurs directions (c'est-à-dire, les angles qu'elles font avec des lignes fixes & connues, telles que TE' & TE'' , ou avec leurs parallèles), étant supposées connues, on connoît dans chacun des triangles BAD , GEF , IKL , l'hypothénuse & les angles; il fera donc aisé de déterminer les lignes AD , EF , KL ou IM , & les lignes BD ou AC , FG ou EH , & IK ; par-là on connoîtra les valeurs des deux résultantes $AD + EF - IM$, & $AC + EH + IK$. D'ailleurs comme on ne peut manquer de connoître les distances AA' ,

les forces P , Q , &c. peuvent produire dans les masses auxquelles elles sont appliquées. Il en est de même des forces AD , EF , &c.; nous entendons des	quantités de mouvement qui font aux quantités de mouvement représentées par AB , EG , comme AD & EF font à AB & EG respectivement.
--	--

AA'' ; EE' , EE'' , &c. puisqu'on ne peut ignorer la position des points A , E , où l'on suppose les forces appliquées, on connoît donc toutes les quantités qui entrent dans l'expression des distances VV' & VV'' . Il fera donc facile de déterminer le point V , où se rencontrent ces deux forces résultantes. Prenant donc $VO = AD + EF - IM$, & $VN = AC + EH + IK$, & formant le parallélogramme $OVNX$, on aura la diagonale VX pour la résultante R des deux résultantes parallèles à TE' & TE'' , c'est-à-dire, pour la résultante de toutes les forces proposées.

Des forces qui agissent dans des plans différens.

255. Soient trois forces P , Q , S (fig. 76), dirigées suivant les lignes AP , BQ , CS parallèles entre elles, mais situées dans différens plans.

Concevons un plan XZ auquel les trois droites AP , BQ , CS soient perpendiculaires, & un autre plan ZV auquel elles soient parallèles : que A , B , C soient les points où ces lignes rencontrent le plan XZ .

Les deux forces P & S sont dans un même plan dont l'intersection avec le plan XZ , est la droite AC . Ces deux forces peuvent donc être réduites à une seule $R' = P + S$, qui leur soit parallèle, &

qui passera par un point D , tel que (252) l'on aura $P \times AD = S \times CD$.

Les deux forces R' & Q sont dans un même plan dont l'intersection avec le plan XZ , est BD ; elles peuvent donc être réduites à une seule R qui sera égale à $R' + Q$, c'est-à-dire, $= P + S + Q$, qui leur sera parallèle, & qui passera par un point E , tel que l'on aura $R' \times DE = Q \times BE$. D'où, & de ce qui a été dit ci-devant, il est aisé de conclure, en général, que *tant de forces que l'on voudra, dont les directions sont parallèles, se réduisent toujours à une seule égale à la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent en sens contraires; & cela, soit qu'elles soient toutes dans un même plan, soit qu'elles soient dans des plans différens.*

Voyons maintenant plus particulièrement comment on détermine par où passe cette résultante.

Si des points A, D, C, B, E on mène les lignes AA', DD', CC', BB', EE' perpendiculaires sur l'intersection commune des deux plans XZ & ZV ; à cause des parallèles AA', DD', CC' , on aura $AD : CD :: A'D' : C'D'$; or l'équation $P \times AD = S \times CD$ que nous venons de trouver, donne $AD : CD :: S : P$; donc $A'D' : C'D' :: S : P$, & par conséquent $P \times A'D' = S \times C'D'$.

Pareillement, les parallèles DD' , EE' , BB' donnent $DE : BE :: D'E' : B'E'$; or l'équation $R' \times DE = Q \times BE$, que nous avons pareillement trouvée ci-dessus, donne $DE : BE :: Q : R'$; donc $D'E' : B'E' :: Q : R' :: Q : P + S$; donc $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$.

Prenons maintenant dans l'intersection ZT des deux plans, un point fixe T , & cherchons la distance TE' de ce point, au point E' qui correspond au point E par lequel passe la résultante. Il est clair que $A'D' = TD' - TA'$, $C'D' = TC' - TD'$, $D'E' = TE' - TD'$, $B'E' = TB' - TE'$. Substituons ces valeurs dans les deux équations $P \times A'D' = S \times C'D'$ & $(P + S) \times D'E' = Q \times B'E'$, nous aurons $P \times TD' - P \times TA' = S \times TC' - S \times TD'$, & $(P + S) \times TE' - (P + S) \times TD' = Q \times TB' - Q \times TE'$. Or, de ces deux équations, la première donne $(P + S) \times TD' = P \times TA' + S \times TC'$; substituant cette valeur dans la seconde, on a $(P + S) \times TE' - P \times TA' - S \times TC' = Q \times TB' - Q \times TE'$; rassemblant donc tous les termes multipliés par TE' , on aura $(P + Q + S) \times TE' = P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'$. D'où l'on tire $TE' = \frac{P \times TA' + Q \times TB' + S \times TC'}{P + Q + S}$.

Or cette expression de la distance TE' , est précisément celle que l'on auroit pour trouver la distance à laquelle passeroit la force résultante, si les trois

forces P , Q , S étoient toutes trois dans le plan ZV , & passioient par les points A' , C' , B' , correspondans aux points A , C , B par lesquels elles passent réellement. Donc si l'on conçoit la droite TX perpendiculaire au plan ZV , on trouvera la distance TE' de la résultante R , à cette droite, en prenant la somme des momens (*) à l'égard de cette droite, comme si toutes les forces, sans changer de distance à cette même droite, étoient toutes dans le plan ZV auquel elle est perpendiculaire; & divisant cette somme de momens par la somme des forces.

Il ne reste donc plus, pour fixer le point E , que de connoître la distance EE' , ou (en menant EE'' parallèle à ZT) la distance TE'' à laquelle cette même force passe, à l'égard de ZT . Or il est clair, d'après ce que nous venons de dire sur la distance TE' , que pour avoir la distance TE'' , il faut, de même, concevoir un plan passant par XT , & parallèle aux directions des forces: prendre la somme des momens à l'égard de TZ qui est l'intersection de ce plan avec le plan ZV ; prendre, dis-je, la somme

(*) Il faut observer ici, & pour la suite, que par le mot général *somme des momens*, on doit entendre la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, moins la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner en sens opposés. On doit de même, par ce mot *somme des forces*, entendre la somme de celles qui agissent dans un sens, moins la somme de celles qui agissent dans l'autre.

des momens à l'égard de TZ , comme si toutes les forces, sans changer de distance au plan ZV , étoient toutes dans le plan XV ; & diviser cette somme de momens, par la somme des forces. Alors on aura tout ce qu'il faut pour fixer le point E par où passe la résultante.

256. Considérons maintenant les forces dont les directions ne sont ni dans un même plan, ni parallèles.

Soient (*fig. 77*) P, Q, R trois forces dirigées suivant les lignes AP, BQ, CR situées dans des plans différens. Concevons un plan quelconque XZ , rencontré en H , par la direction AP ; en F , par la direction BQ ; & en L , par la direction CR . Comme on peut (228) supposer une force appliquée à tel point que l'on veut de sa direction, j'imagine ces trois forces appliquées aux points H, F, L & représentées par les lignes HV, FT, LK prolongement des lignes AP, BQ, CR , au-dessous du plan XZ ; & je suppose que ces forces soient représentées par les lignes HV, FT, LK . Concevons encore que par les droites AH, BF, CL , on ait mené des plans perpendiculaires au plan XZ , & dont les intersections avec celui-ci, soient les droites GHN, EFY, DLM . Cela posé, il est évident que je puis décomposer chacune de ces forces en deux

autres , dont l'une soit dans le plan XZ , & l'autre soit perpendiculaire à ce même plan. Par exemple , je puis décomposer la force HV , en une force dirigée suivant HN , & une autre force dirigée suivant HO perpendiculaire au plan XZ . Ensorte , qu'aux trois forces HV , FT , LK , je puis substituer les six forces HN , FY , LM , HO , FS , LI , dont les trois premières sont dans le plan XZ , & les trois dernières sont perpendiculaires à ce même plan.

Or on peut , par ce qui a été enseigné (254) , réduire les trois forces HN , FY , LM à une seule qui fera aussi dans le plan XZ . Et par ce qui vient d'être dit (255) on peut réduire les trois forces HO , FS , LI , à une seule , qui sera perpendiculaire au plan XZ . Donc en général , *quelque nombre de forces que l'on ait , & quelques directions que ces forces puissent avoir ; on peut toujours les réduire à deux tout au plus , l'une dirigée dans un plan connu , & l'autre perpendiculaire à ce plan.*

257. Il n'en est donc pas des forces dirigées dans différens plans , comme de celles qui sont toutes dirigées dans un même plan. Celles-ci peuvent toujours être réduites à une seule , ainsi que nous l'avons vu. Mais celles-là se réduisent à deux , qui ne peuvent être réduites à une seule , que dans le cas où la résultante des forces qui agissent dans le plan XZ ,

rencontreroit celle des forces perpendiculaires au même plan.

258. On peut donc, par ce moyen, trouver les deux résultantes de tant de forces que l'on voudra, lorsque ces forces sont dirigées dans des plans différens. Mais quoique ce moyen puisse être utile, dans beaucoup de cas, il n'est cependant pas le plus commode pour la résolution de beaucoup de questions; c'est pourquoi nous allons en enseigner un autre.

Soit donc P (*fig. 78*) l'une quelconque des forces proposées, & AB la ligne qui peut la représenter. Soit X un point fixe quelconque; XZ , XY , XT trois droites perpendiculaires entre elles. Si sur AB , comme diagonale, on forme le parallélogramme rectangle $ADBC$, dont le plan soit perpendiculaire au plan YXT , & dont le côté BC soit parallèle à XZ ; qu'en suite sur BD comme diagonale, on forme le parallélogramme rectangle $DFBE$ dont le plan soit parallèle au plan YXT , & dont les côtés BF , BE soient parallèles aux droites XT , XY ; il est clair 1°. qu'à la force AB , on peut substituer la force BC parallèle à XZ , ou perpendiculaire au plan YXT , & la force BD parallèle à ce même plan. 2°. Qu'à cette force BD , on peut substituer la force BE parallèle à XY , ou perpendiculaire au plan ZXT , & la force BF parallèle à XT ou

perpendiculaire au plan ZXY ; enforte que la force P ou AB , se trouvera décomposée en trois forces parallèles à trois lignes perpendiculaires entre elles, ou, ce qui revient au même, se trouvera décomposée en trois forces perpendiculaires à trois plans qui seront perpendiculaires entre eux.

Or, ce que nous disons ici de la force P , est évidemment applicable à toute autre force qui ne sera point perpendiculaire à l'un de ces trois plans. Donc si on conçoit toutes les forces telles que P , ainsi décomposées, & qu'on réduise ensuite à une seule par la méthode donnée (255), toutes les forces perpendiculaires au plan ZXT ; qu'on fasse la même chose, pour les forces perpendiculaires au plan ZXY ; enfin, la même chose, pour les forces perpendiculaires au plan YXT , on voit qu'on pourra toujours réduire tant de forces que l'on voudra, dirigées dans différens plans, à trois forces perpendiculaires à trois plans qui seroient perpendiculaires entre eux. Tels sont les principes généraux de la composition & de la décomposition des forces.

Des Centres de gravité.

259. Avant que de nous occuper des effets particuliers que peuvent produire sur les machines, ou en général sur les corps d'une structure & d'une
matière

matière connue , les forces dont nous venons de considérer les propriétés générales, il faut nous arrêter sur les centres de gravité , dont la connoissance importe beaucoup pour la détermination des mouvemens dont ces machines ou ces corps peuvent être susceptibles.

Rappelons-nous que nous avons dit (202) que les directions suivant lesquelles la pesanteur agit sur les particules matérielles d'un corps sont parallèles; & que cette force tend à communiquer à chaque partie de matière, la même vitesse dans le même temps.

260. On appelle *Centre de gravité* d'un corps, ou d'un *système* de corps (c'est-à-dire, d'un assemblage quelconque de corps), le point par où passe la force résultante des forces particulières dont chaque partie de ce corps ou de ce système, seroit animée par l'action naturelle de la pesanteur, dans quelque situation qu'on mette ce corps, ou ce système.

Par exemple, si dans la position actuelle du triangle ABC (fig. 79) la force résultante des actions de la pesanteur sur toutes les parties de ce triangle, passe par un certain point G de sa surface; & que dans une autre situation abc , elle passe encore par le même point G , ce point G s'appelle le centre de gravité. Nous verrons dans peu, que cette résultante passe toujours par le même point, dans toutes les situations possibles du corps.

261. La détermination de ce centre est facile , après ce que nous avons dit sur l'usage des momens pour trouver la résultante de plusieurs forces parallèles.

En effet , soient M, N, P (*fig. 80*) , tant de corps que l'on voudra, dont (pour ce moment) nous considérerons les masses comme concentrées au point B, A, C que nous supposerons d'abord dans un même plan. Soit p la vitesse que la pesanteur tend à imprimer à chacun dans un instant ; & qui (202) est la même pour chacun. Alors pM, pN, pP seront les quantités de mouvement , ou les forces avec lesquelles ces corps tendent à se mouvoir suivant les directions parallèles $C''C, B''B, A''A$. Or , suivant ce que nous avons dit (251) , pour avoir la position de la force résultante , il faut prendre la somme des momens à l'égard d'un point quelconque T pris sur une ligne perpendiculaire à ces directions , & diviser cette somme par la somme des forces ; on aura donc , pour la valeur de la distance TG'' à laquelle passe cette résultante , on aura , dis-je , $TG'' = \frac{pM \times TE'' + pN \times TA'' + pP \times TC''}{pM + pN + pP}$, qui , en supprimant le facteur commun p , se réduit à $TG'' = \frac{M \times TB'' + N \times TA'' + P \times TC''}{M + N + P}$.

Or , en menant les lignes BB', AA', CC' parallèles à TG'' , & terminées à la verticale TC' ; imaginant de plus , que le point G pris sur la

direction de la résultante , est le centre que nous cherchons , & menant GG' aussi parallèle à TG'' , on a $TG'' = G'G$, $TB'' = BB'$, $TA'' = AA'$, $TC'' = CC'$; donc $GG' = \frac{M \times BB' + N \times AA' + P \times CC'}{M + N + P}$; c'est-à-dire , en restreignant le mot de *momens*, & n'entendant par ce mot, que le produit de la masse d'un corps par sa distance à une ligne droite.

La distance du centre commun de gravité de plusieurs corps , à une ligne droite , se trouve en divisant la somme des momens de ces corps (pris par rapport à cette ligne) , par la somme des masses.

Concevons maintenant que l'on renverse le système des corps M , N , P , en sorte que la ligne TA'' qui étoit horizontale , devienne verticale ; & au contraire pour la ligne TC' ; alors on démontrera de même , que pour avoir la distance de la résultante , à la ligne TA'' qui est alors verticale , il faut prendre la somme des momens à l'égard de TA'' , & diviser cette somme , par celle des masses. On aura donc , de même , $GG'' = \frac{M \times BB'' + N \times AA'' + P \times CC''}{M + N + P}$. Or ayant déterminé les distances de G aux deux lignes fixes & connues TA'' & TC' , il est évident que la position de ce centre est connue , puisque les distances BB' , BB'' , AA' , AA'' , &c. sont connues , attendu qu'on est maître de prendre par-tout ou l'on voudra , le point T par où on mène TA' & TC' .

262. Si les distances AA'' , BB'' , &c. sont chacune zéro ; c'est-à-dire, si tous les corps sont sur une même ligne droite TA'' ; alors la somme des momens, par rapport à cette droite, est zéro ; donc la distance GG'' est aussi zéro. Donc si plusieurs corps, considérés comme des points, sont sur une même ligne droite, leur centre commun de gravité, est aussi sur cette même ligne droite.

263. Si l'on menoit les lignes TA'' , TC' de manière que l'une ou l'autre, ou toutes deux, se trouvaient avoir des corps de part & d'autre, alors, au lieu de la somme des momens, il faudroit dire la somme des momens des corps qui se trouvent d'un côté, moins la somme des momens des corps qui se trouvent de l'autre. Quant au dénominateur de la fraction qui exprime la distance du centre de gravité, il fera toujours composé de la somme des masses, parce que toutes les forces de ces masses, en vertu de leur pesanteur, agissent toutes dans le même sens. Cela est général pour quelque nombre de corps que ce soit, qui étant considérés comme des points, sont tous dans un même plan. Et tout cela est une suite de ce qui a été dit (251).

Les lignes TA' , TA'' s'appellent *Axes des Momens*.

264. Si l'on conçoit maintenant, que le point T

que nous avons pris d'abord arbitrairement, soit sur le point G ; alors GG' & GG'' deviennent, chacune, zéro. Donc la somme des momens par rapport à TC' , & la somme des momens par rapport à TA'' , doivent alors être zéro, chacune.

265. Présentement, je dis que si la somme des momens de plusieurs corps, par rapport à la droite RS qui passe par le point G (*fig. 81*), est zéro; & s'il en est de même de la somme des momens, par rapport à la droite PQ perpendiculaire à RS , & qui passe par le même point G ; la somme des momens par rapport à toute autre droite MN passant par le même point G , fera aussi zéro.

En effet, ayant mené les perpendiculaires AA' , AA'' , AA''' sur les lignes PQ , RS , MN ; si l'on suppose que le point I est celui où AA' rencontre MN ; le triangle rectangle $GA'I$, donnera *sin.* GIA' ou *cos.* PGM : GA' ou AA'' :: *sin.* PGM : $A'I$ = $\frac{AA'' \sin. PGM}{\cos. PGM}$; donc $AI = AA' - A'I = AA' - \frac{AA'' \sin. PGM}{\cos. PGM}$. Or dans le triangle rectangle IAA''' , on aura (en supposant le rayon = 1) $1 : AI$:: *sin.* AA''' ou *cos.* PGM : AA''' ; donc $AA''' = AI \times \cos. PGM$; c'est-à-dire, $AA''' = AA' \cos. PGM - AA'' \sin. PGM$; & par conséquent en multipliant par la masse A , on aura le

moment $A \times AA''' = A \times AA' \times \cos. PGM - A \times AA'' \sin. PGM$; c'est-à-dire, que le moment du corps A , à l'égard de l'axe MN , est égal au cosinus de l'angle PGM multiplié par le moment à l'égard de l'axe PQ , moins le sinus du même angle PGM , multiplié par le moment à l'égard de l'axe RS .

Or il est facile de voir que la même chose aura lieu à l'égard de tout autre corps, à la différence des signes près, selon que les corps seront d'un même ou de différens côtés de MN . Donc si on fait une somme de tous les momens à l'égard de l'axe MN , on trouvera qu'elle est égale au cosinus de l'angle PGM , multiplié par la somme des momens à l'égard de PQ , moins le sinus de l'angle PGM , multiplié par la somme des momens à l'égard de RS . Or chacune de ces deux dernières sommes est zéro, par la supposition; donc leurs produits par le cosinus & par le sinus de l'angle PGM , seront zéro, donc aussi la somme des momens à l'égard de l'axe quelconque MN passant par le centre de gravité G , est zéro.

266. Concluons donc de-là, que l'action résultante de toutes les actions particulières de la pesanteur sur chacune des parties d'un système de corps, passe toujours par un même point de ce système, quelque

position que ce système puisse avoir ; car ce n'est que par rapport à la direction de la résultante que la somme des momens de plusieurs forces parallèles, peut être zéro (253).

Au reste , quoiqu'il n'ait été question , jusqu'ici , que des corps dont les centres de gravité sont dans un même plan , cela ne s'étend pas moins au cas où les parties du système sont dans différens plans : c'est ce qu'on va voir , par ce qui suit.

267. Si les corps, toujours considérés comme des points, ne sont pas dans un même plan, on concevra un plan horizontal XZ (*fig. 76*) ; & de chacun des points pesans P, Q, S on imaginera les verticales PA, QB, SC ; & pour déterminer le point E par où passe la résultante RE dans la direction de laquelle doit être le centre de gravité, on prendra (255) les momens par rapport à deux droites fixes TX, TZ prises dans le plan horizontal ZX , & perpendiculaires entre elles, on prendra, dis-je, la somme des momens comme si tous les corps étoient dans ce plan horizontal ; & ayant divisé chacune de ces deux sommes de momens, par la somme des masses P, Q, S , on aura les deux distances $E'E, E''E$. Il ne fera donc plus question que de trouver, à quelle distance EG au-dessous du plan horizontal XZ , se trouve ce centre. Or

si l'on imagine la figure renversée, de manière que le plan XZ devienne vertical, & que ZV soit alors le plan horizontal; on voit, par le même principe, que pour avoir la distance $E'G'$ correspondante & égale à la hauteur cherchée EG , il faut prendre la somme des momens par rapport à ZT , comme si tous les corps étoient dans le plan ZV , & diviser cette somme de momens, par la somme des masses; alors on a tout ce qu'il faut pour déterminer la position du centre de gravité.

268. Donc, pour récapituler, la recherche du centre de gravité se réduit :

1°. Lorsque tous les corps, considérés comme des points, sont situés sur une même ligne droite (*fig. 82*) ; à prendre la somme des momens par rapport à un point fixe F , pris arbitrairement sur cette ligne, & diviser cette somme par la somme des masses; le quotient est la distance du centre de gravité G , à ce même point F .

2°. Lorsque tous les corps, considérés comme des points, sont tous dans un même plan; on imaginera, par un point T (*fig. 80*) pris arbitrairement dans ce plan, deux lignes TA'' , TA' perpendiculaires l'une à l'autre; & ayant mené des perpendiculaires, de chaque point pesant, sur chacune de ces deux

lignes, on imaginera que ces points pesans sont appliqués successivement sur la ligne TA'' , & sur la ligne TA' , chacun au point où aboutit sa perpendiculaire. Et l'on cherchera, comme dans le cas précédent, quel est alors le centre de gravité G'' sur TA'' ; & quel est le centre de gravité G' sur TA' ; menant enfin par ces deux points, les lignes $G''G$, $G'G$ parallèles à TA' & TA'' , leur point de rencontre G fera le centre de gravité cherché.

3°. Enfin, lorsque les corps, considérés comme des points, seront dans différens plans, on imaginera trois plans, l'un horizontal (*fig. 76*), & les deux autres verticaux, & perpendiculaires entre eux. De chaque point pesant on abaissera une perpendiculaire sur chacun de ces plans; on prendra la somme des momens, par rapport à chaque plan, & divisant chaque somme, par la somme des masses, on aura les trois distances du centre de gravité à chacun de ces plans.

269. Sur quoi, il faut toujours se souvenir que quand quelques-uns des corps se trouvent de différens côtés du point, ou de la ligne, ou du plan, par rapport auquel on considère les momens, il faut prendre, avec des signes contraires, le momens des corps qui se trouvent de différens côtés.

270. Plaçons ici une observation qui suit immédiatement de ce que nous venons de dire, & qui peut abrégér, dans plusieurs occasions, la détermination du centre de gravité, & d'autres recherches.

Puisque la distance du centre de gravité est égale à la somme des momens, divisée par la somme des masses; si le point, la ligne, ou le plan par rapport auquel on considère les momens, passe par le centre de gravité, cette distance étant alors zéro, la somme des momens doit donc aussi être égale à zéro. Donc, en général, *la somme des momens par rapport à tel plan que ce soit, qui passe par le centre de gravité, est zéro.*

271. Jusq'ici nous avons considéré les corps comme des points; & nous avons vu comment on détermine le centre commun de gravité de tous ces points, en quelque nombre qu'ils soient. Or, un corps d'un volume & d'une figure quelconques, n'étant autre chose que l'assemblage d'une infinité d'autres corps, ou parties matérielles, que l'on peut considérer comme des points, il s'ensuit donc que par la même méthode on peut déterminer le centre de gravité d'un corps de figure quelconque; & nous allons en voir diverses applications dans un moment.

Et puisque le centre de gravité n'est autre chose que le point par où passe la résultante de tous les

efforts particuliers que font les parties d'un corps pour obéir à leur pesanteur ; que d'ailleurs cette résultante est égale à la somme de tous ces efforts particuliers ; concluons-en qu'on peut toujours supposer tout le poids d'un corps réuni à son centre de gravité, & que ce poids y feroit le même effet, qu'il est capable de faire sur ce point, dans sa distribution actuelle sur toutes les parties du corps.

272. Donc lorsqu'on aura à trouver le centre commun de gravité de plusieurs masses de figures quelconques, on commencera par chercher le centre de gravité de chacune de ces masses, ce qui est facile actuellement. Puis, considérant le poids de chacune de ces masses comme réuni à son centre de gravité, on cherchera le centre commun de gravité, comme si tous ces corps étoient des points placés à l'endroit où chacun a son centre de gravité particulier.

273. Donc tout ce que nous avons dit, jusqu'ici, sur le centre commun de gravité de plusieurs corps considérés comme des points, a également lieu pour les corps de figure quelconque, en prenant, dans l'évaluation des momens, pour distance de chaque corps, la distance de son centre de gravité particulier.

274. Donc si plusieurs corps, de quelques figures



qu'ils soient, ont leurs centres particuliers de gravité dans une même ligne droite, ou dans un même plan; leur centre commun de gravité sera aussi dans cette même ligne droite, ou dans ce même plan. Cela se démontre comme on l'a fait (262).

275. Venons aux applications.

Soit AB (fig. 83) une ligne droite uniformément pesante. Pour avoir son centre de gravité, il faut la concevoir partagée en une infinité de parties telles que Pp ; multiplier chacune par sa distance à un point fixe; par exemple, par sa distance à l'extrémité A ; prendre la somme de ces produits, & diviser le tout par la somme des parties Pp ; c'est-à-dire, par la ligne AB . Nommons donc AB , a ; AP , x ; nous aurons $Pp = dx$; le moment de Pp fera $x dx$, qu'il faut intégrer pour avoir la somme des momens; cette somme sera donc $\frac{x^2}{2}$; & pour l'avoir dans toute l'étendue de la ligne, il faut supposer $x = a$; on a donc $\frac{a^2}{2}$ pour la somme totale des momens; divisant donc par la somme a des masses, on a $\frac{a}{2}$, pour la distance du centre de gravité, au point A . Ainsi, le centre de gravité d'une ligne droite uniformément pesante, est dans son milieu; ce qui est d'ailleurs évident.

276. Donc, 1°. pour avoir le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque (fig. 84), il faut du milieu de chaque côté, mener des perpendiculaires sur deux lignes fixes AB , AC , tirées dans le plan de ce polygone; & considérant le poids de chaque côté, comme réuni au milieu de ce côté,

chercher le centre commun de gravité de ces poids comme il a été dit (261).

277. 2°. *Le centre de gravité de la surface d'un parallélogramme quelconque, est au milieu de la ligne qui joint les milieux des deux côtés opposés.* Car en concevant le parallélogramme composé de lignes matérielles parallèles à ces deux côtés, chacune aura son centre de gravité sur la ligne qui passe par les milieux de ces deux mêmes côtés. Le centre commun de gravité de toutes ces lignes sera donc sur cette même ligne. Il sera d'ailleurs au milieu, puisque cette ligne considérée comme chargée de tous ces poids, est uniformément pesante.

278. 3°. *Pour avoir le centre de gravité de la surface d'un triangle ABC (fig. 85), il faut du sommet A, mener au milieu D du côté opposé BC la droite AD; & prendre, à compter du point D, la partie $DG = \frac{1}{3} AD$.*

En effet, la droite AD qui divise BC en deux parties égales au point D , divisera aussi, en deux parties égales, toute droite MN parallèle à BC ; donc si on considère la surface du triangle comme l'assemblage de plusieurs lignes matérielles, parallèles à BC , la ligne AD qui passe par les centres de gravité particuliers de toutes ces lignes, passera aussi par leur centre commun de gravité (262); c'est-à-dire, par celui du triangle. Par la même raison la ligne CE qui passeroit par le milieu de AB , passeroit aussi par le centre de gravité du triangle; ce centre est donc au point d'intersection G des deux lignes CE & AD . Or si l'on tire ED , elle sera parallèle à AC , puisqu'elle divise en deux parties égales les deux côtés AB , BC . Les deux triangles EGD , AGC seront donc semblables, ainsi que les triangles

ABC, EBD ; on aura donc $GD : AG :: ED : AC :: BD : BC :: 1 : 2$; GD est donc moitié de AG ; & par conséquent le tiers de AD .

279. Concluons de-là, que pour avoir le centre de gravité G d'un trapèze (fig. 86), il faut, par les milieux E & F des deux côtés parallèles CD & AB , mener EF ; & par ces mêmes points, mener aux deux angles opposés A & D les lignes EA, FD ; puis ayant pris $Eg = \frac{1}{3}EA$, & $Fg' = \frac{1}{3}FD$, mener gg' qui coupera EF au point cherché G .

Car, en raisonnant comme nous l'avons fait pour le triangle, on voit que le centre de gravité G doit être sur EF . D'ailleurs, g & g' étant (278) les centres de gravité particuliers des deux triangles CAD, ADB qui composent le trapèze $ABDC$, le centre commun de gravité de ces deux triangles, ou du trapèze, doit être sur gg' (262); il doit donc être à l'intersection G .

Comme nous aurons besoin, par la suite, de la distance FG , déterminons-la tout de suite.

Menons les lignes gh & $g'h'$ parallèles à AB . Puisque $gE = \frac{1}{3}AE$, & $Fg' = \frac{1}{3}FD$, on aura $gh = \frac{1}{3}AF$ & $g'h' = \frac{1}{3}ED$; ou $gh = \frac{1}{6}AB$, & $g'h' = \frac{1}{6}CD$. Par la même raison, $Eh = \frac{1}{3}EF$, $Fh' = \frac{1}{3}EF$; donc $hh' = \frac{1}{3}EF$. Or les triangles semblables $Ghg, G'h'g'$ donnent $gh : Gh :: g'h' : G'h'$; donc $gh + g'h' : Gh + G'h' :: g'h' : G'h'$; c'est-à-dire, $\frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}CD : \frac{1}{3}EF :: \frac{1}{6}CD : G'h'$; donc $G'h' = \frac{\frac{1}{6}EF \times CD}{\frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}CD}$; donc FG qui est $= Fh' + G'h'$ fera $= \frac{1}{3}EF + \frac{\frac{1}{6}EF \times CD}{\frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}CD}$; c'est-à-dire, $FG = \frac{\frac{1}{3}EF \times (AB + 2CD)}{\frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}CD}$. Ceci nous servira dans

peu, à trouver le centre de gravité de la partie submergée de la carène, dans les vaisseaux.

Remarquons, en passant, que si la hauteur du trapèze étoit infiniment petite, & les deux côtés AB & CD infiniment peu différens, alors ils doivent être réputés égaux; enforte que la distance FG se réduit à $\frac{\frac{1}{2} EF \times 3 AB}{2 AB}$, ou $\frac{1}{2} EF$; c'est-à-dire, que dans ce cas, le centre de gravité est à égale distance des deux bases opposées.

280. Il est donc facile maintenant de trouver le centre de gravité de la surface d'un polygone quelconque (fig. 87). Il faut le partager en triangles, & ayant déterminé le centre de gravité de chaque triangle, de la manière qu'on vient de l'enseigner, on déterminera le centre commun de gravité de tous les triangles, en les considérant comme autant de masses proportionnelles à leur surface, & réunies chacune à son centre de gravité particulier. Ce qui se fera comme il a été enseigné (261).

On voit actuellement comment on peut déterminer le centre de gravité de la surface de tout solide terminé par des surfaces planes.

281. Au reste, il est pas toujours nécessaire d'avoir recours aux momens, pour trouver les centres de gravité. Par exemple, s'il s'agissoit de trouver le centre de gravité du contour du pentagone régulier $ABCDE$ (fig. 88), je menerois de l'un A , des angles, une droite AF au milieu F du côté opposé CD . J'en menerois pareillement une seconde de l'angle E , au milieu du côté opposé BC ; l'intersection G de ces deux lignes seroit le centre de gravité.

En effet, le centre commun de gravité des deux côtés AB , AE , est au milieu c de la ligne ba qui passe par leurs milieux; cela est évident. Le centre commun de gravité des deux côtés BC , DE , est par la même raison, au milieu e de la ligne Id qui passe par leurs milieux. Enfin le côté CD , a son centre de gravité en F . Or il est facile de voir que la ligne AF passe par les milieux c , e & F ; elle passe donc par le centre commun de gravité des cinq côtés; un raisonnement semblable, prouvera que IE passe aussi par ce centre; ce centre est donc à l'intersection G , de AF & de IE .

282. En raisonnant comme nous l'avons fait pour le triangle, on prouvera que le point G est aussi le centre de gravité de la surface du pentagone régulier.

Et en général, on prouvera de la même manière, que le centre de gravité du contour, ainsi que de la surface d'un polygone régulier d'un nombre de côtés impair, est au point d'intersection de deux droites dont chacune est menée de l'un des angles, au milieu du côté opposé. Et lorsque le nombre des côtés est pair, ce centre est au point d'intersection de deux lignes menées par les milieux de deux côtés opposés; d'où l'on concluroit, s'il en étoit besoin, que le centre de gravité de la circonférence & de la surface d'un cercle, est au centre.

Quand le nombre des lignes, surfaces, corps, &c., dont on a trouvé le centre commun de gravité, n'est pas considérable, on peut faire usage de ce que nous avons dit (238 & 239). Par exemple, soient trois points A , B , C (*figure 89*) qui soient les centres de gravité de trois lignes, ou trois surfaces, ou trois corps, dont les poids sont représentés par les masses M , N , P . Ayant joint deux de ces points

points C & B , par la ligne BC , on partagera BC en D , de manière que l'on ait $N : P :: CD : BD$, ou $N + P : N :: CB : CD$; le point D sera le centre commun de gravité des deux points P & N . On menera ensuite DA ; & imaginant la totalité $N + P$ des deux masses N & P rassemblées en D , on partagera, de même, DA , en raison inverse des deux masses M & $N + P$, c'est-à-dire, de manière que $N + P : M :: AE : DE$, ou que $N + P + M : M :: AD : DE$; le point E sera le centre commun de gravité des trois poids M , N , P . On continueroit de même, pour un plus grand nombre de corps.

283. Concluons, de ce qui précède, que l'on peut avoir facilement le centre de gravité de la surface & de la solidité de tout prisme & de tout cylindre.

En effet, il est évident que ce centre doit être au milieu de la ligne qui passe par les centres de gravité des deux bases opposées; puisque ces corps sont composés de tranches parfaitement égales & semblables à la base, que l'on peut considérer comme autant de poids égaux uniformément distribués sur cette ligne.

284. Pour avoir le centre de gravité G d'une pyramide triangulaire $SABC$ (fig. 90), il faut, du sommet, mener au centre de gravité F de la base, la droite SF , & prendre sur cette ligne, à compter du point F , la partie $FG = \frac{1}{4} SF$.

En voici la raison. Du milieu D du côté AB , menons DC , DS , & ayant pris $DF = \frac{1}{3} CD$, & $DE = \frac{1}{3} DS$, les points F & E seront les centres de gravité des deux triangles ABC , ASB .

Cela posé, si l'on conçoit la pyramide composée de plans

matériels parallèles à ABC , la ligne SF qui passe par le point F de la base, passera, dans chaque tranche, par un point qui sera placé de la même manière dans cette tranche. Ainsi, les centres de gravité particuliers de chaque tranche, sont tous sur la ligne SF . Par la même raison, les centres de gravité particuliers des tranches parallèles à ABS , dont on peut imaginer que la pyramide est composée, sont tous sur EC . Donc le centre de gravité de la pyramide, est au point G , où les deux lignes FS & EC se coupent. Or si l'on mène FE , elle sera parallèle à CS , puisque DF étant le tiers de DC , & DE , le tiers de DS , ces deux lignes DC & DS sont coupées proportionnellement. Les deux triangles FEG , GCS seront donc semblables entre eux, & il en sera de même des deux triangles DFE , DCS ; on aura donc $FG : GS :: FE : CS :: DF : DC :: 1 : 3$; donc FG est le tiers de GS , & par conséquent, le quart de FS .

285. Comme on peut décomposer tout solide, en pyramides triangulaires; connoissant actuellement le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, il est facile, à l'aide des momens, de trouver le centre de gravité d'un corps quelconque.

286. Telle est la manière générale de trouver les centres de gravité des figures, ou des corps, dont les parties sont indépendantes les unes des autres, ou du moins, lorsqu'on n'a point l'expression de la loi qui les lie les unes aux autres.

Mais lorsque les parties d'une figure ou d'un corps ont entre elles une relation que l'on peut exprimer par une équation, on peut alors trouver le centre de gravité d'une manière beaucoup plus facile. En voici des exemples.

287. Qu'il s'agisse d'abord de trouver le centre de gravité G , d'un arc quelconque de courbe AM (fig. 91). On imaginera l'arc infiniment petit Mm ; & l'on prendra pour axe des momens une ligne quelconque CN parallèle aux ordonnées que je suppose perpendiculaires entre elles. Je suppose de plus que la distance de C à l'origine A des abscisses soit $= b$. Pour avoir la distance Gg du centre de gravité à l'axe CN , il faut prendre la somme des momens des arcs Mm , par rapport à l'axe CN , & la diviser par la somme des arcs Mm ; c'est-à-dire, par l'arc AM . Or l'arc Mm étant infiniment petit, la distance de son milieu n , à la droite CN , doit être réputée égale à MN . On aura donc $Mm \times MN$ pour le moment de ce petit arc. Mais en nommant AP , x ; PM , y ; on a (97) $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ & $MN = CP = b - x$; donc $(b - x) \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est le moment du petit arc Mm ; & par conséquent $\int (b - x) \sqrt{dx^2 + dy^2}$, où l'intégrale de $(b - x) \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est la somme des momens de tous les arcs infiniment petits Mm , dont l'arc AM est composé. On a donc.
 $Gg = \frac{\int (b - x) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{AM}$. Quant à l'arc AM qui divise, dans cette quantité; nous avons donné (97) la méthode pour le déterminer exactement, lorsque cela se peut; & (110) celle de le déterminer par approximation.

Par un raisonnement semblable, on trouvera que la distance Gg' , du centre de gravité, à l'axe AP , est $\frac{\int y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{AM}$.

Ce sont-là les formules générales qui servent à déterminer le centre de gravité d'un arc quelconque de courbe.

288. Si l'arc dont on veut avoir le centre de gravité, est composé de deux parties égales & semblables AM , AM' (fig. 92) situées de part & d'autre de l'axe des abscisses ; alors il est évident que le centre de gravité G , sera sur la droite AP : il ne sera donc question que de trouver sa distance au point C . Or il est clair que les momens des deux arcs Mm , $M'm'$, à l'égard de l'axe NN' étant égaux, la distance CG fera alors égale à $\frac{2 \int (b-x) \sqrt{dx^2 + dy^2}}{MAM'}$.

Par exemple, que l'arc MAM' soit un arc de cercle, on aura $y = \sqrt{ax - xx}$, a étant le diamètre. On trouvera facilement, & nous l'avons déjà vu (111), que $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\frac{1}{2} a dx}{\sqrt{ax - xx}}$. On aura donc $2 \int (b-x) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{2 \int \frac{1}{2} a (b-x) dx}{\sqrt{ax - xx}} = a \int (b-x) dx (ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$. Supposons, pour plus de simplicité, que le point C soit le centre, alors $AC = b = \frac{1}{2} a$; nous aurons donc $2 \int (b-x) \sqrt{dx^2 + dy^2} = a \int (\frac{1}{2} a - x) dx (ax - xx)^{-\frac{1}{2}} = a \sqrt{ax - xx} (89)$;

intégrale à laquelle il n'y a point de constante à ajouter, parce que, lorsque $x = \text{zéro}$, elle devient zéro, ainsi que cela doit être; puisqu'alors la somme des momens est évidemment nulle.

Nous avons donc enfin $2 \int (b - x) dx \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = a \sqrt{(ax - xx)}$; & par conséquent.

$$CG = \frac{a \sqrt{(ax - xx)}}{MAM'} = \frac{\frac{1}{2}a \times 2 \sqrt{(ax - xx)}}{MAM'} = \frac{CA \times MM'}{MAM'};$$

ce qui donne cette proportion $MAM' : MM' :: CA : CG$, qui nous apprend que la distance du centre d'un cercle, au centre de gravité de l'un quelconque de ses arcs, est quatrième proportionnelle à la longueur de l'arc, à sa corde & au rayon.

On peut appliquer ces formules à toute autre courbe : nous passons aux centres de gravité des surfaces planes terminées par des lignes courbes.

289. Si l'on demande le centre de gravité de la surface APM (fig. 93); nous supposons que G représente ce centre. Il faudra, pour avoir la distance Gg , prendre la somme des momens des petits trapèzes $MPpm$, par rapport à CN , & la diviser par la somme de ces trapèzes; c'est-à-dire, par l'espace APM . Or le centre de gravité i de ce petit trapèze doit être au milieu de la droite nk également éloignée de MP & de mp ; milieu que l'on peut supposer être celui de MP , à cause de la hauteur infiniment petite Pp ; on aura donc la distance $il = CP$; ainsi le moment de $PpmM$, fera

$PpmM \times CP$; c'est-à-dire $(b - x)ydx$, en appelant toujours CA , b ; & AP , x . Donc la somme des momens sera $\int (b - x)ydx$, & par conséquent la distance Gg sera $\frac{\int (b - x)ydx}{APM}$.

On trouvera de la même manière, que la distance $Gg' = \frac{\int \frac{1}{2}y^2dx}{APM}$.

290. En général, on trouvera de la même manière, le centre de gravité de tout espace plan, en le décomposant en trapèzes infiniment petits.

Par exemple, s'il s'agit du triangle ANN' (fig. 94), on prendra la base NN' & la hauteur AC pour axe des momens; & nommant AP , x ; MM' , y ; & AC , b ; on aura $MM'mm = ydx$; & le moment de ce trapèze à l'égard de NC , fera $(b - x)ydx$. En sorte que la distance Gg du centre de gravité à la base, fera $\frac{\int (b - x)ydx}{AMM'}$. Or si l'on nomme c la base, on a $AC : AP :: NN' : MM'$; c'est-à-dire, $b : x :: c : y = \frac{cx}{b}$; donc $\int (b - x)ydx$, devient $\int (b - x) \frac{cx dx}{b}$, ou $\int \frac{c}{b} (bx dx - x^2 dx)$, qui vaut $\frac{c}{b} \left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$ ou $\frac{cx^2}{6b} (3b - 2x)$. Or la surface AMM' est $\frac{MM' \times AP}{2}$ ou $\frac{cx^2}{2b}$; donc la distance du centre de gravité, est $\frac{\frac{cx^2}{6b} (3b - 2x)}{\frac{cx^2}{2b}}$ ou $\frac{1}{3} (3b - 2x)$, qui,

lorsque $x = b$, devient $\frac{1}{3}b$. Donc $Gg = \frac{1}{3}b$. Or si l'on mène la ligne AGL , les triangles semblables ACL , GgL

donnent $LG : LA :: Gg : AC :: \frac{1}{3}b : b :: 1 : 3$;
donc $LG = \frac{1}{3}LA$, ce qui s'accorde avec ce que nous
avons démontré (278).

291. Appliquons maintenant les formules aux lignes
courbes.

Supposons que APM (fig. 95) est une portion de cercle
dont le diamètre est a , & que le point C est le centre; ce
qui donne $b = \frac{1}{2}a$. Nous aurons $y = \sqrt{ax - xx}$. La
quantité $\int (b - x)y dx$, devient donc $\int (\frac{1}{2}a - x) dx$
 $\sqrt{ax - xx}$, ou $\int (\frac{1}{2} - x) dx (ax - xx)^{\frac{1}{2}}$ qui (89)
est intégrable, & a pour intégrale $\frac{1}{3}(ax - xx)^{\frac{3}{2}}$, quan-
tité à laquelle il n'y a point de constantes à ajouter, parce
qu'elle est zéro quand $x = 0$, ainsi que cela doit être.

Nous avons donc $Gg = \frac{\frac{1}{3}(ax - xx)^{\frac{3}{2}}}{APM} = \frac{\frac{1}{3}(PM)^3}{APM}$.

A l'égard de Gg' ; puisqu'on a $y = \sqrt{ax - xx}$, $\frac{1}{2}$,
sa valeur (289) fera $Gg' = \frac{\int \frac{1}{2} \cdot (ax - xx) dx}{APM}$; or
 $\int \frac{1}{2}(ax - xx) dx$, ou $\int \frac{1}{2} \cdot (ax dx - x^2 dx)$, est
 $\frac{1}{2} \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$ ou $\frac{1}{12}x^2(3a - 2x)$; on a donc
 $Gg' = \frac{\frac{1}{12}x^2(3a - 2x)}{APM}$.

Sil s'agit du segment entier; comme il est évident que
le centre de gravité G (fig. 92) est sur le rayon CA , qui
divise l'arc en deux parties égales, & qu'il est à même dis-
tance de NN' que les deux centres de gravité particuliers

des deux demi-segments APM , APM' , on a $CG = \frac{\frac{1}{3}PM^3}{APM} = \frac{\frac{1}{24} \cdot 8 \cdot (PM)^3}{APM} = \frac{\frac{1}{24} \cdot (MM')^3}{APM} = \frac{\frac{1}{12} (MM')^3}{2APM} = \frac{\frac{1}{12} (MM')^3}{AMM'A}$; c'est-à-dire, que la distance du centre d'un cercle, au centre de gravité de la surface de l'un quelconque de ses segments, est égale au douzième du cube de la corde, divisé par la surface de ce segment.

292. Quant au centre de gravité d'un secteur $CMAM'$ (fig. 96), on peut l'avoir, en observant que le centre de gravité G du segment MAM' , celui G' du secteur, & celui G'' du triangle sont tous sur le rayon CA ; que selon le principe des momens, le moment du secteur doit être égal au moment du segment, plus le moment du triangle. On a donc $CMAM' \times CG' = MAM' \times CG + CMM' \times CG''$. Or nous venons de trouver $CG = \frac{\frac{1}{3}(PM)^3}{APM}$ que

l'on peut changer en $\frac{\frac{2}{3}(PM)^3}{2APM} = \frac{\frac{2}{3}(PM)^3}{MAM'}$; donc $CG \times MAM' = \frac{2}{3}(PM)^3$. D'ailleurs, nous savons que $CMM' = PM \times CP$, & (278) que $CG'' = \frac{2}{3}CP$, en sorte que $CMM' \times CG''$ se réduit à $\frac{2}{3}PM \times (CP)^2$. Substituant donc ces valeurs, on a $CMAM' \times CG' = \frac{2}{3}PM^3 + \frac{2}{3}PM \times CP^2 = \frac{2}{3}PM [(PM)^2 + (CP)^2] = \frac{2}{3}PM \times (CM)^2$, à cause du triangle rectangle CPM . Donc $CG' = \frac{\frac{2}{3}PM \times (CM)^2}{CMAM'}$. Mais la surface du secteur

$CMAM'$, est égale à l'arc MAM' multiplié par $\frac{CM}{2}$; donc

$$CG' = \frac{\frac{2}{3}PM \times (CM)^2}{MAM' \times \frac{CM}{2}} = \frac{\frac{4}{3}PM \times CM}{MAM'} = \frac{\frac{2}{3}MM' \times CA}{MAM'}.$$

C'est-à-dire, que la distance du centre d'un cercle, au centre de

gravité de l'un quelconque de ses secteurs, est quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon, & aux deux tiers de la corde.

On peut appliquer les formules à toute autre courbe, par exemple, à la parabole, &c.

293. Voyons maintenant les surfaces courbes ; mais bornons-nous à celles des solides de révolution. Alors, en raisonnant comme dans les articles précédens, on verra que le centre de gravité de chaque zone élémentaire, est dans l'axe de révolution CA (figure 97), & doit être réputé au centre P de l'une des bases de cette zone, considérée comme ayant une épaisseur infiniment petite. Or, nous avons vu (98) que l'expression de cette zone étoit

$\frac{c}{r} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $r : c$ représentant le rapport du rayon à la circonférence. On aura donc (en nommant toujours b la distance AC de l'origine A des abscisses, à l'axe NN' des momens), on aura, dis-je, $\frac{c}{r} (b - x) y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ pour le moment de cette même zone, en sorte que la distance CG du centre de gravité G de la surface au point C , fera, en nommant S cette surface,

$$\frac{\int \frac{c}{r} (b - x) y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{S}.$$

294. Supposons, pour appliquer cette formule, qu'il s'agit de trouver le centre de gravité de la surface convexe du

cône droit ANN' (fig. 98), AP étant x ; PM , y ; la hauteur AC , b ; le rayon CN de la base, a ; & le côté AN , e ; on aura, à cause des triangles semblables, ACN , Mrm , $AC : AN :: Mr : Mm$; c'est-à-dire, $b : e :: dx : \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{e dx}{b}$. On aura aussi, à cause des triangles semblables, ACN & APM , $AC : CN :: AP : PM$; c'est-à-dire, $b : a :: x : y = \frac{ax}{b}$; donc $\int \frac{e}{r} (b - x) y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, devient $\int \frac{e}{r} \times (b - x) \times \frac{ax}{b} \times \frac{e dx}{b}$; ou $\int \frac{eae}{rb^2} (bx dx - x^2 dx)$, dont l'intégrale est $\frac{eae}{rb^2} \times \left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$, ou $\frac{eae x^2}{6rb^2} \times (3b - 2x)$. Or, la surface de la portion $AM' LMA$, ou S , est (Géom. 219) $= \frac{AM}{2} \times \text{circ. } PM$; & l'on a $AC : AP :: AN : AM$; ou $AM = \frac{AP \times AN}{AC}$: donc $S = \frac{AP \times AN}{2AC} \times \text{circ. } PM = \frac{e}{r} \times \frac{ae}{2bb} xx$; donc la distance du centre de gravité de la surface $AM' LMA$, au point C , est $\frac{\frac{eae x^2}{6rb^2} (3b - 2x)}{\frac{eae}{2rb^2} x^2}$, ou $\frac{2}{3} (3b - 2x)$, ou $b - \frac{2}{3}x$; donc lorsque $x = b$, ou lorsque $AP = AC$, on a la distance CG du centre de gravité de la surface totale du cône, $= b - \frac{2}{3}b = \frac{1}{3}b$; c'est-à-dire, que ce centre de gravité est le même que celui de la surface du triangle ANN' .

295. Pour second exemple, prenons la sphère (fig. 99). Nous aurons $y = \sqrt{ax - xx}$, a étant le diamètre; & $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{\frac{1}{2}a dx}{\sqrt{ax - xx}}$; donc $\int \frac{e}{r} (b - x) y \sqrt{dx^2 + dy^2}$, deviendra $\int \frac{e}{r} (b - x) \times \frac{1}{2}a dx$, supposant donc que C est le centre, ce qui rend $b = \frac{1}{2}a$, on

aura $\int \frac{c}{r} (b - x) \times \frac{1}{2} a dx = \int \frac{c a}{2r} (\frac{1}{2} a dx - x dx)$,

qui se réduit à $\frac{c a}{2r} (\frac{1}{2} a x - \frac{1}{2} x x)$, ou $\frac{c a x}{2r} (\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} x)$.

Or, nous avons vu (99) que la surface S du segment sphérique $AMLM'A$, étoit $\frac{c a x}{2r}$; on a donc la distance CG du

centre C au centre de gravité $G = \frac{\frac{c a x}{2r} (\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} x)}{\frac{c a x}{2r}} =$

$\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} x = CA - \frac{1}{2} AP$; c'est-à-dire, que ce centre G , est au milieu G de la hauteur AP de ce segment. D'où l'on peut conclure en général, que le centre de gravité de la surface d'une zone sphérique comprise entre deux plans parallèles, est au milieu de la hauteur de cette zone.

296. Terminons par la recherche des centres de gravité des solides.

Si l'on considère un solide (*fig. 97*) comme composé de tranches infiniment minces, parallèles entre elles, & qu'on représente, en général, par ss , la surface de chaque tranche, & par dx son épaisseur, on aura $ss dx$ pour cette tranche; & par conséquent $ss (b - x) dx$ pour son moment à l'égard d'un plan parallèle à ces tranches, & passant à une distance AC du sommet $A = b$. Donc en nommant S la solidité $ALMM'A$, on aura pour la distance du centre de gravité, la quantité $\frac{\int ss (b - x) dx}{S}$. Or la valeur de S se détermine par les méthodes que nous avons données dans le calcul intégral; & celle

de $\int ss(b-x)dx$, se déterminera aussi par ces mêmes méthodes, lorsqu'on aura la valeur de ss en x . On aura donc la distance du centre de gravité par rapport à un plan connu. On cherchera de la même manière la distance de ce centre à chacun de deux autres plans perpendiculaires entre eux, & au premier. Mais nous nous bornerons ici aux solides dont les tranches parallèles ont chacune leur centre de gravité particulier sur une même ligne droite, tels que sont les pyramides, & les solides de révolution.

297. Prenons d'abord les pyramides. Soit donc b la hauteur AC d'une pyramide quelconque (fig. 100); x la distance perpendiculaire AP d'une tranche quelconque, ee la surface de la base; on aura (Géom 202) celle de la tranche placée à la distance x du sommet, par cette proportion $bb : xx :: ee : \frac{eexx}{bb}$; nous avons donc $ss = \frac{eexx}{bb}$; donc $\int ss(b-x)dx$, devient $\int \frac{ee}{bb} (bxxdx - x^3dx)$, qui revient à $\frac{ee}{bb} \left(\frac{bx^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)$ ou $\frac{ee x^3}{12bb} (4b - 3x)$. Or la solidité de la pyramide qui a x pour hauteur, & ss ou $\frac{ee xx}{bb}$ pour base, est $\frac{ee x^3}{3bb}$; donc la distance du centre de gravité est $\frac{\frac{ee x^3}{12bb} (4b - 3x)}{\frac{ee x^3}{3bb}}$, ou $\frac{1}{4}(4b - 3x)$, ou $b - \frac{3}{4}x$;

or lorsque $x = b = AC$, cette quantité se réduit à $\frac{1}{4}b$; donc la hauteur Cg' du centre de gravité G , au-dessus de la base, est $\frac{1}{4}b$.

Soit maintenant g , le centre de gravité de la base; la ligne Ag passera par le centre de gravité G de la pyramide; & les parallèles Gg' & gC donneront Cg' ou $\frac{1}{4}b : AC$ ou $b :: Gg : Ag$; donc $Gg = \frac{1}{4}Ag$; ce qui confirme ce que nous avons dit (284), & fait voir que pour toute pyramide, le centre de gravité de la solidité est au quart de la distance du centre de gravité de la base, au sommet.

298. Quant aux solides de révolution, la valeur de ss (102) est généralement $\frac{cy^2}{2r}$; ainsi l'expression de la distance du centre de gravité, pour ces solides,

est généralement $\frac{\int cy^2 (b-x) dx}{\frac{2}{5}r}$. On peut appliquer cela à la sphère, à l'ellipsoïde, &c. & par ce dernier, déterminer le centre de gravité des mâts. Nous ne nous y arrêterons pas, parce que dans le cas où on en auroit besoin, on peut, sans erreur sensible, supposer ce centre de gravité au milieu de la longueur du mât, vu le peu de courbure de leur surface; mais nous passerons à un objet plus important.

299. Quoique ce que nous avons dit jusqu'ici, sur les centres de gravité, fût pour mettre en état de les trouver, dans quelque cas que ce soit, nous nous arrêterons, néanmoins, sur la méthode qu'on doit suivre pour trouver le centre de gravité de la partie submergée de la carène, dans les vaisseaux.

On doit supposer que ce centre de gravité est dans le plan vertical qui passe par l'axe de la quille ; ainsi il ne s'agit que de trouver sa distance horizontale à une ligne verticale menée par un point déterminé de l'étambot , & sa distance verticale à la quille.

Pour l'un & l'autre de ces deux objets , il faut commencer par déterminer le centre de gravité d'une surface *ANDFPB* (*fig. 101*) terminée par deux lignes parallèles *AB* , *DF* , & par deux courbes égales & semblables *AND* , *BPF*.

Si l'on avoit l'équation de cette courbe , rien ne feroit plus facile que de déterminer son centre de gravité *G* , par les méthodes précédentes. Mais ne l'ayant point , il faut concevoir par les milieux *C* & *E* de *AB* & de *DF* , la ligne *DE* que l'on partagera , par des perpendiculaires *TH* , *KM* , &c. en un assez grand nombre de parties égales , pour que les arcs compris entre deux perpendiculaires voisines puissent être regardées comme des lignes droites. Alors on prendra les momens des trapèzes *DTHF* , *TKMH* , &c. par rapport au point *E* , & on divisera la somme de ces momens , par la somme des trapèzes , c'est-à-dire , par la surface *ANDFPB*. Nous avons vu (*Géom. 154*) comment on déterminoit cette surface ; il ne s'agit donc plus que d'avoir une expression

simple de la somme des momens. Or (279) la distance du centre de gravité du trapèze $THFD$, au point E , est $\frac{\frac{1}{3}IE \times (DF + 2TH)}{DF + TH}$; celle du trapèze $TKMH$, au même point E , fera par la même raison, & à cause de l'égalité des lignes IE , IL , &c. fera, dis-je, $\frac{\frac{1}{3}IE \times (TH + 2KM)}{TH + KM} + IE$, ou $\frac{\frac{1}{3}IE(4TH + 5KM)}{TH + KM}$. Pareillement la distance du centre de gravité du trapèze $NKMP$, fera $\frac{\frac{1}{3}IE \times (KM + 2NP)}{KM + NP} + 2IE$, ou $\frac{\frac{1}{3}IE(7KM + 8NP)}{KM + NP}$, & ainsi de suite.

Si l'on multiplie, maintenant, chaque distance par la surface du trapèze correspondant, c'est-à-dire (*Géom.* 148), par la moitié de la somme des deux côtés opposés de ce trapèze, multipliée par leur hauteur commune IE , on aura pour la suite de ces momens, $\frac{1}{6}(IE)^2 \times (DF + 2TH)$, $\frac{1}{6}(IE)^2 \times (4TH + 5KM)$, $\frac{1}{6}(IE)^2 \times (7KM + 8NP)$, & ainsi de suite, donc la somme des momens sera $\frac{1}{6}IE^2 \times (DF + 6TH + 12KM + 18NP + 24QS + 14AB)$; où l'on peut remarquer que s'il y avoit un plus grand nombre de divisions, le multiplicateur du dernier terme, qui est ici 14, seroit en général $2 + 3(n - 2)$ ou $3n - 4$, n étant le nombre total des perpendiculaires DF , TH , &c. en y

comprenant AB qui peut être zéro. Ainsi l'expression générale de la somme des momens, se réduit à $(IE)^2 (\frac{1}{6} DF + TH + 2 KM + 3 NP + 4 QS + \&c. \dots + \frac{(3n-4)}{6} AB)$.

Or nous avons vu (*Géom.* 154) que la surface $ANDFPB$ avoit pour expression $IE \times (\frac{1}{2} DF + TH + KM + NP + \&c. \dots + \frac{1}{2} AB)$; donc la distance du centre de gravité G , ou

$$EG = \frac{IE \times (\frac{1}{6} DF + TH + 2KM + 3NP + \&c. \dots + \frac{3n-4}{6} AB)}{\frac{1}{2} DF + TH + KM + NP + \&c. \dots + \frac{1}{2} AB}.$$

C'est-à-dire, que pour avoir la distance du centre de gravité G , à l'une des ordonnées extrêmes DF , il faut 1°. prendre le sixième de la première ordonnée DE ; le sixième de la dernière ordonnée AB multipliée par le triple du nombre des ordonnées, moins 4; puis la seconde, le double de la troisième, le triple de la quatrième, & ainsi de suite, ce qui donnera une première somme. 2°. A la moitié de la totalité des deux ordonnées extrêmes, ajouter toutes les ordonnées intermédiaires; ce qui donnera une seconde somme. 3°. Diviser la première somme par la seconde, & multiplier le quotient par l'un des intervalles.

Par exemple, s'il y avoit 7 perpendiculaires dont les valeurs fussent 18, 23, 28, 30, 30, 21, 0, pieds; & que chaque intervalle fût de 20 pieds. Je prendrois

le

le fixième de 18 qui est 3 ; & comme le dernier terme est 0 , à 3 j'ajouterois 23 , le double de 28 , le triple de 30 , le quadruple de 30 , & ainsi de suite , ce qui me donneroit 397. Ensuite à la moitié de 18 , j'ajoute 23 , 28 , &c. & j'ai 141 ; divisant 397 par 141 , & multipliant par 20 , j'ai $\frac{397 \times 20}{141}$ ou $\frac{7940}{141}$, qui reviennent à 56 pieds 4 pouces , à très-peu près. M. Bouguer , *Traité du Navire* , page 213 , trouve 55 pieds 11 pouces , & c'est bien en effet le résultat de sa formule ; mais cette formule suppose tacitement une chose qui n'est pas suffisamment exacte.

Lorsqu'une fois on fait déterminer le centre de gravité d'une coupe quelconque , il devient facile de déterminer celui d'un solide , & par conséquent celui de la carène.

Veut-on avoir la distance du centre de gravité de la carène à la quille ; on imaginera la carène coupée en plusieurs tranches parallèles à la coupe faite à fleur d'eau (fig. 102 & 103). La solidité de chaque tranche , fera égale (*Géométrie* 254) à la moitié de la somme des deux surfaces opposées de cette tranche multipliée par l'épaisseur de cette même tranche ; & son centre de gravité sera à même hauteur dans cette tranche , que celui du trapèze *abcd* qui en est la section faite par un plan vertical passant par la quille. On voit donc que le raisonnement que

l'on a à faire ici , pour trouver la hauteur gE du centre de gravité , est absolument le même que dans le cas précédent , en changeant seulement le mot de *perpendiculaire* ou *d'ordonnée* , en celui de *coupe* ; de sorte que l'opération se réduit 1°. à prendre le *sixième* de la coupe la plus basse ; le *sixième* de la coupe la plus élevée , multipliée par le triple du nombre des coupes , moins 4 ; la seconde coupe en montant ; le double de la troisième , le triple de la quatrième , & ainsi de suite , ce qui donne une première somme. 2°. Prendre la moitié de la totalité des deux coupes supérieure & inférieure , & toutes les coupes intermédiaires. 3°. Diviser la première somme par la seconde , & multiplier le quotient , par la distance commune d'une coupe à l'autre.

On peut s'y prendre de la même manière pour trouver la distance du centre de gravité , à la verticale xZ , menée par un point déterminé b de l'étambot (fig. 102) ; en imaginant la carène coupée par des plans parallèles au maître couple ; mais comme il faudroit encore mesurer les surfaces de ces coupes , il vaut mieux employer celles qu'on aura déjà mesurées dans l'opération précédente ; c'est pourquoi on déterminera , comme on l'a fait ci-dessus , les centres de gravité g, g , de chacune des coupes parallèles à la quille. Leur distance à la verticale xz sera la même que celle du centre de gravité g de la

tranche correspondante. On multipliera chaque coupe par la distance de son centre de gravité à la ligne xZ , & regardant chaque produit comme l'ordonnée d'une ligne courbe telle que dans la figure 101, on prendra la moitié de la somme des deux produits extrêmes, & la somme de tous les produits intermédiaires; & ayant multiplié le tout par l'épaisseur d'une des tranches, on le divisera par la somme de toutes les coupes intermédiaires, plus la moitié de la somme des deux coupes extrêmes.

A l'égard du centre de gravité du navire même, soit en charge, soit hors de charge, on ne peut pas en réduire la recherche, à des règles aussi simples. Il faut entrer dans une discussion détaillée des différentes parties qui le composent, lui & la charge. Prendre les momens de ces différentes parties à l'égard d'un plan horizontal qu'on imaginera passer par la quille; & leurs momens à l'égard d'un plan vertical perpendiculaire à la quille, & que l'on prendra arbitrairement; divisant ces deux sommes de momens, par le poids total du navire, on aura la hauteur de ce centre, & sa distance au plan vertical par rapport auquel on a considéré les momens; & comme il doit, d'ailleurs, être dans le plan vertical qui passeroit par la quille, on aura donc sa situation. Mais il faut observer que dans le calcul de ces momens,

il faut multiplier, non pas le volume de chaque pièce, mais son poids, par la distance du centre de gravité de cette pièce; centre qui est facile à déterminer, après tout ce que nous avons dit jusqu'ici, sur les centres de gravité.

Propriétés des Centres de gravité.

300. Il est clair, par ce que nous venons de dire sur les centres de gravité, & par ce que nous avons dit sur la résultante de plusieurs forces parallèles, que si toutes les parties d'un corps ou d'un système quelconque de corps, ont chacune la même vitesse, ou tendent à se mouvoir avec la même vitesse; il est clair, dis-je, que la résultante de tous ces mouvements passe par le centre de gravité de ce corps, ou de ce système de corps, & que par conséquent le système se meut ou tend à se mouvoir, comme si la totalité des masses étoit concentrée au centre de gravité, & étoit animée d'une vitesse égale à celle qui anime chacune des parties.

301. D'où l'on doit conclure réciproquement, que si l'on applique au centre de gravité d'un corps, ou d'un système de corps, une force quelconque; toutes les parties égales du système partageront également ce mouvement, s'avanceront toutes avec une égale vitesse, que l'on aura (189) en divisant

la quantité de mouvement appliquée à ce centre, par la masse totale du corps ou du système de corps.

302. Et puisque plusieurs forces appliquées à un même point, se réduisent (en vertu des principes précédens) à une seule, il en faut conclure généralement, que *quelques forces que l'on applique au centre de gravité d'un corps ou d'un système de corps ; en quelque nombre qu'elles soient, & quelque direction qu'elles aient ; toutes les parties de ce corps, ou de ce système de corps, prendront une vitesse égale, laquelle aura la même direction que la résultante de toutes ces forces, & sera égale à la quantité de mouvement qui représente cette force résultante, divisée par la masse totale du corps ou du système de corps.*

303. D'où l'on doit conclure que *tant que les forces qui agissent sur un corps se réduiront ou pourront être réduites à une seule dont la direction passera par le centre de gravité, ce corps ne tournera point autour de son centre de gravité.*

304. Mais si les forces qui agissent sur un corps ne peuvent être réduites à une seule ; ou si pouvant être réduites à une seule, la direction de celle-ci ne passe point par le centre de gravité, alors toutes les parties du système ne seront pas mues d'un mouvement commun. Néanmoins le centre de gravité

fera mu de la même manière que si toutes ces forces y étoient immédiatement appliquées. C'est ce qu'il s'agit de faire voir actuellement.

305. Supposons d'abord trois corps M, N, P (fig. 104), mus suivant des lignes parallèles AD, BE, CF situées ou non situées dans un même plan, & mus avec des vitesses représentées par les lignes AD, BE, CF . Supposons que G soit le centre de gravité de ces corps lorsqu'ils sont en A, B, C ; & G leur centre de gravité lorsqu'ils sont arrivés en D, E, F où ils arrivent en même temps, puisque leurs vitesses sont représentées par AD, BE, CF . Si l'on mène la ligne GG' , je dis qu'elle sera parallèle à ces lignes; qu'elle fera la route que le centre de gravité G suivra pendant le mouvement des corps; & que ce centre de gravité G la décrira uniformément.

1°. Il est facile de voir que la route du centre de gravité sera parallèle aux lignes AD, BE , &c., car à quelque endroit qu'on le suppose dans un instant quelconque, si on imagine un plan qui passe par ce centre, la somme des momens, par rapport à ce plan, doit être zéro (270). Or si l'on conçoit un plan parallèle aux directions des corps, & passant par le point G , les momens, par rapport à ce plan, ne peuvent manquer d'être zéro pendant tout

le mouvement ; car les corps , dans leur mouvement , sont supposés ne pas s'écarter de ce plan ; leurs distances à ce plan sont donc toujours les mêmes ; donc les momens sont aussi toujours les mêmes ; mais au commencement du mouvement , c'est-à-dire , lorsque le centre de gravité étoit en G , leur somme étoit zéro ; donc elle est encore zéro , en quelque endroit de leurs directions que les corps se trouvent ; donc le centre de gravité est toujours dans un plan parallèle aux directions des corps , & qui passe par la première position G de ce centre. Et comme , dans ce raisonnement , rien ne détermine la position de ce plan , sinon qu'il doit être parallèle aux directions des corps M, N, P , & passer par le point G ; on prouvera de même , que ce centre est dans tout autre plan parallèle aux directions des corps , & passant par le point G ; il est donc dans l'intersection commune de ces plans ; donc le centre de gravité se meut suivant GG' parallèle aux directions de ces corps.

2°. Je dis qu'il se meut uniformément ; c'est-à-dire , que si lorsque les corps M, N, P &c. , sont arrivés en a, b, c , &c. on suppose que le centre de gravité est en g , on aura $GG' : Gg :: AD : Aa :: BE : Bb ::$ &c. ; c'est-à-dire , que les espaces décrits en même temps , par le centre de

gravité, & par chacun des corps, seront comme leurs vîtesſes.

En effet, ſi on conçoit un plan représenté par RS , auquel les directions des mouvemens ſoient perpendiculaires; on aura, par la nature du centre de gravité (261), $M \times AH + N \times BI + P \times CL = (M + N + P) \times GK$. Et par la même raiſon, lorsqu'ils ſont en D, E, F , on a $M \times DH + N \times EI + P \times FL = (M + N + P) \times G'K$. Si de cette équation on retranche la première, on aura (en faiſant attention que $DH - AH = AD$, $EI - BI = BE$, &c.) $M \times AD + N \times BE - P \times CF = (M + N + P) \times GG'$. Donc, par la même raiſon, lorsqu'ils feront en a, b, c , on aura $M \times Aa + N \times Bb - P \times Cc = (M + N + P) \times Gg$.

Or puifque Aa, Bb, Cc ſont décrits uniformément, dans un même temps, ces eſpaces (187) doivent être entre eux comme les vîtesſes AD, BE, CF ; on a donc $AD : BE :: Aa : Bb$, $AD : CF :: Aa : Cc$; donc $Bb = \frac{Aa \times BE}{AD}$, $Cc = \frac{Aa \times CF}{AD}$. Subſtituant ces valeurs dans notre dernière équation, & chaffant le dénominateur AD , elle ſe change en $(M \times AD + N \times BE - P \times CF) \times Aa = (M + N + P) \times Gg \times AD$.

Enfin divisant cette équation, par celle où entre GG' , on a $Aa = \frac{Gg \times AD}{GG'}$, d'où l'on tire $GG' : Gg :: AD : Aa$; ce qu'il s'agissoit de démontrer.

Observons, maintenant, que l'équation où entre GG' , donne $GG' = \frac{M \times AD + N \times BE - P \times CF}{M + N + P}$.

Or les lignes AD, BE, CF, GG' , sont les vîteses des corps M, N, P , & du centre de gravité G ; par conséquent $M \times AD, N \times BE$ &c., sont leurs quantités de mouvement. Donc puisque le raisonnement que nous avons fait jusqu'ici, ne dépend point du tout du nombre des corps, on peut conclure généralement, 1°. *que si tant de corps que l'on voudra décrivent uniformément des lignes parallèles, le centre de gravité décrit aussi uniformément, une ligne parallèle à celles-là.* 2°. *Que sa vîtesse est égale à la somme des quantités de mouvement des corps qui vont dans un sens, moins la somme des quantités de mouvement de ceux qui vont en sens contraire, le tout divisé par la somme des masses.*

306. Si quelques-uns des corps étoient en repos, la vîtesse de ces corps étant alors zéro, la quantité de mouvement seroit aussi zéro. Ainsi elle disparoitroit dans le numérateur de la fraction qui exprime la vîtesse du centre de gravité. Mais cela ne changeroit rien au dénominateur qui fera toujours la somme de toutes les masses.

307. Si la somme des quantités de mouvement des corps qui vont dans un sens, étoit égale à la somme des quantités de mouvement de ceux qui vont en sens contraire, le numérateur de la fraction qui exprime la vitesse du centre de gravité, seroit zéro. Ce centre de gravité seroit donc en repos. Donc quels que soient les mouvemens parallèles de plusieurs corps, leur centre commun de gravité reste en repos, quand la somme des quantités de mouvement de ceux qui vont dans un sens, est égale à la somme des quantités de mouvement de ceux qui vont en sens contraire.

308. Puisque les quantités de mouvement représentent les forces (189); & que la résultante de plusieurs forces parallèles (255) est égale à la somme de celles qui agissent ou tendent à agir dans un sens, moins la somme de celles qui agissent, ou tendent à agir, dans un sens contraire; concluons donc que *si plusieurs forces parallèles sont appliquées aux différentes parties d'un système quelconque de corps, le centre de gravité de ce système se meut comme si ces forces lui étoient immédiatement appliquées.*

309. Que les corps, en quelque nombre qu'ils soient, se meuvent maintenant suivant des lignes droites quelconques. Si on imagine deux lignes droites quelconques perpendiculaires entre elles; & à leur

point de rencontre, une troisième qui soit perpendiculaire à leur plan, on peut toujours décomposer la vitesse de chaque corps, en trois autres, parallèles à ces trois lignes. Or il suit de ce que nous venons de dire, que le mouvement du centre de gravité en vertu des mouvemens parallèles à l'une de ces lignes, fera parallèle à cette même ligne, fera uniforme, & que sa vitesse sera égale à la somme des quantités de mouvement (*) estimées parallèlement à cette ligne, divisée par la somme des masses. Donc si l'on conçoit que l'on ait déterminé, par ce principe, le mouvement du centre de gravité parallèlement à chacune de ces trois lignes, & qu'ensuite on compose ces trois mouvemens pour les réduire à un seul (ce qui est possible, puisqu'ils sont appliqués à un même point), on aura la route unique du centre de gravité. Or comme les élémens qu'on emploie ici, ne sont autre chose que les forces mêmes qu'ont les corps parallèlement à ces trois lignes, & que la force unique du centre de gravité se trouve, par-là, composée des forces résultantes parallèlement à chacune de ces lignes, elle ne peut donc manquer d'être égale & parallèle à la résultante

(*) C'est par abréviation que nous disons seulement, la somme des quantités de mouvement: on doit toujours entendre la somme des quantités de mouvement des corps qui vont dans un sens, moins la somme des quantités de mouvement de ceux qui vont en sens contraire.

de toutes les forces appliquées à tous ces corps; donc en général, *quelles que soient les directions & les valeurs des forces appliquées à différentes parties d'un système de corps, le centre de gravité se meut toujours, ou tend à se mouvoir, de la même manière que si toutes ces forces lui étoient immédiatement appliquées.*

310. Dans le raisonnement précédent, nous avons dit qu'on pouvoit toujours décomposer la vitesse de chaque corps en trois autres, parallèles à trois lignes données de position. Cependant si la direction de l'un des corps étoit parallèle au plan de deux de ces trois lignes, ou si elle étoit parallèle à l'une de ces trois lignes, il paroît qu'on ne peut, dans le premier cas, décomposer qu'en deux forces parallèles à deux de ces trois lignes; & que dans le second on ne peut faire aucune décomposition, en forces qui soient parallèles aux deux autres lignes. Nonobstant cette difficulté apparente, la proposition n'est pas moins générale: car on voit, par exemple, que tant que la ligne AB (fig. 105) n'est pas parallèle à l'une des deux lignes PR , PQ , on peut toujours décomposer la force représentée par AB , en deux autres AC , AD parallèles à ces deux lignes; mais on voit, en même temps, que plus AB approchera d'être parallèle à PQ , & plus la force AD diminuera; enforte qu'elle deviendra zéro, quand AB fera parallèle à PQ .

Donc, dans ce cas, on n'est pas moins en droit de supposer une décomposition en deux forces, mais dont l'une soit zéro. Par la même raison on peut, dans ce même cas, supposer une décomposition en trois forces parallèles aux trois lignes PQ , PR , PS ; mais deux de ces trois forces seront zéro.

311. De ce que nous venons de dire, & de ce qui a été dit (307), on doit conclure que *le centre de gravité d'un système de corps restera en repos, si ayant décomposé les forces appliquées à chaque partie du système, en trois autres forces parallèles à trois lignes perpendiculaires entre elles, la somme des forces ou des quantités de mouvement parallèlement à chacune des trois lignes, est zéro*; en prenant avec des signes contraires les forces qui agissent dans des sens opposés.

312. Quand toutes ces forces sont dans un même plan, il est évident qu'il suffit de décomposer chaque force en deux autres, parallèles à deux lignes perpendiculaires entre elles, & menées dans ce même plan; car les forces perpendiculaires au plan étant alors nulles, le mouvement du centre de gravité en vertu de ces forces est nul aussi.

313. Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons supposé que chacun des corps qui compose le système, obéissoit pleinement & librement

à la force qui le sollicite. Mais les mêmes choses n'ont pas moins lieu, quand ils sont contraints dans leurs mouvemens, pourvu que ces obstacles ne viennent point d'une force étrangère au système, c'est-à-dire, pourvu qu'ils ne soient autres que ceux qui résultent de la difficulté de se prêter à ses mouvemens, par la manière dont ils sont disposés entre eux, ou liés les uns aux autres; c'est ce que nous démontrerons, après avoir exposé la loi générale de l'équilibre des corps, & la loi générale de leurs mouvemens.

Principe général de l'Équilibre des Corps.

314. *Quelles que soient les forces (agissantes ou résistantes) appliquées à un corps, à un système de corps, à une machine, &c., & quelles que soient les directions de ces forces; si l'on conçoit que chacune soit décomposée en trois autres, parallèles à trois lignes tirées par tel point qu'on voudra, & perpendiculaires entre elles; il faut, pour que toutes ces forces puissent se faire équilibre, que la somme (*) des forces qui agissent parallèlement à chacune de ces trois lignes, soit zéro.*

En effet, nous avons vu (258) que quels que

(*) Nous entendons toujours ici & dans la suite, par la somme des forces, la somme de celles qui agissent ou tendent à agir	dans un sens, moins la somme de celles qui agissent ou tendent à agir dans un sens opposé.
---	--

fussent le nombre & la nature des forces, on pouvoit toujours réduire toutes ces forces à trois, dont les directions fussent parallèles à trois lignes perpendiculaires entre elles. Donc si l'on suppose qu'il y a équilibre entre toutes les forces du système, il faut qu'il y ait équilibre entre ces trois résultantes, ou que chacune soit zéro. Mais ces trois résultantes étant perpendiculaires entre elles, ne peuvent ni se nuire, ni se favoriser; donc chacune d'elles doit être zéro. Or chacune d'elles (255) est égale à la somme des forces partielles qui lui feroient parallèles; donc en effet les sommes des forces qui (par la décomposition) agissent parallèlement à chacune de trois lignes perpendiculaires entre elles, doivent être zéro chacune.

315. Si toutes les forces étoient dirigées dans un même plan, la somme des forces parallèles à chacune de deux lignes tirées, dans ce plan, perpendiculairement l'une à l'autre, seroit zéro. Et si toutes les forces étoient parallèles entre elles, il faudroit que la somme de toutes ces forces fût zéro. Ces deux cas sont évidemment compris dans la proposition générale.

316. Remarquons bien, que cette proposition aura toujours lieu, dans quelque cas d'équilibre que ce soit; mais on auroit tort de penser qu'elle suffît pour

qu'il y ait équilibre. Les autres conditions nécessaires pour l'équilibre, varient suivant les qualités, ou les dispositions particulières des parties du système ou de la machine que l'on considère; nous nous en occuperons dans le volume suivant: il ne s'agit ici que des principes généraux.

317. Ce principe est général, soit que les forces qui sont appliquées aux différentes parties du système, soient toutes agissantes, soit que quelques-unes seulement soient agissantes, & les autres capables seulement de résister; tels seroient des appuis, des points fixes, des surfaces, &c., qui s'opposeroient à l'action des autres forces. Car les résistances de ces obstacles, équivalent à des forces agissantes.

Principe général du Mouvement.

318. *De quelque manière que plusieurs corps viennent à changer leurs mouvemens actuels; si l'on conçoit que le mouvement que chaque corps auroit dans l'instant suivant, s'il devenoit libre, soit décomposé en deux autres dont l'un soit celui qu'il aura réellement après le changement; le second doit être tel que si chacun des corps n'eût eu d'autre mouvement que ce second, tous les corps fussent demeurés en équilibre.*

Cela est évident, puisque si ces seconds mouvemens n'étoient pas tels qu'il en résultât l'équilibre dans le système,

système, les premiers mouvemens composans, ne seroient pas ceux que les corps auroient après le changement, car ils seroient nécessairement altérés par ceux-là.

Ce principe est dû à M. d'Alembert. Voyez sa *Dynamique*.

Conséquences qui résultent des deux principes précédens, par rapport au mouvement du Centre de gravité des Corps.

319. Concevons maintenant que plusieurs corps, soit libres, soit liés entre eux de quelque manière que ce soit (de manière cependant que rien n'affujétisse le système de tous ces corps), viennent à recevoir des impulsions quelconques auxquelles ils ne puissent obéir pleinement, parce qu'ils se gênent réciproquement; je dis que le centre de gravité sera mû, comme si tous ces corps eussent été libres.

En effet, quel que soit le mouvement que chaque partie du système prendra, on peut toujours (225) concevoir celui qui lui est imprimé, comme composé de celui qu'il prendra, & d'un autre. Or (318) en vertu de ces seconds mouvemens, il doit y avoir équilibre; donc si l'on conçoit ces seconds mouvemens décomposés, chacun, en trois autres, parallèles

à trois lignes perpendiculaires entre elles, la somme des forces qui en résulteront parallèlement à chacune de ces lignes, doit être zéro (314). Or le chemin que le centre de gravité tend à décrire en vertu de chacune de ces forces, est (305) égal à la somme des forces parallèles à chacune de ces lignes, divisée par la somme des corps; donc le chemin qu'il tend à décrire en vertu des changemens survenus dans le système, par l'action réciproque des parties de ce système, est zéro; donc le centre de gravité ne participe point à ces changemens. Donc il est mû comme si toutes les parties du système obéissoient librement & sans aucune perte, chacune à la force qui la sollicite.

Donc en général, *l'état du centre de gravité d'un corps ou d'un système de corps, ne change point par l'action mutuelle des parties de ce corps ou de ce système.*

320. Concluons de-là, 1°. *que si un corps ou un système de corps tourne autour de son centre de gravité, de quelque manière que ce soit; ce centre restera continuellement dans le même état que si le corps ne tournoit pas.*

321. 2°. De ce même principe, & de ce qui a été dit plus haut sur le mouvement du centre de gravité des corps libres, il suit que si un corps de figure quelconque, ou un assemblage quelconque de

corps, reçoit une impulsion suivant une direction quelconque AB (*fig. 106*), laquelle se transmette toute entière à ce corps; le centre de gravité G sera mû suivant une ligne GS parallèle à AB , de la même manière que si cette force lui étoit immédiatement appliquée suivant cette même direction. Et si plusieurs forces agissent à la fois sur différens points de ce corps, ce centre de gravité sera mû, comme si toutes ces forces lui étoient immédiatement appliquées.

322. Donc si au moment où le corps est frappé suivant la direction AB , on appliquoit au centre de gravité G une force dirigée en sens contraire suivant SG , & égale à la force qui agit suivant AB , le centre de gravité resteroit en repos. Néanmoins il est évident que les autres parties de ce corps ne demeureroient point en repos, puisque ces deux forces quoique égales, ne sont pas directement opposées. Or le seul mouvement que le corps puisse avoir, son centre de gravité restant en repos, est évidemment un mouvement de rotation autour de ce centre de gravité.

Donc si un corps reçoit une ou plusieurs impulsions suivant des directions qui ne passent point par son centre de gravité; 1°. ce centre de gravité sera mû, comme si toutes les forces lui étoient immédiatement appliquées,

chacune suivant une direction parallèle à celle qu'elle a.
 2°. Les parties de ce corps tourneront autour du centre de gravité, comme elles le feroient en vertu des forces qui sont actuellement appliquées au corps, si ce centre de gravité étoit fixement attaché.

Nous déterminerons ces mouvemens de rotation dans le volume suivant.

323. Concluons encore que si l'état du centre de gravité d'un corps vient à changer, ce ne peut être que par l'action ou par la résistance de nouvelles forces étrangères à ce corps; & que par conséquent ce changement se déterminera toujours en cherchant la résultante qu'auroient toutes ces forces, si elles étoient appliquées au centre de gravité, chacune suivant une direction parallèle à celle qu'elle a actuellement.

Tels sont les principes généraux du mouvement & de l'équilibre des corps solides. Nous réservons pour le volume suivant, les applications de ces principes, aux différens cas de mouvement & d'équilibre qui peuvent se rencontrer dans l'usage; & nous passons à l'équilibre des fluides.



DE L'ÉQUILIBRE
DES FLUIDES,
 ET DES
 CORPS QUI Y SONT PLONGÉS.

324. **Q**UOIQUE nous ignorions jusqu'où va le degré de ténuité des parties des fluides, nous ne pouvons douter, néanmoins, que ces parties ne soient matérielles; & que par cette raison, la loi générale d'équilibre & celle de mouvement que nous avons établies ci-dessus, ne leur conviennent comme aux corps solides. Mais comme cette loi d'équilibre n'est pas la seule nécessaire, ainsi que nous l'avons déjà dit; il nous faut examiner s'il n'y a point quelque autre loi générale dont cet équilibre peut dépendre.

325. Comme l'équilibre consiste dans la destruction de toutes les forces, & que nous ignorons la manière dont les parties des fluides se transmettent leurs forces les unes aux autres, ce n'est qu'à l'expérience que nous devons avoir recours, pour établir

nos premiers principes : nous commencerons donc par exposer ce que l'on connoît , par expérience , de plus certain sur cette matière. Mais auparavant , nous observerons qu'il faut distinguer deux sortes de fluides. Les uns dont les parties sont ou peuvent être regardées comme absolument dures , & qui , prises en masse , sont incompressibles ; c'est-à-dire , ne peuvent être réduites à occuper un volume plus petit que celui qu'elles occupent dans leur état naturel ; telle est l'eau , & telles sont la plupart des liqueurs. Les autres sont composés de parties compressibles & élastiques ; c'est-à-dire , capables d'occuper un espace plus petit , lorsqu'on les comprime , & de reprendre leur premier état , lorsque la cause qui les réduisoit à un plus petit volume , cesse d'agir ; tel est l'air. Nous parlerons d'abord des fluides incompressibles.

326. Voyons maintenant ce que l'expérience peut nous apprendre sur l'équilibre des fluides.

Soit $ABCD$ (fig. 107 & 108) un canal composé de trois branches AB , BC , CD d'un diamètre égal. Si l'on conçoit que dans chacun de ces deux canaux , on verse de l'eau par la branche AB , elle passera de la branche BC dans la branche CD ; & lorsqu'on aura cessé de verser , la surface de l'eau contenue dans chaque branche se trouvera dans une même ligne horizontale AD , quelle que soit d'ailleurs

l'inclinaison de la branche BC . C'est un fait très-connu, & que nous prenons pour principe. Voici maintenant les conséquences que ce fait nous fournit.

327. Si par tel point E que l'on voudra, on imagine l'horizontale EF ; il est visible que le poids de l'eau contenue dans $EBCF$ ne contribue en rien à soutenir les colonnes AE & DF ; que par conséquent cet équilibre auroit encore lieu si le fluide, contenu dans $EBCF$, perdoit tout-à-coup sa pesanteur. On doit donc regarder ce fluide comme étant seulement un moyen de communication entre la colonne AE & la colonne DF ; en sorte qu'il transmet à la colonne DF toute la pression que la colonne AE exerce sur lui; & réciproquement il transmet à celle-ci, la pression que DF exerce sur lui.

Il n'est pas moins évident que la même chose auroit lieu, si au lieu de la colonne AE & de la colonne DF on substituoit deux pressions de même valeur; on peut donc, de-là conclure en général, que *si un fluide sans pesanteur est renfermé dans un vase quelconque; & qu'ayant fait une ouverture à ce vase, on applique une pression quelconque à cette ouverture, cette pression se répandra également dans tous les sens*. Puisque l'inclinaison de la branche BC (fig. 108) n'empêche pas que les choses ne se passent de la même manière que dans la fig. 107.

328. Il est facile de voir maintenant, que non-seulement la pression se transmet également dans tous les sens ; mais encore, qu'elle agit perpendiculairement sur chaque point de la surface du vase qui renferme le fluide. Car si la pression qui agit sur la surface n'agissoit point perpendiculairement, il est facile de voir qu'elle ne pourroit être détruite entièrement par la résistance de cette surface ; il en résulteroit donc une action sur les parties du fluide même, laquelle ne pouvant manquer de se transmettre dans tous les sens (327), occasionneroit nécessairement du mouvement dans le fluide ; il ne seroit donc jamais possible qu'un fluide restât en équilibre dans un vase ; ce qui est contraire à l'expérience.

329. Concluons donc de-là que si les parties d'un fluide contenu dans un vase quelconque $ABCD$ (*fig. 109*) ouvert vers la partie AD , sont sollicitées par des forces quelconques, & demeurent néanmoins en équilibre, ces forces doivent être perpendiculaires à la surface AD ; car s'il y a équilibre, cet équilibre ne subsistera pas moins si l'on applique une enveloppe de même figure que la surface AD ; or nous venons de voir que dans ce cas, les forces qui agissent sur la surface AD doivent être perpendiculaires à cette surface.

330. Supposons donc que les forces qui agissent sur les parties du fluide, sont la pesanteur même; & alors nous concluons que la direction de la pesanteur est nécessairement perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles; & que par conséquent *les parties d'un même fluide pesant doivent être de niveau pour être en équilibre, quelle que soit d'ailleurs la figure du vase qui les renferme.*

331. Concevons maintenant, que le vase $ABCD$ (*fig. 110*) étant fermé de toutes parts, soit rempli d'un fluide sans pesanteur; & qu'ayant fait une très-petite ouverture en E on y applique une pression quelconque: il est évident que la pression qui en résultera sur la surface plane représentée par BC , ne dépendra nullement de la quantité de fluide contenue dans ce vase, ni de la figure du vase; mais que puisque la pression appliquée en E se transmet également dans tous les sens (327), celle de BC fera égale à la pression qui agit en E , répétée autant de fois qu'il y a de points dans BC .

332. Par la même raison, la pression appliquée en E agira pour écarter le fonds supérieur AD ; & la force avec laquelle elle agira sera, pour chaque point, égale à la pression qui agit en E ; en sorte que le fond AD est pressé perpendiculairement du dedans au dehors avec une force égale à la pression

qui agit en E , répétée autant de fois qu'il y a de points dans AD .

333. Imaginons maintenant que le vase $ABCDEF$ (*fig. 111*) dont la partie CD est horizontale, soit rempli d'un fluide pesant. Je dis que la pression qui en résulte sur le fond CD , ne dépend nullement de la quantité de fluide contenue dans le vase, mais seulement de la grandeur de CD , & de la hauteur de la surface AF , au-dessus de la base CD .

En effet, concevons l'horizontale BE , & imaginons que le fluide contenu dans $BCDE$, devienne tout-à-coup sans pesanteur; il est évident, par ce qu'on vient de dire (331), qu'un filet vertical quelconque IK du fluide pesant contenu dans $ABEF$, exerce au point K , une pression qui doit se répandre également dans tout le fluide $BCDE$; que cette pression agit également de bas en haut pour repousser l'action de chacun des autres filets qui répondent verticalement aux différens points de BE ; donc le filet IK fait, lui seul, équilibre à tous les autres filets de la masse $ABEF$; donc la masse $BCDE$ étant toujours supposée sans pesanteur, il ne résulte d'autre pression au fond CD , que celle du filet IK , laquelle se transmettant également à tous les points de CD , y occasionne une pression égale à

celle qui s'exerce au point K , répétée autant de fois qu'il y a de points dans CD .

Donc si on imagine (*fig. 112*) un fluide pesant contenu dans $ACDF$, divisé en tranches horizontales ; la tranche supérieure ne communique pas au fond CD d'autre action que celle que communiqueroit le filet ab ; & la même chose ayant lieu pour chaque tranche, le fond CD n'est donc pressé que comme il le seroit par la somme des filets ab , bc , cd , &c. ; & puisque cette pression se transmet également à tous les points de CD , elle est donc égale à CD multipliée par la somme des pressions que les filets ab , bc , cd sont capables d'exercer sur un même point.

Donc, 1°. *si le fluide $ACDF$ est homogène, c'est-à-dire, composé de parties de même nature, de même pesanteur, &c. la pression sur le fond CD , sera exprimée par $CD \times ag$; c'est-à-dire, sera mesurée par le poids du prisme ou du cylindre qui auroit CD pour base & ag pour hauteur.*

2°. *Si le fluide est composé de tranches de différente densités, la pression sur CD , sera exprimée par CD multipliée par la somme des pesanteurs spécifiques de chaque tranche ; je dis par la somme des pesanteurs*

spécifiques (*) & non par la somme des poids ; car ce n'est point de la quantité de fluide contenue dans chaque tranche , que dépend la pression , mais seulement de la pesanteur propre d'un filet.

Il faut bien observer que ce que nous disons ici , a lieu soit que le vase aille en s'élargissant par en haut , soit qu'il aille en se rétrécissant , comme dans la fig. 113. La pression que le fluide renfermé dans *ACDF* exerce sur *CD* , est la même que celle qu'exerceroit le cylindre *ECDG* s'il étoit rempli de fluide , à même hauteur.

334. De ce qui précède , il est facile de conclure que si deux fluides *NHCBFL* & *EFLM* (fig. 114) homogènes chacun , mais de différente densité , l'un à l'égard de l'autre , se communiquent en *FL* dans un vase quelconque , ils ne peuvent être en équilibre qu'autant que leurs hauteurs *EF* , *IK* , au-dessus du plan horizontal *FL* de séparation , seront en raison inverse de leurs pesanteurs spécifiques. En effet , le fluide *LFBCGO* pouvant être de lui-même en équilibre (330) , il faut que *NHGO* puisse faire équilibre à *EFLM* ; il faut donc que la pression que *NHGO* exerce de bas en haut sur *FL* ,

(*) On doit se rappeler ici , ce que nous avons déjà dit ailleurs , matière quelconque , est la pesanteur absolue d'un volume connu de cette matière.

soit égale à celle que *EFLM* exerce de haut en bas sur *FL*. Or (333) la pression que *NHGO* exerce sur *FL*, est égale au poids d'un prisme ou d'un cylindre de ce fluide; qui auroit *IK* pour hauteur, & *FL* pour base; d'ailleurs ce poids est égal à la pesanteur spécifique multipliée par le volume; donc si on nomme *P* cette pesanteur spécifique, il aura pour expression $P \times IK \times FL$. Par la même raison, si l'on nomme *p* la pesanteur spécifique du fluide *EFLM*, on aura $p \times EF \times FL$ pour la pesanteur absolue de ce fluide, ou pour la pression qu'il exerce sur *FL*. Il faudra donc que $P \times IK \times FL = p \times EF \times FL$, ou que $P \times IK = p \times EF$; donc $P : p :: EF : IK$; les hauteurs *EF*, *IK* doivent donc être en raison inverse des pesanteurs spécifiques.

Ainsi, par exemple, si *LFBCHN* étoit du mercure, & *EFLM* de l'eau; comme le mercure est 14 fois aussi pesant que l'eau, il faudroit que la hauteur *IK* fût 14 fois plus petite que *EF*; c'est-à-dire, fût la quatorzième partie de *EF*, quelque figure qu'ait d'ailleurs le vase.

335. Par ce que nous avons dit jusqu'ici, on voit donc que la manière d'agir des fluides est bien différente de celle des solides. Il n'y a, à proprement parler (*fig. 112*), que la partie *ECDG* qui exerce son action sur la surface *CD*; & (*fig. 113*) la surface *CD* est pressée par *ACDF* comme elle le seroit par tout le poids du fluide contenu dans le cylindre *ECDG*; au lieu que si c'étoit un solide, si par

exemple, le fluide $ACDF$ venoit à se glacer, le fond supporteroit une pression égale au poids de la totalité $ACDF$ (*fig. 112*) & au poids de $ACDF$ seulement (*fig. 113*).

336. Mais il faut bien distinguer ici, entre la pression que le fond CD éprouve de la part du fluide, & celle que l'on auroit à soutenir si l'on vouloit porter le vase. Il est sûr que si le fond CD venoit à se détacher, il ne faudroit employer autre chose pour l'arrêter (*fig. 112*), qu'un effort égal au poids du cylindre $ECDG$; mais si l'on vouloit porter le vase, il faudroit employer un effort égal au poids de l'eau contenue dans tout le vase, c'est ce qu'on va voir après que nous aurons donné la manière d'évaluer la pression sur les surfaces planes obliques, & sur les surfaces courbes.

337. Soit donc $ACDF$ (*fig. 115 & 116*) la coupe verticale d'un vase terminé par des surfaces planes ou courbes inclinées, comme on le voudra, à l'horizon. Si l'on conçoit une tranche infiniment mince $abcd$, on peut faire abstraction de la pesanteur de cette tranche, & considérer cette tranche comme pressée par le fluide supérieur. Or cette pression se répand également à tous les points de la tranche, & agit perpendiculairement & également sur chacun des points des faces ac , bd . Donc puisque (333) cette force est celle que le filet seul IK feroit naître, la pression qui s'exerce perpendiculairement sur bd sera exprimée par $bd \times IK$; & il est évident qu'il en sera de même si au lieu de regarder bd comme

une petite ligne droite, on la regarde comme une petite surface.

338. C'est donc à dire, en général, que *la pression qui s'exerce perpendiculairement sur une surface infiniment petite quelconque, par un fluide pesant & homogène, s'estime par le produit de cette surface, multipliée par sa distance à la ligne de niveau AF.*

339. Donc la pression totale qui s'exercera sur une surface plane quelconque située comme on le voudra, est égale à la somme des produits des parties infiniment petites de cette surface, multipliées chacune par sa distance au plan de niveau, ou à la surface supérieure du fluide. Mais par la nature du centre de gravité, la somme de ces produits est égale au produit de la surface totale, multipliée par la distance de son centre de gravité au même plan horizontal; donc *la pression qu'un fluide pesant, exerce contre une surface plane oblique, a pour mesure le produit de cette surface par la distance de son centre de gravité au plan de niveau.*

340. Comme les pressions qui s'exercent sur chaque point d'une même surface plane, sont perpendiculaires à la surface, & par conséquent parallèles entre elles, la résultante ou la pression totale doit (255.) leur être parallèle; or, comme nous venons de déterminer sa valeur, ainsi que celles de chacune des

pressions partielles, il sera aisé, par ce qui a été dit (255), de déterminer quand on en aura besoin, par où passe cette résultante, qui, comme il est aisé de le voir, ne doit point passer par le centre de gravité G de cette surface (*fig. 117*), mais à quelque distance au-dessous. Il n'y a que dans le cas où la surface est infiniment petite, qu'on peut supposer que la pression totale passe par le centre de gravité de cette surface inclinée.

341. Voyons maintenant, ce qui résulte de toutes ces pressions, dans le sens vertical, & dans le sens horizontal.

Quelle que soit la figure d'un corps, on peut toujours concevoir ce corps, comme l'assemblage d'une infinité de tranches parallèles entre elles, & se représenter la surface du contour de chaque tranche, comme l'assemblage de plusieurs trapèzes dont le nombre est infini, quand la surface est courbe. Ainsi, pour évaluer ce qui résulte de la pression qu'un fluide exerce, soit sur les parois intérieures d'un vase, soit sur la surface extérieure d'un solide qu'on auroit plongé dans ce fluide, il faut évaluer ce qui résulte de la pression sur la surface d'un trapèze d'une hauteur infiniment petite.

Concevons donc (*fig. 118*) un trapèze $ABCD$
dont

dont les deux côtés parallèles soient AB & CD , & dont la hauteur soit infiniment petite. Qu'au centre de gravité G de ce trapèze, on ait appliqué perpendiculairement à son plan, une force P dont la valeur soit exprimée par le produit de la surface de ce trapèze, multipliée par la distance de son centre de gravité à un plan horizontal XZ .

Pour déterminer l'effet de cette force, tant dans le sens horizontal, que dans le sens vertical, je conçois par la ligne CD un plan vertical $CDFE$, & par la ligne AB que je suppose horizontale, j' imagine le plan horizontal $AFEB$. Et ayant mené les lignes verticales CE , BF qui rencontrent ce plan, en E & F , je mène BE & AF ; enfin, par la direction GP de la force P , je conçois un plan KIH auquel CD soit perpendiculaire, & dont HGK & HI sont les intersections avec les deux plans $ABCD$, $FECD$: ce plan sera perpendiculaire aux plans $ABCD$, $FECD$ (*Géom.* 184), puisque CD est leur intersection commune: enfin du point K pris sur AB & HK , je mène KI perpendiculaire au plan $FECD$; cette ligne ne peut manquer d'être perpendiculaire à HI .

Cela posé, je décompose la force P en deux autres qui soient dans le plan KIH prolongé, & dont l'une GL soit horizontale ou perpendiculaire au plan

$FECD$; & l'autre, GM , soit verticale. J'aurai donc en nommant L & M ces deux forces, & formant le parallélogramme $GMNL$ sur la ligne GN prise arbitrairement pour diagonale, j'aurai (225) $P : L : M :: GN : GL : GM$, ou $:: GN : GL : LN$. Mais comme le triangle GLN a ses côtés perpendiculaires sur ceux du triangle KIH , ces deux triangles sont semblables (*Géom.* 111), & l'on a $GN : GL : LN :: HK : HI : IK$; donc $P : L : M :: HK : HI : IK$. Multiplions ces trois derniers termes par $\frac{AB + CD}{2} \times GG'$, ce qui ne changera point leur rapport, & nous aurons $P : L : M :: HK \times \frac{AB + CD}{2} \times GG' : HI \times \frac{AB + CD}{2} \times GG' : IK \times \frac{AB + CD}{2} \times GG'$.

Observons maintenant 1°. que $HK \times \frac{AB + CD}{2}$ est la surface du trapèze $ABCD$. 2°. Que puisque CE & DF sont parallèles & qu'il en est de même de CD & EF , on a $CD = EF$; donc $IK \times \frac{AB + CD}{2}$ est la même chose que $IK \times \frac{AB + EF}{2}$, & par conséquent est la surface du trapèze $A FEB$. 3°. Et comme on suppose que la hauteur du trapèze $ABCD$ est infiniment petite, EF qui est égale à CD , peut être prise à la place de AB , & de CD , en sorte que $HI \times \frac{AB + CD}{2}$ se réduit à $HI \times EF$ qui est la surface

du rectangle $ECDF$. On a donc $P : L : M :: ABCD \times GG' : ECDF \times GG' : AFEB \times GG'$. Mais nous avons supposé que la force P étoit exprimée par $ABCD \times GG'$; donc la force L est exprimée par $ECDF \times GG'$; & la force M est exprimée par $AFEB \times GG'$.

Comme le triangle n'est autre chose qu'un trapèze dont un des côtés parallèles est zéro, la même chose a donc lieu pour le triangle, en observant qu'alors $CDEF$, $ABEF$ sont aussi des triangles.

Concevons maintenant, que des angles A, D, C, B on ait mené des perpendiculaires sur le plan XZ . On peut se représenter ces perpendiculaires comme les arrêtes d'un prisme tronqué dont la base horizontale seroit égale à $AFEB$, & dont la base inclinée est $ABCD$. Or comme AB & CD sont supposées infiniment proches, la solidité de ce prisme tronqué n'est pas censée différer de celle du prisme qui auroit la même base, & qui auroit GG' pour hauteur; mais cette dernière auroit pour expression $AFEB \times GG'$ qui est précisément celle que nous venons de trouver pour la force verticale M ; donc cette force a aussi pour expression la solidité du prisme tronqué qui a pour base inclinée $ABCD$, & pour base horizontale la projection de $ABCD$ sur le plan horizontal XZ .

342. Imaginons, actuellement, un solide quelconque, coupé en une infinité de tranches horizontales, telles que $ABDEabde$ (fig. 119), & que perpendiculairement au centre de gravité de la surface de chaque trapèze, dont on peut imaginer que la surface du contour de cette tranche est composée, on ait appliqué des forces représentées chacune par le produit de la surface du trapèze correspondant, multipliée par la distance de son centre de gravité à un plan horizontal XZ . Ces forces seront les pressions qu'un fluide pesant exerceroit sur la surface intérieure de la tranche $ABDEabde$ d'un vase dans lequel il seroit contenu; elles seroient aussi les pressions qu'un pareil fluide exerceroit sur la surface extérieure d'un solide qui y seroit plongé. Or nous venons de voir que si l'on décomposoit ces forces en deux autres, l'une verticale, & l'autre horizontale; chaque force verticale seroit représentée par le prisme tronqué qui a pour base dans le plan horizontal XZ , la projection du trapèze sur ce plan, & qui a pour base inclinée ce trapèze même. Donc la somme des forces verticales, ou la force verticale unique qui en résulte, fera représentée par la somme de tous ces prismes tronqués; & comme la même chose doit s'entendre de chaque tranche horizontale, il faut donc en conclure,

1°. Que si un vase de figure quelconque $ACDF$ (fig. 112) est rempli de fluide jusqu'à la ligne quelconque AF , il ne résulte de toutes les pressions que le fluide exerce sur chacun de ses points, d'autre force verticale qu'une force représentée par la solidité ou plutôt par le poids du volume que le fluide occupe.

2°. Que si un corps tel que $AEDBM$ (fig. 120), dont $AIBF$ est la plus grande coupe horizontale, est plongé dans un fluide à une profondeur quelconque, & que l'on fasse abstraction de la pression qui s'exerceroit sur la partie supérieure AMB ; l'effort vertical du fluide pour le soulever, est égal au poids du volume du fluide qui seroit compris entre le niveau XZ , la surface $AIBFE$, & la surface convexe formée par les perpendiculaires abaissées de tous les points du contour $AIBF$, sur le plan XZ .

Si l'on considère ensuite la pression qui s'exerce sur la surface supérieure à la plus grande coupe horizontale, on voit par la même raison, qu'il résulteroit des pressions du fluide sur cette surface, qu'il en résulteroit, dis-je, dans le sens vertical, & pour pousser le corps en bas, un effort égal au poids du volume de fluide qui seroit compris entre cette même surface, celle $A'F'B'I'$ de sa projection, & celle que forment les perpendiculaires menés de tous les points du contour $AIBF$. Donc si du premier effort

vertical, on retranche le second, on voit que le corps est poussé verticalement de bas en haut, par un effort égal au poids du volume de fluide dont il occupe la place.

343. Concluons donc généralement, que *si un corps est plongé dans un fluide quelconque, il y perd une partie de son poids, égale au poids du volume de fluide qu'il déplace.*

344. Il nous reste maintenant deux choses à examiner; la première est de savoir par où passe l'effort vertical résultant des pressions du fluide: la seconde, ce que deviennent les forces horizontales.

Quant à la première, il est facile de voir que cet effort vertical doit passer par le centre de gravité du volume de fluide qui a été déplacé. En effet, si on conçoit ce volume décomposé en une infinité de filets verticaux, l'effort que le fluide exerce pour pousser verticalement chaque filet, est exprimé (342) par le poids d'un volume de fluide égal à ce filet. Donc pour avoir la distance de la résultante, à un plan vertical quelconque, il faudroit multiplier la masse de chaque filet considérée comme de même nature que le fluide, par la distance à ce plan, & diviser par la somme des filets; or c'est précisément ce qu'il faut faire pour trouver la distance du centre

de gravité du volume déplacé ; donc en général *la poussée verticale d'un fluide sur un corps qu'on plonge, passe toujours par le centre de gravité du volume de fluide déplacé.*

345. Voyons , maintenant , ce que deviennent les forces horizontales dont nous avons parlé ci-dessus.

Si l'on se représente toujours la tranche solide de la *fig. 119*, & que par les côtés *ab*, *bc*, &c. de la section inférieure on conçoive des plans verticaux terminés par la section supérieure ; ces plans formeront le contour d'un prisme qui aura pour hauteur celle de la tranche ; & chaque face de ce prisme, exprimera (341) par l'étendue de sa surface, la valeur de la force horizontale qui lui est perpendiculaire. Mais comme toutes ces faces sont de même hauteur , leurs surfaces sont dans la raison de leurs bases *ab*, *bc*, &c. ; donc les forces horizontales sont entre elles dans la raison des côtés *ab*, *bc*, &c. D'ailleurs à quelque endroit de ces faces qu'elles soient appliquées , comme ces faces sont d'une hauteur infiniment petites , on peut regarder ces forces horizontales comme appliquées , toutes , dans le plan horizontal *abcdef*, chacune perpendiculairement sur le milieu du côté qui sert de base à la face correspondante du prisme dont il s'agit. Je dis sur le milieu,

parce qu'il est aisé de voir que la résultante des pressions qui s'exercent sur la surface de l'un quelconque des trapèzes qui forment la surface de la tranche, doit passer par l'un des points de la ligne qui joint les milieux des deux côtés parallèles; & que par conséquent la force horizontale qui en résulte, doit rencontrer la ligne qui joint les milieux de deux côtés opposés de la face correspondante du prisme. La question est donc réduite à savoir ce qui doit arriver à un polygone quelconque (*fig. 122*) lorsque chacun de ses côtés est tiré ou poussé par une force appliquée perpendiculairement à son milieu, & représentée pour sa valeur, par ce côté. Nous allons voir qu'elles se détruisent mutuellement.

Ne considérons d'abord que deux forces P & Q (*fig. 121*) appliquées perpendiculairement sur les milieux des deux côtés AB , AC du triangle ABC , & représentées par ces côtés. Il est clair que leur résultante passera par leur point de concours F , qui dans le cas présent est le centre du cercle qui passeroit par les trois points A , B , C (*Géom. 54*). Je dis d'ailleurs, qu'elle doit passer par le milieu du côté BC , auquel elle fera par conséquent perpendiculaire; & qu'elle sera représentée par ce côté BC .

En effet, si l'on décompose la force P en deux

autres l'une De parallèle, & l'autre Dh perpendiculaire au côté BC , en formant le parallélogramme $Degh$; on aura en nommant e & h ces deux forces, $P : e : h :: Dg : De : Dh :: Dg : De : ge$; or en abaissant la perpendiculaire AO , le triangle geD est semblable au triangle AOB , parce qu'ils ont les côtés perpendiculaires. On a donc $Dg : De : ge :: AB : AO : BO$; donc $P : e : h :: AB : AO : BO$. Or par la supposition, la valeur de la force P est représentée par AB ; donc celle de e l'est par AO , & celle de h l'est par BO .

Si l'on décompose pareillement la force Q en deux autres, l'une Im parallèle, & l'autre Ik perpendiculaire au côté BC , on prouvera de même, que m est représentée par AO , & k par CO . Les deux forces m & e sont donc égales, puisqu'elles sont représentées par la même ligne AO . D'ailleurs elles agissent en sens contraires, & suivant une même ligne DI parallèle à BC , puisque D & I sont les milieux de AB , AC ; donc elles se détruisent. La résultante doit donc être la même que celle des deux forces h & k ; & comme celles-ci sont parallèles, puisqu'elles sont perpendiculaires à BC , leur résultante doit être égale à leur somme, & perpendiculaire à BC . Donc 1°. elle est représentée par $BO + OC$; c'est-à-dire, par BC . 2°. Étant perpendiculaire

à BC , & devant d'ailleurs passer, ainsi que nous venons de le dire, par le centre F du cercle circonscrit à ABC , elle passe donc par le milieu de BC .

Cela posé (*fig. 122*) la résultante V des deux forces P & T sera donc perpendiculaire sur le milieu de BE , & représentée par BE . Par la même raison, la résultante X des deux forces V & S , & par conséquent celle des trois forces P , T , S , sera perpendiculaire sur le milieu de BD , & représentée par BD . Enfin la résultante Y des deux forces X & Q , & par conséquent, celle des quatre forces P , T , S , Q , sera perpendiculaire sur le milieu de DC , & représenté par DC ; elle sera donc égale & directement opposée à la force R ; donc toutes ces forces se détruiront.

On voit que le raisonnement est le même, quels que soient le nombre & la grandeur des côtés.

Donc en général, *les efforts qui résultent dans le sens horizontal, de la pression qu'un fluide pesant exerce perpendiculairement sur la surface d'un corps qui y est plongé, se détruisent mutuellement.*

346. Tels sont les principes qui servent à déterminer les effets de la pression des fluides sur les vases qui les renferment, & sur les corps qu'on y plonge. Voyons maintenant quelques usages de ces principes.

Puisque les efforts que le fluide fait dans le sens horizontal, se détruisent mutuellement, il ne faut donc pour conserver un corps dans la position qu'on lui aura donnée dans un fluide, il ne faut, dis-je, autre chose, que détruire l'effort vertical de la pression; ce qui exige deux choses: la première, qu'on oppose de haut en bas un effort qui soit égal à celui que la pression exerce de bas en haut: la seconde, que cet effort soit en ligne droite avec celui de la poussée verticale du fluide. Or la poussée verticale du fluide, est équivalente au poids du volume de fluide déplacé; donc *si le volume de fluide déplacé, pèse plus que le corps plongé, le corps surnagera & s'élèvera jusqu'à ce que le volume de fluide correspondant à la partie submergée, pèse autant que le corps entier.*

347. Donc, si lorsqu'un corps surnage, on vient à ajouter ou à ôter à son poids, un poids quelconque, il s'enfoncera ou s'élèvera jusqu'à ce que l'augmentation ou la diminution du poids du volume du fluide déplacé, soit devenue égale à ce nouveau poids. Si ce poids qu'on ajoute, ou qu'on retranche, est petit, eu égard à celui du volume de fluide actuellement déplacé, la quantité IK (*fig. 123*) dont s'abaissera ou s'élèvera la coupe AB , sera d'autant plus petite que ce poids sera plus petit, & qu'en même temps la coupe AB sera plus grande. On pourra donc, lorsque ce poids sera petit, & que la coupe AB sera grande, regarder AB & ab , comme égales, & évaluer le volume nouvellement déplacé, par la surface représentée par AB , multipliée par IK ; c'est-à-dire, par $AB \times IK$. Donc si

p est le poids d'un pied cube de fluide, $p \times AB \times IK$ fera le poids de ce volume, $AB \times IK$ étant évalué en pieds cubes. Ainsi, si P est le poids qu'on ajoute, ou qu'on retranche, on aura $p \times AB \times IK = P$; d'où l'on tire $IK = \frac{P}{p \times AB}$; c'est-à-dire, pour le navire, par exemple, que pour savoir combien une certaine augmentation faite à la charge, fait enfoncer le navire, il faut diviser la valeur P de cette augmentation, par la surface de la coupe faite à fleur d'eau, estimée en pieds quarrés, & multipliée par le poids d'un pied cube d'eau.

Lorsqu'on souffle un vaisseau, on augmente le volume de la carène d'une quantité que nous avons enseigné (123) à évaluer. C'est donc comme si on diminueoit la charge, d'une quantité égale au poids d'un volume d'eau égal à l'augmentation qu'on a faite au volume, moins le poids des matières qui composent le soufflage : on peut donc déterminer facilement de combien il plongera moins.

348. Le poids d'un corps restant le même, on peut étendre ce volume à volonté. Il n'y a donc pas de matière si pesante qu'on ne puisse faire furnager.

349. Puisque, lorsqu'on diminue le poids d'un corps sans rien changer à son volume, il doit s'élever avec un effort qui ne peut être contrebalancé que par un poids égal à celui qu'on a ôté; il s'ensuit donc, qu'on peut employer utilement la poussée verticale de l'eau pour élever des fardeaux; par exemple, pour tirer des bâtimens du fond de la mer ou des rivières, en les attachant à d'autres bâtimens que l'on

aura d'abord chargés de corps pesans, ou d'eau, & qu'on vide ensuite.

350. En général, si P est la pesanteur spécifique d'un corps qui surnage, ou ce que peseroit un pied cube, par exemple, de ce corps, s'il étoit d'une matière uniforme; V son volume; p la pesanteur spécifique du fluide; u le volume de la partie submergée: le poids de ce corps sera $P \times V$ ou PV ; celui du volume de fluide sera pu ; on aura donc $PV = pu$; équation qui donne $u = \frac{PV}{p}$; d'où l'on voit que le poids PV du corps restant le même, la partie submergée sera toujours d'autant plus petite, que la pesanteur spécifique du fluide sera plus grande.

Cette même équation donne $V : u :: p : P$; c'est-à-dire, que le volume du corps, & celui de la partie submergée sont en raison inverse de la pesanteur spécifique du corps, & de celle du fluide.

351. Si le corps pèse plus qu'un pareil volume de fluide; alors il doit s'enfoncer, & ne peut être retenu que par une force égale à l'excès de son poids sur celui d'un pareil volume de fluide. Or si nous représentons toujours par p & P les pesanteurs spécifiques du fluide & du corps; & par V , le volume du corps, nous aurons $PV - pV$ pour l'excès du poids du corps sur celui d'un pareil volume de fluide. Donc

si on conçoit que ce corps soit retenu, à l'aide d'un fil, au fléau d'une balance, & que P' soit le poids avec lequel il peut être en équilibre; on aura $P' = PV - pV$, d'où l'on tire $\frac{P}{p} = \frac{PV - P'}{pV}$. Or PV est le poids du corps dans l'air, & P' son poids lorsqu'il est plongé dans le fluide; donc *connoissant le poids d'un corps dans l'air, & son poids dans un fluide, on aura aisément le rapport des pesanteurs spécifiques de ce dernier fluide & du corps, en divisant la différence de ces deux poids, par le poids du corps dans l'air.*

Par exemple, si un corps pèse 6 onces dans l'air, & 5 onces dans l'eau, je divise la différence 1, par 6, & le quotient $\frac{1}{6}$, me fait voir que la pesanteur spécifique du corps, est à celle du fluide, comme 6 est à 1.

L'air, comme fluide pesant, diminue aussi une partie du poids des corps; en sorte que le poids qu'ils ont dans l'air, n'est pas leur poids réel. Mais comme l'air est un fluide fort rare, & dont la pesanteur spécifique n'est qu'environ la 850^e partie de celle de l'eau, on peut se dispenser d'avoir égard à la diminution qu'il occasionne.

352. Si l'on conçoit qu'on plonge le même corps que ci-dessus, dans un autre fluide dont la pesanteur spécifique soit p' , & que P'' soit le poids avec lequel il peut alors être en équilibre; de même qu'on a eu $P' = PV - pV$, on aura $P'' = PV - p'V$; or

ces deux équations donnent $pV = PV - P'$, & $p'V = PV - P''$; donc divisant cette dernière, par la précédente, on aura $\frac{p'}{p} = \frac{PV - P''}{PV - P'}$; d'où, connaissant le poids PV d'un corps dans l'air, son poids P'' dans un fluide, & son poids P' dans un autre fluide, on déterminera facilement $\frac{p'}{p}$, c'est-à-dire, le rapport des pesanteurs spécifiques des deux fluides.

353. Suivant ce que nous venons de voir, la pesanteur spécifique multipliée par le volume, donne le poids d'un corps. Mais la densité multipliée par le volume donne la masse (191), qui (202) est proportionnelle au poids. Donc la pesanteur spécifique multipliée par le volume, est proportionnelle à la densité multipliée par le volume; donc *la pesanteur spécifique des corps est proportionnelle à leur densité.*

354. Revenons aux corps qui flottent. Pour qu'un corps puisse rester en équilibre sur un fluide, il faut, ainsi que nous l'avons vu (346), que son poids total soit égal à celui du volume de fluide déplacé. Mais cette condition ne suffit pas. *Il faut encore, que la ligne qui passe par le centre de gravité du corps plongé, & par le centre de gravité du volume de la partie submergée, soit verticale.*

Car la pesanteur du corps, & la poussée du fluide s'exerçant chacune suivant une ligne verticale, dont la première

passé par le centre de gravité du corps, & la seconde, par le centre de gravité du volume déplacé, ne peuvent être directement opposées (comme il faut qu'elles le soient pour l'équilibre), qu'autant que ces deux verticales se confondront.

355. Ainsi, pour déterminer si un corps *ACEDB* (*fig. 124*) d'une forme & d'une matière connues, peut demeurer en équilibre sur un fluide, dans une position qu'on a dessein de lui donner; il faut mener un plan horizontal *CD* qui sépare une partie *CED* dont le volume soit au volume total *AEB*, comme la pesanteur spécifique du corps est à celle du fluide: & ayant déterminé le centre de gravité *G* de *AEB*; & celui *G'* de *CED*, si la ligne *GG'* est perpendiculaire au plan *CD*, l'équilibre aura lieu.

356. Nous supposons dans ce que nous disons ici, que le corps *AEB* est homogène; c'est-à-dire, que la matière qui compose son poids est toute de même espèce, & qu'elle est uniformément répandue dans tout l'espace qu'occupe le volume total. S'il n'en étoit pas ainsi, on commenceroit par calculer la valeur d'un volume de fluide, égal en poids, au poids total de *AEB*, & l'on feroit *CED* égal à ce volume, *CD* étant horizontale; ce qui se réduit à une question de pure Géométrie, dont les principes donnés jusqu'ici, peuvent fournir la solution.

357. C'est encore une autre question que l'on peut résoudre à l'aide des mêmes principes, que celle de déterminer les différentes positions dans lesquelles un corps peut rester en équilibre sur un fluide ; mais comme nous n'avons aucune application essentielle à faire ni de l'une ni de l'autre de ces deux questions, nous ne nous en occuperons pas. Voici quelque chose qui nous importe plus.

358. Le corps CED (*fig. 125*) étant actuellement en équilibre sur un fluide dont AB est la surface : G étant le centre de gravité de ce corps ; G' celui de la partie submergée AEB ; si l'on conçoit que l'on incline infiniment peu le corps, en sorte que aEb devienne la partie submergée, dont G'' soit le centre de gravité. Ce corps reviendra à sa première position, si la verticale $G''M$ qui convient à cette seconde position, rencontre la verticale $G'M$ qui convient à la première, au-dessus du centre de gravité G du corps. Au contraire il versera tout-à-fait, si le point M est au-dessous de G , comme en M' .

En effet, la direction $G''M$ qu'aura alors la poussée de l'eau, & qui sera verticale, ne passant point par le centre de gravité G , tend (322) à imprimer au corps deux mouvemens, l'un pour élever le centre de gravité, & qui est détruit par le poids du corps ;

l'autre qui tend à le faire tourner autour du centre de gravité G . Or il est facile de voir que si le point G est au-dessous de M , ce mouvement de rotation autour de G , tend à se faire de A vers C , & par conséquent à ramener G' dans la verticale actuelle $G''M$. Au contraire, si M est au-dessous de G , comme en M' ; le mouvement de rotation autour de G , tend à se faire de C vers A , & par conséquent ne peut qu'éloigner G' de G'' ; c'est-à-dire, tend à faire renverser le corps.

Donc pour que le corps puisse revenir à sa situation primitive, il faut que $G'M$ soit plus grande que $G'G$.

Le point M est ce que M. Bouguer a nommé le *Métacentre*; parce que c'est la limite de la hauteur à laquelle peut être placé le centre de gravité G , pour que le corps flottant ne soit pas renversé par une petite inclinaison; car pour peu que G fût au-dessus du point M , le corps se renverseroit.

Comme la détermination du métacentre M importe beaucoup dans la construction des vaisseaux, nous allons nous en occuper.

359. Supposons donc que AEB (*fig. 126*) représente la coupe d'un navire, faite par un plan perpendiculaire à la quille, & passant par le centre de gravité G du navire. Ce plan passera aussi par le centre

de gravité G' de la partie submergée AEB (354).

Concevons que par quelque cause que ce soit, le navire prenne une situation infiniment peu inclinée à la première; & qu'alors ab soit le plan de flottaison, & G'' le centre de gravité de la partie aEb qui sera submergée alors. Si l'on mène $G''M$ perpendiculaire à ab , cette ligne fera la direction suivant laquelle s'exercera la poussée de l'eau, lors de l'inclinaison.

Pour déterminer le point M où $G''M$ coupe la ligne GG' qui est verticale dans la première situation, il faut déterminer la position de G'' , tant à l'égard de AB , qu'à l'égard de la verticale GG' .

Dans cette vue, nous imaginerons le navire coupé en un grand nombre de tranches verticales, par des plans perpendiculaires à la quille; & supposant que MNR (fig. 127) est une de ces tranches; g le centre de gravité de sa partie submergée avant l'inclinaison; g' celui de sa partie submergée lors de l'inclinaison, nous allons chercher, pour chaque tranche, le déplacement gg' de ce centre de gravité g , d'où nous conclurons celui du centre de gravité G' (fig. 126).

Observons donc d'abord, que le volume MNR (fig. 127) est égal au volume mRn ; parce que le volume d'eau qui correspond à chacun, doit (346) soutenir, dans chaque cas, la même partie du poids

total du navire. Donc, si de chacun de ces deux volumes on retranche le volume commun MRn , les deux secteurs MOm , $NO n$ (que l'on doit regarder comme deux triangles rectilignes, à cause que l'inclinaison est infiniment petite) seront égaux; & le point d'intersection O pourra être censé au milieu de MN .

Soient maintenant, h , h' , g'' , les centres de gravité des espaces $NO n$, MOm , MRn . Menons sur MN , les perpendiculaires hk , $h'k'$, $g''l'$, $g'q$; & sur la verticale gO , la perpendiculaire $g''l$. Pour avoir la distance $g'q$ du centre de gravité g' de mRn , à la ligne MN , il faut prendre le moment de mRn par rapport à cette ligne, & l'égaliser (263) à la différence des momens de ses parties MRn , MOm qui sont situées de différens côtés de MN . On aura donc $mRn \times g'q$ ou $MRN \times g'q = MRn \times g''l' - MOm \times h'k'$. Mais puisque g est le centre commun de gravité des deux espaces MRn & $NO n$, on doit avoir $MRN \times gO = MRn \times g''l' + NO n \times kh$. Tirant de l'une de ces équations, la valeur de $MRn \times g''l'$, & la substituant dans l'autre, on aura $MRN \times g'q = MRN \times gO - NO n \times kh - MOm \times h'k'$. Or les triangles MOm , $NO n$ étant infiniment petits, leurs momens, ou leurs produits par les lignes infiniment petites, $h'k'$ & kh

feront infiniment plus petits (4), & par conséquent infiniment petits du second ordre à l'égard du moment $MRN \times gO$. Rejettant donc, de la dernière équation, ces deux momens, on aura $MRN \times g'q = MRN \times gO$, d'où l'on tire $g'q = gO$; c'est-à-dire, que le centre de gravité g' est à même profondeur au-dessous de MN , que g . On peut donc regarder la ligne gg' , qui est d'ailleurs infiniment petite, comme perpendiculaire sur gO ; & par la même raison (*fig. 126*) on peut regarder $G'G'$ comme un arc de cercle décrit du point M comme centre.

Voyons à présent quelle est la valeur de gg' (*figure 127*). Il faut, par la même raison que ci-dessus, prendre le moment du volume mRn , à l'égard de OR , & l'égaliser à la somme des momens de ses deux parties MOm , MRn . On aura donc $mRn \times gg' = MOm \times Ok' + MRn \times g''l$ ou $MRN \times gg' = MRn \times g''l + MOm \times Ok'$. Mais puisque g est le centre commun de gravité des deux espaces MRn & NOn , on a $MRn \times g''l = NOn \times Ok = 0$ (265), ou $MRn \times g''l = NOn \times Ok$; donc $MRN \times gg' = NOn \times Ok + MOm \times Ok' = 2NOn \times Ok$, parce que les deux triangles MOm , NOn sont égaux, & que les distances Ok' & Ok sont évidemment égales.

Soit e l'épaisseur de la tranche que représente MRN , on aura donc enfin le moment de cette

tranche $MRN \times e \times gg' = 2NON \times e \times Ok$;
équation qui a lieu pour chaque tranche.

Prenons, maintenant, la somme de ces momens pour toutes les tranches, & nous aurons $\int MRN \times e \times gg' = \int 2NON \times e \times Ok$. Or le premier membre étant la somme des momens de chaque tranche par rapport à un plan passant par la quille, doit (268) être égal à la somme de toutes les tranches, ou au volume de la partie submergée de la carène, multiplié par la distance $G''G'$ (fig. 126) du centre de gravité de la carène, lors de l'inclinaison. Donc, en nommant V ce volume, on aura $V \times G''G' = \int 2NON \times e \times Ok$. Déterminons donc la valeur de ce second membre.

Pour cet effet, je remarque que lorsque le navire s'incline, le plan primitif de flottaison $CBPQ$ (fig. 128) devient $CbpQ$. Que les triangles $B Ib$, NON sont les mêmes que dans les fig. 126 & 127; or comme il est évident qu'ils ont un angle égal, on peut, à cause de leur petitesse infinie, les regarder comme semblables; enforte qu'on aura $NON : B Ib :: (ON)^2 : (BI)^2$ (Géom. 159); & par conséquent $NON = \frac{(ON)^2}{(BI)^2} \times B Ib$. D'ailleurs on a (fig. 127) $Ok = \frac{2}{3} ON$, car on peut regarder le point k & le point h , comme également éloignés

de O . On a donc $NO n \times Ok = \frac{\frac{2}{3}(ON)^3}{(BI)^2} \times BIb$;
 donc $V \times G'G'' = \int \frac{\frac{4}{3}(ON)^3}{(BI)^2} \times e \times BIb$; c'est-là l'é-
 quation qui donne GG'' . Employons-la maintenant
 à déterminer la hauteur $G'M$ du métacentre.

Imaginons que du point I (*fig. 126*) comme
 centre, & du rayon IB , on décrive l'arc BS ;
 on aura $BIb = \frac{BI \times BS}{2}$. Or les deux droites $G''M$
 & $G'M$ étant perpendiculaires à ab & AB , il est
 facile de voir que l'angle M est égal à l'angle BIb ,
 & que par conséquent en regardant comme un arc
 décrit du point M , la droite infiniment petite $G'G''$
 que nous avons vue être perpendiculaire à $G'I$,
 les deux secteurs BIS , $G'MG''$ seront semblables.
 On a donc $G'M : G'G'' :: BI : BS$; donc $BS =$
 $\frac{BI \times G'G''}{G'M}$; & par conséquent $BIb = \frac{(BI)^2 \times G'G''}{2 G'M}$;
 donc en substituant dans l'équation $V \times G'G'' = \&c.$,
 & réduisant, on a $V \times G'G'' = \int \frac{\frac{2}{3}(ON)^3 \times e \times G'G''}{G'M}$.
 Mais comme $G'M$ & $G'G''$ restent les mêmes,
 quelle que soit la tranche que l'on considère, on
 peut écrire cette équation, de cette autre manière,
 $V \times G'G'' = \frac{\frac{2}{3}G'G''}{G'M} \int (ON)^3 \times e$, d'où l'on tire
 $G'M = \frac{\frac{2}{3} \int (ON)^3 \times e}{V}$. C'est-à-dire, que pour avoir
 la hauteur du métacentre, au-dessus du centre de gravité

de la partie submergée de la carène, il faut partager la longueur de la coupe faite à fleur d'eau (par des perpendiculaires élevées sur cette longueur), en un assez grand nombre de parties égales, pour que les parties de la courbe qui fait le contour de cette coupe, interceptées entre ces perpendiculaires, puissent être regardées comme des lignes droites. Alors on fera une somme des cubes des demi-largeurs correspondantes à chaque division, & l'ayant multipliée par la distance e , d'une perpendiculaire à l'autre, on en prendra les $\frac{2}{3}$ que l'on divisera par le volume de la partie submergée de la carène.

360. On voit donc que tant que la coupe faite à fleur d'eau restera la même, & que le volume de la partie submergée restera aussi le même, la hauteur du métacentre restera constamment la même, quelque changement que l'on fasse d'ailleurs à la figure de la carène. Nous verrons par la suite, les usages du métacentre. Disons un mot des fluides élastiques.

361. Les fluides élastiques ont de commun avec les fluides sans ressort, qu'abstraction faite de la pesanteur, la pression se communique également dans tous les sens. Mais ils diffèrent de ces derniers, en ce que si après avoir appliqué à la surface AB (fig. 129) d'un fluide sans ressort, une pression quelconque P , qui agisse sur un fond mobile AB ,

on vient à supprimer subitement ce poids P , le fluide n'agira pas contre le fond AB . Au lieu que dans les fluides à ressort, si après que la pression P aura amené le fond AB dans la situation quelconque ab , on vient à supprimer cette pression, le fond ab sera repoussé de b vers B avec la même force qui l'avoit amené de B en b .

Quoi qu'il en soit, la manière dont la pression se distribuera, sera toujours la même que pour les fluides sans ressort; c'est-à-dire, qu'elle agira perpendiculairement aux surfaces; & que dans les fluides élastiques pesans, & qui ne sont comprimés que par l'action de leur pesanteur, les efforts de la pression sur les parois des vases, ou sur la surface des corps plongés dans ces fluides; ces efforts, dis-je, estimés dans le sens horizontal, se détruiront mutuellement; & dans le sens vertical, ils se réduiront à un seul dont la direction passera par le centre de gravité du volume sur lequel le fluide agit.

362. Quant à la valeur absolue de la pression sur une surface quelconque, en vertu de la pesanteur seule du fluide élastique; il n'est pas douteux que sur les surfaces horizontales, elle ne soit (la hauteur étant la même) proportionnelle aux surfaces sur lesquelles elle s'exerce. Mais elle ne se mesure pas, comme dans les autres fluides, par le poids du

prisme ou du cylindre qui auroit pour base cette surface ; & pour hauteur , la distance de cette surface jusqu'à la surface supérieure du fluide.

En effet, si un fluide élastique est tel que sans sa pesanteur, il puisse occuper l'espace $A E F B$ (fig. 130) ; lorsqu'on le supposera pesant, il est visible que les tranches de ce fluide, les plus proches du fond $E F$, chargées de leur propre poids, & de celui des tranches supérieures, seront plus comprimées que celles-ci ; que par conséquent, si l'on conçoit deux tranches de même hauteur, l'une près du fond $E F$; l'autre à quelque distance de ce fond, la matière de la première sera plus dense que celle de la seconde, & pèsera par conséquent davantage. Ainsi les tranches de même hauteur, chargeant le fond $E F$, d'autant moins qu'elles en sont plus éloignées, la pression sur le fond $E F$ doit s'estimer, non-seulement par la grandeur de ce fond, & par le nombre des tranches contenues de D en F , mais encore par la pesanteur spécifique de chaque tranche, laquelle est différente d'un endroit à l'autre. Ensorte que si l'on représente par x la distance $F Q$ d'une tranche quelconque, au fond $E F$; par dx la hauteur infiniment petite de cette tranche, & par D la pesanteur spécifique, ou la densité de cette même tranche ; $D dx$ fera le poids d'un filet de cette tranche ; & son action sur $E F$,

fera $EF \times D dx$; donc l'action de toutes les tranches, ou la pression sur EF fera $EF \int D dx$; c'est-à-dire, qu'il faudra prendre l'intégrale de $D dx$, & la multiplier par EF . Il faudra donc connoître la valeur de D en x , c'est-à-dire, suivant quelle loi les densités varient, à mesure que les tranches sont plus éloignées du fond EF .

Quand on aura déterminé la pression sur une surface horizontale, il sera aisé de déterminer la pression sur toute autre surface, en partageant cette surface en parties infiniment petites ; chacune de ces parties pourra être regardée comme pressée autant que si elle étoit horizontale.

363. De tous les fluides élastiques, l'air est celui qui nous intéresse le plus : c'est pourquoi nous allons nous arrêter à en considérer les principales propriétés ; celles, du moins, qui ont le plus de rapport à notre objet.

364. *L'air est pesant.* C'est un fait constaté par un grand nombre d'expériences. En voici quelques-unes.

Si l'on prend un tube de verre (*fig. 131*) d'environ 30 pouces, fermé hermétiquement par l'une A de ses extrémités, & que par le bout ouvert on introduise du mercure dans toute la capacité : si l'on vient à renverser & plonger le bout ouvert B , dans un vase où il y ait aussi du mercure ; le mercure contenu dans le tube, descendra jusqu'à

ce que la colonne restante soit d'environ 27 pouces & demi (*), à compter de la surface du mercure dans le vase.

Voici comment cette expérience prouve la pesanteur de l'air. La colonne de mercure contenue dans CB exerce au point B une pression sur le mercure inférieur qui ne peut être contrebalancé que par un effort égal agissant en sens contraire. Or le mercure contenu dans le vase où le tube est plongé, n'agit contre cette colonne, qu'à raison de la distance de sa surface supérieure jusqu'à l'ouverture B ; il ne peut donc contrebalancer. On ne peut donc chercher ailleurs l'effort nécessaire, que dans le fluide qui repose sur tous les points de la surface supérieure du vase; c'est-à-dire, dans l'air; donc c'est l'air qui par son poids fait équilibre à la colonne BC de mercure.

Voici, d'ailleurs, un autre fait qui nous sera utile & qui vient à l'appui. Si c'est l'air qui soutient la colonne BC ; il faut, si nous employons un fluide moins pesant que le mercure, que la hauteur à laquelle ce fluide restera suspendu, soit plus grande que BC , & cela (334) dans le rapport inverse des pesanteurs spécifiques de ces deux fluides. Or on fait que l'eau pèse 14 fois moins que le mercure. Il faut donc que si l'on emploie de l'eau au lieu de mercure, elle puisse être soutenue par l'air, jusqu'à la hauteur de 14 fois 27 pouces & demi, c'est-à-dire, jusqu'à 32 pieds environ.

(*) Cette quantité varie selon l'état de l'air, & la hauteur du lieu où se fait l'expérience : nous supposons ici, que c'est lorsque l'air est dans un état moyen, & que l'on est, à peu près, au

même niveau que Paris. Nous supposons de plus, que le mercure contenu dans le tube, a été purgé d'air : ce n'est pas ici le lieu d'en exposer les moyens.

C'est en effet, ce que l'expérience confirme. Car on fait que si par le moyen d'un piston on veut élever l'eau dans un seul corps de pompe, au-delà de 32 pieds, l'eau s'arrête constamment à ce terme à très-peu près. On ne peut donc douter que l'air ne soit pesant, & que par cette raison, il ne presse la surface des corps, autant que le feroit une colonne d'eau dont la base feroit égale à cette surface, & dont la hauteur feroit de 32 pieds environ.

C'est cette pression qui appliquée à tous les corps, & par conséquent à la surface de l'eau, oblige l'eau de monter dans les pompes, lorsqu'en tirant le piston on fait un vide entre le piston & l'eau dans laquelle plonge la pompe. Mais pour avoir des idées plus distinctes sur la manière dont l'eau s'élève dans les pompes, il faut examiner une autre propriété de l'air. C'est son élasticité.

365. *L'air est compressible; il est élastique: & les volumes auxquels il peut être réduit par la compression, sont sensiblement, en raison inverse des poids dont il est chargé.*

C'est un fait établi par l'expérience suivante.

Dans un tube de verre recourbé ABC (fig. 132), dont la branche AB soit au moins de 30 ou 40 pouces, & dont la branche BC soit par-tout de même diamètre, & fermée hermétiquement en C . Faites couler du mercure jusqu'à ce que la capacité B la plus basse du tube soit remplie; & ayant appliqué ce tube sur une planche graduée, observez quel est le nombre de divisions compris entre B & C . Je suppose ici que ce soit 8 pouces. Versez du mercure dans la branche AB , jusqu'à ce que l'excès de la hauteur du mercure dans AB , sur celle du mercure qui entrera dans

BC, soit de 27 pouces & demi environ. L'air qui occupoit d'abord toute la partie *BC* n'en occupera plus que la moitié. Si vous continuez de verser du mercure dans la branche *AB*, jusqu'à ce que la différence des hauteurs du mercure dans les deux branches, soit de deux fois 27 pouces & demi, ou environ; l'air restant dans *BC* n'occupera plus que le tiers de *BC*; il n'occupera que le quart, si la différence des hauteurs est de trois fois 27 pouces & demi ou environ; & ainsi de suite.

Cette expérience fait voir que l'air se comprime à mesure qu'on le charge, & qu'il se comprime, à très-peu près, proportionnellement aux poids.

En effet, lorsqu'il n'y avoit du mercure que dans la capacité inférieure *B*, l'air contenu dans *BC*, étant de même nature que celui qui étoit dans *AB*, étoit chargé de tout le poids de l'air qui répond verticalement à l'ouverture du tube. Il étoit donc chargé par un poids équivalent à une colonne de mercure de 27 pouces & demi environ. Puis donc qu'en ajoutant encore une, deux, trois, &c. pressions semblables, il se réduit, selon ce que nous venons de dire, à des espaces deux fois, trois fois, quatre fois moindres que *BC*, il se comprime donc, dans le rapport des poids qui le chargent.

A l'égard de son ressort; par un procédé inverse on s'assure qu'il a lieu & qu'il augmente à proportion de la compression, ou qu'il diminue à proportion que la compression diminue.

Car si l'on retire du mercure de dedans la branche *AB*, on verra l'air reprendre de l'étendue dans la branche *CB*,

& en reprendre d'autant plus, qu'on diminuera plus la pression: l'air est donc non-seulement compressible; mais dans quelque état de compression qu'on le mette, il tend à se rétablir & à occuper un espace plus grand, & tel que lorsque le poids qui le comprime diminue, l'espace dans lequel l'air se répand, est à celui auquel il étoit réduit, comme le poids dont il étoit chargé dans ce dernier cas, est à celui dont il est chargé actuellement.

366. L'air que nous appelons naturel ou libre, est donc dans une compression habituelle, & telle que s'il venoit à perdre tout-à-coup sa pesanteur, il tendroit à s'écarter de toutes parts avec une force telle que la partie d'air renfermée dans un espace comme ABC (*fig. 132*) ne pourroit être retenue, qu'en appliquant à l'ouverture A une force égale au poids d'une colonne de mercure qui auroit cette ouverture pour base, & 27 pouces & demi de hauteur.

367. D'après ce que nous avons dit (361) sur la différence entre les fluides élastiques & les fluides non élastiques, on voit donc que l'air renfermé de toutes parts dans un vase, fait autant d'effort pour pousser du dedans au dehors, que l'air environnant en fait pour pousser du dehors en dedans: & c'est-là ce qui fait que les corps ne cèdent point à la pression considérable qu'ils éprouvent, selon ce que nous avons dit (364).

368. Un tube tel que celui que nous avons décrit (364) (*fig. 131*) étant appliqué sur une planche graduée dont les divisions commencent à la ligne de niveau, ou à la surface du mercure dans le réservoir, est ce qu'on appelle le baromètre; parce qu'il sert à juger de la pression que l'air exerce sur la surface des corps, par la hauteur à laquelle le mercure reste suspendu dans le tube *AB*.

On voit donc maintenant, pourquoi cet instrument marque la même hauteur dans un endroit fermé, comme dans un endroit libre. C'est que l'air renfermé exerce par son ressort, la même pression sur le mercure contenu dans le réservoir, que s'il agissoit librement par son poids.

369. Le mercure ne se soutient pas constamment à la même hauteur dans un même lieu. Il est, à Paris, tantôt au-dessus de 27 pouces & demi, tantôt au-dessous: & cela, selon que la compression occasionnée ou par le poids, ou par le ressort de l'air, augmente ou diminue. Comme le ressort de l'air peut augmenter ou diminuer sans que son poids total augmente ou diminue, ainsi qu'il peut arriver par la chaleur ou par le froid, on ne doit pas attribuer les variations du mercure dans le baromètre, uniquement aux changemens du poids de l'air.

Quoi qu'il en soit, puisque ces changemens annoncent que l'air est en état de faire équilibre à une
colonne

colonne plus ou moins grande de mercure , & par conséquent à une colonne d'eau plus ou moins grande : il faut en conclure que la plus grande hauteur à laquelle on puisse élever l'eau par le moyen d'une seule pompe , n'est pas constamment de 32 pieds ; mais qu'elle varie selon la hauteur du mercure dans le baromètre.

370. Si on porte le baromètre , d'un lieu en un autre plus élevé ou plus bas , le mercure s'abaissera dans le premier cas , & s'élèvera dans le second. Parce que la colonne d'air qui appuie sur le réservoir , étant plus courte dans le premier cas , & plus longue dans le second , doit peser moins dans le premier cas , & plus dans le second ; & par conséquent ne peut faire équilibre qu'à une colonne de mercure plus petite dans le premier cas , & plus grande dans le second. Ainsi , dans le premier cas , le tube se videra un peu dans le réservoir ; & dans le second le réservoir fournira le tube : c'est aussi ce que l'expérience a confirmé. Mais il faut observer que ces variations ne sont sensibles qu'à des changemens de hauteurs , de quelques toises. On peut dire , en gros , que 12 toises de différence de hauteur répondent à une ligne de différence dans le baromètre.

Donc les plus grandes hauteurs auxquelles on peut

élever l'eau par le moyen d'une seule pompe, varient suivant les hauteurs auxquelles on est élevé, & sont proportionnelles à la hauteur du baromètre en ces endroits.

371. Nous avons dit que l'air se comprimoit dans la raison des poids, à très-peu près. Quoique l'expérience d'après laquelle nous l'avons prouvé, donne le rapport des poids pour celui des compressibilités, & le donne assez exactement; il ne faut pas conclure cependant qu'il en seroit de même, quel que fût le poids dont on chargeât l'air. Il n'est pas vraisemblable qu'on puisse réduire un volume quelconque d'air, à occuper un espace infiniment petit, en le chargeant continuellement; non plus qu'à occuper un espace infini, en diminuant sa pression à l'infini. Cette extrême compressibilité, & cette extrême dilatabilité ne sont pas dans la nature. Néanmoins, lorsqu'il ne s'agit que de hauteurs médiocres, on peut supposer que l'air, à différentes hauteurs, est comprimé dans la raison des poids dont il est chargé; & par-là, on peut déterminer à-peu-près, à quelle hauteur doit se tenir le baromètre, en vertu du poids seul de l'air, à différentes hauteurs.

En effet, nous avons vu ci-dessus (362) que D étant la pesanteur spécifique ou la densité à une hauteur quelconque, la pression que l'air éprouvoit, ou pouvoit faire éprouver en cet endroit, étoit $\int D dx$; donc si on appelle h la hauteur du baromètre en cet endroit, on aura $\int D dx = h$, ou plutôt $\int - D dx = h$, parce que x croissant, h diminue.

D'un autre côté, puisque l'air est d'autant plus dense qu'il est plus chargé, sa densité ou sa pesanteur spécifique augmente

comme les poids dont il est chargé, & par conséquent si on appelle H la hauteur du baromètre au niveau de la mer, & p la pesanteur spécifique de l'air, à ce même niveau; on aura $H : h :: p : D$; donc $h = \frac{DH}{p}$; donc

$f - Ddx = \frac{HD}{p}$. Différencions cette équation, en observant que p & H sont constants. On aura $-Ddx = \frac{HdD}{p}$,

d'où l'on tire $\frac{dD}{D} = \frac{-pdx}{H}$; donc $lD = \frac{-px}{H} + lC$.

Mais au niveau de la mer, c'est-à-dire lorsque $x = 0$, on doit avoir $D = p$; donc $lp = lC$; donc $C = p$. On a donc $lD = \frac{-px}{H} + lp$, d'où l'on tire $lD - lp = \frac{-px}{H}$,

ou $l\frac{D}{p} = \frac{-px}{H}$, ou enfin $\frac{D}{p} = e^{\frac{-px}{H}}$, e étant le nombre

dont le logarithme est 1. On a donc $D = pe^{\frac{-px}{H}}$. Reprenant donc l'équation $f - Ddx = h$, & substituant pour D

sa valeur, on aura $h = f - pe^{\frac{-px}{H}} dx$; intégrale que (147)

l'on trouvera être $He^{\frac{-px}{H}}$; donc enfin $h = He^{\frac{-px}{H}}$, ou

$lh = lH - \frac{px}{H}$, qui donnera la hauteur h du baromètre,

à la hauteur x au-dessus du niveau de la mer, lorsqu'on connoitra sa hauteur H au niveau de la mer, & la pesanteur spécifique p de l'air, à ce même niveau.

Au reste, nous ne devons pas dissimuler qu'on ne doit pas regarder cette détermination, comme pouvant donner bien exactement la hauteur du baromètre. 1°. Parce qu'ainsi que nous l'avons déjà observé, l'air ne se comprime pas proportionnellement aux poids, à toute distance. 2°. Parce qu'à des distances un peu considérables, la pesanteur diminue. 3°. Parce que la pesanteur spécifique p de l'air, est

très-variable. 4°. Parce que les variations qui arrivent dans les hauteurs du baromètre, pouvant dépendre en partie du ressort de l'air dilaté par la chaleur, ou condensé par le froid, il faudroit connoître l'action de ces causes, à différentes hauteurs. 5°. Parce que les vapeurs & autres corps étrangers dont l'air est chargé, peuvent encore apporter beaucoup de modifications à cette détermination. Quoi qu'il en soit, cet exemple est toujours propre à montrer comment on doit se conduire dans l'application du calcul à ces sortes de questions.

372. Après ce que nous venons de dire sur le poids & le ressort de l'air & sur la pression des fluides en général, il est facile d'entendre comment l'eau s'élève dans les pompes.

Il y a trois parties principales à considérer dans une pompe. Les tuyaux, les soupapes & les pistons.

Le piston est un corps *ABCD* de base circulaire (*fig. 133, 134 & 135*), qui peut parcourir la capacité intérieure du tuyau qu'on appelle *Corps de Pompe*, & qui le remplit exactement en la parcourant. La soupape *E* est destinée à permettre & à fermer alternativement le passage à l'eau. Le corps de pompe est le tuyau que parcourt le piston. *FGHK* est un autre tuyau lié au corps de pompe, & qui a son extrémité inférieure plongée dans l'eau dont je suppose que *RS* est le niveau.

Si l'on suppose qu'une puissance *P* (*fig. 133*)

appliquée à la tige du piston, vienne à élever le piston, l'air renfermé dans l'espace $DVKHGF$ tendra, par son ressort, à occuper l'espace que le piston laissera libre; il soulèvera la soupape E , pour entrer dans le corps de pompe; son ressort diminuera à mesure qu'il s'étendra. Il exercera donc sur la surface GH de l'eau un effort moindre que ne fait l'air naturel, sur les parties environnantes RG, HS . L'excès de pression de la part de l'air extérieur, fera donc monter de l'eau dans le tuyau GK à une certaine hauteur HN , jusqu'à ce que le poids de cette colonne, joint au ressort de l'air restant, soit égal au poids de l'air extérieur. Alors la soupape E se fermant d'elle-même, si l'on baisse le piston, l'air contenu entre le piston & la base TV du corps de pompe, augmentera de ressort à mesure qu'on baissera; il fera effort contre la base du piston, & s'échappera, si son ressort étant devenu plus grand que celui de l'air extérieur, le piston est en même temps percé d'un trou recouvert d'une soupape L , qui puisse s'ouvrir & se fermer comme la première.

Cet air une fois sorti, la soupape L retombe, & si l'on recommence à lever le piston, l'eau s'élèvera dans $FGHK$, à une plus grande hauteur, par la même raison que ci-devant, en sorte qu'après un certain nombre de coups de piston, elle gagnera le

corps de pompe, où étant une fois entrée, elle passera à chaque abaissement du piston, à travers le trou dont il est percé, en levant la soupape, qui se fermant ensuite par son propre poids, retiendra au-dessus d'elle, l'eau qui aura passé, & que l'on élèvera en même temps que le piston. Tel est le jeu de la *Pompe aspirante*.

Quant à la *Pompe foulante*, voici ses effets. Lorsqu'on fait descendre le piston *PCD* (*fig. 134*) que je suppose, ici, placé au-dessous du niveau de l'eau *RS*, il se fait un vide entre la soupape *E* qui est alors fermée, & la base du piston. Le poids de l'eau agissant conjointement avec celui de l'air extérieur contre la soupape *L*, fait passer l'eau dans le corps de pompe. Lorsque l'eau cesse d'entrer, la soupape *L* se ferme. Alors si l'on remonte le piston, il chasse devant lui l'eau qui est entrée; force la soupape *E* de se lever, & introduit l'eau dans la partie *TVYX*. Le piston une fois élevé, la soupape *E* se ferme, & retient l'eau, jusqu'à ce que, par une nouvelle opération semblable à la première, on en fasse passer de nouvelle, qui s'élève dans *TVYX* à proportion du nombre de coups de piston. Quelquefois le piston est placé au-dessus du niveau de l'eau, mais dans toute disposition cela s'explique d'une manière analogue. Tel est le jeu de la pompe foulante.

La pompe *aspirante & foulante* est ainsi nommée, parce qu'elle réunit les effets des deux autres. Le piston $ABCD$ (fig. 135) s'élevant, fait entrer l'eau dans l'espace $CDTVO$ par le moyen du tuyau $FGHK$, comme dans la pompe aspirante. Puis, lorsqu'il s'abaisse, il foule l'eau contenue dans cet espace, laquelle ne pouvant échapper par la soupape E qui se ferme d'elle-même, lève la soupape L , & passe dans le tuyau $MOmn$. On peut varier beaucoup la construction & la disposition des parties des pompes ; mais leurs effets s'expliqueront toujours facilement, par ceux que nous venons d'exposer.

373. Voyons maintenant les propriétés fondamentales de ces machines.

Par le moyen de la pompe foulante, on peut élever l'eau à telle hauteur qu'on veut, pourvu qu'on y emploie une force suffisante. Mais l'estimation de cette force exige plus d'une considération. Il faut avoir égard aux dimensions du piston & des tuyaux ; à la hauteur à laquelle on veut élever l'eau ; à la vitesse avec laquelle on veut l'élever. Nous prendrons, ailleurs, cette question dans toute son étendue. Quant à présent, nous nous bornerons à quelques-uns des élémens qui peuvent servir à la résoudre.

Il est constant que la puissance nécessaire , pour élever l'eau à une hauteur proposée , doit du moins être capable de faire équilibre à la pression que la base du piston éprouveroit , si lorsqu'une lame de fluide a atteint la hauteur proposée , le tout demeureroit en équilibre. C'est cette pression que nous allons évaluer ici.

En général , la puissance doit être au moins capable de soutenir le poids d'une colonne d'eau qui auroit pour base celle du piston , & pour hauteur la distance depuis le niveau de l'eau *RS* (*fig. 134*) jusqu'à la lame supérieure *XY*.

En effet , lorsque la base *DC* du piston est au-dessous du niveau de l'eau *RS* ; il est visible que la puissance n'a point à soutenir la pression de l'eau comprise entre *RS* & *DC* , parce que cette pression est contre-balancée par celle de l'eau environnante qui se transmet par l'ouverture inférieure du corps de pompe. La puissance n'a donc à soutenir que la pression qu'exerce sur la surface *DC* , le fluide compris entre *RS* & *XY*. Or (333) cette pression doit s'estimer par celle d'un seul filet qui auroit pour hauteur la distance de *RS* à *XY* , doit , dis-je , s'estimer par la pression de ce filet , répétée autant de fois qu'il y a de points dans *DC* ; elle est donc en effet , égale au poids d'une colonne d'eau , qui

auroit pour base DC , & dont la hauteur seroit celle de XY au-dessus du niveau de l'eau.

Lorsque le piston est au-dessus du niveau supposé en $R'S'$: il est évident que l'eau contenue entre DC & $R'S'$ ne charge point le piston. Mais comme elle ne peut, alors, être soutenue que par la pression que l'air extérieur exerce sur la surface de l'eau environnante, cette pression de l'air n'est donc plus capable de faire équilibre à la pression de celui qui agit à la surface XY . Par conséquent la surface DC du piston est surchargée d'un poids équivalent à la colonne d'eau qui auroit DC pour base, & dont la hauteur seroit égale à la distance de DC à $R'S'$. Cette pression jointe à celle qu'exerce sur DC , l'eau contenue entre DC & XY , & qui a pour valeur le poids d'une colonne d'eau qui auroit DC pour base, & dont la hauteur seroit égale à la distance de DC à XY , fait donc encore le poids d'une colonne d'eau qui auroit DC pour base, & dont la hauteur seroit celle de XY au-dessus du niveau $R'S'$ de l'eau.

374. A l'égard de la pompe aspirante; pour juger de son effet, il ne suffit pas d'évaluer la puissance; il faut examiner, avant tout, si l'eau pourra parvenir jusqu'au piston, & même s'élever au-dessus; car il y a des circonstances où l'eau s'arrête à un

certain terme, quelque nombre de coups de piston que l'on donne.

Pour comprendre ceci, imaginons que l'eau soit déjà parvenue en *I* (*fig. 133*), la situation actuelle du piston étant la plus basse qu'il puisse avoir; & supposons, pour plus de simplicité, que la pompe est d'une grosseur uniforme par-tout. Il est clair que l'air compris dans l'espace *CDIZ* est de même force, de même ressort que l'air extérieur (du moins, abstraction faite du poids de la soupape *L*, & de la résistance de son frottement). Car s'il avoit plus de ressort, il s'échapperoit en levant cette soupape. Concevons maintenant que le jeu du piston, ou l'étendue qu'il parcourt à chaque levée, soit *DO*. Lorsque la base *CD* sera arrivée en *QO*, l'air qui occupoit l'espace *CDIZ*, tend à se répandre dans l'espace *QOIZ*; & si l'eau ne monte pas davantage, il s'y répandra en effet. Alors son ressort sera moindre que celui de l'air naturel, dans le rapport de *CDIZ* à *QOIZ*; & si l'eau ne monte pas davantage, il s'y répandra en effet. Alors son ressort sera moindre que celui de l'air naturel, dans le rapport de *CDIZ* à *QOIZ*, ou dans le rapport de *DI* à *OI*. Donc si cette force de ressort, jointe au poids de la colonne d'eau, qui auroit pour hauteur la distance de *ZI* à *RS*, fait un poids égal à 32 pieds d'eau en hauteur, qui est l'effort que l'air peut exercer sur la surface de l'eau en *RS*, il est clair qu'il y aura équilibre, & que l'eau ne montera plus; si ce poids

est plus grand que 32 pieds, elle retombera avant que la soupape *E* puisse se fermer, & s'il est plus petit que 32 pieds, l'eau continuera de monter.

Voyons donc comment on peut déterminer ce poids.

Nommons *h* la hauteur depuis le point *O* jusqu'au niveau *RS*; *i* le jeu du piston, ou l'espace *DO* qu'il parcourt; *x* la distance *OI*. Nous aurons $DI = x - i$, & la hauteur du point *I* sera $h - x$.

Puisque l'air renfermé dans *CDIZ*, a le même ressort que l'air extérieur; sa force peut donc être mesurée par une colonne d'eau de 32 pieds en hauteur; ainsi puisque celle de cet air répandu dans l'espace *QOIZ*, doit être moindre, dans le rapport de *DI* à *OI*, cette force sera le quatrième terme de cette proportion $x : x - i :: 32 : \frac{32 \times (x - i)}{x}$. Mais la force que l'eau comprise entre *ZI* & *RS*, exerce contre la pression extérieure de l'air, est mesurée par la hauteur $h - x$; donc celle du ressort de l'air répandu dans l'espace *QOIZ*, jointe à celle du poids de l'eau comprise depuis *IZ* jusqu'en *RS*, forme un poids total de $\frac{32 \times (x - i)}{x} + h - x$. Or pour que l'eau puisse toujours monter, il faut que ce poids soit moindre que celui d'une colonne d'eau de 32 pieds; donc si l'on nomme *y*, ce dont il est moindre, on aura $\frac{32(x - i)}{x} + h - x = 32 - y$; d'où l'on tire $-32i + hx - xx = -xy$; & par conséquent $x = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}y \pm \sqrt{\left[\left(\frac{h+y}{2}\right)^2 - 32i}\right]}$.

Pour que l'eau s'arrête, il est clair qu'il faut que y soit zéro. Et comme on a alors $x = \frac{1}{2}h \pm \sqrt{(\frac{1}{4}hh - 32i)}$, dont les deux valeurs sont réelles, si $\frac{1}{4}hh$ est plus grand que $32i$; on peut donc dire que *lorsque le carré de la moitié de la plus grande hauteur de la base du piston, au-dessus du niveau de l'eau, est plus grand que 32 fois le jeu du piston, il y a toujours deux points où l'eau peut s'arrêter dans la pompe aspirante.* Ensorte que la pompe doit être réputée mauvaise; si le piston, lorsqu'il est le plus bas, se trouve entre ces deux points.

Mais si $32i$ est plus grand que $\frac{1}{4}hh$, les deux valeurs de x que l'on a en supposant $y = 0$, deviennent imaginaires; ce qui annonce que dans une pompe construite suivant cette condition, il est impossible que y soit zéro; donc la pression de l'air extérieur sera toujours plus forte, & l'eau ne s'arrêtera point. Donc, *pour que la pompe aspirante produise infailliblement son effet, il faut que le carré de la moitié de la plus grande hauteur du piston au-dessus du niveau de l'eau, soit plus petit que 32 fois le jeu du piston.*

Si de l'équation $-32i + hx - xx = -xy$, que nous avons trouvée ci-dessus, on tire la valeur de y , on aura $y = \frac{xx - hx + 32i}{x}$.

Concevons maintenant que AB (fig. 136 & 137) représentant la plus grande hauteur du piston au-dessus du niveau de l'eau, & AD le jeu du piston, on donne successivement à x , pour valeurs, les différentes parties AP de la ligne AB , & que l'on porte sur les perpendiculaires PM , les valeurs de y qui résulteront de ces substitutions; on aura une courbe MMC , qui (fig. 136) tant que $\frac{1}{4}hh$ fera plus grand que $32i$, coupera AB en deux points I & I' ;

enforte qu'il y aura des ordonnées PM , de part & d'autre de AB ; les ordonnées qui sont à la droite, marquant les valeurs positives de y ; & celles qui sont à la gauche, marquant les valeurs négatives.

On voit donc que tant que $\frac{1}{4}hh$ est plus grand que $32i$, la pression de l'air extérieur est toujours la plus forte jusqu'à ce que l'eau ait atteint la hauteur BI' . Qu'à ce point elle s'arrêtera (abstraction faite du mouvement acquis), parce que la valeur de y est zéro. Mais si l'eau par son mouvement acquis, passe la hauteur BI' , parvient à quelque point entre I & I' , elle ne pourra s'y arrêter, mais elle descendra (en supposant que la soupape ne s'y oppose pas), parce que la valeur de y étant négative, marque que la pression de l'air extérieur est plus foible que les efforts réunis de l'eau & du ressort de l'air intérieur. Si l'air atteint la hauteur du point I , elle pourra s'y arrêter par la même raison que ci-dessus. Mais si elle passe une fois le point I , alors il n'y a plus à craindre qu'elle descende, parce que les ordonnées PM comprises entre A & I étant toutes positives, font voir que la pression de l'air extérieur est toujours la plus forte, depuis la hauteur du point I jusqu'à celle du point A .

Lorsqu'au contraire la valeur de $\frac{1}{4}hh$ est plus petite que $32i$ (*fig. 137*), la courbe ne coupe plus l'axe AB ; toutes les ordonnées PM sont positives; la pression de l'air extérieur est donc toujours la plus forte. Il n'y a donc pas d'arrêt à craindre. Ce qui confirme & éclaircit ce que nous avons dit ci-dessus.

Si la pompe aspirante étoit établie à une hauteur ou à une profondeur sensiblement différente de celle à laquelle le poids de l'air est équivalent à une

colonne d'eau de 32 pieds; il faudroit, dans tout ce que nous venons de dire, mettre moins ou plus de 32 pieds. Ce moins ou plus peut se déterminer par le baromètre, en comptant autant de fois 14 lignes de plus ou de moins à l'égard de 32 pieds, que le mercure marquera de lignes au-dessus, ou au-dessous de 27 pouces & demi.

Dans le calcul précédent, nous avons regardé la pompe, comme si elle étoit d'une grosseur uniforme; lorsqu'elle ne l'est point, comme dans la *figure 133*, la solution n'est pas plus difficile pour cela. Pour calculer l'effort de l'air intérieur, lorsqu'on suppose que l'eau n'est pas encore dans le corps de pompe *XV*; lorsqu'elle est en *MN* par exemple, il faut faire cette proportion: l'espace *QOVNMTQ* : *CDVNMT C* :: 32^P sont à un quatrième terme qui étant joint au poids de la colonne d'eau qui a pour hauteur *NH*, doit ensuite être égalé à $32 - y$, comme ci-dessus. Au surplus, quand le tuyau d'aspiration *FG* est d'un diamètre plus petit que le corps de pompe, si la condition que nous avons exigée ci-dessus a lieu, la pompe ne peut manquer d'avoir son effet; car l'air se dilate encore plus facilement dans celle-ci, que si elle étoit d'une grosseur uniforme.

Quant à l'effort dont la puissance doit être capable, pour soutenir l'eau à une hauteur déterminée *XY* (*fig. 133*); il se mesure, ainsi que nous l'avons vu pour la pompe foulante, par le poids d'une colonne d'eau, qui auroit pour base, la base *DC* du piston, & pour hauteur celle de *XY* au-dessus du niveau *RS*. (Nous faisons abstraction du frottement & du poids

du piston). Cela se démontre par un raisonnement semblable à celui que nous avons employé pour la pompe foulante, lorsque le piston est au-dessus du niveau de l'eau $R'S''$ (fig. 134).

375. La pesanteur & le ressort de l'air, servent à expliquer beaucoup d'autres faits : nous nous bornerons à en rapporter quelques-uns.

Si dans un vase où il y a de l'eau, ou tout autre fluide, on plonge (fig. 138) la branche la plus courte d'un tube recourbé DEF (qu'on appelle siphon) ; & qu'on aspire, en suçant ou autrement, l'air contenu dans ce siphon, l'eau montera & sortira par F jusqu'à ce que, dans le vase, elle soit descendue à l'ouverture D .

La raison de ce fait, est que lorsqu'on a fait sortir l'air renfermé dans DEF , la pression de l'air extérieur agit sur la surface AB , force le fluide de monter dans le siphon & de s'écouler par la branche EF . Et quoique lorsque l'écoulement est commencé, l'air presse le fluide, au point F , avec une force égale, à très-peu près, à celle qui presse la surface de l'eau dans le vase ; néanmoins la lame F est pressée en sens contraire, par toute la colonne d'eau IF : cette colonne doit donc tomber : mais en tombant elle tend à faire un vide en I qui ne peut manquer d'être rempli par l'action, toujours présente, de la pression de l'air sur la surface de l'eau dans le vase.

On voit par ce raisonnement, que pendant l'écoulement, l'air n'agit qu'avec un effort proportionnel à la différence IF de niveau, entre F & la surface de l'eau dans le vase ; en sorte que l'écoulement sera d'autant plus prompt, que les deux branches du siphon différeront davantage : ainsi si F

& *D* étoient de niveau, l'écoulement n'auroit pas lieu. On dit communément que la branche *EF* doit être plus longue que la branche *ED*; mais on voit qu'en s'exprimant ainsi, on doit entendre que la hauteur verticale de *E* au-dessus de *F*, doit être plus grande que celle de *E* au-dessus de *D*. La longueur absolue n'y fait rien. On pourroit rendre *DE* beaucoup plus longue que *EF*, en contournant *DE* de diverses manières; tant que le point *D* sera plus haut que *F*, le fluide s'écoulera jusqu'à ce qu'il soit arrivé en *D*, pourvu que la hauteur de *E* au-dessus de *D* ne passe pas 32 pieds.

Lorsqu'en appliquant les lèvres à l'ouverture d'un flacon, on aspire la liqueur qui y est contenue; les lèvres s'appliquent fortement sur les bords de l'ouverture; & on a d'autant plus de peine à les dégager, qu'on a aspiré plus fortement.

C'est qu'en aspirant une partie de l'air contenu dans le flacon, on diminue le ressort de l'air restant, à proportion de ce qu'on en diminue la quantité, il n'est donc plus en état d'opposer du dedans au dehors, une pression égale à celle que l'air extérieur exerce du dehors au dedans. Cette différence peut aller jusqu'à faire casser le flacon, sur-tout s'il est plat.

Par une raison semblable, on explique pourquoi on a de la peine à ouvrir un soufflet lorsqu'on en bouche l'ouverture. C'est qu'en écartant les panneaux, l'air intérieur se répand dans un plus grand espace, & diminue de ressort à proportion: l'air extérieur presse donc plus du dehors au dedans, que l'air intérieur ne presse du dedans au dehors,

FIN de la première Partie.

