

www.e-rara.ch

Theoretische Astronomie

Schubert, Friedrich Theodor von

St. Petersburg, 1798

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 4129

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-2158>

Erster Abschnitt. Von den allgemeinen Gesetzen der Bewegung.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Erster Abschnitt.

Von den allgemeinen Gesetzen der Bewegung.

Erstes Capitel.

Allgemeine Begriffe von Bewegung und Kräften.

§. I.

Der allgemeine Begriff Körper ist einer der einfachsten und ersten, die sich der menschliche Verstand bildet: ein langer Zeitraum, eine mühsame Anstrengung und glückliche Entwicklung seiner verborgensten Kräfte ward erfordert, ehe der Geist des Menschen die unsichtbare Kluft, die die Körper- und Geister-Welt trennt, überschreiten, und von jenem sinnlichen zu dem weit einfacher scheinenden Begriffe Geist sich erheben, oder von den äußern Gegenständen seine Aufmerksamkeit auf sich selbst wenden konnte. Indes ist dieser Begriff doch nicht ganz einfach, sondern jeder, der sich bey dem Worte Körper etwas deutlich denkt, setzt das wesentliche desselben in folgenden zwey Eigenschaften, wovon man jede als das Resultat eines unsrer zwey vornehmsten Sinne, des Gesichts und Gefühls ansehen kann: nämlich 1) in einer gewissen bestimmten Größe oder Ausdehnung, und 2) in der Undurchdringlichkeit, die jedem Körper seinen eignen Ort anweist. Der erste Begriff macht die Körper zum Gegenstande der Geometrie, der letzte zum Gegenstande der Dynamik und Physik: der erste gibt bloß einem Wesen der Phantasie, dem eigentlichen geometrischen Körper das Daseyn, und aus ihm allein läßt sich der ganze unermessliche Schatz der geometrischen Wahrheiten entwickeln; der letzte macht den Körper erst zu dem, was man im gemeinen Leben darunter versteht, und für die unzähligen physikalischen Eigenschaften empfänglich, deren Abwechslungen und Verbindungen die ganze Natur darstellen.

§. 2. Ohne diese beyden Eigenschaften können wir uns einen Körper nicht einmal als möglich denken. Sobald wir ihn aber als wirklich außer uns existirend denken, sobald er einen Theil der Natur ausmachen soll, so hört alles unbestimmt auf, seine Verhältnisse gegen alle übrigen Theile der Natur müssen völlig bestimmt seyn. Das erste, und so lange man nicht an physische Eigenschaften denkt, das einzige Verhältnis, dessen

dessen Bestimmung zu seinem Daseyn erfordert wird, ist der Ort den er einnimmt. Kein Körper kann existiren, ohne einen bestimmten Ort einzunehmen. Wir räumen also dem Körper, so bald wir ihn als wirklich denken, einen gewissen Ort ein. Da aber, so lange wir ihn nicht in Verbindung mit andern Körpern denken, jeder Ort für ihn gleichgültig ist, so sind wir gleichsam unschlüssig, welchen Ort wir ihm anweisen sollen; wir versehen ihn in Gedanken bald in diesen bald in jenen Ort, oder rücken ihn aus einem Ort in den andern: und so entsteht der erste Begriff der Bewegung. Weil alle Oerter für den Körper gleichgültig sind, so können wir ihn uns so gut in Bewegung als in Ruhe vorstellen; beyde Fälle aber begreifen eine unendliche Menge anderer unter sich. Die Oerter der Ruhe sowol als die Richtungen und Geschwindigkeiten der Bewegung sind unzählig; und doch kann dem Körper nur eine von allen diesen Bestimmungen wirklich zukommen. Der menschliche Verstand schaudert vor diesem unabsehbaren Labyrinth: jener Trieb, von allem die Ursache zu ergünden, lehrt ihn, die Bestimmung der Ruhe oder Bewegung des Körpers in einem vorübergehenden Zustande desselben suchen; aber er sieht sich immer gleich entfernt vom Ausgange dieses Labyrinths, und findet nichts im Körper, das ihn zu einem Zustande mehr als zum andern bestimmte: bis er endlich auch hier auf einen Anfang seines Daseyns geführt wird, auch hier die Allmacht verehren lernt, die ihn schuf, aber ihn nicht erschaffen konnte, ohne zugleich die Art seines Daseyns, seinen Ort, seine Ruhe oder seine Bewegung zu bestimmen. Er kann sich nun keinen Körper denken, ohne zugleich die Hand zu sehn, die ihn entweder in irgend einem Theile des absoluten Raums ruhig niederlegte, oder ihn mit abgemessener Geschwindigkeit nach bestimmter Richtung in die Schöpfung schleuderte. Hiedurch ist zugleich der Zustand des Körpers, so lange wir ihn uns ausser aller Verbindung mit andern Körpern denken, für die Ewigkeit bestimmt. Nun ist nichts, was seine Ruhe stören, oder die Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung ändern könnte. Wir können uns keinen Körper anders denken, als in Ruhe oder in bestimmter Bewegung, und zwar, so lange er in seiner ersten Bestimmung von äussern Ursachen nicht gestört wird, nicht anders als in ewiger Ruhe, oder in ununterbrochener, d. i. gleichförmiger und geradliniger Bewegung. Beide Fälle sind für den Körper gleich möglich, seiner Natur gleich gemäß: ob er also ruhe oder sich bewege, ob er nach dieser oder jener Richtung, mit dieser oder jener Geschwindigkeit fortgehe, davon können wir den Grund nur in irgend einer äussern Ursache finden, die ihn in diese Ruhe oder in diese Bewegung versetzte. In jedem Falle aber wird er diese ihm mitgetheilte Ruhe oder Bewegung, so lange keine neue äussere Ursache in ihn wirkt, in Ewigkeit fortsetzen, ohne weder seine Richtung noch Geschwindigkeit zu ändern (*).

So

(*) Manchem wird es schwer, sich von dem letzten Theile dieses Satzes zu überzeugen; allein wer ihn leugnet, der muß zugleich die Möglichkeit aller gleichförmigen Bewegung leugnen. Der Körper, dem beim Anfange seines Daseyns eine bestimmte Bewegung mitgetheilt war, muß diese Bewegung wenigstens eine Zeit lang fortsetzen, weil er sonst in der That ruhte, da sich keine Bewegung ohne Dauer, sie sey so klein man will, denken läßt. Alsdenn aber kann er sie eben so wol ewig fortsetzen, und es läßt sich auf keine Art begreifen, warum er sie nach einiger Zeit verlieren sollte, wenn keine äussern Ursachen in ihn wirken.

So ungefähr mußte man auf die dritte wesentliche Eigenschaft der Körper kommen, die unter dem Namen der Trägheit bekannt ist, und zuweilen nicht sehr schieflüch Kraft der Trägheit (*vis inertiae*) genannt wird. Auf ihr beruhen alle Lehren der Mechanik und Dynamik. Alles, selbst unsre Vorstellung von wirkenden Kräften, kommt am Ende auf diesen Grundsatz der Trägheit zurück, der mit andern Worten so viel sagen will: „Jeder Zustand des Körpers, es sey Ruhe oder Bewegung, und jede Aenderung dieses Zustandes, es sey aus Ruhe in Bewegung oder umgekehrt, es sey Aenderung der Richtung oder der Geschwindigkeit, kann ihren Grund nicht im Körper selbst haben, weil für ihn jeder Zustand gleichgültig ist; sondern bloß in irgend einer äußern Ursache, die in ihn gewirkt hat. Jede neue Aenderung setzt eine neue Einwirkung voraus: eine beständige Aenderung also eine beständig fortdauernde, oder in jedem Augenblick wiederholte Einwirkung.“ Und so entsteht der Begriff der Kräfte, der nichts anders voraussetzt, als eine in jedem Augenblick aufs neue modifizierte Anwendung des Grundsatzes der Trägheit. Sobald daher ein Körper seine Richtung oder Geschwindigkeit ändert, so muß er in dem Augenblick einen neuen Stoß erhalten haben; und wenn diese Aenderungen unaufhörlich nach dem Gesetze der Stetigkeit geschieht, z. B. wenn er sich in einer krummen Linie bewegt, so müssen nothwendig Kräfte ebenfalls ununterbrochen nach dem Gesetze der Stetigkeit auf ihn wirken, die ihn zu dieser Aenderung in jedem Augenblick zwingen, und das Gesetz dieser Aenderung wird dienen, jene Kräfte völlig zu bestimmen.

§. 3. Jeder neue dem Körper gegebne Stoß theilt ihm also eine neue Geschwindigkeit und Richtung mit, die er nach eben dem Grundsatz beibehalten wird, so lange keine neue Ursache von außen in ihn wirkt: seine folgende Bewegung wird nicht minder gleichförmig und geradlinig seyn, aber schneller oder langsamer, und nach einer andern Richtung, wenn der Stoß eine andre Richtung hat. Sein Weg wird bei jedem neuen Stoße gebrochen, folglich eine eigentliche gebrochene Linie, wenn die Stöße einander nach endlichen Zwischenzeiten folgen; eine krumme Linie aber, wenn die Intervalle unendlich klein sind, oder in jedem Augenblick ein neuer Stoß erfolgt. Ein solcher nach dem Gesetze der Kontinuität beständig fortgesetzter, oder ununterbrochener Stoß ist das, was man in der Dynamik Kraft nennt. Die krumme Linie, die ein Körper von Kräften getrieben durchläuft, folgt bloß dem Gesetze der Trägheit, das aber hier in jedem Augenblick auf eine andre Art angewandt werden muß. Eben dis gilt von der Geschwindigkeit des Körpers. Jede ihrer Aenderungen ist entweder eine endliche, oder eine nach dem Gesetze der Kontinuität verschwindende Größe, d. h. die Geschwindigkeit läßt sich durch eine gebrochene oder krumme Linie vorstellen, nachdem die Zwischenzeiten der Stöße endlich oder unendlich klein sind, nachdem die Gleichförmigkeit der Bewegung durch eigentliche so genannte Stöße, oder durch Kräfte unterbrochen wird. Beide Fälle aber sind Folgen eines und desselben Grundsatzes der Trägheit. Gerade auf dieselbe Art stellt man sich in der Geometrie das Entstehen krummer Linien durch den Weg vor, den ein Punkt durchläuft. Der Satz, daß die krumme Linie in jedem Punkt die Richtung der Tangente hat, ist nichts andres als der Grundsatz der Trägheit. Und daß man auf gleiche Art die Linien betrachten kann, die ein durch Kräfte getriebener Körper beschreibt, daß Kräfte nichts anders als unendlich oft wiederholte Stöße sind, so daß die

die Geschwindigkeit und Richtung des Körpers dem vereinigten Gesetze der Trägheit und Continuität folgt: darauf eben beruhen alle mechanischen Grundsätze und Elementar-Formeln für die beschleunigte Bewegung.

§. 4. Vermittelt dieser Darstellung wird man sich die verschiedenen Gattungen der Kräfte am deutlichsten erklären können. Die unzähligen Stöße, aus denen eine Kraft besteht, sind entweder alle gleich stark, oder sie werden stärker und schwächer: und so entstehen beständige und veränderliche Kräfte. Auch nach den Richtungen dieser Stöße lassen sich die Kräfte in mancherley Gattungen einteilen, wovon die wichtigste diejenigen Kräfte unter sich begreift, deren Richtung immer nach einem Punkt geht, den man den Mittelpunkt der Kräfte nennt. Diese Centralkräfte sind der Grund der ganzen physischen Astronomie, und es ist durchaus nothwendig, sich von ihnen einen vollkommen deutlichen Begriff zu machen. Unstreitig war es die Schwere oder der Druck und Fall schwerer Körper, was zuerst zur Kenntniss dieser neuen Kräfte führte. Wenn wir sehen, daß alle Körper an jedem Orte der Erde, sobald sie nicht aufgehalten werden, den nächsten Weg zur Erdoberfläche durchlaufen, also senkrecht auf die Erdoberfläche herabfallen; wenn wir den Druck fühlen, den sie auf unsre ihnen widerstehende Hand nach dieser Richtung äussern, und uns dabei die Erde als eine Kugel denken: so begreifen wir, daß alle Richtungen fallender Körper sich im Mittelpunkt der Erde begegnen, daß also die Schwere eine Kraft ist, die beständig an jedem Orte nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet ist, d. h. eine Centralkraft. Diese Kraft ist ein Phänomen, dessen physische Erklärung wahrscheinlich von geringem Nutzen seyn würde. Genug, wir wissen, es gibt eine Kraft, die alle Körper ohne Unterschied nach dem Erd-Mittelpunkt treibt, gleich viel ob stößt oder zieht. Jeder mag unter beiden Vorstellungsarten diejenige wählen, die ihm die deutlichste scheint; beide aber, Zug oder Stoß, sind keine Erklärungen, sondern der Kürze wegen gewählte Ausdrücke. Statt sich in unnütze Grübeleien über die eigentliche Beschaffenheit, oder den Grund dieser Kraft einzulassen, statt eine neue Kraft, einen neuen Stoß zu erdenken, der das Phänomen der Centralkraft hervorbringt, thut man wol besser, den Gesetzen nachzuspüren, nach denen sie wirkt, um dieselben anwenden zu können, wenn sich vielleicht noch andre Centralkräfte in der Natur finden sollten.

§. 5. Wenn es erlaubt ist, sich die Centralkraft, zu mehrerer Deutlichkeit, als eine Anziehung vorzustellen, so wird der anziehende Körper oder der Mittelpunkt der Kräfte, und der angezogene Körper das seyn, was man in der eigentlichen Mechanik Kraft und Last nennt: bey der Schwere z. B. ist dann der fallende Körper die Last, die Erde oder ihr Mittelpunkt die Kraft. Hier zeigt sich aber eine sehr große Verschiedenheit der Kräfte, oder vielmehr Zweideutigkeit des Worts Kraft. Die meisten uns bekannten Kräfte haben ihre bestimmte Größe; die Wirkung, die sie äussern, kann ein bestimmtes Maas nicht überschreiten. Daraus solat dann natürlich, daß eine größere Last, eine größere Masse von ihnen langsamer bewegt wird, als die geringere. Um also die der Last mitgetheilte Geschwindigkeit oder ihre Beschleunigung zu kennen, mus man nicht allein die Kraft, sondern auch die Last oder ihre Masse kennen. Um diese Masse mit einer gewissen Geschwindigkeit fortzubringen, mus jeder, auch der geringste ihrer

ihrer Theile mit dieser Geschwindigkeit bewegt werden. Da nun die Größe der Kraft bestimmt ist, so mus sie sich über die ganze Masse der Last gleichmäßig vertheilen, die Kraft mus in eben so viele Theile getheilt werden, als man sich in der Last vorstellt, oder als die Last von denjenigen Theilen enthält, die man zur Einheit bey dieser Art von Vergleichen angenommen hat. Da nun ihre Wirkung auf jedes Theilchen der Last, wenn diese nicht von einander getrennt werden sollen, gleich groß seyn mus, so erhellt, daß ihre Wirkung auf die ganze Last, ihre Beschleunigung desto geringer wird, je mehrere solcher Theile die Last enthält, oder je größer ihre Masse ist: mit andern Worten, um die Wirkung zu finden, die die Kraft auf eine bestimmte Last äußert, mus man jene durch die Masse dieser dividiren, d. h. die Beschleunigung gleicher Kräfte auf verschiedene Massen ist im verkehrten Verhältnis der Massen. Wenn also die Kraft P , die bewegte Masse M heißt, so kann man ihre Beschleunigung durch $\frac{P}{M}$ ausdrücken. Man nennt in diesem Verstande P die absolute Größe der Kraft, und $\frac{P}{M}$ das Maas der Beschleunigung oder die beschleunigende Kraft in Rücksicht auf die Masse M .

§. 6. Jede Wirkung einer Kraft besteht in der Bewegung, die sie hervorbringt oder hervorzubringen strebt, wenn die wirkliche Bewegung durch ein Hindernis aufgehalten wird, in welchem Falle sich dieses Bestreben durch einen Druck äußert. Dieser Druck, durch den sich das Wesen der Kräfte unsern Sinnen am unmittelbarsten verständlich macht, und der uns von dem, was eigentlich Kraft ist, den einfachsten Begriff gibt, den wir wahrscheinlich je erlangen können — dieser Druck ist die absolute Größe der Kraft, und niemand wird Bedenken tragen, eine Kraft doppelt so groß zu nennen, die einen zweymal so starken Druck äußert, als eine andre: er ist also das, was vorher P hieß. Dieser Druck ist immer derselbe, so lange die Kraft sich nicht ändert, die gedrückte Masse mag so klein oder groß seyn als man will; allein bey der größern Masse wird der Druck auf mehrere Theile gleichmäßig vertheilt, wenn eine Bewegung des Ganzen erfolgen soll: jeder einzelne Theil leidet also einen desto schwächern Druck, je mehr Theile sind, und dieser schwächere Druck, der nichts anders als das Bestreben Bewegung hervorzubringen ist, wird jeden einzelnen Theil, mithin auch die ganze Masse, um eben so viel langsamer bewegen, oder die Beschleunigung wird desto geringer, folglich dem Bruch $\frac{P}{M}$ proportional seyn. Dieser Druck ist daher das Maas, vermittelst dessen verschiedene Kräfte mit einander verglichen werden können. Da es aber sehr schwer ist, diesen Druck selbst auf ein bestimmtes Maas zu bringen, so mus man sich dazu einer andern Wirkung der Kräfte bedienen, die eine unmittelbare Folge jenes Drucks ist, aber einen Sinn trifft, dessen Empfindungen sich leichter messen lassen, als die des Gefühls. Da nun jener Druck nichts anders ist, als die durch ein Hindernis gehemmte, und eben dadurch fühlbar gemachte Wirkung der Kraft, so folgt, daß die nach weggeräumtem Hindernis erfolgte Wirkung jenem Druck genau proportional seyn mus, und demnach statt desselben zum Maas der Kräfte gebraucht werden kann. Die Wirkung aber, die nach gehobenem Hindernis erfolgt, ist die Bewegung der Masse, deren Größe durch den Weg bestimmt wird, den sie in einer gewissen

III. Theil.

B

wissen

wissen Zeit, oder wenn man will, im ersten Augenblick durchläuft. Zwey Kräfte, die gleiche Massen in einer gewissen Zeit durch gleiche Räume treiben, sind gleich, weil ihre Wirkungen gleich sind, folglich auch dann gleich seyn werden, wenn sie durch ein Hindernis gehemmt werden oder bloß drücken. Eine Kraft, die eben die Masse durch den doppelten Raum treibt, wird zweymal so groß seyn: denn man kann sie ansehen als aus zwey gleichen Kräften bestehend, deren jede die Masse durch den einfachen Raum treibt, also der vorigen Kraft gleich ist. Man sieht leicht, daß hieraus der allgemeine Satz folgt: „die Kräfte verhalten sich wie die Räume, durch die sie gleiche Massen in gleichen Zeiten treiben, d. i. wie die Beschleunigung.“ Wenn also diese Räume G, F , die Kräfte P, Π heißen, so ist $P: \Pi = G: F$, wo G, F , die Beschleunigungen gleicher Massen M sind. Wenn aber G, γ , die Räume sind, durch welche die Massen M, m , von den Kräften P, Π , in gleichen Zeiten getrieben werden, so wird $F: \gamma = \frac{\Pi}{M} : \frac{P}{m}$ (§. 5.) $= m: M$, und $G: F = P: \Pi$, mithin $G: \gamma = P m: \Pi M$ und $P: \Pi = \frac{G}{\gamma} : \frac{m}{M} = G M: \gamma m$.

§. 7. Die Beschleunigung jeder Kraft von bestimmter Größe hängt demnach von der Größe der beschleunigten Masse ab; ganz anders aber verhält es sich mit der Schwere. Jene Kräfte, die man die eigentlichen mechanischen Kräfte nennen könnte, sind immer nur an einem Theile der Last unmittelbar angebracht, und würden auch nur diesen Theil allein bewegen, wenn nicht die Kohäsion der übrigen Theile widerstände, und durch diesen Widerstand verursachte, daß die Kraft über die ganze Last vertheilt wird. Die Schwere aber durchdringt das Innerste aller Körper, sie greift jedes Theilchen der Masse unmittelbar und mit gleicher Stärke an, und die Kohäsion der Theile hat auf ihre Wirkung nicht den geringsten Einfluss. Zwey schwere Massen fallen gleich schnell, sie mögen getrennt seyn, oder einen Körper bilden. Hieraus folgt dann natürlich, daß der Druck, den ein ganzer Körper von der Schwere leidet, und den man sein Gewicht nennt, die Summe der unzähligen Pressungen ist, die alle seine Theile auch von ihm getrennt leiden würden, daß folglich der Druck P , den jede Masse M von der Schwere leidet, dieser Masse selbst proportional, oder $P = n M$ ist. Alle diese Sätze sind sehr bekannt, selbst dem, der nie darüber nachgedacht hat. Zwey gleiche Massen, z. B. zwey bleyerne Kugeln, drücken unsre Hand oder die Waagschale doppelt so stark, als eine von ihnen, und der Druck bleibt derselbe, wenn man beyde in eine zusammen schmelzt (*). Da also der Erfahrung nach, alle gleiche Theilchen Masse mit gleicher Stärke gedrückt werden, sie mögen für sich allein, oder mit andern verbunden einen Körper ausmachen — oder da der Druck den Massen proportional ist, so erhellt, daß alle Körper von der Schwere gleich beschleunigt werden, sie mögen groß oder klein, spezifisch schwer oder leicht seyn. Da nämlich $P = n M$ ist, so bleibt die Beschleunigung jedes Elements der Masse, $\frac{P}{M} = n$ immer eine beständige Größe. Auch dieser Satz

ist

(*) Auf diesem Grundsatz beruht der Handel mit allen Waaren, die nach dem Gewichte bezahlt werden.

ist aus der Erfahrung hinlänglich bekannt, und eine nothwendige Folge aus dem Wesen der Centrakraft überhaupt. Man kann sich dieselbe nicht anders vorstellen, als daß sie um den Centrakörper einen sphärischen Raum ausfüllt, der seinen Wirkungskreis bestimmt. Alles, was in diesen Wirkungskreis geräth, wird nach dem Mittelpunkt von diesen Kräften gleich konvergirenden Strahlen hingerissen. Dieser Strahlen sind nach dem Gesetze der Continuität unzählige; sie sind immer da, und äußern ihre Thätigkeit, so bald sie eine Masse antreffen; sie werden zwiefach thätig, wenn sie auf die doppelte Masse stoßen, &c. Niemand kann hier daran denken, ihre Kraft durch die Masse theilen zu wollen: ein Körper verliert nicht an Gewicht, wenn ein anderer sich ihm nähert; die Schwere auf dem Erdboden nimt nicht ab, wenn sich mehr Masse auf ihrer Oberfläche anhäuft. Es erhellt hieraus, daß der den Massen proportionale Druck, oder die beständige Größe der Beschleunigung, nicht eine der Schwere eigenthümliche, sondern eine wesentliche, allgemeine Eigenschaft aller Centrakräfte ist. Bey allen ist $\frac{P}{M} = n$ eine beständige Größe; und da es hier bloß auf Verhältnisse ankommt, so kann man $n = 1$ setzen, woben man sich aber wol hüten mus, P und M für einander zu halten. Man kann für einen bestimmten Fall $P = M$, oder das Gewicht der Masse gleich setzen, und hat dann zugleich das Maas der Kräfte oder die Einheit ein für allemal bestimmt. Wenn dieselbe Masse M weiter von der Erde entfernt, oder in den Wirkungskreis eines andern Planeten gebracht würde, so würde sich P ändern, aber nicht M ; $\frac{P}{M}$ würde auch hier unveränderlich seyn, wie groß oder klein auch M seyn mag, aber $\frac{P}{M} = n$ würde nun ganz etwas anders bedeuten als vorhin. Da uns indessen die Schwere der Körper an der Erdoberfläche am besten bekannt ist, so ist es natürlich, das allgemeine Maas der Kräfte so zu bestimmen, daß man $P = M$ oder $\frac{P}{M} = 1$ setzt, wenn P die Schwere an der Erdoberfläche ist: und dis bedeutet nichts weiter, als daß die beschleunigende Kraft der Schwere an der Erdoberfläche, für die Einheit oder das Maas aller übrigen beschleunigenden Kräfte angenommen wird. Da nun alle schwere Körper in einer gewissen Zeit durch gleiche Räume fallen, so kann man diesen Raum, der einen beständigen Werth hat, so bald die Zeit bestimmt ist, als das Maas der Beschleunigung selbst gebrauchen, wodurch dann alles auf bekannte Maasse gebracht wird. Gewöhnlich nimt man die Zeit einer Sekunde an, und nennt den Raum g , durch den die schweren Körper auf der Erdoberfläche in einer Sekunde frey fallen, d. h. wenn sie keinem Widerstande der Luft, &c. ausgesetzt sind. Man hat durch viele Versuche gefunden, daß $g = 15, 625$ Rheinländische Fuß ist; und dis ist es, was man die Beschleunigung der Schwere an der Erdoberfläche nennt, die der beschleunigenden Kraft selbst proportional ist (§. 6.). Wenn also Q die absolute Kraft eines andern Central-Körpers, oder der Erde in einer andern Entfernung ist, N eine andre Masse, und h der Raum, durch den sie in einer Sekunde von der Kraft Q getrieben wird, so ist $g : h = \frac{P}{M} : \frac{Q}{N}$. Es ist aber $\frac{P}{M} = 1$ und $\frac{Q}{N} = n$ eine beständige Größe, also hat man $g : h = 1 : n$, oder $n = \frac{h}{g}$ und $h = ng$.

§. 8. Es ist vielleicht unmöglich, daß es der scharfsinnigsten Metaphysik je gelingen wird, den Begriff Kraft vollkommen zu analysiren. Wo unsre Begriffe von Kräften stehn blieben, das ist eigentlich nur eine unmittelbare Wirkung derselben, ein fühlbarer Druck, oder eine sichtbare Bewegung: und wir haben gesehen, wie diese Wirkung dient, die Kräfte mit einander zu vergleichen oder zu messen. Allein auch diese Wirkung hat noch etwas unbestimmtes, und eben daher entsteht die Vieldeutigkeit des Worts Kraft. Zudem man die Kraft von der Last unterscheidet, stellt man sich doch die Kraft als die Eigenschaft einer von der Last verschiedenen Substanz vor: man denkt sich z. B. die Kraft der Schwere als eine der Erde wesentliche Eigenschaft, welche die Erde besitzen würde, wenn gleich keine schweren Körper außer ihr vorhanden wären, auf die sie sich äußern könnte. Man denkt sich also die Kraft als etwas von ihrer Wirkung, von dem Druck, oder der Bewegung die sie hervorbringt, ganz verschiedenes. Diese abstrakte Kraft, die man sich ohne Beziehung auf irgend einen andern Körper denkt, ist ein bloßer metaphysischer Begriff, der aber bey den mathematischen immer stillschweigend zum Grunde gelegt wird. Man könnte die bestimmte Größe dieser Kraft die absolute Kraft nennen; da sie aber nicht in die Sinne fällt, folglich nicht gemessen werden kann, so ist sie kein Gegenstand der Mathematik. Was bey den Kräften gemessen werden kann, sind ihre sinnlichen Wirkungen, und diese setzen andre Körper außer ihnen voraus: der Zusammenhang zwischen der Kraft und Last macht die Vergleichung und Messung möglich. Allein welche Wirkung ist hierzu die bequemste, und wie soll diese Wirkung selbst gemessen werden? Wir haben gesehen, wie es vermittelst des Raums geschieht, durch den die Körper in einer gewissen Zeit, z. B. einer Sekunde, getrieben werden, d. i. durch die Beschleunigung; allein dis ist noch nicht bestimmt genug. Zwar ist bey Centrakräften diese Beschleunigung von der Größe der bewegten Masse unabhängig; es läßt sich aber leicht voraus sehn, daß sie in größeren Entfernungen vom Centrakörper oder vom eigentlichen Sitze der Kraft, so wie alle Wirkungen, die sich durch einen sphärischen Raum ausbreiten, abnehmen werde: die beschleunigende Größe der Centrakräfte setzt daher eine bestimmte Entfernung vom Mittelpunkt voraus. Bey andern Kräften hängt die Beschleunigung von der bewegten Masse ab (§. 5.), ist also eine völlig unbestimmte Wirkung. Wenn man die absolute Größe einer solchen bestimmten mechanischen Kraft P nennt, die bewegte Masse M , und die beschleunigende Kraft, die also bloß für diese Masse gilt, p , so ist $\frac{P}{M} = p$, in welchem Ausdruck M, p , veränderlich, P aber eine beständige Größe ist. Nennt man ferner die Beschleunigung, oder den Raum durch den M in einer Sekunde von P getrieben wird, h , den Raum aber, durch den M und jeder andre schwere Körper von der Schwere getrieben wird, g , und setzt die beschleunigende Kraft der Schwere $= 1$, so ist $p : 1 = h : g$ (§. 7.), also $h = pg = \frac{P}{M}g$ und $Mh = Pg$ eine beständige Größe, weil P und g beständig sind. Dieses beständige Produkt Mh ist eine Wirkung der Kraft P , wodurch diese vollkommen bestimmt wird, weil $P = \frac{Mh}{g}$ ist. Sie ist nicht allein dem durchlaufenen Raum h , sondern auch der durch

diesen

diesen Raum getriebenen Masse M , also der ganzen hervorgebrachten Bewegung proportional: denn es fällt in die Augen, daß das, was man die Größe der Bewegung nennt, im zusammengesetzten Verhältnis der Geschwindigkeit und der bewegten Masse ist. Die Kräfte dieser Gattung sind also dem Produkt der bewegten Masse in ihre Geschwindigkeit, oder der hervorgebrachten Bewegung proportional, und in so fern nennt man sie bewegende Kräfte, die hier von den absoluten Kräften nicht verschieden, oder vielmehr richtiger zu reden, ihnen proportional sind. Wenn man aber diese verschiedenen Benennungen auf die Centrakräfte anwendet, so äußert sich ein wesentlicher Unterschied. Hier ist P keine beständige Größe: die Größe der Bewegung Mh oder die bewegende Kraft ist hier also veränderlich und der Masse proportional; aber eben deswegen ist auch P hier nicht das, was man die absolute Größe der Centrakraft nennen kann. Es wird daher nicht überflüssig seyn zu zeigen, was die drey Benennungen, absolute, beschleunigende, und bewegende Kraft, bey Centrakräften sagen wollen; und es wird erlaubt seyn, es der Deutlichkeit wegen sogleich auf die Erde anzuwenden, und dabei als bekannt voraus zu setzen, daß die Schwere in größern Entfernungen von der Erde abnehme.

§. 9. Die Schwere der Körper, oder die Gewalt womit sie nach dem Mittelpunkt der Erde getrieben werden, kann man als eine Wirkung ansehen, die von einer anziehenden Kraft der Erde herrührt, so wie wir die Anziehung des Eisens einer anziehenden Kraft des Magnets zuschreiben, obgleich wir uns in beyden vielleicht irren. Dann aber können wir uns diese anziehende Kraft der Erde bloß für sich allein, ohne alle fremden von ihr angezogenen Körper denken: wir müssen dieser abstrakten Kraft eine bestimmte intensive Größe belegen, die vermehrt und vermindert werden kann, ohne noch an ihre Beziehung oder Wirkung auf fremde Körper zu denken, so wie wir von der innern Güte des Magnets, von seiner größern oder geringeren Stärke reden, ohne an eine bestimmte Masse Eisen, die in einer bestimmten Entfernung von ihm angezogen wird, zu denken. Diese Größe der Kraft heißt die absolute. Jede individuelle Wirkung aber, die sie hervorbringt, wird nicht allein von dem fremden Körper, auf den sie wirkt, sondern auch von den Umständen abhängen, in denen er sich gegen den eigentlichen Sitz der absoluten Kraft befindet. Durch das erstere wird die Größe der bewegenden, durch das letztere die der beschleunigenden Kraft bestimmt. Es ist unleugbar, daß die anziehende Kraft der Erde verstärkt werden könnte, wenn z. B. die Materie, aus der sie besteht, vermehrt würde, oder daß derselbe Körper in gleicher Entfernung stärker oder schwächer angezogen werden würde, wenn er auf einen andern Weltkörper versetzt würde, oder wenn er zu einer andern Welt gehörte, die zwar nach denselben Gesetzen, aber nach einem andern Maasstabe aufgeführt wäre. Diese intensive Größe gehört, wenn man so reden darf, nicht zu den natürlichen, sondern zu den positiven Gesetzen der Natur; sie ist eine von den absoluten, willkürlichen, oder gegebenen Größen, auf die man bey allen mathematischen Aufgaben am Ende zurück kommt, und die, wenn die Aufgabe aufgelöst ist, durch Beobachtungen bestimmt werden müssen, in die Auflösung selbst aber keinen Einfluss haben. Keine Schlüsse a priori können sie uns entdecken: hier hört die natürliche Philosophie auf, und die geoffenbarte fängt an: hier müssen wir das geschriebene Gesetzbuch der Natur aufschlagen, und den Sinnen glauben, wo die Vernunft

Vernunft zu schwach ist. Wenn wir gleich völlig überzeugt sind von der Nothwendigkeit der Gesetze der Bewegung, des Verhältnisses, nach dem die Centralkräfte in größern Entfernungen abnehmen, *sc.* wenn wir einzusehn glauben, daß keine Welt ohne diese Gesetze bestehen könnte: so können wir doch auf der andern Seite nicht zweifeln, daß eine Welt eben so gut möglich wäre, in der eben die Gesetze, aber eine andre Bestimmung der absoluten Größen, oder ein anderer Maasstab befolgt wäre; in der *z. B.* eben die Ordnung der himmlischen Körper beobachtet, aber ihre Größe, Entfernung, *sc.* in einem beständigen Verhältniß geändert wäre; in der die Schwere zwar im Verhältniß der Quadrate der Entfernungen abnähme, aber ein schwerer Körper auf der Erdoberfläche in einer Sekunde nicht 15, 625 Fuß, sondern *z. B.* 30 Fuß fiel, *sc.* Allein der Baumeister der Welt hat bey der Errichtung seines Gebäudes nun einmal jenen Maasstab gewählt: wir müssen glauben, daß es der beste ist, Er wird wissen warum. Diese intensive, oder — weil wir keinen Grund davon einsehn können — diese willkürliche Größe der Schwere, die so bestimmt ist, daß jeder Körper auf der Oberfläche einer Kugel von der Dichtigkeit und Größe der Erde, in einer Sekunde nicht mehr und nicht weniger als 15,625 Fuß fällt: diese ist es, was man die absolute Größe der Centralkraft nennt (*vis centripetae quantitas absoluta*).

Diese Kraft treibt alle Körper, sie mögen groß oder klein seyn, in einer Sekunde durch einen Raum, oder gibt ihnen eine Beschleunigung von 15, 625 Fuß, aber nur dann, wenn sie sich nahe an der Erdoberfläche befinden: in größern Entfernungen nimmt diese Beschleunigung ab, und das Verhältniß, nach dem sie abnimmt, ist das große von Newton entdeckte Natur-Gesetz. Wie sich also die den Körpern mitgetheilte Geschwindigkeit in verschiedenen Entfernungen ändert, das ist nicht mehr willkürlich, sondern ein Naturgesetz, das deswegen nicht weniger nothwendig ist, weil wir den Grund davon nicht einsehn; und die Beschleunigung in einer bestimmten Entfernung hängt nicht allein von der absoluten Centralkraft, sondern von der Entfernung nach jenem Gesetze ab. Sie ist die durch dieses Gesetz und diese Entfernung modifizierte Wirkung der absoluten Kraft, welche, obgleich an sich selbst beständig, doch nach den Umständen verschiedene Wirkungen hervorbringt. Wenn nun ein Körper in der doppelten Entfernung eine viermal geringere Beschleunigung erhält, und man jede Ursache der Bewegung eine Kraft nennen will, so ist es natürlich, diese viermal geringere Wirkung einer vierfach schwächern Kraft zuzuschreiben, wiewol diese Vergleichung nicht in Absicht auf jene absolute Kraft Statt findet, weil die äußern Umstände nicht mehr dieselben sind. Diese neue, oder aus einem neuen Gesichtspunkt betrachtete Centralkraft, ist also der Beschleunigung oder Geschwindigkeit der Körper proportional, und heißt daher die beschleunigende Größe der Centralkraft (*quantitas acceleratrix*). Sie hängt von der absoluten Größe und der Entfernung ab, und ist das Maas derjenigen individuellen Kraft, die unmittelbar auf jeden Körper unter diesen oder jenen Umständen wirkt.

Jede Beschleunigung setzt eine Masse in Bewegung, und bringt desto mehr Bewegung, eine desto größere Wirkung hervor, je größer die Geschwindigkeit und die Masse ist. Die Größe der Kraft, die nach dem Maasse dieser vollständigen Wirkung bestimmt wird, heißt die bewegende Größe der Centralkraft (*quantitas metrix*), die folglich dem Maasse

Maaße der Bewegung, d. i. dem Produkt der Geschwindigkeit in die bewegte Masse proportional ist. Sie ist das, was man das Gewicht eines schweren Körpers nennt; so lange er ruht, oder die Festigkeit seines Stoßes, wenn er fällt. Es ist gleichsam die vom Centralkörper in den bewegten Körper übergegangene Kraft: denn auch den Druck schwerer Körper, oder ihr Gewicht, sieht man nun als eine ihnen eigne Kraft an, weil sie neue Bewegung hervorzubringen vermag. Diese Kraft hat also ihren Sitz in dem bewegten Körper, sie ist die Gewalt, mit der er sich dem Centralkörper zu nähern strebt, und das Maaß der Wirkung, die er auf andre Körper äußert. Die absolute Kraft hat ihren Sitz im Centralkörper, und ist die Gewalt, mit der er alle Körper an sich zu reißen sucht. Die beschleunigende Kraft ist in dem Zwischenraume beider Körper, oder vielmehr in dem ganzen sphärischen Raum um den Centralkörper verbreitet; sie ist ein Strom, der alle in ihn gerathende Körper mit sich fortreißt. (*)

§. 10. So bald man annimmt, daß die Centrakraft eine allgemeine Eigenschaft jeder Materie sey, so folgt, daß ihre absolute Größe der Masse des Centralkörpers proportional sey, weil sie aus den Kräften aller einzelnen Theile besteht. Daß die Beschleunigung der Centrakraft in größern Entfernungen abnehme, und zwar im doppelten Verhältnis der Entfernungen, wird unten bewiesen werden. Dis nun vorausgesetzt, wenn man die Masse des Centralkörpers = A , des angezogenen = M , beider Entfernung = r setzt, so kann man die absolute Größe durch A , die beschleunigende

durch $\frac{A}{rr}$, und die bewegende durch $\frac{AM}{rr}$ ausdrücken; und diese Ausdrücke dienen, verschiedene Centrakräfte mit einander zu vergleichen, da dann alle diese Größen in demselben Maaße ausgedrückt werden müssen. Wenn z. B. die Sonne 300000 mal so viel Masse hat als die Erde, mithin ihre absolute Kraft eben so viel mal größer ist; wenn ferner der Halbmesser der Sonne 113 mal so groß ist als der Erdhalbmesser, folglich ein Körper an ihrer Oberfläche 113 mal weiter von ihrem Mittelpunkt entfernt ist, als ein Körper an der Erdoberfläche vom Mittelpunkt der Erde: so ist, wenn man die beschleunigenden Kräfte der Erde und Sonne auf ihrer Oberfläche vergleichen will, $A = 300000$ und $r = 113$, also die beschleunigende Kraft der Sonne auf ihrer Oberfläche = $\frac{A}{rr}$ oder $23\frac{1}{2}$ mal so groß als die auf der Erde. Schwere Körper auf der Sonne fallen demnach in einer Sekunde durch $23\frac{1}{2} g = 367$ Rheinländische Fuß, und derselbe Körper wiegt oder drückt auf der Sonne $23\frac{1}{2}$ mal so stark als auf der Erde. Hierdurch ist es nun leicht, alle Centrakräfte auf bekannte Maaße zu bringen. Wenn nämlich die Masse der Erde = T , ihr Halbmesser = a gesetzt wird, so ist der Raum h , durch den jeder Körper von der Centrakraft eines Weltkörpers, dessen Masse A ist, in der Entfernung r von seinem Mittelpunkt in einer Sekunde getrieben wird, = $\frac{A a a}{T r r} g$ Rheinl.

(*) S. Newtoni Phil. Nat. Princ. Math. Lib. I. Defin. 6. 7. 8.

Rheinl. Fuß, oder wenn r in Erdhalbmessern, und A in Theilen der Erdmasse ausgedrückt ist, $h = \frac{Ag}{rr}$. Da man nun weiß, wie weit jeder Körper von dieser Kraft in einer Sekunde getrieben wird, so findet man diesen Raum für jede andre Zeit, und berechnet daraus die ganze Bewegung des Körpers nach den allgemeinen Gesetzen der Bewegung. Es ist nicht einmal nöthig, die Masse A zu kennen: man kann statt $\frac{A}{T}$ das Verhältniß der absoluten Kräfte, oder der beschleunigenden in gleichen Entfernungen setzen. Immer ist $\frac{A}{T}$ eine beständige, wiewol noch unbekannte Größe, die sich in jedem Falle leicht durch Beobachtungen bestimmen läßt. In den meisten astronomischen Aufgaben sucht man bloß die Bewegung eines oder mehrerer Körper um einen gemeinschaftlichen Centralkörper. Alsdenn hängen, wie man leicht sieht, die verschiedenen Bewegungen bloß vom Verhältniß der beschleunigenden Kräfte in verschiedenen Entfernungen ab: da also A immer denselben Werth behält, so fällt es ganz aus der Rechnung weg. Ueberhaupt kann hier nur die Rede von den beschleunigenden Kräften seyn; die absoluten Kräfte kommen bloß da in Betracht, wo Bewegungen um verschiedene Centralkörper verallgemeinert werden sollen; in diesem Falle aber läßt sich umgekehrt das Verhältniß der absoluten Kräfte aus den verschiedenen beobachteten Bewegungen bestimmen. Uebrigens folgt aus dem Ausdruck der bewegenden Kräfte oder der Größe der hervorgebrachten Bewegung $\frac{AM}{rr}$, der wichtige Satz, daß die Bewegung immer gleich bleibe, M mag um den Centralkörper A , oder A um M laufen, weil die Entfernung r dieselbe bleibt, und A, M bloß verwechselt werden. Die Geschwindigkeit aber wird in dem einen Falle durch $\frac{A}{rr}$, im andern durch $\frac{M}{rr}$ bestimmt.

Zweytes Capitel.

Allgemeine Gesetze der Bewegungen.

§. II. Die oben (§. 3. 4.) gegebene Erklärung, nach welcher jede Kraft als aus unzähligen nach dem Gesetze der Continuität widerholten Stößen bestehend angesehen wird, ist sehr geschickt, die Gesetze der Bewegung aus einer bloßen Anwendung des Gesetzes der Trägheit herzuleiten. Die Stärke eines Stoßes, oder seine Wirkung, läßt sich nicht schlechtthin durch den Raum bestimmen, den ein Körper nach erhaltenem Stoße durchläuft, da dieser Raum in jedem Falle unbestimmt ist, weil der Körper

Körper vermöge der Trägheit seine Bewegung ins unendliche fortsetzen würde. So bald aber die Zeit bestimmt ist, in der der Körper diesen Raum durchläuft, so ist die Stärke des Stoßes völlig bestimmt, vorausgesetzt, daß in dieser Zeit kein anderer Stoß hinzu gekommen sey. Der in einer gegebenen Zeit durchlaufene Raum, oder die dem Körper mitgetheilte Geschwindigkeit, gibt also das Maas des Stoßes an, und man sieht leicht, daß es gleichgültig sey, wie groß oder klein man diese Zeit annimmt, wenn man nur gewis ist, daß der darin durchlaufene Raum bloße Folge des Stoßes ist, dessen Stärke bestimmt werden soll. Hat der Körper mehrere Stöße nach einander erhalten, so deckt der zur Bestimmung des ersten Stoßes gebrauchte Raum keiner Zeit entsprechen, die größer ist als die Zeit zwischen dem ersten und zweyten Stoße: daher die Zeit, deren Vergleichung mit dem darin durchlaufenen Raume die mitgetheilte Geschwindigkeit, und dadurch die Stärke des Stoßes bestimmen soll, desto kleiner seyn mus, je schneller die Stöße auf einander folgen. Eben diese Vorsicht ist nothwendig, wenn der zu bestimmende Stoß nicht der erste ist: man mus alsdenn die Geschwindigkeit nach dem letztern Stoße von derjenigen absondern, die der Körper schon durch die vorhergehenden Stöße erhalten hatte: was dann überbleibt, also der Zuwachs der Geschwindigkeit, bestimmt den letztern Stoß allein; die ganze Geschwindigkeit aber, die der Körper nach dem letzten Stoße hat, bestimmt die Summe aller bis dahin erhaltenen Stöße. Wenn man also die verschiedenen Stöße, die der Körper erhält, $p, p', p'', \text{u.}$ und die Geschwindigkeit des Körpers in den Zeiten nach dem ersten, zweyten, und dritten Stoße, c, c', c'' , nennt, so ist $p = \lambda c, p + p' = \lambda c', p + p' + p'' = \lambda c'', \text{u.}$ wo λ eine beständige Größe ist, die durch die absoluten Maasse bestimmt wird, die man hiebey gebrauchen will. Hieraus folgt $p' = \lambda (c' - c), p'' = \lambda (c'' - c')$, oder wenn man die vom ersten Stoße mitgetheilte Geschwindigkeit c , jeden neuen Zuwachs aber $\Delta c, \Delta' c, \text{u.}$ nennt, so ist $p = \lambda c, p' = \lambda \Delta c, p'' = \lambda \Delta' c$, und $p + p' + p'' = \lambda (c + \Delta c + \Delta' c)$.

§. 12. Wenn nicht allein alle Stöße gleich stark sind, sondern auch in gleichen Zwischenzeiten auf einander folgen, so ist nicht allein die Anzahl der Stöße, sondern auch die Summe der von ihnen mitgetheilten Geschwindigkeiten der Zeit proportional. Wenn nämlich die Zeit zwischen jeden zwey Stößen $= \tau$ ist, so ist nach der Zeit $n\tau$ die Zahl der Stöße $= n$, und ihre vereinigte Stärke $p + p' + p'' + \dots = \lambda (c + \Delta c + \Delta' c + \dots)$, in welchen beyden Reihen n Glieder vorkommen. Da nun in diesem Falle $p = p' = p''$, also $p + p' + p'' + \dots = np$, und $c = \Delta c = \Delta' c$ ist, so wird die vereinigte Stärke aller Stöße $np = \lambda nc$, der Zeit $n\tau$ proportional, und nc ist die wahre Geschwindigkeit, die der Körper nach dem letzten Stoße hat. Ist also die ganze verlaufne Zeit $= t$, und die letzte Geschwindigkeit $= v$, so ist $t = n\tau$, also $n = \frac{t}{\tau}$, und $v = nc = \frac{np}{\lambda} = \frac{tp}{\lambda\tau}$, wo τ eine beständige, t aber eine veränderliche Größe ist, der die Geschwindigkeit v proportional ist. Nimt man an, daß die Stöße unendlich schnell auf einander folgen, so entsteht das was man Kraft nennt, und zwar eine beständige oder gleichförmig beschleunigende Kraft, wenn alle Stöße p gleich

gleich stark sind. Die Zeit τ zwischen zwey Stößen wird nun unendlich klein, bleibt sich aber beständig gleich: sie ist also auch hier so wie p eine beständige Größe, und die dem Körper von einer beständigen Kraft in der Zeit t mitgetheilte Geschwindigkeit $v = \frac{t p}{\lambda \tau}$ ist der Zeit t proportional. Dis ist der von Galiläus erfundene Satz, auf dem die ganze Theorie der beständigen Kräfte beruht, und der eine nothwendige Folge aus dem Gesetze der Stetigkeit oder aus dem Begriff der Kräfte ist, daß sie ununterbrochen wirken. Zwey Stöße sind gleich, wenn sie einem Körper gleiche Geschwindigkeit mittheilen, oder ihn in derselben Zeit durch gleiche Räume treiben: vereinigt also geben sie ihm die doppelte Geschwindigkeit, sie mögen zugleich oder nach einander erfolgen; und überhaupt ist die ganze Summe der mitgetheilten Geschwindigkeiten der Zahl der zugleich gegebenen oder auf einander folgenden gleichen Stöße proportional. Folgen nun diese gleichen Stöße immer unmittelbar auf einander, so ist auch nothwendig ihre Anzahl der Zeit proportional: folglich ist die von einer beständigen Kraft mitgetheilte Geschwindigkeit der Zeit proportional.

In dem Ausdruck $v = \frac{t p}{\lambda \tau}$ ist τ unendlich klein: da also t und λ eine bestimmte Größe haben, so würde v unendlich, wenn nicht zugleich p unendlich klein wäre; das heißt mit andern Worten, die von einer unendlichen Anzahl Stöße $\left(\frac{t}{\tau}\right)$ mitgetheilte Geschwindigkeit (v) müßte unendlich seyn, wenn nicht jeder einzelne Stoß (p) unendlich klein wäre, welches für sich klar ist. Hieraus folgt auch, weil $c = \frac{p}{\lambda}$ ist, daß die durch jeden Stoß, oder in jedem Augenblick mitgetheilte Geschwindigkeit unendlich klein ist. Die beständige Größe τ hängt so wie t von der willkürlichen Eintheilung der Zeit ab; p aber, oder die Stärke des Stoßes, bestimmt die beschleunigende Größe der Kraft, oder ist derselben proportional. Nennt man also die beschleunigende Kraft P , so kann man, weil $\frac{p}{\tau}$ eine endliche beständige Größe und P proportional ist, $v = \lambda P t$ setzen, wo λ noch bestimmt werden mus.

§. 13. Wenn die Kraft veränderlich ist, oder ungleichförmig beschleunigt, sich aber nicht plötzlich sondern nach und nach ändert, wie das Gesetz der Stetigkeit erfordert, so kann man annehmen, daß sie in jedem Augenblick eine bestimmte Größe hat, die sie durch eine unendlich kleine Zeit nicht ändert, d. h. man kann sie in unendlich kleinen Zeiten als eine beständige Kraft betrachten. Von ihr wird also alles, was (§. 12.) von den beständigen Kräften für jede Zeit t bewiesen ist, gelten, so lange t eine unendlich kleine Zeit bedeutet. Die Gleichung $v = \lambda P t$ heißt hier demnach so viel: die von einer veränderlichen Kraft in einer unendlich kleinen Zeit mitgetheilte Geschwindigkeit ist der beschleunigenden Größe dieser Kraft, die sie in dem Augenblick hatte, und dieser

dieser unendlich kleinen Zeit proportional: der erstern, weil von ihr die Stärke, der letztern, weil davon die Menge der erhaltenen Stöße abhängt. Dis ist eine evidente Folge aus dem Gesetze der Stetigkeit, auf dem alle die großen Entdeckungen der neuern Geometrie beruhn. Jede krumme Linie hat in jedem Punkt eine bestimmte Richtung, der sie durch einen unendlich kleinen Bogen folgt; jeder bewegte Körper hat in jedem Punkt eine bestimmte Geschwindigkeit, mit der er einen sehr kleinen Theil seines Weges gleichförmig durchläuft: jede veränderliche Kraft mus eben so in jedem Augenblick eine bestimmte Stärke haben, mit der sie während einer unendlich kleinen Zeit nicht anders als eine beständige Kraft wirkt. Diese Vorstellung allein macht es uns möglich, die veränderlichen Kräfte mit einander zu vergleichen, und sich eine größer als die andre zu denken: denn eine veränderliche Kraft kann nach und nach größer oder kleiner als jede gegebne Kraft werden, folglich nur in so fern mit andern Kräften verglichen werden, als man ihr in jedem Augenblick einen bestimmten unveränderlichen Werth beylegt. Wenn man sich die Bewegung eines Körpers als eine gerade Linie vorstellt, die bey jedem neuen Stöße gebrochen wird, und zwar unter einem desto größern Winkel, je stärker der Stoß ist, so entsteht durch eigentliche Stöße eine gebrochene Linie, durch beständige Kräfte ein Kreis, und durch veränderliche Kräfte jede andre krumme Linie, deren Krümmung das Gesetz darstellt, nach dem sich die Kraft ändert. Sind die Stöße gleich stark, so ist die Krümmung unveränderlich, oder die Linie ein Kreis. So wie man sich nun in der Geometrie jeden unendlich kleinen Bogen einer krummen Linie als einen Kreisbogen vorstellt und dessen Krümmungs-Halbmesser bestimmt, so ist man auch hier berechtigt oder vielmehr genöthigt, jede veränderliche Kraft während einer unendlich kleinen Zeit als beständig anzusehn. Nun bedeutet also t in der Gleichung $v = \lambda P t$ eine unendlich kleine Zeit, und v nicht mehr die Geschwindigkeit selbst — denn der Körper konnte schon vorhin eine Geschwindigkeit haben — sondern den in diesem Zeittheilchen mitgetheilten Zuwachs derselben: man mus also ∂t und ∂v statt t und v setzen, und so erhält man für die veränderlichen Kräfte die Gleichung $\partial v = \lambda P \partial t$, wo nun P eine veränderliche Größe ist. Daß λ hier eben das bedeute als vorhin, sieht man leicht, da es bloß von dem willkürlichen Zeitmaaße und der Kraft abhängt, mit der man alle Kräfte vergleicht, oder die man zur Einheit annimt. Dis erhellt auch daraus, weil das Integral für beständige Kräfte $v = \lambda P t$ die obige Gleichung geben mus (§. 12.).

§. 14. Was hier von den veränderlichen Kräften gesagt ist, gilt auch von der Geschwindigkeit. Ein Körper, der von Kräften beschleunigt wird, ändert seine Geschwindigkeit unaufhörlich. Demohnerachtet aber mus er doch in jedem Augenblick eine bestimmte Geschwindigkeit haben, mit der er einen verschwindenden Theil seines Weges durchläuft: sonst wäre es ungereimt, dem einen Körper eine größere Geschwindigkeit beizulegen als dem andern. Diese Materie hier weiter auszuführen, ist um so unnöthiger, da sie durch die Schriften über die Fluxionen-Rechnung in ein vollkommenes Licht gesetzt ist.

Wenn also der Körper einen Theil s seines Weges durchlaufen hat, so hat er in diesem Augenblick eine gewisse Geschwindigkeit v , mit der er das folgende Theil-

chen ∂s in der unendlich kleinen Zeit ∂t gleichförmig beschreibt. Da sich nun bey dieser gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeiten wie die durchlaufenen Räume und verkehrt wie die Zeiten, worin sie durchlaufen sind, verhalten, so hat man, wenn in der Zeit t mit jeder andern Geschwindigkeit c der Raum s durchlaufen ist, die Proportion $v : c = \frac{\partial s}{\partial t} : \frac{s}{t}$, also $v = \frac{c t \partial s}{s \partial t}$. Soll nun die Geschwindigkeit c das Maas oder die Einheit seyn, womit man alle übrigen veraleicht, so mus man $t = 1$ und $c = s = 1$ setzen, d. h. man mus $v, \partial t, \partial s$, in Theilen von c, t, s , ausdrücken: und dann ist in diesem willkürlichen Maas $v = \frac{\partial s}{\partial t}$, wo nun v und ∂s Linien sind, deren Einheit die Linie s oder c ist, ∂t aber eine Zeit, die als ein Bruch der Zeit t ausgedrückt ist. Da bey dieser Untersuchung die Zeitheilchen ∂t immer gleich groß oder beständig angenommen sind, so wird, wenn man die letzte Gleichung differenzirt, $\partial v = \frac{\partial \partial s}{\partial t}$, und dis mit der vorigen (§. 13.) $\partial v = \lambda P \partial t$ verglichen, gibt $\partial \partial s = \lambda P \partial t^2$.

§. 15. Zur Bestimmung der beständigen Größe λ könnte jede bekannte Kraft dienen, sogar eine veränderliche. Da man aber in diesem letztern Falle auch die Zeit angeben müste, wie lange die Kraft gewirkt hat, weil sonst ihre Größe nicht bestimmt wäre, so ist es natürlicher, eine beständige Kraft, und zwar diejenige, die uns am bekanntesten ist, weil wir ihre Wirkung unaufhörlich fühlen, die Schwere auf der Erde, zum Maas zu gebrauchen. Da nun bey allen Kräften überhaupt $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ (§. 14.), und bey beständigen Kräften $v = \lambda P t$ (§. 13.) ist, so erhält man $\partial s = \lambda P t \partial t$, wovon das Integral ist $s = \frac{1}{2} \lambda P t^2$, welches den bekannten Satz gibt: die Räume, durch die schwere Körper fallen, verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten. Es ist nun noch das Zeitmaas willkürlich, und nachdem man diese oder jene Zeit zur Einheit annimmt, wird λ auf verschiedene Art ausgedrückt werden. Gewöhnlich nimt man das kleinste Zeitheilchen, das unsre Uhren noch deutlich angeben, die Sekunde zur Einheit an. Setzt man demnach in der eben gefundenen Gleichung $t = 1$, so erhält man den Raum, durch den schwere Körper in der ersten Sekunde fallen, $s = \frac{1}{2} \lambda P$, oder da die Schwere zur Einheit bey'm Maas aller Kräfte dienen soll, folalich $P = 1$ ist, $s = \frac{1}{2} \lambda$ und $\lambda = 2s$. Dieser Raum s , oder der freye Fall schwerer Körper an der Erdoberfläche in der ersten Sekunde, ist durch sorgfältige Beobachtungen zu 15,625 Rheinländische Fuß bestimmt worden. Setzt man daher ein für allemal die Zahl $1,625 = g$, und drückt alle Linien in Rheinl. Füßen aus, so ist $\lambda = 2g$. Bey der Schwere also hat man $v = 2gt$ und $s = g t^2$, also $v^2 = 4gs$ und $s = \frac{v^2}{4g}$. Dis ist nämlich die Höhe, durch die ein schwerer Körper fallen mus, um die Geschwindigkeit v zu erlangen: man nennt sie die der Geschwindigkeit v zugehörige Höhe.

§. 16. Hiedurch lassen sich nun die Differenzial-Gleichungen, auf denen alle mechanischen Untersuchungen beruhen, durch bekannte Größen ausdrücken. Wenn nämlich P die beschleunigende Größe einer veränderlichen Kraft am Ende der Zeit t , s der in der Zeit t von einem durch sie beschleunigten Körper durchlaufene Raum, und v die Geschwindigkeit ist, die der Körper in der Zeit t durch diese Bewegung erhalten hat, so ist (§. 14.)

$$1) v = \frac{\partial s}{\partial t}, \quad 2) \partial \partial s = \partial v \partial t, \quad 3) \partial v = 2 g P \partial t, \quad 4) \partial \partial s = 2 g P \partial t^2.$$

Die letzte Gleichung ist diejenige, die in der physischen Astronomie am häufigsten vorkommt, und von deren glücklichen Anwendung und Integration alle Entdeckungen in dieser Wissenschaft abhängen. Da die Einheit bey allen Größen willkürlich ist, so könnte man g und alle andern Linien in einem solchen Maasse ausdrücken, daß $2 g = 1$ würde, um die Gleichungen noch einfacher zu machen. Da man aber selbst in der physischen Astronomie die übrigen Centralkräfte mit der Schwere zuweilen wirklich verglichen mus, und da in solchen Fällen wo dis nicht nöthig ist, sondern bloß andre Centralkräfte unter einander verglichen werden, g von selbst aus der Rechnung wegfällt, so scheint es bequemer, diese Form der Gleichungen, die sich auf das gewöhnliche Maas gründet, beizubehalten.

Der Theil des Weges, der hier $\partial \partial s$ heist, ist derjenige, den der Körper nicht durch die Trägheit, sondern bloß durch die fortwährende Wirkung der Kraft P durchläuft: daher auch $\partial \partial s$ in der zweyten Gleichung verschwindet, wenn $\partial v = 0$ wird, und in der vierten, wenn $P = 0$ wird. Wenn nämlich gar keine Kraft in den Körper wirkt, sondern derselbe sich bloß vermittelst der Trägheit bewegt, so ist seine Bewegung gleichförmig: theilt man also die ganze Zeit in lauter unendlich kleine aber gleiche Theile ∂t , und nennt die in der ersten, zweyten, dritten Zeit durchlaufenen Räume, $\partial s, \partial s', \partial s'',$ &c. so ist $\partial s = \partial s' = \partial s''$, und $\partial \partial s = 0$. Wirkt aber nun eine Kraft in den Körper nach der Richtung seiner Bewegung, so wird $\partial s' > \partial s, \partial s'' > \partial s',$ &c. und diese Unterschiede der ersten Differenzen, oder die zweyten Differenzen $\partial \partial s = \partial s' - \partial s$ sind $= 2 g P \partial t^2$. Obgleich nun $\partial \partial s$ eine bloße Folge der fortwährenden Wirkung der Kraft P ist, so kann man doch nur alsdenn, wenn ∂t das erste Zeittheilchen ist, in dem die Kraft zu wirken anfing, sagen, daß die Kraft unmittelbar den Körper durch den ganzen Raum $\partial \partial s$ geführt habe, oder daß $\partial \partial s$ mit dem Raum einerley sey, durch den diese Kraft einen ruhenden Körper in der ersten Sekunde treiben würde. Hat aber die Kraft schon im vorigen Zeittheilchen ∂t in den Körper gewirkt, so hat sie nicht allein den Weg ∂s größer gemacht, als er bloß durch die Trägheit seyn würde, oder wenn sie ihm nur im Anfange der ersten Sekunde ∂t einen Stoß gegeben hätte; sondern sie hat auch während der Zeit ∂t seine Geschwindigkeit vermehrt, so daß er im Anfange des zweyten Moments ∂t eine Geschwindigkeit hat, mit der er bloß durch die Trägheit einen Weg beschreiben mus, der größer als ∂s ist. Ausserdem aber treibt sie ihn unmittelbar durch eben den Weg $\partial \omega$, als in der ersten Zeit ∂t : folglich wird $\partial s' - \partial s = \partial \partial s$ größer seyn als der eigentliche Weg

Weg $\Delta \omega$, durch den die Kraft einen ruhenden Körper in der Zeit Δt treibt; und man wird sich leicht überzeugen, daß $\Delta \Delta s = 2 \Delta \omega$ ist. Man denke sich die Zeit nicht in Sekunden, sondern in unendlich kleine Theile τ aufgelöst, und g sey der Raum, durch den ein schwerer Körper im ersten dieser Zeittheile fällt, also von der Kraft der Schwere allein getrieben wird. Da man nun jede andre Kraft P während dieses Moments τ als beständig ansehen kann, so wird für dieselbe dieser Raum, oder das was wir hier $\Delta \omega$ nennen $= gP$, und in der Zeit Δt wird $\Delta \omega = gP \Delta t^2$, weil die Räume bey beständigen Kräften sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten. Dis folgt auch aus der Natur der Sache selbst: wenn Δt z. B. doppelt so groß ist, als die zur Einheit angenommene unendlich kleine Zeit τ , so erhält der Körper in der Zeit Δt nicht allein zweymal so viel Stöße von der Kraft P als in der Zeit τ , sondern läuft auch zweymal so lange, daher sein Weg so wol vermöge der Kraft als der Trägheit zweymal, folglich in allem viermal so groß seyn, und sich überhaupt wie das Quadrat der Zeit verhalten mus. Nun aber ist $\Delta \Delta s = 2gP \Delta t^2$, also $\Delta \Delta s = 2 \Delta \omega$; d. h. wenn ein Körper von Kräften beschleunigt wird, so durchläuft er in jedem Zeittheilchen einen Raum, der den im vorhergehenden Zeittheilchen durchlaufenen um doppelt so viel übertrifft, als der Raum beträgt, durch den eben diese Kräfte den Körper in eben dem Zeittheilchen getrieben haben würden, wenn sie auf ihn im Stande der Ruhe gewirkt hätten.

Drittes Capitel.

Von den Centralkräften.

§. 17. Das Wesentliche der Centralkräfte besteht darin, daß sie beständig nach einem gewissen Punkt gerichtet sind, und auf jedes Element der Materie ohne Ausnahme in gleichem Grade wirken, daß also der von ihnen verursachte Druck, oder die einem Körper mitgetheilte Größe der Bewegung, der Masse dieses Körper proportional ist: woraus dann folgt, daß sie allen Körpern, so fern sie bloß an Masse verschieden sind, gleiche Geschwindigkeit mittheilen. Wenn sich also mehrere Körper um einen Centralkörper bewegen, so kommt bey der Untersuchung ihrer Bahn oder der Gesetze ihrer Bewegung, die Masse der angezogenen Körper gar nicht in Betracht, und die Masse des Central-Körpers nur in so fern, als man diese Bahnen mit denen, die um einen andern Central-Körper nach ähnlichen Gesetzen beschrieben werden, vergleichen will. Alles kommt hier auf die beschleunigende Kraft, oder vielmehr auf das Verhältniß an, nach dem sie sich ändert, d. h. auf das Gesetz, nach dem die beschleunigende Kraft von der Entfernung abhängt. Man sieht leicht, daß die Natur der beschriebenen Bahnen lediglich von diesem Gesetz abhängen mus, folglich die Bahn nicht bestimmt werden kann, wenn dieses Gesetz nicht bekannt ist. Indes hat die Bewegung eines Körpers, auf den Central-

Centralkräfte wirken, gewisse allgemeine Eigenschaften, die bloß daraus folgen, daß die Kräfte immer nach einem gewissen Punkt gerichtet sind, die also beständig Statt finden, wie auch das Gesetz der Beschleunigung beschaffen seyn mag: und diese sind es, die in diesem Capitel verwiesen werden, weil sie bey allen folgenden Untersuchungen zum Grunde liegen.

Da die metaphysische Untersuchung über die Natur der Kräfte die Astronomie gar nicht angeht, so fragt man hier auch eigentlich nicht, ob es in der That solche nach einem Mittelpunkt gerichtete Kräfte gebe oder nicht. Die Absicht ist bloß, das allgemeine Gesetz der Bewegung der Himmelskörper zu entdecken; und diese Absicht ist erreicht, wenn man eine Kraft angeben kann, die eben diese Bewegungen, die wir durch Beobachtungen kennen, nach den allgemeinen Grundsätzen der Mechanik hervorbringen mus, diese Kraft mag nun in der That so seyn, wie wir sie uns vorstellen, oder nicht. So bald man also findet, daß die Bahnen von der Art sind, daß sich innerhalb derselben ein bestimmter Punkt angeben läßt, der, wenn er mit einer gewissen Centrakraft versehen wäre, die Körper zwingen würde, dieselben Bahnen um ihn zu beschreiben: so ist man berechtigt, diese Centrakraft für die wahre Quelle der Bewegung, und diesen Punkt für den Mittelpunkt der Kräfte anzunehmen. Da man ferner in der Astronomie bloß die relative Bewegung der Weltkörper gegen einander betrachtet, so werden die Centrakräfte auch nicht aufgehoben, wenn gleich der Mittelpunkt der Kräfte kein fester Punkt ist, sondern selbst eine Bewegung hat; wenn nur die ganze Bahn zugleich dieser Bewegung folgt, so daß der relative Ort der Körper gegen jenen Mittelpunkt eben so geändert wird, als wenn Centrakräfte nach einem festen Punkt wirkten. Diese Anmerkung wird in der Folge von Wichtigkeit seyn.

§. 18. Wenn ein Körper M (i. Fig.), der hier noch als ein Punkt angesehen wird, die krumme Linie AMm durchläuft, indem er von Kräften getrieben wird, die beständig nach dem Punkt C gerichtet sind, so kann man die Natur der krummen Linie AM durch die in der Geometrie gebräuchlichen Methoden bestimmen. Man ziehe durch C eine willkürliche Linie AB, von der die Winkel $ACM = \phi$ gemessen werden, und nenne die veränderliche Entfernung $CM = r$: so wird die Bahn AM durch eine Gleichung zwischen ϕ und r bestimmt, und des Körpers Bewegung durch die Anwendung der Fundamental-Gleichungen (§. 16.) auf die Differenziale von ϕ und r . Zieht man nun MN auf AB senkrecht, so läßt sich die Centrakraft die nach MC gerichtet ist, nach den Richtungen MN, NC, zerlegen; und diese drey Kräfte verhalten sich wie die Linien MC, MN, NC, wie aus der Statik bekannt ist. Von jeder dieser Kräfte gelten also auch die allgemeinen Gesetze der Bewegung. Nennt man daher P, M, N, die Kräfte nach MC, MN, NC, so ist $P:M:N = MC:MN:NC = 1:\sin \phi:\cos \phi$. Setzt man ferner $CN = x$, $NM = y$, und den unendlich kleinen Bogen $Mm = \partial s$, so ist $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, und wenn der Körper den Weg ∂s vermöge der Kraft P durchlaufen hat, so ist es eben das, als wenn er durch die Kraft M den Weg ∂y , und durch die Kraft N den Weg ∂x durchlaufen hätte. Beyde Kräfte aber vermindern ihrer Richtung nach die Linien x , y , oder sind in Absicht auf x , y , als negativ anzusehn.

anzusehn. Wendet man also die 4te Gleichung (§. 16.) darauf an, so erhält man die zwey Gleichungen, I. $\partial \partial x = -2gN\partial t^2$, II. $\partial \partial y = -2gM\partial t^2$, oder wenn man $N = P \cos \phi$ und $M = P \sin \phi$ substituirt,

$$\text{I. } \partial \partial x = -2gP\partial t^2 \cos \phi, \text{ II. } \partial \partial y = -2gP\partial t^2 \sin \phi.$$

Man ist $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$, also $\partial x = \partial r \cos \phi - r \partial \phi \sin \phi, \partial y = \partial r \sin \phi + r \partial \phi \cos \phi$, und $\partial \partial x = \partial \partial r \cos \phi - 2 \partial r \partial \phi \sin \phi - r \partial \partial \phi \sin \phi - r \partial \phi^2 \cos \phi, \partial \partial y = \partial \partial r \sin \phi + 2 \partial r \partial \phi \cos \phi + r \partial \partial \phi \cos \phi - r \partial \phi^2 \sin \phi$. Dies gibt III. $\partial \partial y \cos \phi - \partial \partial x \sin \phi = 2 \partial r \partial \phi + r \partial \partial \phi$, IV. $\partial \partial y \sin \phi + \partial \partial x \cos \phi = \partial \partial r - r \partial \phi^2$. Da aber aus I und II, $\partial \partial y \cos \phi = \partial \partial x \sin \phi$ und $\partial \partial y \sin \phi + \partial \partial x \cos \phi = -2gP\partial t^2$ ist, so erhält man für alle Centralkräfte folgende zwey Fundamental-Gleichungen:

$$\text{III. } 2 \partial r \partial \phi + r \partial \partial \phi = 0, \text{ IV. } \partial \partial r - r \partial \phi^2 = -2gP\partial t^2.$$

§. 19. Um diese Gleichungen zu integrieren, mus man sich erinnern, daß in allen diesen Formeln das Element der Zeit ∂t beständig angenommen, oder die Zeit in lauter gleiche Momente getheilt ist, daher die dem Integral zugefügte beständige Größe in ∂t multipliziert werden mus. Wenn man dann die Gleichung III. mit r multipliziert, so erhält man $2r\partial r\partial\phi + rr\partial\partial\phi = 0$, wovon das Integral ist $\frac{rr\partial\phi}{\partial t} = A$, oder

V. $rr\partial\phi = A\partial t$, wo A die durch die Integration hinzugekommene beständige Größe ist. Setzt man nun $\partial\phi = \frac{A\partial t}{rr}$ in die Gleichung IV. und multipliziert sie in $2\partial r$, so hat man $2\partial r\partial\partial r - \frac{2A^2\partial r\partial t^2}{r^3} + 4gP\partial r\partial t^2 = 0$, und wenn man integriert,

$$\text{VI. } \partial r^2 + \frac{A^2\partial t^2}{rr} + 4g\partial t^2 \int P\partial r + B\partial t^2 = 0.$$

Um das Integral $\int P\partial r$, da P eine veränderliche Größe ist, zu entwickeln, müste P als eine Funktion von r gegeben seyn, d. h. man müste das Gesetz kennen, nach dem die beschleunigende Kraft von der Entfernung abhängt: daher man bey dieser allgemeinen Untersuchung hier stehn bleiben mus. Man sieht also, daß in der Gleichung V. alle Eigenschaften enthalten sind, die den Centralkräften überhaupt zukommen, in der Gleichung VI. aber diejenigen, die von dem besondern Gesetze dieser oder jener Centralkraft abhängen. Aus der erstern Gleichung lassen sich folgende wichtige Wahrheiten herleiten.

§. 20. In der Gleichung V. $\int rr\partial\phi = At$, ist $r\partial\phi$ dem Kreisbogen $m\mu$ gleich, also $rr\partial\phi$ die doppelte Fläche des Sektors $mC\mu$, der vom Sektor MCm unmerklich

unmerklich abweicht, weil das Dreieck $Mm\mu$ ein unendlich kleines der zweiten Ordnung ist. Wenn also der Körper im Anfange der Zeit t in A war, und man die Fläche des Ausschnitts $ACM = S$ setzt, so ist $\int r r \partial \phi = 2S$ also $S = \frac{1}{2} A t$, d. h. die um C beschriebenen Sektoren sind den Zeiten, in denen sie beschrieben sind, proportional, oder die Flächenräume nehmen gleichförmig zu. Dies zeigt auch schon die Gleichung III. wo $2r \partial r \partial \phi + r r \partial \partial \phi = 2. r r \partial \phi = 2 \partial \partial S$ ist. Man hat demnach $\partial \partial S = 0$, folglich ∂S beständig, wenn ∂t beständig ist; d. h. die Fläche S nimmt gleichförmig zu, und ist daher der Zeit proportional. Dies ist jenes wichtige Gesetz, das Kepler durch die Beobachtungen entdeckte (Th. S. 118.), und das der erste Schritt zu der großen Entdeckung der durch den Weltraum verbreiteten Centralkraft war. Von dem ersten Erfinder ward dieses Gesetz auf folgende Art bewiesen (*). Wenn der Körper im ersten Zeittheilchen ∂t durch AB läuft (2. Fig.), so würde er in der folgenden Zeit ∂t auf der verlängerten Linie AB durch $Bc = AB$ vermöge der Trägheit laufen, wenn nicht eine Kraft nach BS in ihn wirkte. Ist nun diese von der Art, daß sie ihn in eben der Zeit ∂t durch $B\gamma$ treibt, und man zieht $cC = B\gamma$ mit BS parallel, so kommt der Körper durch die zusammengesetzte Bewegung am Ende der Zeit ∂t nach C , und die in beiden gleichen Zeiten ∂t beschriebenen Sektoren sind die Dreiecke ASB, BSc . Die Dreiecke ASB, BSc sind gleich, weil sie gleiche Basis $AB = Bc$ und dieselbe Spitze S haben; und die Dreiecke BSc, BSC , weil sie gleiche Basis BS haben, und ihre Spitzen, c, C , in einer damit parallelen Linie liegen. Mithin sind auch die Dreiecke ASB, BSC gleich; die Elemente der Flächen sind den Elementen der Zeit proportional, folglich auch ihre Integrale. Freilich ist es nicht im strengsten Verstande richtig, daß $Bc = AB$ ist, und der Unterschied ist eben das, was eben (S. 16.) $\partial \partial s - \partial \omega = \partial \omega$ hies. Da dies aber ein unendlich kleines der zweiten Ordnung ist, so verschwindet es gegen die Differenziale der ersten Ordnung AB, Bc .

§. 21. Die zweite allgemeine Eigenschaft der von Centralkräften beschleunigten Bewegung, die aus der Gleichung V folgt, ist diese. Wenn man (1. Fig.) in M die Tangente der krummen Linie MP , und CT darauf senkrecht zieht, so ist der Winkel CMT von CMm unmerklich verschieden, folglich sind die Dreiecke $CMT, Mm\mu$, die bey T und μ rechtwinklig sind, einander ähnlich. Nennt man also $CT = u$, so ist $r:u = Mm:m\mu = \partial s:r \partial \phi$, oder $\partial s = \frac{r r \partial \phi}{u}$. Da also $\partial s = v \partial t$ (S. 16.), und $r r \partial \phi = A \partial t$ (S. 19.) ist, so hat man $v = \frac{A}{u}$, d. h. in allen Punkten einer durch Centralkräfte beschriebenen krummen Linie, verhalten sich die Geschwindigkeiten (v) verkehrt, wie die aus dem Mittelpunkt der Kräfte auf die Tangenten gezogenen senkrechten Linien (u). Eben dies erhellt auch unmittelbar aus der Gleichung $\partial S = \frac{1}{2} A \partial t$. Denn da $\partial S = \frac{1}{2} u \partial s$ ist, so wird $\frac{\partial s}{\partial t} = v = \frac{A}{u}$ (Man vergl. Sph. S. 277.). Hieraus

III. Theil

D

folgt

(*) E. Neut. Princ. Phil. Nat. Math. Lib. I. p. 53.

folgt zugleich, daß die Winkel-Geschwindigkeiten w sich verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen r verhalten. Es ist nämlich $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ und $w = \frac{\partial \phi}{\partial t}$, also $v:w = \partial s:\partial \phi = rr:u$, und $w = \frac{vu}{rr} = \frac{A}{rr}$.

§. 22. Diese beyden Eigenschaften sind nicht allein allen Centralkräften gemein, sondern Centralkräfte allein sind vermögend, eine solche Bewegung hervorzubringen, in der diese Eigenschaften Statt haben. Wenn nämlich die Fläche S der Zeit proportional, oder $S = \frac{1}{2} A t$, also $\partial S = \frac{1}{2} A \partial t$ ist, so hat man $rr \partial \phi = A \partial t$, wo A jede beständige Größe bedeuten kann. Wenn ferner die Geschwindigkeiten sich verkehrt wie die Perpendikel verhalten, oder $v = \frac{A}{u}$ ist, so wird $u = \frac{rr \partial \phi}{\partial s} = \frac{A}{v} = \frac{A \partial t}{\partial s}$, mithin ebenfalls $rr \partial \phi = A \partial t$. Aus dieser Gleichung folgt aber, daß der Körper von Centralkräften beschleunigt wird, die beständig nach dem Punkt C gerichtet sind, um den er die Flächenräume gleichförmig beschreibt, oder aus dem die Perpendikel auf die Tangenten seiner Geschwindigkeit verkehrt proportional sind. Denn wenn man durch diesen gegebenen Punkt eine gerade Linie AB , und darauf aus jedem Punkt M der Bahn MN senkrecht zieht, und $CN = x$, $NM = y$, $ACM = \phi$ setzt, so ist $\tan \phi = \frac{y}{x}$ und $\cos \phi = \frac{x}{r}$, also $\frac{x \partial y - y \partial x}{xx} = \frac{\partial \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{rr \partial \phi}{xx}$, d. i. $rr \partial \phi = x \partial y - y \partial x = A \partial t$; und da ∂t beständig angenommen wird, so gibt die fernere Differenziation, $x \partial \partial y = y \partial \partial x$, oder $y:x = \partial \partial y:\partial \partial x$. Die zweyten Differentiale $\partial \partial x$, $\partial \partial y$, setzen Kräfte nach diesen Richtungen x , y , voraus, weil $\partial \partial x$, $\partial \partial y$, verschwinden, wenn der Körper bloß vermöge der Trägheit fortgeht (§. 16.). Nennt man also M , N , die Kräfte nach MN und NC , die also x und y vermindern, so müssen dieselben nach der 4ten Gleichung (§. 16.) so beschaffen seyn, daß $M = \frac{-\partial \partial y}{2g \partial t^2}$ und $N = \frac{-\partial \partial x}{2g \partial t^2}$, also $M:N = \partial \partial y:\partial \partial x = y:x$ ist. Hieraus aber folgt nach den bekannten Lehren der Statik, daß beyde Kräfte zusammen eine dritte ausmachen, die beständig nach C gerichtet ist, oder eine Centralkraft.

Diesen wichtigen Satz, auf dem die ganze Erfindung der Centralkräfte und der physischen Astronomie beruht, bewies Newton auf folgende Art (*). Daß der Körper im zweyten Moment nicht $Bc = AB$ (2. Fig.), sondern BC durchläuft, das kann nur von einer Kraft herrühren, die ihn in eben der Zeit, da er durch die Trägheit Bc beschreibt, durch cC führt, woraus dann durch die zusammengesetzte Bewegung

(*) Ebendaf. §. 62.

wegung der Weg BC entsteht: cC ist also die Richtung der Kraft. Da nun (per hypoth.) die Dreiecke BSC , ASB , gleich sind, so sind auch BSC und BSc gleich, weil $Bc = AB$, also die Dreiecke BSc , ASB gleich sind. Da also die Dreiecke BSC , BSc , gleiche Basis SB haben, so mus auch ihre Höhe gleich sein, oder ihre Spitzen C , c , müssen in einer mit SB parallelen Linie liegen: die Richtung der Kraft cC ist folglich BS parallel, oder geht in jedem Punkt B durch S .