

www.e-rara.ch

**System der Anorganographie als Grundlage für Vorträge an
Hochschulen**

Knop, A.

Leipzig, 1876

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 16462

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-26995>

Abschnitt I. Morphologie der Krystalle (Krystallographie).

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Abschnitt I.

Morphologie der Krystalle (Krystallographie).

Allgemeines.

Linien, auf welche sich die Lagen der Molekel eines geordneten Aggregates auf die einfachste Weise beziehen lassen, nennen wir Molekularlinien. Da nach derselben Richtung hin die Molekel eine gleiche Anordnung in Bezug auf dieselben haben, so bilden sie Schaaren von Parallellinien. Ein im Raume aufgebautes Molekularsystem lässt sich auf mindestens 3 Schaaren von Molekularlinien zurückführen. Linien, welche die Richtungen dieser Schaaren von Molekularlinien zum Ausdruck bringen, heissen Axen des Molekularsystems. Sie lassen sich durch ein Axenkreuz darstellen, welches aus wenigstens drei, sich im Raume in Einem Punkte schneidenden geraden Linien besteht.

Drei Punkte im Raume bestimmen allgemein die Lage einer Ebene. Drei Molekel im Molekularsysteme ebenso die Lage einer Krystallfläche. Krystallflächen sind im Principe stets Ebenen und schliessen einen Theil des unendlich gedachten Molekularsystems endlich, als Krystallindividuum, ab.

Drückt man die Lage der Krystallflächen in Beziehung auf die Axen des Molekularsystems aus, so werden diese zu Krystall-Axen. Diese beherrschen ebensowohl die Anordnungsweise der Molekel im Systeme, als die Vertheilungsart der gleich- und ungleichartigen Flächen am Krystall.

Axen, in Bezug auf welche die Molekel eine gleiche Anordnung zeigen, können wir als gleichwerthige von den ungleichwerthigen unterscheiden, für welche letzteren die Anordnung der Molekel eine andere ist.

Die Symmetrieverhältnisse von Molekularordnungen kann man sich vorstellen, wenn man nach einander jede der Molekularaxen als Drehungsaxen behandelt und untersucht, unter einem wie grossen Winkel man jede derselben drehen muss, um das Molekularsystem wieder mit sich selbst zur Deckung zu bringen.

Nach L. Sohncke giebt es von diesem Gesichtspunkte aus acht Gruppen von Molekularsystemen, deren geometrische Grundcharaktere sich übrigens meistens denjenigen im Wesentlichen unterordnen, welche man bisher in den sechs Krystallsystemen durch Coordinatenaxen für die Bestimmung der Flächenlagen an Krystallen ausgedrückt hat. Nur treten die tetraëdrischen und rhomboëdrischen Anordnungen als besondere, selbständige Molekularsysteme auf, während die Krystallographie sie als Hemiëdrien anderer Systeme auffasst und behandelt. Wie früher erwähnt, wird für die Charakteristik mancher Molekularordnungen nicht allein die Drehung um die Axe gefordert, sondern auch gleichzeitig eine Hebung derselben um Molekularabstände, wodurch die Deckung der Molekularordnung in Schraubenbewegungen wieder erreicht wird. Diese Art von Molekularsystemen ist es, welche bei gewissen Hemiëdrien und Tetartoëdrien die Nichtcongruenz ihrer correlaten Gestalten mit der Eigenschaft der Circularpolarisation des Lichtes verbinden.

In Folgendem behandle ich noch die Krystallaxen als Coordinatenaxen, d. h. als Durchschnittslinien von Coordinatenebenen, in Bezug auf welche die Krystallflächen einen möglichst einfachen Ausdruck für ihre Lage gewinnen; das Krystallsystem, als den Inbegriff aller derjenigen Krystallgestalten, die sich auf ein Axenkreuz von demselben allgemeinen geometrischen Grundcharakter zurückführen lassen. Für diesen Grundcharakter ist maassgebend: 1) Die Anzahl von Axen, welche die Symmetrie in der Flächenvertheilung am Krystall am einfachsten zur Anschauung bringt. 2) Die Winkelgrössen, unter denen die Axen in einem Punkte zum Durchschnitt gelangen. 3) Der Werth der Axen, insofern er die relativen Molekularabstände ausdrücken soll; man bezeichnet ihn durch bestimmte Linearmaasse.

Nach der Anzahl der Axen gruppieren sich die Krystallsysteme *A* in trimetrische mit 3 Axen, und *B* in tetrametrische mit 4 Axen. Nach den Winkelgrössen in a) orthometrische mit lauter rechten Axenwinkeln und b) in klinometrische mit schiefen Winkeln. Die einzelnen Systeme ordnen sich diesen Kategorien in folgender Weise unter.

Classification der Krystallsysteme.

A. Trimetrische Systeme.

a) orthometrische.

1. Reguläres System, Weiss. Tessularisches System, Mohs. Tesserales System, Naumann. Tessularisches, Breithaupt. Isometrisches, Hausmann.

Drei gleichwerthige, durch gleichlange Linien dargestellte Axen schneiden sich unter rechten Winkeln. (Fig. 13.)

Das Abstandsverhältniss der Molekel auf den drei Axen lässt sich durch die Proportion $a : a : a$ ausdrücken, d. h. die Art und Weise der Molekularanordnung ist nach drei rechtwinklig zu einander stehenden Richtungen gleich.

2. Quadratisches System. Viergliedriges oder 2- und 1axiges S. Weiss. Pyramidales S. Mohs. Tetragonales S. Naum. Brth. Monodimetrisches S. Hausm. Von drei rechtwinklig sich schneidenden Axen sind 2 gleichwerthig, die dritte ist ungleichwerthig und kann entweder kleiner oder grösser als die anderen beiden sein. (c und c' in Fig. 14.)

Das Abstandsverhältniss der Molekel auf den 3 Axen ist durch die Proportion $a : a : c$ ausdrückbar, d. h. die Molekularanordnung ist in der Richtung von c eine andere als nach den Richtungen a . Die Axe c ist gegen die anderen ausgezeichnet. Man nennt sie deshalb die Hauptaxe und giebt ihr die senkrechte Stellung.

3. Das rhombische System. Zwei und zweigliedriges S. Weiss. Orthotypes S. Mohs. Rhombisches S. Naum. Holoëdrisch rhombisches Brth. Orthorhombisches S. Hausm.

Fig. 13.

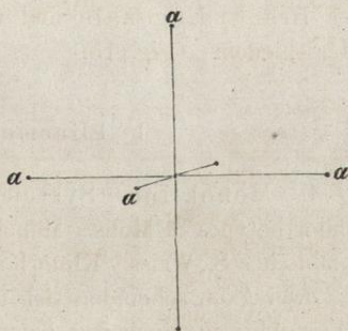
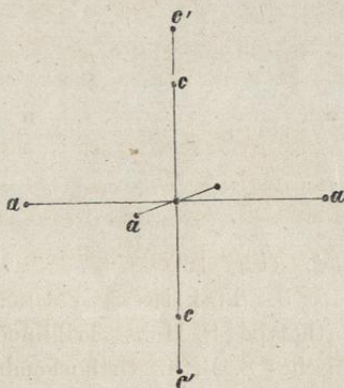
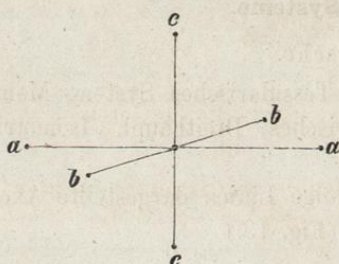


Fig. 14.



Alle drei rechtwinklig zu einander stehenden Axen sind ungleichwerthig.

Fig. 15.



Keine der Axen ist durch Länge oder Lage als Hauptaxe ausgezeichnet. Die Wahl derselben ist willkürlich. Das Abstandsverhältniss der Molekel auf den Axen ist $a:b:c$, d. h. nach den drei Richtungen ungleich. Ist eine der Axen als Hauptaxe angenommen worden, so sind die Nebenaxen als eine kürzere oder Brachydiagonale und eine längere oder Makrodiagonale unterschieden. (Fig. 15.)

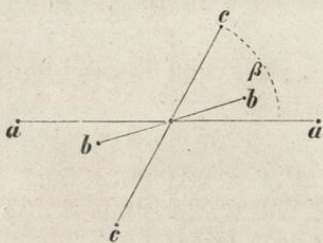
b) klinometrische Systeme.

4. Monoklines System. Zwei und eingliedriges S. Weiss. Hemiorthotypes S. Mohs. Monoklinoëdrisches S. Naum. Hemiëdrisch-rhombisches S. Weiss. Klinorhombisches S. Hausm.

Zwei Axen schneiden sich unter rechten Winkeln, die dritte steht rechtwinklig zu einer von ihnen, zur andern schiefwinklig. Alle sind ungleichwerthig. $a:b:c$, wie im rhombischen Systeme.

Als Hauptaxe pflegt man eine der beiden schiefwinklig zu einander gerichteten Axen zu wählen. Ist diese mit c bezeichnet, so sind

Fig. 16.



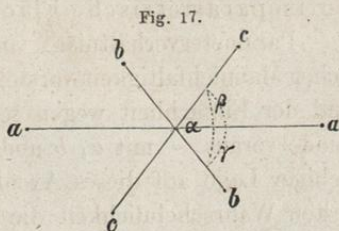
die beiden anderen nicht nur durch ihre Werthe a und b , d. h. durch ihre Längen verschieden, sondern auch durch die Neigung zu c ; denn $a:c = \beta^\circ$, $b:c = 90^\circ$. Die beiden Nebenaxen werden als Orthodiagonale b , die senkrecht auf der Ebene ac steht, und als Klinodiagonale, die schiefwinklig zur Ebene bc steht, bezeichnet.

(Fig. 16.)

5. Triklines System. Ein und eingliedriges S. Weiss. Anorthotypes S. Mohs. Triklinoëdrisches S. Naum. Tetartoëdrisch-rhombisches S. Brth. Orthorhomboidisches S. Hausm.

Alle drei Axen scheiden sich schiefwinklig und sind verschiedenwerthig.

Ein triklinen Axenkreuz ist bestimmt: durch das Linearverhältniss $a:b:c$ und die drei schiefen Winkel α, β, γ , welche in dieser Ordnung den entsprechenden Axen gegenüberliegen, sodass a in die Ebene bc , β in die Ebene ac , und γ in die Ebene ab zu liegen kommt. Die Hauptaxe ist willkürlich, die Nebenaxen unterscheiden sich als Brachydiagonale und Makrodiagonale. (Fig. 17.)

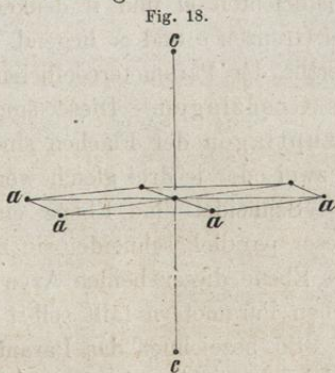


B. Tetrametrische Systeme.

6. Hexagonales System. Drei und einaxiges S. Weiss. Rhomboëdrisches S. Mohs. Hexagonales S. Naum. Brth. Monotrimetrisches S. Hausm.

Drei gleichwerthige Axen schneiden sich in Einer Ebene unter 60° , die vierte ungleichwerthige steht normal zu dieser Ebene.

Die Normale zur Ebene der drei gleichen Axen ist eine durch Länge und Lage ausgezeichnete Linie und in Folge dessen die Hauptaxe c . Das Axenkreuz ist bestimmt durch das Verhältniss $a:a:a:c$. (Fig. 18.)



Bestimmung der Flächenlage an Krystallen und Bezeichnung der Krystallformen.

Die Lage einer Ebene im Raume ist durch drei Punkte bestimmt, also auch die Lage einer Krystallfläche durch ihre Durchschnittspunkte auf den drei Krystallaxen. Die Abstände dieser Durchschnittspunkte vom Centrum des Axenkreuzes nennen wir die Parameter der Fläche. Da ein Krystall nicht an ein mittleres Normalmaass gebunden ist, so sind die absoluten Werthe der Parameter zur Bestimmung der Flächenlage nicht erforderlich, sondern lediglich das Schnittverhältniss auf den drei Axen oder das Parameterverhältniss der Flächen.

Flächen von gleichen Schnitt- oder Parameterverhältnissen nennen wir isoparametrische Flächen.

Parameterverhältnisse von Ebenen können wir uns von unendlicher Mannichfaltigkeit vorstellen; denn, bezeichnen wir drei Axen — und der Einfachheit wegen setzen wir drei rechtwinklig sich schneidende voraus — mit a , b und c und denken uns eine Ebene von beliebiger Lage auf dieses Axenkreuz bezogen, so werden mit der grössten Wahrscheinlichkeit die Parameter dieser Fläche endlich und ungleich, also das Parameterverhältniss derselben, wenn wir den kleinsten Abstand als Maasseinheit = 1 setzen, durch $a:nb:mc$ ausdrückbar sein. Das Verhältniss der Parametercoefficienten 1, n und m ist erfahrungsmässig bei Krystallen stets ein rationales, das von $a:b:c$ nicht, sondern durch Wurzelgrössen ausdrückbar. Die Parametercoefficienten m und n denken wir uns veränderlich und innerhalb der Grenzen 0 und ∞ liegend. Flächenlagen, welche durch die Grenzwerte der Parametercoefficienten bestimmt werden, bezeichnen wir als Grenzlagen. Diese sind nur in beschränkter Zahl möglich. Hauptlagen der Flächen sind solche, für welche die Parameter zu je zwei oder je drei gleich werden.

Schneidet eine Ebene eine Axe im Unendlichen, so liegt sie dieser parallel, schneidet sie zwei Axen im Unendlichen, so liegt sie der Ebene dieser beiden Axen parallel. Eine Fläche mit drei unendlichen Parametern fällt selbst ins Unendliche.

So bezeichnet das Parameterverhältniss $a:nb:\infty c$ eine Ebene, welche zwei Axen in den endlichen Abständen $1a$ und nb schneidet und der Axe c parallel läuft; das Parameterverhältniss $a:\infty b:\infty c$ eine solche, welche die Axe a in endlicher Entfernung schneidet und der Axenebene bc parallel liegt etc.

Formen, welche durch Flächen von Grenz- und Hauptlagen eingeschlossen werden, sind Hauptformen; solche, die von Flächen des allgemeinsten Parameterverhältnisses gebildet werden, allgemeine Formen.

Krystallaxen können als Durchschnittslinien von je zwei Coordinatenebenen aufgefasst werden. Durch drei dieser Coordinatenebenen oder Hauptschnitte des Krystalls entstehen drei Schnittlinien oder Axen, um welche der Raum in 8 Octanten zerfällt. Für jede Fläche, die in einem dieser Octanten construirt wird, sind isoparametrische in den übrigen möglich. Die specielle Lage jeder einzelnen Fläche lässt sich, durch Vorzeichen ihrer Parameter be-

stimmen. Bezeichnet man die drei Halbaxen eines Octanten, etwa vorn, oben, rechts, mit dem Zeichen +, so treten die entgegengesetzten Halbaxen als negative mit dem Zeichen — hervor. Existirt in jenem Octanten eine Fläche $+x : +y : +z$, so sind in den übrigen Octanten die isoparametrischen:

$$\begin{aligned} +x &: +y : -z \\ +x &: -y : +z \\ +x &: -y : -z \\ -x &: +y : +z \\ -x &: +y : -z \\ -x &: -y : +z \\ -x &: -y : -z \end{aligned}$$

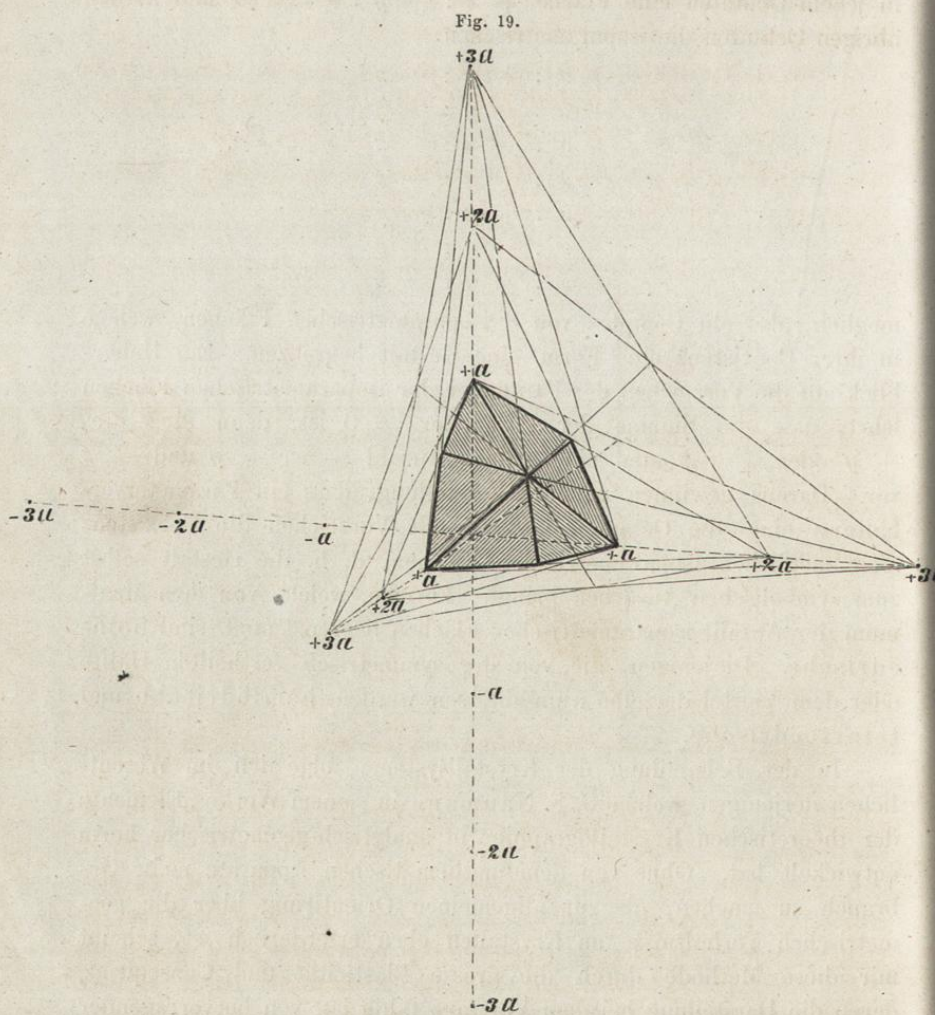
möglich, also ein Complex von 8 isoparametrischen Flächen, welche in ihrer Coëxistenz eine Form, eine Gestalt begrenzen. Ein Ueberblick auf die Vorzeichen der Parameter der isoparametrischen Flächen lehrt, dass die Summe der Parameter = 0 ist, denn für $+x$, $+y$ oder $+z$ kommt eine gleiche Anzahl $-x$, $-y$ und $-z$ vor. Daraus gewinnen wir die Vorstellung, dass ein Parameterverhältniss ohne die Octanten bestimmende Vorzeichen die Coëxistenz aller möglichen isoparametrischen Flächen, d. h. die Gestalt selbst zum symbolischen Ausdruck bringt. Formen, welche von dem Maximum der Anzahl isoparametrischer Flächen begrenzt sind, sind holoëdrische. Diejenigen, die von der symmetrisch vertheilten Hälfte oder dem Viertel derselbe numgeschlossen werden, hemiëdrische und tetartoëdrische.

In der Behandlung der Krystallsysteme folge ich im Wesentlichen derjenigen, welche C. F. Naumann in seinem Werke „Elemente der theoretischen Krystallographie“ in analytisch-geometrischer Form entwickelt hat. Ohne von dem mathematischen Apparate mehr Gebrauch zu machen, als zur allgemeinen Orientirung über die geometrischen Verhältnisse an Krystallen eben erforderlich ist, scheint mir diese Methode durch die grosse Plasticität und Consequenz, deren die Darstellung bei dem Vortrage fähig ist, von hervorragender pädagogischer Bedeutung zu sein.

I. Reguläres System.

Die Gleichwerthigkeit drei sich im Raume rechtwinklig schneidender Axen wird durch das Grundparameter-Verhältniss $a : a : a$

ausgedrückt. Das heisst: die Molekularordnung wird nach drei sich rechtwinklig schneidenden Richtungen als gleichartig gedacht. Eine Fläche vom allgemeinsten Parameterverhältnisse wird in diesem



Hexakisoktaeder 203.

$$= a : 2a : 3a.$$

Axenkreuze den Ausdruck $a : na : ma$ annehmen müssen. Eine solche Fläche ist in einem Octanten von jedem Punkte a aus durch Permutation gegen die zwei anderen Axen 2 mal, im Ganzen, da in

jedem Octanten je drei Punkte a vorkommen $2 \cdot 3 = 6$ mal möglich. (Fig. 19.) In 8 Octanten schliessen sich diese Flächen, indem sie sich in Kanten schneiden zu einer Form ab , welche von $6 \cdot 8 = 48$ isoparametrischen Flächen begrenzt ist. Die so entstehende allgemeinste Form des regulären Systems ist das

1. Hexakisoktaeder. (Fig. 20.) Indem man das Grundachsenverhältniss $a:a:a = 0$ setzt und die Coëxistenz aller 48 isoparametrischen Flächen $a:na:ma$ die Form selbst bedeutet, bezeichnet man diese abgekürzt mit mOn . (Syn. Achtundvierzigflächner, Sechsmalachtflächner, Tetrakontaoktaeder, Trigonalpolyeder.)

Fig. 20.

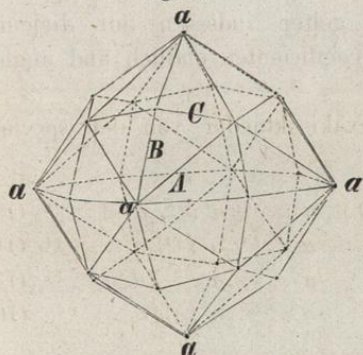
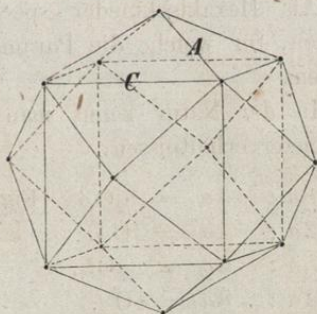


Fig. 21.



Die Flächen dieser Form sind ungleichseitige congruente Dreiecke, welche sich zu je 8 an jedem durch a bezeichneten Axenendegruppen und sechs 8flächige, (oktaëdrische) Ecken bilden. Sie gruppieren sich ferner zu je 6 über der Mitte jedes der 8 Octanten und schneiden sich hier in sechsflächigen Ecken (hexaëdrischen oder Würfecken), und zu je 4 über den Mittelpunkten derjenigen Linien, welche die Axenenden a verbinden. Sie bilden hier 12 vierflächige Mittellecken (26 Ecken dreierlei Art). Die 72 Kanten der Form sind ebenfalls dreierlei Art.

Längste Kanten A , welche die oktaëdrischen Ecken mit den hexaëdrischen verbinden, über jedem Octanten je drei, in Summa 24.

Mittlere Kanten B verbinden die oktaëdrischen Ecken mit den Mittellecken $2 \cdot 12 = 24$, weil über jeder der 12 Linien aa zwei entstehen.

Kürzeste Kanten *C*. Sie verbinden die Mittelecken mit den hexaëdrischen Ecken. Ueber jedem Octanten 3, mit den Kanten *A* alternierend, in Summa 24.

Axen, welche die oktaëdrischen Ecken verbinden, nennen wir oktaëdrische Axen (Hauptaxen); solche, welche die hexaëdrischen verbinden, trigonale Zwischenaxen und diejenigen, welche die Mittelecken verbinden, rhombische Zwischenaxen.

Der kleinste Parameter der Flächen pflegt als Maasseinheit für die anderen betrachtet zu werden, sein Coëfficient ist = 1. Da alsdann die Werthe von *m* und *n* des Parameterverhältnisses der Hexakisoktaëderflächen innerhalb der Grenzen 1 und ∞ verschieden sein können, so kann man sich auch unendlich viele verschiedene Hexakisoktaëder vorstellen.

Als Hexakisoktaëder speciell gelten indessen nur diejenigen Formen, für welche die Parametercoëfficienten endlich und ungleich bleiben.

In der Natur kennt man Hexakisoktaëder von den speciellen Parameterverhältnissen:

$$\begin{array}{ll}
 a : \frac{3}{2}a : 3a = \frac{3}{2}O3. & \text{(Fig. 20.)} \quad a : \frac{6}{5}a : \frac{5}{3}a = \frac{6}{5}O\frac{5}{3}. \\
 a : 2a : 4a = 2O4. & a : \frac{11}{5}a : \frac{11}{3}a = \frac{11}{5}O\frac{11}{3}. \\
 a : \frac{5}{3}a : 5a = \frac{5}{3}O5. & a : \frac{7}{3}a : 7a = \frac{7}{3}O7. \\
 a : 4a : 8a = 4O8. & a : \frac{64}{63}a : 64a = \frac{64}{63}O64. \\
 a : \frac{15}{7}a : \frac{15}{11}a = \frac{15}{7}O\frac{15}{11}. &
 \end{array}$$

Für die Kantenwinkel gelten die Relationen:

$$\begin{array}{ll}
 \cos \frac{1}{2} A = \frac{m - n}{\sqrt{2k}}, & \text{oder} \quad \cos A = -\frac{mn(mn + 2)}{k} \\
 \cos \frac{1}{2} B = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{2k}} & \cos B = -\frac{m^2(n^2 + 1) - n^2}{k} \\
 \cos \frac{1}{2} C = \frac{m(n - 1)}{\sqrt{2k}} & \cos C = -\frac{n(2m^2 + n)}{k},
 \end{array}$$

worin $k = m^2(n^2 + 1) + n^2$ ist. Für $n = \frac{m}{m-1}$ sind die Hexakisoktaëder parallelkantig, wie $mO\frac{m}{m-1}$ ($3O\frac{3}{2}, 4O\frac{4}{3}$ etc.); für $n = \frac{2m}{m+1}$ werden die Kanten *B* und *C* gleichwinklig $mO\frac{2m}{m+1}$. $3O\frac{3}{2}, 5O\frac{5}{3}$ etc.

Die Parametercoëfficienten *m* und *n* des Hexaëders lassen sich finden aus

1) *A* und *B*.

$$n = \operatorname{tg} \nu, \quad m = \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \sin \nu, \quad \text{wenn } \cos \nu = \frac{\cos \frac{1}{2} A \cdot \sqrt{2} + \cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} B}$$

2) *C* und *A*.

$$n = \operatorname{tg}(\delta + 45^\circ), \quad m = \frac{n\sqrt{2}}{n+2} \operatorname{tg} \delta', \quad \text{wenn } \operatorname{cotg} \delta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \cdot \sin \delta',$$

$$\delta' = 54^\circ 44' + \varrho \quad \text{und} \quad \sin \varrho = \frac{2 \cos \frac{1}{2} A + \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} C \sqrt{3}} \text{ ist.}$$

3) *B* und *C*.

$$n = \operatorname{tg}(\delta + 45^\circ), \quad m = \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \cdot \sin(\delta + 45^\circ), \quad \text{wenn } \sin \delta = \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} B}.$$

Wenn in dem allgemeinen Parameterverhältnisse $a : na : ma$ die Coëfficienten 1, n , m Haupt- oder Grenzlagen erreichen, so gewinnt das Hexakisoktaëder mOn typische Veränderungen, welche darin bestehen, dass gewisse Kanten $= 180^\circ$ werden und in Folge dessen Nachbar-Ebenen in eine Ebene fallen lassen. Solche Formen bezeichnen wir als Haupt- oder Grenzformen.

Von dem Hexakisoktaëder mOn leiten sich die folgenden Haupt- oder Grenzformen ab.

Alle Parametercoëfficienten ungleich,
wenn m oder $n = \infty$ wird.

$$a : na : \infty a = \infty Om.$$

Tetrakishexaëder.

Zwei Parametercoëfficienten sind gleich,
entweder $m = n$; m oder $n = 1$;
 $m = n = \infty$; $n = 1$, $m = \infty$, vier Fälle.

$$a : ma : ma = mOm.$$

Ikositetraëder.

$$a : a : ma = mO.$$

Triakisoktaëder.

$$a : \infty a : \infty a = \infty O\infty.$$

Hexaëder.

$$a : a : \infty a = \infty O.$$

Rhombendadekaëder.

Drei Parameter gleich. $m = n = 1$. $a : a : a = O$. Oktaëder.

2. Das Tetrakishexaëder. (Fig. 21 p. 41.) (Pyramidenwürfel, hexaëdrisches Trigonalikositetraëder. Hexaëdrisch pyramidales Iko-sitessaraëder.) ∞Om . Es ist zu betrachten als ein Hexakisoktaëder, in welchem die Kanten $B = 180^\circ$ geworden und in Folge dessen je zwei correspondirende Flächen der Nachbaroctanten in eine Ebene gefallen sind. Diese bilden $\frac{48}{2} = 24$ gleichschenklige Dreiecke. Die Form erscheint als ein Würfel, auf dessen quadrati-

schen Flächen sich vierseitige Pyramiden erheben. Die Kanten A bilden vierflächige oktaëdrische und A und C sechsflächige hexaëdrische Ecken. Die Mittelecken sind zweiflächig, d. h. zu Würfelkanten verzerrt: durch C .

In der Natur hat man die Formen $\infty 0^{5/4}$, $\infty 0^{3/2}$, $\infty 02$, $\infty 03$, $\infty 0^{7/2}$, $\infty 04$ beobachtet.

Für die Kanten des Tetrakishexaëders gelten die Ausdrücke:

$$\cos A = -\frac{n^2}{n^2 + 1}$$

$$\cos B = -1 = \cos 180^\circ$$

$$\cos C = -\frac{2n}{n^2 + 1}$$

Für $n = 2$ wird $\cos A = \cos C$, daher ist $\infty 02$ isogonal.

Es lässt sich m finden:

1) aus A .

$$n = \operatorname{tg} v, \text{ wenn } \cos v = \cos \frac{1}{2} A \sqrt{2}.$$

2) aus C .

$$n = \operatorname{tg}(135^\circ - \frac{1}{2} C).$$

3. Das Triakisoktaëder. (Fig. 22 p. 45.) (Dreimalachtflächner, Pyramidenoktaëder, oktaëdrisch-pyramidales Ikositessaraëder.) $m0$. Entsteht, wenn $n = 1$ wird und die Kanten $C = 180^\circ$ werden. Je zwei Flächen von C fallen in Eine Ebene und bilden durch A gleichschenklige Dreiecke mit der Basis von B . Diese zu zweien eine oktaëdrische Kante. Die Kanten A bilden dreiflächige hexaëdrische Ecken, B vierflächige oktaëdrische, die Mittelecken sind verschwunden. Die 24flächige Form erscheint als ein reguläres Octaëder, auf dessen gleichseitig dreieckigen Flächen sich dreiseitige Pyramiden erheben.

In der Natur kommt meistens $\frac{3}{2}0$, 20 , 30 , fast nur in Combinationen vor.

$$\cos A = -\frac{m(m+2)}{2m^2+1}$$

$$\cos B = -\frac{2m^2-1}{2m^2+1}$$

$$\cos C = -1 = \cos 180^\circ.$$

Es berechnet sich m

1) aus A .

$$m = \operatorname{tg} \delta' \cdot \sqrt{1/2}, \text{ wenn } \delta' = 54^\circ 44' + \varrho \text{ und } \sin \varrho = 2 \cdot \cos 1/2 A \cdot \sqrt{1/3}.$$

2) aus B .

$$m = \operatorname{tg} 1/2 B \cdot \sqrt{1/2}.$$

4. Das Ikositetraëder. (Fig. 23.) (Leucitoëder, Leucitoid. Zweikantiges Tetragonalikositetraëder. Trapezoidales Ikositessaraëder. Trapezoëder. Deltoid-Vierundzwanzigflächner.) mOm . Entsteht aus dem Hexakisoktaëder durch Verschwinden der Kanten A . ($= 180^\circ$.) Jede der 24 Flächen wird durch je ein paar Kanten B und C begrenzt und bildet ein Deltoid. Die octaëdrischen Ecken sind durch B vierflächig, die Mittelecken vierflächig durch B und C , die hexaëdrischen dreiflächig durch C .

Fig. 22.

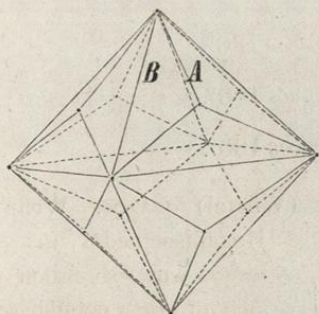
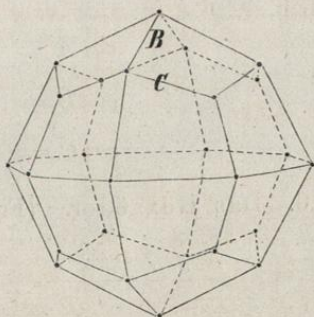


Fig. 23.



In der Natur kommt vor: $3/2 O 3/2$, 202 (von Leucit, Analium, Granat) $8/3 O 8/3$, 303, 404, 606, 12012, 40040.

$$\cos A = -1 = \cos 180^\circ$$

$$\cos B = -\frac{m^2}{m^2 + 2}$$

$$\cos C = -\frac{2m + 1}{m^2 + 2}.$$

Man findet m

1) aus B .

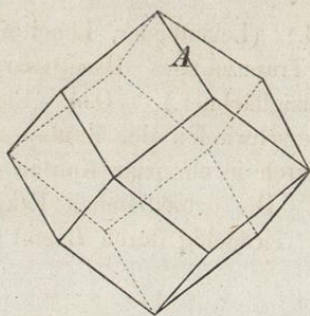
$$m = \operatorname{tg} v, \text{ wenn } \cos v = \operatorname{cotg} 1/2 B.$$

2) aus C .

$$m + 1 = \operatorname{tg} \delta' \sqrt{2}, \text{ wenn } \delta' = 54^\circ 44' + \varrho \text{ und } \sin \varrho = \operatorname{cotg} 1/2 C \cdot \sqrt{1/3}.$$

5. Das Rhombendodekaëder. (Fig. 24.) (Granatoëder. Einkantiges Tetragonaldodekaëder. Kantenzwölfflach, Granatdodekaëder. Reguläres Rhombendodekaëder.) $\infty 0$. Durch $n = 1$ und $m = \infty$

Fig. 24.



verschwinden am Hexakisoctaëder alle Kanten B und C , wodurch je vier, eine Mittelecke bildende Flächen, in Eine Ebene fallen. Die Kanten A umschliessen 12 rhombische Flächen, die sich unter 120° schneiden. Die octaëdrischen Ecken sind vierflächig, die hexaëdrischen dreiflächig, die Mittelecken sind verschwunden. Da alle Parametercoefficienten die Grenzwerte 1 oder ∞ erreicht haben, so

ist nur Ein Rhombendodekaëder (das Dodekaëder der Stereometrie) möglich.

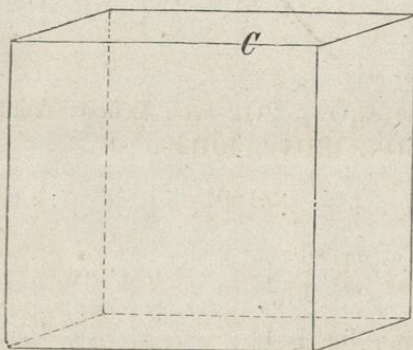
$$\cos A = -\frac{1}{2} = \cos 120^\circ.$$

$$\cos B = -1 = \cos 180^\circ.$$

$$\cos C = -1 = \cos 180^\circ.$$

6. Das Hexaëder. (Fig. 25.) (Würfel) $\infty 0 \infty$. Wenn im

Fig. 25.



Hexakisoctaëder $m = n = \infty$ wird, so fallen je 8 sich in einer octaëdrischen Ecke schneidende Flächen in Eine Ebene. Die Kanten A und B werden 180° , die Kanten C bilden zu je zweien Eine Würfelkante. Der Würfel ist von $\frac{48}{8} = 6$ quadratischen Ebenen begrenzt, welche sich unter 90° schneiden. Diese

liegen den Hauptschnitten des Krystalls parallel. Die octaëdrischen Ecken, sowie die Mittelecken sind verschwunden, es bleiben 8 von C gebildete dreiflächige hexaëdrische übrig. Der Würfel bildet, weil er keine endlichen Parametercoefficienten hat, wie die vorige Form nur Eine Gestalt.

$$\cos A = -1 = \cos 180^\circ.$$

$$\cos B = -1 = \cos 180^\circ.$$

$$\cos C = 0 = \cos 90^\circ.$$

7. Das Oktaëder. (Fig. 26.) (Achtflächner. Reguläres Oktaëder. Reguläre vierseitige Doppelpyramide.) O. Durch $m = n = 1$ fallen je sechs sich in hexaëdrischen Ecken des Hexakisoktaëders schneidende Flächen in Eine Ebene. Die Kanten A und C verschwinden. B bleiben übrig und bilden geradlinige Oktaëderkanten zu je zwei. Die hexaëdrischen und Mittelecken verschwinden, und

Fig. 26.

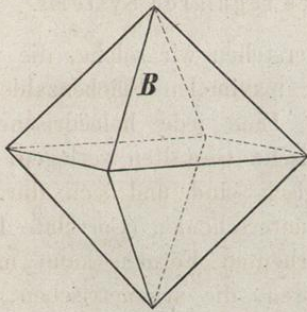
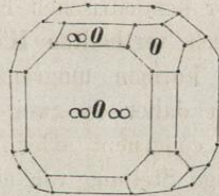


Fig. 27.



es bleiben sechs oktaëdrische 4flächige Ecken an der Form. Die $\frac{48}{6} = 8$ Flächen der Gestalt sind gleichseitige Dreiecke, welche sich in den Kanten unter $109^\circ 28'$, in den Ecken gegenüberliegend unter $70^\circ 32'$ schneiden. Die Hauptschnitte sind Quadrate.

$$\cos A = -1 = \cos 180^\circ.$$

$$\cos B = -\frac{1}{3} = \cos 109^\circ 28' 16''.$$

$$\cos C = -1 = \cos 180^\circ.$$

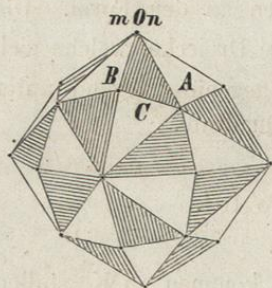
Diese einfachen Haupt- und Grenzformen kommen an Krystallen theils für sich allein, theils mit einander auf dasselbe Axenkreuz bezogen vor, das heisst, in denjenigen gegenseitigen Stellungen, in welchen sie unmittelbar von einem und demselben Hexakisoktaëder abgeleitet werden können. Ihre gegenseitigen Durchschnitte (Abstumpfungen von Ecken und Kanten, Zuschärfungen derselben und Zuspitzungen von Ecken) bringen flächenreichere Gestalten (Combinationen) hervor, an welchen die verschiedenen mit einander combinirten einfachen Gestalten durch absolute und relative Lage, sowie

durch besondere Gestaltungen ihrer Flächen erkenntlich sind. Gerade Abstumpfungen aller oktaëdrischen Ecken z. B. bedeutet eine Combination mit Würfel; der hexaëdrischen, eine solche mit Oktaëder, Abstumpfung der Mittelecken, oder in Ermangelung derselben, der Oktaëderkanten, eine Combination mit Rhombendodekaëder. Parallelkantige Zuschärfung der Oktaëderkanten bedeutet eine Combination mit Triakisoktaëder; der Würfelkanten mit Tetrakishexaëder. Achtflächige Zuspitzung der Oktaëderecken, oder sechsflächige der hexaëdrischen Ecken eine Combination mit dem Hexakisoktaëder etc. Fig. 27 stellt eine Combination von $\infty O \infty, \infty O.O.$ vor.

Hemiëdrische Formen des regulären Systems.

Unter hemiëdrischen Formen verstehen wir solche, die von der symmetrisch vertheilten Hälfte der maximalen Flächenzahlen holoëdrischer Formen umgrenzt sind. Eine jede holoëdrische Form kann sich daher in zwei hemiëdrische Gestalten zerlegen, welche entweder congruent oder symmetrisch sind und sich durch ihre gegenseitige Stellung von einander unterscheiden (Correlate Formen. Form und Gegenform). Die congruenten Formen kann man zur gegenseitigen Deckung gelangen lassen, die symmetrischen, welche

Fig. 28.



C. F. Naumann als „enantiomorphe“ bezeichnet, nicht. Sie verhalten sich zu einander, wie eine rechte zu einer linken Hand. P. Groth macht darauf aufmerksam, dass die congruenten Hemiëdrien oder Tetartoëdrien in Combinationen an demselben Krystallindividuum gleichzeitig auftreten können. Das habe man aber bis jetzt bei enantiomorphen Theilgestalten niemals beobachtet. (Pogg. Ann. Bd. 137. p. 433.)

Diese charakterisiren stets, wie bei Quarz und überjodsäurem Natron ($\text{Na JO}_4 + 3 \text{ aqu}$) getrennt von einander existirende Krystallisationen.

Das Hexakisoktaëder, als die alle übrigen Formen des regulären Systems repräsentirende Gestalt kann auf dreierlei Weise hemiëdrisch werden.

- a) Alle abwechselnden Flächen ringsum die ganze Form wachsen oder verschwinden. (Gyroidische Hemiëdrie.) (Fig. 28.)

- b) Die in mittleren Kanten B correspondirenden Flächenpaare wachsen oder verschwinden. (Dodekaëdrische oder parallelfächige Hemiëdrie.) Für jede Fläche existirt eine ihr parallele. (Fig. 31 p. 50.)
- c) Die, die abwechselnden Oktanten deckenden, sechszähligen Flächensysteme wachsen oder verschwinden. (Tetraëdrische oder geneigtflächige Hemiëdrie.) Für keine Fläche existirt eine ihr parallele. (Fig. 37 p. 52.)

a) Gyroidische Hemiëdrie.

Durch Wachsen und Verschwinden der abwechselnden Flächen rings um die ganze Form des Hexakisoktaëders entsteht 1. das Pentagonalikositetraëder, ein von 24 unregelmässigem Pentagonen begrenzter Körper. Er wurde bis jetzt noch nicht an Kry-

Fig. 29.

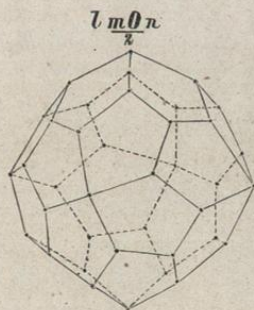
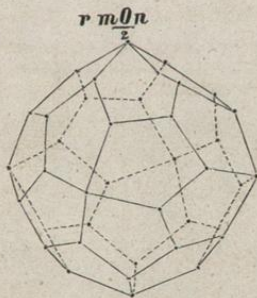


Fig. 30.



stallen beobachtet. Die zwei correlaten Formen sind nicht congruent sondern enantiomorph. (Fig. 29 und 30.)

Da alle Haupt- oder Grenzformen des regulären Systems als Hexakisoktaëder aufzufassen sind, für welche die Parametercoefficienten Haupt- oder Grenzwerte, die Flächen Haupt- oder Grenzlagen erreicht haben, so lassen sich die drei Arten der Hemiëdrie des Hexakisoktaëders auch auf diese Formen beziehen. Denkt man sich auf die Flächen der Hauptformen, für welche ja irgend welche Hexakisoktaëderkanten = 180° geworden, diese auf die Flächen jener projicirt, so entsteht eine Aenderung des Habitus der Hauptform nur dann, wenn die wachsenden und verschwindenden Flächen des Hexakisoktaëders auf ihr nicht in eine Ebene fallen. Ist dieses aber der Fall, liegen sie in einer Ebene, so entsteht keine Gestaltenänderung. Die gyroidische Hemiëdrie ändert nur das Hexa-

kisoktaëder, alle Hauptformen nicht, wiewohl in Combinationen diese als von gyroidisch-hemiëdrischer Molekularordnung aufgefasst werden müssen, trotzdem die Gestalten geometrisch identisch mit den holoëdrischen sind.

b) Dodekaëdrische Hemiëdrie.

Durch dodekaëdrische Hemiëdrie geht das Hexakisoktaëder über in 2. das Dyakisdodekaëder. $\pm \frac{mOn}{2}$. (Früher schrieb man $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ (Fig. 31. 32. 33). Dabei verschwinden die Kanten A und C des Hexakisoktaëders, während B dem Winkelmasse nach gleich bleibt, aber eine andere Länge gewinnt (B_n). Dafür ent-

Fig. 32.

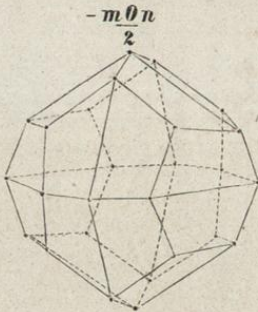


Fig. 31.

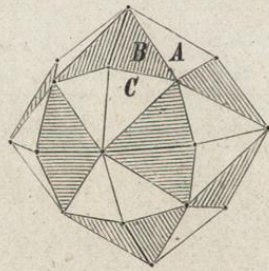
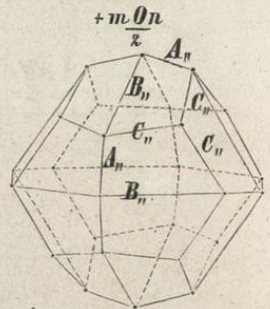


Fig. 33.



stehen neue Kanten B_n und C_n , welche mit A_n 24 trapezoidale Flächen einschliessen. Die hexaëdrischen Ecken sind dreiflächig durch C_n , die unregelmässigen Mittelecken vierflächig durch A_n und B_n , die oktaëdrischen vierflächig durch A_n und B_n .

$$\cos A_n = - \frac{m^2(n^2 - 1) + n^2}{K}$$

$$\cos B_n = - \frac{m^2(n^2 + 1) - n^2}{K}$$

$$\cos C_n = - \frac{mn(m + n + 1)}{K}$$

worin $K = m^2(n^2 + 1) + n^2$ ist. Wenn in Dyakisdodekaëdern $n^2 - m = 0$ und $(mn - 1)m : m^2 - n = n : 1$, m also $= n^2$ ist, so sind diese Formen parallelkantig, d. h. die Flächen bilden Trapeze, in denen die Kanten B_n und C_n parallel laufen. $\left(\frac{402}{2}\right)$

Man findet die Parametercoefficienten m und n aus

1) $A_{,,}$ und $B_{,,}$.

$$m = \frac{n \cdot \cos \frac{1}{2} A_{,,}}{\cos \frac{1}{2} B_{,,}}; \quad n = \operatorname{tg} \nu, \quad \text{wenn } \cos \nu = \frac{\cos \frac{1}{2} A_{,,}}{\sin \frac{1}{2} B_{,,}}.$$

2) Aus $C_{,,}$ und $A_{,,}$.

$$m = \operatorname{tg}(45^\circ + \vartheta); \quad n = \sin(45^\circ + \vartheta) \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} A_{,,},$$

$$\text{wenn } \cos \vartheta = \frac{\cos \varphi \sqrt{3} - \cos \frac{1}{2} A_{,,}}{\sin \frac{1}{2} A_{,,} \sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = 2 \cos \frac{1}{2} C_{,,} \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Durch dodekaëdrische Hemiëdrie verändert unter den Hauptformen nur das Tetrakishexaëder seinen Habitus. Es geht über in 3. das Pentagondodekaëder. $\pm \frac{\infty 0 m}{2}$ (Fig. 34. 35. 36), eine

Fig. 34.

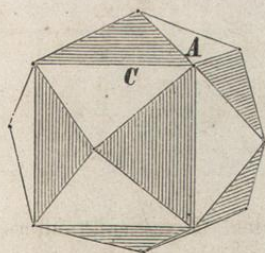


Fig. 35.

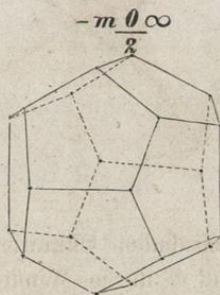
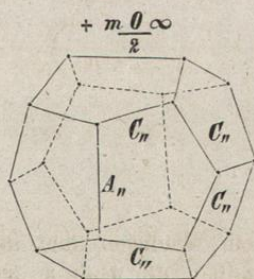


Fig. 36.



von 12 pentagonalen Flächen begrenzte Gestalt, in denen je zwei Kanten $A_{,,}$ des Dyakisdodekaëders als Basis und als verzerrte Oktaëderecken erscheinen, während die übrigen vier Seiten aus gleichen Kanten $C_{,,}$ gebildet werden. Es bleiben nur dreiflächige hexaëdrische und dreiflächige unregelmässige Ecken übrig. Die Kanten $B_{,,}$ sind verschwunden und geben in ihrer Projection auf das Pentagondodekaëder die Höhenlinien der Fünfecke.

$$\cos A_{,,} = - \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

$$\cos B_{,,} = - 1 = \cos 180^\circ$$

$$\cos C_{,,} = - \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Am regelmässigen Pentagondodekaëder ist die Kante $A_n = C_n$. Daraus folgt für $n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Als Krystallform kann diese Form nicht vorkommen, weil dieser Werth irrational ist und die Ableitungszahlen m und n für Krystalle stets rational sind.

Der Parametercoefficient m berechnet sich wie beim Tetrakis-hexaëder (vergl. dieses).

c) Tetraëdrische Hemiëdrie.

Durch Wachsen und Verschwinden der sechszähligen um eine hexaëdrische Ecke gruppierten Flächensysteme, entsteht aus dem Hexakisoktaëder

4. das Hexakistetraëder. $\pm \frac{mOn}{2}$ (Fig. 37. 38. 39). Bei

Fig. 37.

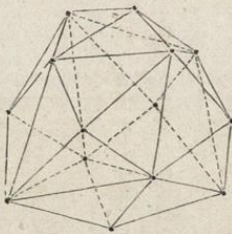


Fig. 38.

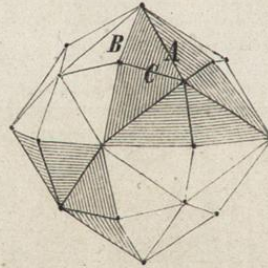
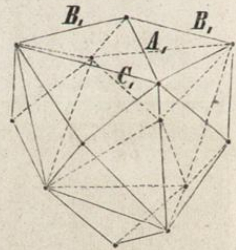


Fig. 39.



dem Wachsen der abwechselnden Oktanten des Hexakisoktaëders bleiben die Kanten A und C ihrem Winkelmaasse nach dieselben, C aber wird hier dem Linearmaasse nach die längste Kante C_1 , A die kürzeste A_1 . An Stelle von B treten neue Kanten B_1 . Diese Form ist umschlossen von $6 \cdot 4 = 24$ ungleichseitigen Dreiecken, hat 4 hexaëdrische sechsflächige Ecken, 6 oktaëdrische 4flächige und 4 tetraëdrische sechsflächige; letztere durch die Kanten C_1 und B_1 bezeichnet.

$$\cos A_1 = - \frac{mn(mn + 2)}{K} \text{ wie im Hexakisoktaëder}$$

$$\cos B_1 = - \frac{mn(mn - 2)}{K}$$

$$\cos C_1 = - \frac{n(2m^2 + n)}{K} \text{ wie im Hexakisoktaëder.}$$

$K = m^2(n^2 + 1) + n^2$. Für $A_1 = C_1$ gilt die Bedingung: $n = \frac{2m}{m + 1}$, und für $B_1 = C_1$: $n = \frac{2m}{n - 1}$. Es giebt danach

zweierlei isogonale Hexakistetraeder, indem ebensowohl die hexaederischen Ecken, als auch die tetraederischen gleichwinkelig werden können.

Die Parametercoefficienten m und n finden sich:

- 1) aus A_1 und C_1
wie beim Hexakisoktaeder aus A und C .
- 2) aus A_1 und B_1 .

$$m = \frac{\sqrt{2}}{\cotg \alpha - \cotg \beta}, \quad n = \frac{\sqrt{2}}{\cotg \alpha + \cotg \beta},$$

wenn $\cos \beta = \frac{\cos \frac{1}{2} A_1}{\sin \frac{1}{2} B_1}$ und $\cos \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} B_1}{\sin \frac{1}{2} A_1}$.

- 3) aus B_1 und C_1 .

$$n = \operatorname{tg}(\delta + 45^\circ), \quad m = \frac{n\sqrt{2}}{n+1} \cdot \operatorname{tg} \delta_1, \quad \text{wenn } \cotg \delta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} C_1 \sin \delta;$$

$$\delta_1 = 35^\circ 16' + \varepsilon \quad \text{und} \quad \cos \varepsilon = \frac{2 \cdot \cos \frac{1}{2} B_1 + \cos \frac{1}{2} C_1}{\sin \frac{1}{2} C_1 \sqrt{3}}.$$

Fig. 40.

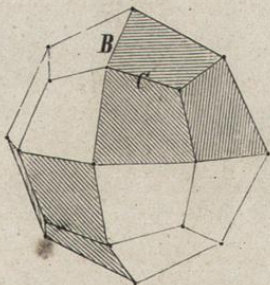


Fig. 41.

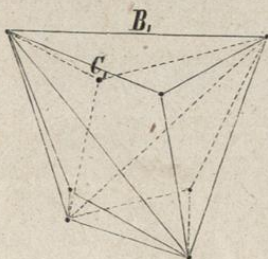
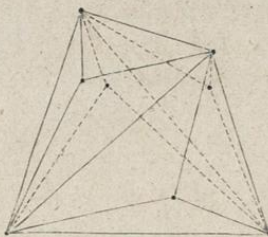


Fig. 42.



5. Das Trigondodekaeder = $\pm \frac{mOm}{2}$. (Fig. 40. 41. 42).
Entsteht durch tetraederische Hemiëdrie aus dem Ikositetraeder.
Die Kanten A_1 im Hexakistetraeder werden = 180° . Es bleiben

C_1 und B_1 . Diese bilden paarweise eine grade Linie, verzerrte Oktaederecken und die Basen von 12 gleichschenkligen Dreiecken, deren Spitzen sich zu den dreiflächigen hexaëdrischen Ecken gruppieren, während die gleichen Flächen-Winkel an den sechsflächigen tetraëdrischen Ecken liegen. Es erscheint als Tetraëder, auf dessen Flächen sich dreiflächige Pyramiden erheben. (Pyramidentetraëder.)

$$\cos A_1 = -1 = \cos 180^\circ$$

$$\cos B_1 = -\frac{m^2 - 2}{m^2 + 2}$$

$$\cos C_1 = -\frac{2m + 1}{m^2 + 2} = \cos C \text{ im Hexakisoktaëder.}$$

Der Parametercoëfficient m wird gefunden:

1) aus B_1 .

$$m = \operatorname{tg} \frac{1}{2} B_1 \sqrt{2}, \text{ übriges wie beim Ikositetraëder.}$$

Für $\cos B_1 = \cos C_1$ ergibt sich $m = 3$. Die Form 303 hat daher in ihren Kanten gleiches Winkelmaass.

Fig. 43.

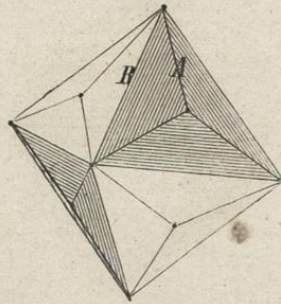


Fig. 44.

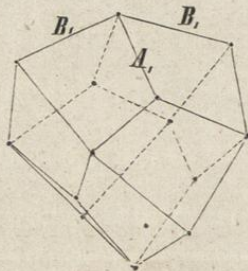
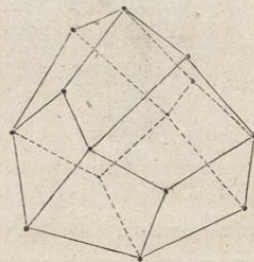


Fig. 45.



6. Das Deltoiddodekaëder $\pm \frac{m0}{2}$ (Fig. 43. 44. 45). Tetraëdrische Hemiëdrie des Triakisoktaëders. Die Kanten C_1 des Tetra-

kis hexaäders werden $= 180^\circ$. Es bleiben A_1 und B_1 , welche $3 \cdot 4 = 12$ deltoïdische Flächen erzeugen. Die 4 hexaëdrischen Ecken sind 3flächig durch A_1 , die tetraëdrischen dreiflächig durch B_1 , die sechs oktaëdrischen vierflächig durch A_1 und B_1 .

$$\cos A_1 = -\frac{m(m+2)}{2m^2+1} = \cos A \text{ im Hexakisoktaëder.}$$

$$\cos B_1 = -\frac{m(m-2)}{2m^2+1}$$

$$\cos C_1 = -1 = \cos 180^\circ.$$

Gleichheit der Kanten A_1 und B_1 kann nicht vorkommen, weil sonst $m+2 = m-2$ werden müsste.

Fig. 46.

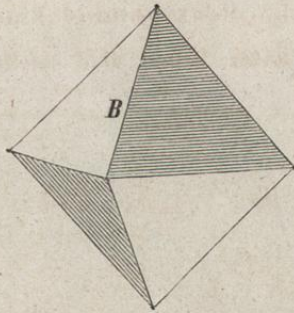


Fig. 47.

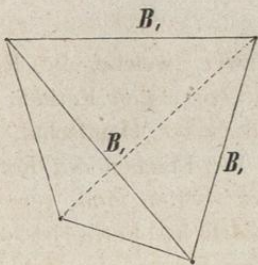
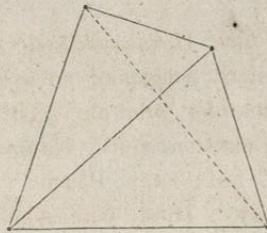


Fig. 48.



7. Das Tetraëder $\pm \frac{0}{2}$ (Fig. 46. 47. 48) ist die Hemiëdrie des regulären Oktaëders. Die Kanten A_1 und C_1 sind $= 180^\circ$ geworden, B_1 erscheinen als 6 verzerrte Oktaëderecken. Die 4 Flächen sind gleichseitige Dreiecke. Von den Ecken sind nur die 4 tetraëdrischen übrig geblieben.

$$\cos A_1 = -1 = \cos 180^\circ$$

$$\cos B_1 = \frac{1}{3} = \cos 70^\circ 31' 44''$$

$$\cos C_1 = -1 = \cos 180^\circ.$$

Der Würfel, das Rhombendodekaëder und das Tetrakishexaëder erleiden durch tetraëdrische Hemiëdrie keine Gestaltenänderung.

Tetartoëdrische Gestalten des regulären Systems.

Am einfachsten können wir uns die Tetartoëdrien als Hemiëdrien von hemiëdrischen Formen vorstellen. Die drei hemiëdrischen Formen des Hexakisoktaëders, nämlich das Pentagonalikositetraëder, das Dyakisdodekaëder und das Hexakistetraëder liefern durch Hemiëdrie allesammt dieselbe tetartoëdrische Form, nämlich

Das tetraëdrische Pentagondodekaëder, $\frac{mOn}{4}$ (Fig. 49. 50). Jedes Hexakisoktaëder liefert vier solcher Formen oder jede

Fig. 49.

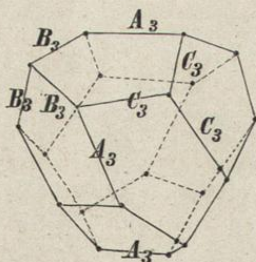
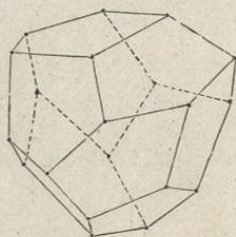


Fig. 50.



Hemiëdrie des Hexakisoktaeders je zwei, welche die Eigenschaft besitzen, nicht congruent zu sein. Die correlaten Formen verhalten sich zu einander wie ein rechter und linker Handschuh desselben Paares. (Enantiomorphie, Naumann.) Die Flächen der Formen sind Pentagone mit zwei Paaren gleicher Seiten von verschiedenem Winkelmaasse. Diese pentagondodekaëdrische Form ist von tetraëdrischem Habitus. Sechs Kanten A_3 erscheinen als zweiflächig verzerrte Oktaëderecken; 12 schärfere B_3 laufen zu je drei in den tetraëdrischen Ecken, 12 stumpfere C_3 zu je drei in den hexaëdrischen Ecken zusammen. Die Ecken sind dreierlei Art, vier spitzere und vier stumpfere trigonale und 12 unregelmässig dreiflächige, welche paarweise über die Kanten des eingeschriebenen Tetraëders fallen.

$$\cos A_3 = - \frac{m^2 n^2 - m^2 - n^2}{K}$$

$$\cos B_2 = - \frac{mn(m - n - 1)}{K}$$

$$\cos C_3 = - \frac{mn(m + n + 1)}{K}$$

worin $K = m^2(n^2 + 1) + n^2$ ist.

Bezieht man die Tetartoëdrie des Hexakisoktaëders auf die übrigen Hauptformen des Systems, diese als Quasi-Hexakisoktaëder aufgefasst, so ergibt sich das interessante Resultat, dass:

das Ikositetraëder sich in das Trigondodekaëder verwandelt,

das Triakisoktaëder in das Deltoiddodekaëder,

das Tetrakishexaëder in das Pentagondodekaëder,

das Oktaëder in das Tetraëder,

während Würfel und Dodekaëder ihren holoëdrischen Habitus beibehalten.

Während an Krystallen nur holoëdrische Formen unter einander in Combination treten, ferner hemiëdrische nur mit gleichartig hemiëdrischen und tetartoëdrische nur mit tetartoëdrischen, so vereinigt die Tetartoëdrie die Pentagondodekaëder mit den Tetraëdern, welche sich als Hemiëdrien gegenseitig ausschliessen.

An Krystallen wurde das Auftreten tetartoëdrischer Combinationen erst in neuerer Zeit von Rammelsberg und zwar am chloresäuren Natron nachgewiesen; Marbach constatirte an ihnen die Eigenschaft der Circularpolarisation des Lichtes, wie diese überhaupt den enantiomorphen Theilgestalten eigenthümlich ist. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass das bromsaure Natron, so wie das essigsäure Uranoxyd-Natron ebenfalls tetartoëdrisch krystallisiren.

II. Quadratisches System.

Die quadratischen Krystalle lassen eine Molekularordnung voraussetzen, in welcher nach zwei rechtwinkligen Richtungen die Entfernungen der Molekel von einander gleich, nach einer dritten normal dazu gerichteten ungleich (grösser oder kleiner) sind. Sie findet ihren Ausdruck in zwei gleichwerthigen Nebenaxen a , und einer ungleichwerthigen Hauptaxe c . Das Grundaxenverhältniss des quadratischen Systems ist daher $a : a : c = P$. Das Verhältniss von $a : c$ ist für jede quadratisch krystallisirende Substanz ein bestimmtes. So

Basis- oder Grundecken an a und vier Mittelecken zwischen je zwei Axenenden a . Die Kanten sind Polkanten X zwischen a und c , Basiskanten Z zwischen a und a und Mittelkanten Y zwischen c und den Mittelecken.

Haupt- oder Grenzformen der ditetragonalen Pyramide sind:

2. Für $m = \infty$. $a : na : \infty c = \infty Pn$; das ditetragonale Prisma (Fig. 53), ein der Hauptaxe paralleles achtseitiges Prisma von ditetragonalem Querschnitt.

Fig. 53.

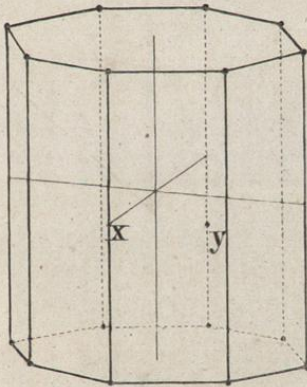
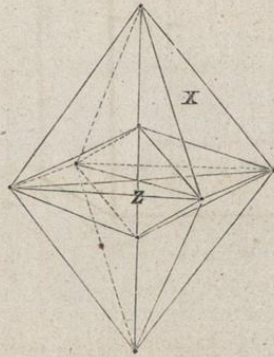


Fig. 54.



3. Für $m = 0$. $a : na : oc = oPn$, oder allgemein, da für alle anderen Formen unter derselben Bedingung Flächen von derselben Lage entstehen: oP , das basische Pinakoid (basische Endfläche); ein Flächenpaar, welches die Hauptaxe in der Entfernung o schneidet und in die Ebene der Nebenaxe fällt, oder wenn es die Hauptaxe in endlichen Abständen schneidet, ein dem basischen Hauptschnitte paralleles Flächenpaar ist, welches in Combination stets die Ecken abstumpft.

4. Für $n = 1$; $a : a : mc = mP$. Protopyramide (Pyramide erster Ordnung) (Fig. 54). Je zwei in einem Oktanten liegende Flächen der ditetragonalen Pyramide fallen in Eine Ebene, die Mittelkanten werden $= 180^\circ$. Vierseitige Doppelpyramide von gleichschenkligen Dreiecken begrenzt, deren Basis die Seitenkanten, deren Schenkel die Polkanten sind.

5. Für $n = 1, m = \infty; a : \bar{a} : \infty c = \infty P$. Protoprisma (Prisma erster Ordnung) (Fig. 55). Der Hauptaxe paralleles Prisma von quadratischem Querschnitt.

6. Für $n = \infty; a : \infty a : mc = mP\infty$. Deuteropyramide (Pyramide 2^{ter} Ordnung) (Fig. 56). Die Polkanten X werden 180°

Fig. 55.

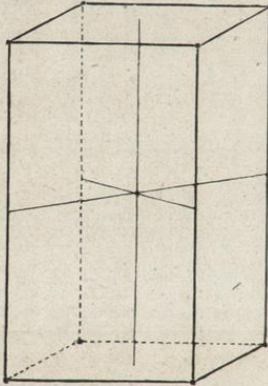


Fig. 56.

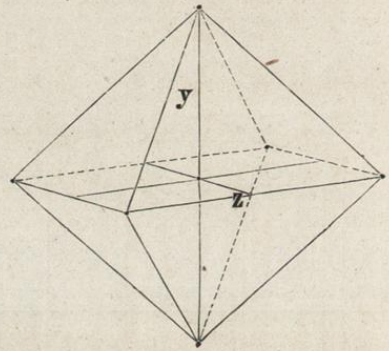
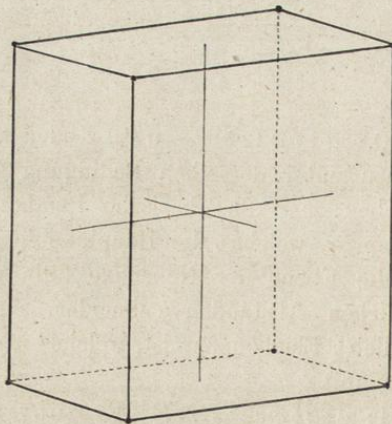


Fig. 57.



und verschwinden. Es bleiben die Mittelkanten Y und die Basis-
kanten Z, in deren Mittelpunkten die Enden der Nebenaxen münden. Doppelt vierseitige Pyramide von quadratischem Querschnitt, deren Basis gegen die der Protopyramide um 45° um die Hauptaxe ge-

dreht erscheint. Geometrisch von gleichem Habitus wie die Protopyramide, nur in Combinationen erkennbar durch ihre verschiedene gegenseitige Lage (auf den Polkanten).

7. $n = \infty, m = \infty. a : \infty a : \infty c = \infty P \infty$. Deuteroprisma (Prisma 2^{ter} Ordnung) (Fig. 57 p. 60). Vierseitiges Prisma von quadratischem Querschnitt. Liegt mit seinen Flächen auf den Kanten des Protoprismas als gerade Abstumpfungen derselben.

Berechnung der holoëdrischen Formen.

1. Ditetragonale Pyramide mPn

$$\left. \begin{aligned} \cos X &= -\frac{m^2 c^2 (n^2 - 1) + n^2}{K}, \\ \cos Y &= -\frac{n (2m^2 c^2 + n)}{K}, \\ \cos Z &= -\frac{m^2 c^2 (n^2 + 1) - n^2}{K} \end{aligned} \right\} K = m^2 c^2 (n^2 + 1) + n^2.$$

Für oktagonale Pyramiden, solche, deren Basis ein regelmässiges Achteck ist, würde $\cos X = \cos Y$, d. h. $n = 1 + \sqrt{2}$ werden müssen. Sie sind daher krystallographisch unmöglich.

Die Parametercoefficienten m und n berechnen sich aus je zwei gemessenen Winkeln

a) aus X und Z .

$$n = \operatorname{tg} v, mc = \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z \cdot \sin v, \text{ wenn } \cos v = \frac{\cos \frac{1}{2} X}{\sin \frac{1}{2} Z}.$$

b) aus Y und Z .

$$n = \operatorname{tg} (135^\circ - \delta), mc = \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z \cdot \sin (135^\circ - \delta),$$

$$\text{wenn } \cos \delta = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} Z}.$$

c) aus X und Y .

$$n - 1 = \frac{\cos \frac{1}{2} Y \cdot \sqrt{2}}{\cos \frac{1}{2} X}, mc = \operatorname{tg} v', \text{ wenn } \sin v' = n \cdot \operatorname{cotg} \frac{1}{2} X.$$

2. Protopyramiden mP .

$$\begin{aligned} \cos X &= -\frac{1}{2m^2 c^2 + 1}. \\ \cos Y &= -1 = \cos 180^\circ. \\ \cos Z &= -\frac{2m^2 c^2 - 1}{2m^2 c^2 + 1}. \end{aligned}$$

Der Parametercoefficient m findet sich

a) aus X .

$$mc = \cotg \varepsilon, \text{ wenn } \cos \varepsilon = \cotg \frac{1}{2} X.$$

b) aus Z .

$$mc = tg \frac{1}{2} Z \cdot \sqrt{1/2}.$$

3. Deuteropyramiden $mP\infty$.

$$\cos X = -1 = \cos 180^\circ.$$

$$\cos Y = -\frac{1}{m^2c^2 + 1}.$$

$$\cos Z = -\frac{m^2c^2 - 1}{m^2c^2 + 1}.$$

Es findet sich mc

a) aus Y .

$$mc = \cotg \varepsilon, \text{ wenn } \cos \varepsilon = \cotg \frac{1}{2} Y \cdot \sqrt{2}.$$

b) aus Z .

$$mc = tg \frac{1}{2} Z.$$

4. Ditetragonale Prismen ∞Pn .

$$\cos X = -\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}.$$

$$\cos Y = -\frac{2n}{n^2 + 1}.$$

$$\cos Z = -1 = \cos 180^\circ.$$

Es findet sich n

a) aus X .

$$n = tg \frac{1}{2} X.$$

b) aus Y .

$$\frac{n + 1}{n - 1} = tg \frac{1}{2} Y.$$

Die übrigen Formen bedürfen keiner Rechnung.

Hemiëdrische Formen des quadratischen Systems.

Die ditetragonale Pyramide kann auf vierfache Weise hemiëdrisch werden und bedingt dadurch vier Reihen von hemiëdrischen Formen.

1. Trapezoëdrische Hemiëdrie entsteht, wenn an der ditetragonalen Pyramide die abwechselnden Flächen rings um die

Form wachsen und verschwinden. Die holoëdrische Stammform verwandelt sich dadurch in das tetragonale Trapezoëder, $\frac{mPn}{2}$ (Fig. 58. 59. 60); das ist eine Form, welche von acht gleichschenkligen Trapezoiden umschlossen wird und 4 längere stumpfere und 4 kürzere schärfere Mittelkanten besitzt, die abwechselnd auf- und absteigen. Je zwei correlate Formen sind enantiomorph, rechts und links ausgebildet, was durch die dem Zeichen vorgesetzten Buch-

Fig. 58.

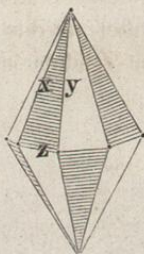


Fig. 59.

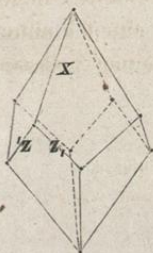


Fig. 60.

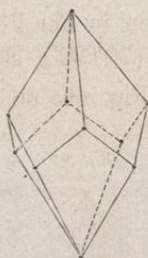


Fig. 61.

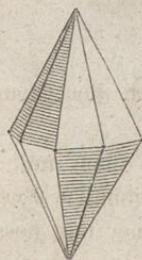


Fig. 62.

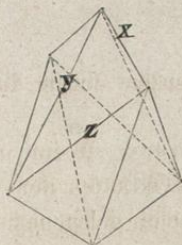
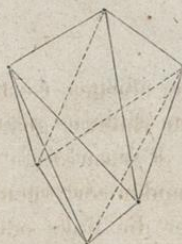


Fig. 63.



staben r und l ausgedrückt werden mag. $r\frac{mPn}{2}$, $l\frac{mPn}{2}$. Die übrigen Hauptformen des Systems werden durch Uebertragung dieser Hemiëdrie auf sie in ihrem Habitus nicht geändert, wenn sie auch die Bedeutung als hemiëdrische Gestalten mit holoëdrischem Habitus beibehalten. Noch nicht an Krystallen beobachtet.

2. Sphenoidische Hemiëdrie. Durch Wachsen und Verschwinden der die abwechselnden Oktanten deckenden, an den Mittelkanten liegenden Flächenpaare wird die ditetragonale Pyramide (Fig. 61) verwandelt in das

tetragonale Skalenoëder (Fig. 62. 63), in eine von $2 \cdot 4 = 8$ ungleichseitigen Dreiecken begrenzte Gestalt, deren Mittelkanten

zickzackförmig auf- und absteigen, und deren Polkanten von zweierlei Art, je zwei längere, stumpfere, und je zwei kürzere, schärfere sind. Die correlaten Formen sind congruent und können durch $+\frac{mPn}{2}$ und $-\frac{mPn}{2}$ bezeichnet werden.

Die sphenoidische Hemiëdrie auf die übrigen Hauptformen dieses Systems angewandt, ergeben:

Die Protopyramiden mP (Fig. 64) gehen in tetragonale Sphenoiden über, in doppelt keilförmige Gestalten, die von 4 gleichschenkligen Dreiecken umschlossen sind. Die 4 Mittelkanten steigen im Zickzack auf und ab, die Polkanten liegen horizontal. Scharfe Sphenoiden haben in der Polkante einen kleineren Winkel als das reguläre Tetraëder ($70^{\circ}32'$), stumpfe einen grösseren. Ihr Zeichen ist $+\frac{mP}{2}$, $-\frac{mP}{2}$. (Fig. 65. 66.)

Fig. 64.

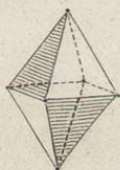


Fig. 65.

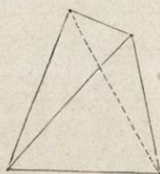
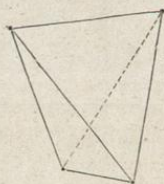


Fig. 66.



Die übrigen Gestalten werden durch diese Art der Hemiëdrie nicht im Habitus geändert.

3. Pyramidale Hemiëdrie. Wenn in den oben und unten mit einander correspondirenden Oktanten der ditetragonalen Pyramide entweder die links oder die rechts gelegenen, an einer und derselben Basiskante liegenden Flächenpaare zum Durchschnitt gelangen, so entstehen aus derselben zwei 8seitige Doppelpyramiden, die sich von den Proto- und Deuteropyramiden nur durch ihre mittlere, vom Werthe n abhängige Lage unterscheiden. Man kann sie, von der Normalstellung ausgehend, als eine rechte (r) und eine linke (l) unterscheiden. Doch lässt sich durch Umkehrung der Hauptaxe die eine in die andere congruente verwandeln. Daher bezeichnet man sie als $\frac{r}{l} \frac{mPn}{2}$ und $\frac{l}{r} \frac{mPn}{2}$. Die Austrittspunkte der Nebenaxen liegen zwischen den Mittelpunkten der Basiskanten und den Basisecken der Formen. (In Fig. 67 p. 65 ist mit 1 die Lage der Basis der Pyramide erster Ordnung bezeichnet, die der Pyramiden 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung mit 2 und 3.

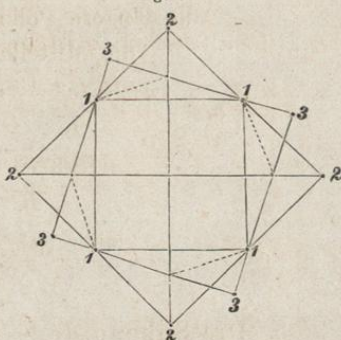
Durch Uebertragung dieser Modalität der Hemiëdrie auf die übrigen Hauptformen gelangt man zu den folgenden Resultaten.

Die ditetragonalen Prismen ∞Pn gehen in tetragonale Prismen der dritten Ordnung über (Tritoprismen). $\frac{r \infty Pn}{l \cdot 2} \cdot \frac{l \infty Pn}{r \cdot 2}$.

Alle übrigen Formen verändern den holoëdrischen Habitus nicht.

4. Rhombotype Hemiëdrie kann dadurch bewirkt werden, dass sich in den ditetragonalen Pyramiden die an den Polkanten desselben verticalen Hauptschnittes gelegenen 4 Flächenpaare allein ausbilden. Es entstehen dadurch rhombische Pyramiden. Diese Hemiëdrie setzt die quadratischen Formen zu den rhombischen in geometrische Beziehung. Naumann vermuthete im Harmotom eine rhombotype Hemiëdrie; die Krystallisation dieses stets in Zwillingen auftretenden Minerals wird indessen auf Grund des optischen Verhaltens jetzt monoklin angenommen.

Fig. 67.



Berechnung der quadratischen Hemiëdrien.

1. Das tetragonale Trapezoëder $r \frac{mPn}{2}, l \frac{mPn}{2}$.

Es seien die Polkanten mit X bezeichnet, die normalen Mittelkanten mit Z ; diejenigen, in deren Mitten die Nebenaxen münden; die secundären Mittelkanten mit Z_1 .

$$\cos X = -\frac{n^2}{K}, \quad K = m^2 c^2 (n^2 + 1) + n^2.$$

$$\cos Z = -\frac{m^2 c^2 (n^2 - 1) - n^2}{K}.$$

$$\cos Z_1 = -\frac{n (2m^2 c^2 - n)}{K}.$$

2. Das tetragonale Skalenoëder $\pm \frac{mPn}{2}$.

Es sei die kürzere Polkante = X,
 die längere Polkante = Y,
 die Mittelkante = Z.

$$\cos X = \frac{n(2m^2c^2 - n)}{K} = K = m^2c^2(n^2 + 1) + n^2.$$

$$\cos Y = - \frac{n(2m^2c^2 + n)}{K}.$$

$$\cos Z = - \frac{m^2c^2(n^2 - 1) - n^2}{K}.$$

3. Die Sphenoide $\pm \frac{mP}{2}$.

$$\cos X = \frac{2m^2c^2 - 1}{2m^2c^2 + 1}.$$

$$\cos Y = -1 = \cos 180^\circ.$$

$$\cos Z = \frac{1}{2m^2c^2 + 1}.$$

4. Die Tritopyramiden $\frac{r}{l} \frac{mPn}{2}, \frac{l}{r} \frac{mPn}{2}$.

$$\cos X = - \frac{n^2}{K}.$$

$$\cos Z = - \frac{m^2c^2(n^2 + 1) - n^2}{K}; K = m^2c^2(n^2 + 1) + n^2.$$

Tetartoëdrische Formen des quadratischen Systems.

Auch hier lassen sich die Tetartoëdrien am bequemsten als

Fig. 68.

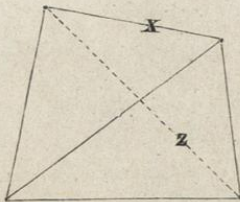
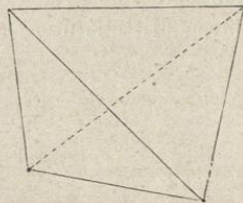


Fig. 69.



Hemiëdrien von Hemiëdrien auffassen. Da die Tritopyramide bereits eine hemiëdrische Form ist, so kann sich sowohl $\frac{r}{l} \frac{mPn}{2}$, als $\frac{l}{r} \frac{mPn}{2}$ in je zwei sphenoïdische Tetartoëdrien zerlegen. Diese werden als Tritosphenoïde bezeichnet (Fig. 68. 69). Da die Pol-

kante jedes Sphenoids das Supplement zur Mittelkante, jede Mittelkante des Sphenoids das Supplement der Polkante der Stammform ist, aus welchem das Sphenoid abgeleitet wurde, so ist auch

$$\cos X = \frac{m^2 c^2 (n^2 + 1) - n^2}{K} = - \cos Z \text{ der Stammform.}$$

$$\cos Z = \frac{n^2}{K} = - \cos X \text{ der Stammform.}$$

$$K = m^2 c^2 (n^2 + 1) + n^2.$$

Die Hemiëdrien der Trapezoëder, der tetragonalen Skalenoëder und der rhombotypen Pyramide bilden schiefe Sphenoiden (Plagiosphenoiden) verschiedener Art. Die aus der rhombotypen Hemiëdrie abgeleiteten Plagiosphenoiden sind ebensowohl, wie die aus dem Skalenoëder hervorgegangenen enantiomorph. Dagegen erscheinen die Sphenoiden des Trapezoëders tautomorph, d. h. beide Sphenoiden desselben Trapezoëders sind congruent, aber symmetrisch zu den beiden Sphenoiden des Gegen-Trapezoëders.

Durch Tetartoëdrie verwandeln sich

Die Protopyramiden mP in tetragonale Sphenoiden.

Die Deuteropyramiden $mP\infty$ in horizontale Prismen.

Die ditetragonalen Prismen ∞Pn in rhombische Prismen.

Das Protoprisma ∞P und das basische Pinakoid oP verändern ihren Habitus nicht.

Das Deuteroprisma $\infty P\infty$ in ein Pinakoid.

An Krystallen ist die quadratische Tetartoëdrie noch nicht beobachtet worden.

III. Hexagonales System.

Die Formen des hexagonalen Systems lassen sich naturgemäss auf ein vierzähliges Axenkreuz zurückführen, in welchem eine eminente Hauptaxe normal auf der Ebene dreier gleichwerthiger, sich unter 60° schneidender Nebenaxen steht. Durch das Gegenüberreten Einer besonderen Ausbildungsrichtung gegen die übrigen unter sich gleichen der Nebenaxen gewinnt die Behandlungs- und Erscheinungsweise der hexagonalen Krystallformen eine grosse Aehnlichkeit mit der der quadratischen, jedoch mit dem charakteristischen Unterschiede, dass die hexagonalen Gestalten durch eine 6gliedrige, die quadratischen durch eine 4gliedrige Symmetrie beherrscht werden.

Das Grundaxenverhältniss dieses Systems lässt sich durch

$$a : a : a : c = P$$

ausdrücken. Für jede hexagonal hrystallisirende Substanz hat c einen charakteristischen Werth in Beziehung auf a .

Für Arsen ist $a : c = 1 : 1,4025$.

Thonerde (Korund) $a : c = 1 : 1,3617$.

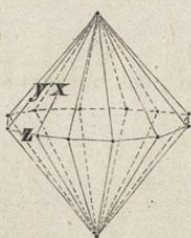
Kalkspath $a : c = 1 : 0,8543$ etc.

Eine Fläche von allgemeiner Lage im hexagonalen Axenkreuzes schneidet das Axenkreuz in vier Punkten von den allgemeinen Abstandsverhältnissen vom Mittelpunkte $a : na : (ra) : mc$. Durch drei Punkte im Raume, hier also durch einen auf der Hauptaxe und durch 2 auf den Nebenaxen, ist aber die Lage der Fläche bereits bestimmt, ein vierter Punkt (ra) ist selbstverständlich, wir setzen daher diesen in Parenthese.

Diejenige Form, welche von der maximalen Flächenzahl der Lage $a : na : (ra) : mc$ umschlossen wird, ist

1. Die dihexagonale Pyramide mPn (Fig. 70), eine Form, welche der ditetragonalen Pyramide analog, aber durch ihre Sechsgliedrigkeit von ihr unterschieden ist. Durch sechs primäre verticale Hauptschnitte, d. h. Ebenen, welche durch die Hauptaxe c und je eine Nebenaxe a verläuft, und durch den basischen (durch die Nebenaxen bestimmten) wird der Raum um den Mittelpunkt des Axenkreuzes in 12 gleiche Triëder zerlegt. Ueber jedem Raumzöwftel sind 2 Flächen der dihexagonalen Pyramide construierbar, in summa

Fig. 70.



um die ganze Form also 24. Sie sind ungleichseitige Dreiecke. Die Form hat 2 zwölf-flächige Pol- oder Endecken an mc , 6 vier-flächige Basiskanten an a und 6 vier-flächige Mittelecken (Zwischenecken) zwischen den Basisecken. Von den dreierlei Kanten liegen 12 gleiche in der dihexagonalen Basis (Basiskanten, Seitenkanten, Grundkanten) 12 primäre Polkanten verbinden die Basisecken mit den Polecken, und 12 secundäre Polkanten (Mittelkanten) die Mittelecken mit den Polkanten.

Aus dieser allgemeinen Form leiten sich die folgenden Haupt- oder Grenzformen ab.

2. Für $m = \infty$, das dihexagonale Prisma $a:na:(ra):\infty c = \infty P_n$ (Fig. 71). Ein der Hauptaxe paralleles Prisma von dihexagonalem Querschnitt, in welchem also die abwechselnden Prismenkanten gleichwinklig sind.

3. Für $m = 0$, das basische Pinakoid $oP = a:na:(ra):\infty c = \infty a:\infty a:\infty a:mc$. Ein dem basischen Hauptschnitte paralleles Flächenpaar, welches in Combinationen die Endecken der Formen horizontal abstumpft.

4. Für $n = 1$, die hexagonale Pyramide, Protopyramide, Pyramide 1^{ter} Ordnung (Fig. 72), $a:a:(\infty a):mc = mP$. Je zwei an einer secundären Polkante liegende Flächen der dihexagonalen Pyramide fallen in Eine Ebene. Die Form wird 12flächig, die Flächen werden gleichschenklige Dreiecke, deren Basen die Basiskanten, deren gleiche Schenkel die primären Polkanten bilden. Die Zwischenecken verschwinden. Es bleiben 2 sechsflächige Pol-ecken und 6 vierflächige Basisecken. Die Basis ist ein reguläres Sechseck, in dessen Ecken die Nebenaxen münden.

Fig. 71.

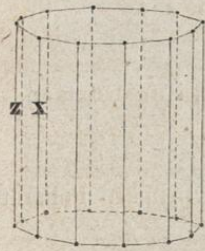


Fig. 72.

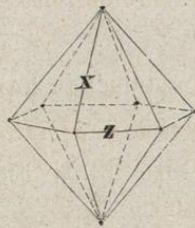
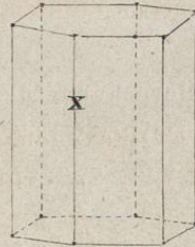


Fig. 73.



5. Für $n = 1$ und $m = \infty$, das hexagonale Prisma, Proto-prisma, Prisma 1^{ter} Ordnung (Fig. 73) $a:a:(\infty a):\infty c = \infty P$. Ein der Hauptaxe paralleles Prisma von hexagonalem Querschnitt.

Fig. 74.

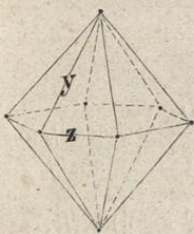
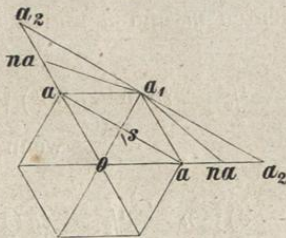


Fig. 75.



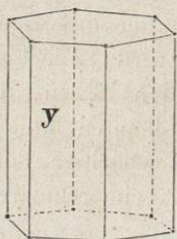
6. Für $n = 2$ die Pyramide zweiter Ordnung, Deutropyramide (Fig. 74) $a:2a(2a):mc = mP2$. Wenn (beistehende Fig. 75) in der hexagonalen Basis die Durchschnitte der Protopyramiden-

flächen als Seitenkanten aa_1 erscheinen, und von a_1 aus die Para-

meter der Nebenaxen 1 in die der dihexagonalen Pyramiden na übergehen, so ist offenbar diejenige Lage, für welche je zwei Nachbarflächen zusammen fallen, eine Hauptlage, wie $a_2 a_2$. Da nun $os:oa_1 = 1:2$ ist, so muss auch $oa:oa_2 = 1:2$ sein, da $os:oa_1 = oa:oa_2$. Das heisst die obere Grenze für das Wachstum der Nebenaxencoëfficienten einer dihexagonalen Pyramide ist durch den Werth 2 bestimmt.

Die Deuteropyramide $mP2$ unterscheidet sich von der Protopyramide nur durch ihre Lage im Axenkreuz, welche in Combinationen erkennbar wird. Die Axen a münden in den Mittelpunkten der Seitenkanten. Die Form hat daher 2 Polecken, 6 Mittelecken und 12 secundäre Polkanten, die primären sind ($= 180^\circ$) verschwunden.

Fig. 76.



7. Für $n = 2$ und $m = \infty$, das Prisma 2ter Ordnung, Deuteroprisma (Fig. 76) $a:2a:(2a):\infty c = \infty P2$. Eine sich nur durch die

Stellung vom Protoprisma unterscheidende Form, sie stumpft in Combination die Kanten des Protoprismas gerade ab.

Berechnung der holoëdrischen hexagonalen Formen.

1. Dihexagonale Pyramiden mPn .

$$\cos X = - \frac{2m^2c^2(n^2 + 2n - 2) + 3n^2}{K} = \text{primäre Polkante.}$$

$$\cos Y = - \frac{2m^2c^2(4n - n^2 - 1) + 3n^2}{K} = \text{secundäre Polkante.}$$

$$\cos Z = - \frac{4m^2c^2(n^2 - n + 1) - 3n^2}{K} = \text{Basiskante.}$$

$$K = 4m^2c^2(n^2 - n + 1) + 3n^2.$$

Die Parametercoëfficienten m und n finden sich:

1) Aus X und Z .

$$ma = tg \frac{1}{2} Z \cdot \sin v; \quad n - \frac{1}{2} = tg(v - 30^\circ) \sqrt{\frac{3}{4}},$$

$$\text{wenn } \cos v = \frac{\cos \frac{1}{2} X}{\sin \frac{1}{2} Z}.$$

2) Aus Y und Z .

$$ma = tg \frac{1}{2} Z \cdot \sin(150^\circ - \delta); \quad n - \frac{1}{2} = tg(120^\circ - \delta) \sqrt{\frac{3}{4}},$$

$$\text{wenn } \cos \delta = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} Z}.$$

3) Aus X und Y .

$$\frac{2-n}{n-1} = \frac{\cos \frac{1}{2} X \cdot \sqrt{3}}{\cos \frac{1}{2} Y}, \quad ma = tg \xi, \quad \text{wenn } \sin \xi = \frac{n\sqrt{3}}{2-n} \cdot \cotg X.$$

2. Protopyramiden mP .

$$\cos X = -\frac{2m^2c^2 + 3}{4m^2c^2 + 3}.$$

$$\cos Y = -1 = \cos 180^\circ.$$

$$\cos Z = -\frac{4m^2c^2 - 3}{4m^2c^2 - 3}.$$

Die Parametercoefficienten

1) aus X .

$$ma = tg \xi, \quad \text{wenn } \sin \xi = \cotg \frac{1}{2} X \cdot \sqrt{3}.$$

2) aus Z .

$$ma = tg \frac{1}{2} Z \cdot \sqrt[3]{4}.$$

3. Deuteropyramiden $mP2$.

$$\cos X = -1 = \cos 180^\circ.$$

$$\cos Y = -\frac{m^2c^2 + 2}{2m^2c^2 + 2}.$$

$$\cos Z = -\frac{m^2c^2 - 1}{m^2c^2 + 1}.$$

Die Parametercoefficienten

1) aus Y .

$$ma = tg \frac{1}{2} Z, \quad \text{wenn } \sin \frac{1}{2} Z = 2 \cdot \cos \frac{1}{2} Y.$$

2) aus Z .

$$ma = tg \frac{1}{2} Z.$$

4. Dihexagonale Prismen ∞Pn .

$$\cos X = -\frac{n^2 + 2n - 2}{2(n^2 - n + 1)}.$$

$$\cos Y = -\frac{4n - n^2 - 1}{2(n^2 - n + 1)}.$$

$$\cos Z = -1 = \cos 180^\circ.$$

Die Parametercoefficienten

1) aus X .

$$\frac{n}{2-n} = tg \frac{1}{2} X \cdot \sqrt[3]{3}.$$

2) aus Y .

$$\frac{n+1}{n-1} = tg \frac{1}{2} Y \cdot \sqrt{3}.$$

Hemiëdrische Formen des hexagonalen Systems.

Wie das quadratische System, so liefert auch das hexagonale durch die allgemeinste Form vier verschiedene Arten von Hemiëdrie. Während dort die daraus hervorgehenden Formen ihren viergliedrigen Charakter beibehalten, so hier die hexagonalen ihren 6gliedrigen. Ueber jedem Sextanten des Axenkreuzes befinden sich in der dihexagonalen Pyramide vier Flächen, von denen entweder die alternirenden oder die correspondirenden Paare für sich allein zur Ausbildung gelangen oder verschwinden.

1. Trapezoëdrische Hemiëdrie. Das hexagonale Trapezoëder entsteht durch Wachsen und Verschwinden der um die Form mPn alternirenden Flächen.

In jedem Sextanten bleiben in Folge dessen je eine Fläche oben links und je eine unten rechts, oder umgekehrt: oben rechts und unten links erhalten.

Das hexagonale Trapezoëder erscheint als sechsflächige Doppelpyramide mit zweierlei zickzackförmig auf- und absteigenden Basisanten, und mit gleichen Polkanten. Die Flächen sind gleichschenklige Trapezoide. In den correlaten Formen sind die oberen Pyramiden gegen die unteren entweder nach rechts oder nach links gedreht. Daher können dieselben nicht zur Deckung gebracht werden; sie sind enantiomorph und werden durch die Zeichen $r \frac{mPn}{2}$, $l \frac{mPn}{2}$ unterschieden (Fig. 77. 78).



Die übrigen holoëdrischen Hauptformen erleiden durch trapezoëdrische Hemiëdrie keine Aenderung des Habitus.

2. Rhomboëdrische Hemiëdrie. Wenn in der dihexagonalen Pyramide abwechselnd die oberen und die unteren Flächenpaare der aufeinander folgenden Sextanten zur Ausbildung oder zum Verschwinden gelangen, so entsteht

das hexagonale Skalenoëder, $\pm \frac{mPn}{2}$ (Fig. 79. 80), eine von 12 ungleichseitigen Dreiecken begrenzte Form, deren Basiskanten zickzackförmig auf- und absteigen. Die 12 Polkanten sind zweierlei Art, sechs längere stumpfere und sechs kürzere schärfere. Die Basiskanten sind gleich, die correlaten Formen congruent.

Durch dieselbe Art der Hemiëdrie entsteht aus der Protopyramide das Rhomboëder, $\pm \frac{mP}{2}$ (Fig. 81. 82). Es erscheint als ein Skalenoëder, für welches die längeren Polkanten $= 180^\circ$ geworden und verschwunden sind. Die 6 begrenzenden Flächen der Form sind congruente Rhomben. Sechs ihrer Kanten erscheinen als gleiche Polkanten und 6 als gleiche, zickzackförmig auf- und absteigende Basiskanten. Die Winkel der Polkanten und der Basis-

Fig. 79.

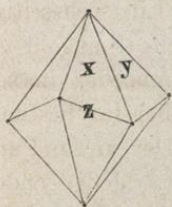


Fig. 80.



Fig. 81.



Fig. 82.



kanten ergänzen sich zu 180° . Die Axen a münden in den Mittelpunkten der Basiskanten.

Alle übrigen Formen des hexagonalen Systems werden durch rhomboëdrische Hemiëdrie in ihrer Erscheinungsweise nicht geändert.

Das rhomboëdrische System.

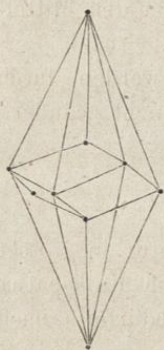
Rhomboëdrische Hemiëdrien finden sich in der Natur in grosser Zahl und in zahlreichen Combinationen (besonders am Kalkspath), so dass sich für dieselben im Laufe der Zeit das Bedürfniss nach einer Vereinfachung ihrer schriftlichen Bezeichnungsweise bereits geltend gemacht hat, indem man an Stelle von $\pm \frac{mP}{2}$ für das Rhomboëder das Zeichen $+ mR$ setzt, und die Bezeichnung des Skalenoëders, entsprechend einer sehr einfachen Ableitung dieses aus jenem, ebenfalls das Zeichen R mit gewissen Coëfficienten und Indices zu Grunde legt. Indessen lässt sich die Auffassung, welcher zufolge

das Rhomboëder ein eigenthümliches Krystallsystem repräsentirt, ebensowohl durch Annahme einer besonderen, mit der hexagonalen Molekularconstitution nicht identischen (vergl. p. 25) Anordnungsweise der Molekel, wie auch durch die Thatsache vertheidigen, dass ausser dem Rhomboëder keine andere hemiëdrische Form existirt, welche eine hemiëdrische Spaltbarkeit besitzt. (Dass es nicht naturgemäss sei, die klinometrischen Systeme als Hemiëdrien und Tetartoëdrien des rhombischen Systems aufzufassen, in Folge dessen jene Systeme allerdings hemiëdrische und tetartoëdrische Spaltbarkeit besässen, hat C. F. Naumann bekanntlich durch das Fehlen rechtwinklig sich schneidender Pinakoide, so wie durch die Einfachheit der Parameterverhältnisse der Flächen, auf schiefe Axenkreuze bezogen, sehr wahrscheinlich gemacht.)

Das Grundrhomboëder einer Substanz bezeichnen wir im Folgenden mit R , jedes abgeleitete als mR , welches je nach relativer Stellung ein $+mR$ oder $-mR$ sein kann. Ein sechsseitiges Prisma mit einem R combinirt ist ∞R , das basische Pinakoid oR .

Das Skalenoëder steht zu seinem Grundrhomboëder in sehr einfacher Beziehung. Eine Rhomboëderfläche ist bereits bestimmt durch die Lage dreier Eck-Punkte in der Basis. Der vierte Punkt in der Hauptaxe versteht sich alsdann von selbst. Jeder andere Punkt auf der Hauptaxe fällt nicht in die Rhomboëderfläche. Für

Fig. 83.



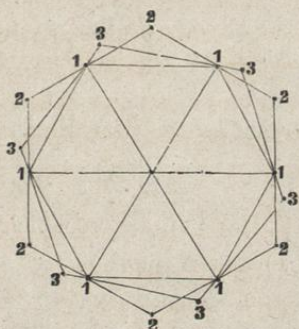
jeden Punkt, welcher einen grösseren Abstand vom Mittelpunkt des Axenkreuzes hat, als der Eckpunkt des Rhomboëders lässt sich ein Skalenoëder construiren, wenn man von ihm aus nach den Basis-ecken des Rhomboëders gerade Linien legt. Solche Skalenoëder sind vollkommen bestimmt, wenn man angiebt, wie vielmal grösser die Hauptaxe desselben, als die des dazu gehörigen Rhomboëders ist. Ist allgemein $+mR$ das Rhomboëder, welches durch n fache Vergrösserung der Hauptaxe das Skalenoëder giebt, so ist das allgemeine Zeichen für dieses = $+mR^n$ (vergl. Fig. 83).

3. Die pyramidale Hemiëdrie.

In den aufeinanderfolgenden Gliedern der dihexagonalen Pyramide sind entweder die links oder die rechts gelegenen in einer Basiskante correspondirenden Flächenpaare zur Ausbildung gelangt. Daraus geht eine sechsgliedrige hexagonale Doppelpyramide hervor,

die Tritopyramide oder Pyramide 3^{ter} Ordnung. Sie liegt mit ihren Basiskanten gegen die Proto- und Deuteropyramide entweder rechts oder links um die Hauptaxe gedreht. Durch Umkehrung kann die Eine Protopyramide in die Lage der anderen zur Congruenz gebracht werden. Daher, wie bei dem quadratischen System, $\frac{r m P n}{l \cdot 2}$, $\frac{l m P n}{r \cdot 2}$. In Fig. 84 sind die basischen Hauptschnitte der Pyramiden 1^{ter}, 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung ihrer gegenseitigen Lage nach dargestellt und an ihren Eckpunkten mit 1, 2 und 3 bezeichnet.

Fig. 84.



Die dihexagonalen Prismen verwandeln sich durch pyramidale Hemiëdrie in hexagonale Prismen 3^{ter} Ordnung, Tritoprismen. Die übrigen Formen bleiben ungeändert.

4. Trigonotype Hemiëdrie.

Sie entsteht, wenn in den aufeinanderfolgenden Sextanten abwechselnd die rechts und die links* gelegenen Flächenpaare für sich zum Durchschnitt gelangen. Es entsteht dadurch: aus der dihexagonalen Pyramide die ditrigonale Doppelpyramide mit ebener Basis; aus der hexagonalen Deuteropyramide die trigonale Doppelpyramide mit ebener Basis. Die dihexagonalen Prismen werden ditrigonale, die Deuteroprismen werden trigonale Prismen. Alle anderen Formen bleiben ungeändert.

Diese Art der Hemiëdrie wurde an Krystallen noch nicht beobachtet.

Berechnung hemiëdrischer Formen des hexagonalen Systems.

1. Das hexagonale Trapezoëder, $r, l \frac{m P n}{2}$.

Die Polkanten sind mit X , die an den Axen liegenden Basiskanten mit Z die anderen mit Z_1 bezeichnet.

$$\cos X = - \frac{2m^2c^2(n^2 - n + 1) + 3n^2}{K}$$

$$\cos Z_1 = - \frac{2m^2c^2(4n - n^2 - 1) - 3n^2}{K}$$

$$\cos Z = - \frac{2m^2c^2(n^2 + 2n - 2) - 3n^2}{K}$$

$$K = 4m^2c^2(n^2 - n + 1) + 3n^2.$$

2. Das Skalenoëder mR^n .

$$\cos X = -\frac{2m^2c^2(2n^2 - 2n - 1) + 3n^2}{K}, \text{ die kürzeren Polkanten.}$$

$$\cos Y = -\frac{2m^2c^2(4n - n^2 - 1) + 3n^2}{K}, \text{ die längeren Polkanten.}$$

$$\cos Z = -\frac{2m^2c^2(n^2 + 2n - 2) - 3n^2}{K}, \text{ die Basiskanten.}$$

$$K = 4m^2c^2(n^2 - n + 1) + 3n^2.$$

Die Parametercoefficienten:

1) aus X und Y .

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\cos \frac{1}{2} X}{\cos \frac{1}{2} Y}, \text{ und } ma = \cotg \xi \sqrt{3},$$

$$\text{wenn } \cos \xi = \frac{\tg \frac{1}{2} Z}{n\sqrt{3}} \text{ und } \sin \frac{1}{2} Z = \frac{2n}{n+1} \cdot \cos \frac{1}{2} X.$$

2) aus X und Z .

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{\sin \frac{1}{2} Z}{\cos \frac{1}{2} X}; \text{ } ma = \cotg \xi \cdot \sqrt{3}, \text{ wenn } \cos \xi = \frac{\tg \frac{1}{2} Z}{n\sqrt{3}}.$$

3) aus Y und Z .

$$\frac{2n}{n-1} = \frac{\sin \frac{1}{2} Z}{\cos \frac{1}{2} Y}; \text{ } ma = \cotg \xi \sqrt{3}, \text{ wenn } \cos \xi = \frac{\tg \frac{1}{2} Z}{n\sqrt{3}}.$$

3. Das Rhomboëder, mR .

$$\cos X = \frac{2m^2c^2 - 3}{4m^2c^2 + 3}.$$

$$\cos Y = -1 = \cos 180^\circ.$$

$$\cos Z = -\cos X.$$

Der Parametercoefficient

aus X .

$$ma = \cotg \xi \cdot \sqrt{3}, \text{ wenn } \cos \xi = \cotg \frac{1}{2} X \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Tetartoëdrische Formen des hexagonalen Systems.

1. Rhomboëdrische Tetartoëdrie. Die bereits hemiëdrische Tritopyramide kann durch wiederholte Hemiëdrie in 2 tetartoëdrische Rhomboëder zerfallen. Sämmtliche Pyramiden des hexagonalen Systems liefern durch diese Art der Hemiëdrie Rhomboëder, sämmtliche Prismen, hexagonale Prismen.

2. Trigonotype oder trapezoëdrische Tetartoëdrie. Ein Skalenoëder zerfällt durch Wachsen oder Verschwinden der an den abwechselnden Mittelkanten gelegenen Flächenpaare in zwei trigonale Trapezoëder. Diese sind von 6 gleichschenkligen Trapezoiden umschlossene enantiomorphe Gestalten, mit drei längeren stumpferen und drei kürzeren schärferen Mittel- oder Basiskanten, die im Zickzack auf- und absteigen. Die vier aus der holoëdrischen Stammform hervorgegangenen Tetartoëder lassen sich durch die Zeichen $\pm r \frac{mPn}{4}$, $\pm l \frac{mPn}{4}$ bezeichnen (Fig. 85. 86. 87).

Fig. 86.

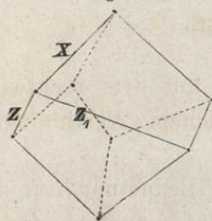


Fig. 85.

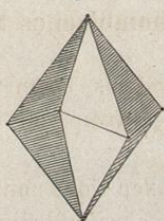


Fig. 87.

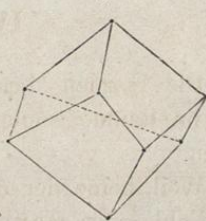


Fig. 88.

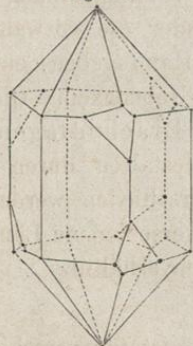
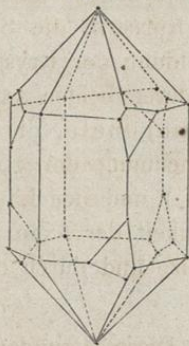


Fig. 89.



Durch Uebertragung dieser Tetartoëdrie auf die übrigen Hauptformen des Systems entsteht

- aus der Protopyramide ein Rhomboëder,
- aus der Deuterypyramide eine trigonale Pyramide,
- aus den dihexagonalen Prismen ditrigonale,
- aus dem Deuteroprisma ein trigonales.

Das Protoprisma bleibt unverändert, wie das basische Pinakoid.

Trigonale Trapezoëder kommen am Quarz vor, sowohl rechts als links gestellte und stehen im Zusammenhange mit den rechts und links das Licht circularpolarisirenden Eigenschaften dieser Substanz. (Vergl. bei Quarz im Systeme und Fig. 88. 89.)

$$\cos X = \frac{2m^2c^2(n^2 - n + 1) - 3n^2}{K} \text{ Polkante.}$$

$$\cos Z = \frac{2m^2c^2(n^2 + 2n - 2) + 3n^2}{K} \text{ primäre Seitenkante.}$$

$$\cos Z_1 = \frac{2m^2c^2(2n^2 - 2n - 1) + 3n^2}{K} \text{ secundäre Seitenkante.}$$

$$K = 4m^2c^2(n^2 - n + 1) + 3n^2.$$

IV. Rhombisches System.

Die Formen dieses Systems lassen sich auf drei rechtwinklig sich im Raume schneidende Axen von ungleichem Werthe zurückführen.

Weil keine der drei Axen von eminenter Bedeutung ist, so ist die Wahl einer Hauptaxe c willkürlich. Hat man sich für eine derselben (etwa aus Gründen, welche der Zusammenhang mit anderen isomorphen Körpern, die Spaltbarkeit oder die vorwaltend prismatische Ausbildung der Krystalle an die Hand geben) entschieden, so sind die anderen beiden Axen a und b Nebenaxen. Die längere ist die Makrodiagonale, die kürzere die Brachydiagonale, welche in der Bezeichnung der rhombischen Gestalten durch die Zeichen der Kürze (\sim) und der Länge ($\bar{\sim}$) unterschieden werden. Die Ungleichwerthigkeit der Axen wird durch verschiedene Länge derselben im Axenkreuze und durch das Grundaxenverhältniss

$$a : b : c = P$$

angedeutet. Dieses Grundaxenverhältniss ist für verschiedene rhombisch krystallisirte Substanzen ein bestimmtes. So z. B.

$$\text{für Schwefel } a : b : c = 1,898 : 1 : 1,8106,$$

$$\text{für Baryt } a : b : c = 0,7618 : 1 : 0,6206,$$

$$\text{für Topas } a : b : c = 0,4770 : 1 : 0,5285 \text{ etc.}$$

Bei der Bezeichnung der Formen in diesem Systeme wird daran fest gehalten, dass der Parametercoefficient der Hauptaxe stets vor, der der Nebenaxen hinter, und das Zeichen der makro- oder brachydiagonalen Nebenaxe über das Element P gesetzt wird.

Die allgemeinsten Flächenlagen $a : nb : mc = mPn$ oder $na : b : mc = mPn$ lassen insofern eine Zweideutigkeit erkennen, als der

Coëfficient n ebensowohl für die Makro- als die Brachydiagonal gelten kann. Ist in dem Axenkreuz a die Brachydiagonale, b die Makrodiagonale, so würden die allgemeinsten Formen sich als $m\bar{P}n$ und $m\bar{P}n$ unterscheiden.

Da jede der Axen eine einzelne Axe ist, so wird über jedem Octanten des Axenkreuzes auch nur Eine Fläche $a : nb : mc$ oder $ma : b : mc$ construierbar sein. Die allgemeinste Form mPn des Systems besitzt daher nur 8 Flächen von ungleichseitig dreieckige Gestalt. Diese Form ist

1. Die rhombische Pyramide, mPn (Fig. 90). Ihre Kanten sind dreierlei Art. Makrodiagonale schärfere Polkanten, brachydiagonale stumpfere Polkanten und basische, Seiten- oder Grundkanten. Ebenso sind ihre 6 Ecken dreierlei Art. Pol- oder Endecken, makrodiagonale spitzere und brachydiagonale stumpfere Ecken.

Fig. 90.

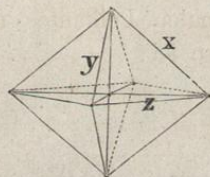


Fig. 91.

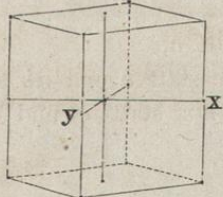


Fig. 92.

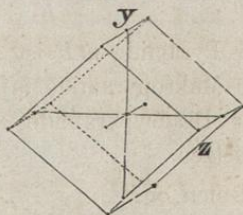


Fig. 93.

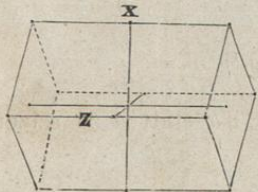
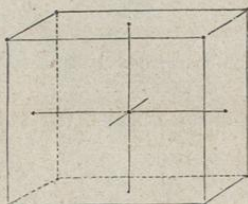


Fig. 94.



Diese Form kann verschieden werden durch Aenderungen der Parametercoëfficienten der drei Axen innerhalb der Grenzen o und ∞ .

- 2) Für $m = o$ entsteht das basische Pinakoid oP .
- 3) Für $m = \infty$, das rhombische Hauptprisma ∞P (Fig. 91).
- 4) Für $n = o$ auf der Makrodiagonalen, $m\bar{P}o = \infty\bar{P}\infty$, das Brachypinakoid.
- 5) Für $n = \infty$ auf der Makrodiagonalen, $m\bar{P}\infty$, das horizontale Makroprisma oder Makrodoma (Fig. 93).

- 6) Für $n = 0$ auf der Brachydiagonalen, $m\check{P}0 = \infty\check{P}\infty$, das Makropinakoid.
 7) Für $n = \infty$ auf der Brachydiagonalen, $m\check{P}\infty$, das horizontale Brachyprisma oder Brachydoma. (Fig. 92.)
 (Die drei Pinakoide in Fig. 94 p. 79.)

Berechnung der rhombischen Formen.

Wenn die makrodiagonale Polkante mit X , die brachydiagonalen Polkanten mit Y , die Mittelkante mit Z bezeichnet werden, so ist:

$$\cos X = \frac{c^2b^2 - b^2a^2 - a^2c^2}{K}$$

$$\cos Y = \frac{a^2c^2 - c^2b^2 - b^2a^2}{K}$$

$$\cos Z = \frac{a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}{K}, \quad K = c^2b^2 + b^2a^2 + a^2c^2.$$

In jeder Pyramide mP ist mc statt c ,
 in jeder Makropyramide $m\check{P}n$, mc statt c und nb statt b ,
 in jeder Brachypyramide $m\check{P}n$, mc statt c und na statt a
 zu setzen.

Für Prismen ∞P .

$$\cos X = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}, \quad tg \frac{1}{2} X = \frac{a}{b}.$$

$$\cos Y = -\cos X, \quad tg \frac{1}{2} Y = \frac{b}{a}.$$

Für Prismen ∞Pn ist nb statt b und na statt a zu setzen.

Für Domen.

Makrodoma $\cos X = \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}, \quad tg \frac{1}{2} X = \frac{a}{c}.$

$$\cos Z = -\cos X, \quad tg \frac{1}{2} Z = \frac{c}{a}.$$

Brachydoma.

$$\cos Y = \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2}, \quad tg \frac{1}{2} Y = \frac{b}{c}.$$

$$\cos Z = -\cos Y, \quad tg \frac{1}{2} Z = \frac{c}{b}.$$

Berechnung der Axen aus den Kantenwinkeln.

Es sei α der Winkel der makrodiagonalen Polkante gegen die Hauptaxe c .

β der Winkel der brachydiagonalen Polkante gegen die Hauptaxe c .

γ der Winkel der Mittelkante gegen die Makrodiagonale b der Grundform.

Wir bezeichnen diese als Hauptschnitt-Winkel. Dann folgt:

1. aus α und β) $a : b : c = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : 1$.

2. aus α und γ) $a : b : c = \operatorname{tg} \gamma : 1 : \operatorname{cotg} \alpha$.

3. aus β und γ) $a : b : c = 1 : \operatorname{cotg} \gamma : \operatorname{cotg} \beta$.

Die Hauptschnittwinkel lassen sich finden:

1) aus eigenthümlichen Kanten der Pyramide X , Y und Z ,

aus X und Y , $\cos \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} X}$, $\cos \beta = \frac{\cos \frac{1}{2} X}{\sin \frac{1}{2} Y}$.

aus X und Z , $\sin \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} Z}{\sin \frac{1}{2} X}$, $\cos \gamma = \frac{\cos \frac{1}{2} X}{\sin \frac{1}{2} Z}$.

aus Y und Z , $\sin \beta = \frac{\cos \frac{1}{2} Z}{\sin \frac{1}{2} Y}$, $\sin \gamma = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} Z}$.

2) Aus den Kanten X , Y , Z und einem dazugehörigen α , β , γ .

aus X und α , $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} X \cdot \sin \alpha$.

aus Y und β , $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{1}{2} Y \cdot \sin \beta$.

aus Z und γ , $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z \cdot \sin \gamma$.

3) Aus X , Y und Z und einem der nicht zugehörigen α , β , γ .

aus X und β oder γ , $\sin \alpha = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} X \cdot \operatorname{tg} \beta$.
 $\cos \alpha = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} X \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

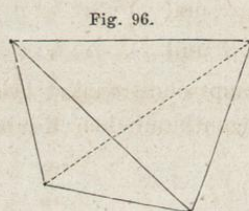
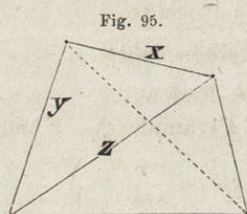
aus Y und α oder γ , $\sin \beta = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} Y \cdot \operatorname{tg} \alpha$.
 $\cos \beta = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} Y \cdot \operatorname{cotg} \gamma$.

aus Z und α oder β , $\sin \gamma = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} Z \cdot \operatorname{cotg} \alpha$.
 $\cos \gamma = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} Z \cdot \operatorname{cotg} \beta$.

Hemiëdrische Formen des rhombischen Systems.

Die flächenreichste Gestalt des rhombischen Systems, die rhombische Pyramide, ist von 8 ungleichseitigen Dreiecken umschlossen,

welche abwechselnd rings um die Form wachsend und verschwindend vierflächige sphenoidische Hemiëdrien liefern. Die rhombischen Sphenoide sind von 4 ungleichseitigen Dreiecken umschlossen, deren zickzackförmig auf- und absteigende Mittelkanten sich als zwei längere stumpfere und zwei kürzere schärfere erweisen. Die Polkanten sind verzerrte Eudecken der Pyramide und liegen horizontal. Die zwei correlaten Formen unterscheiden sich als rechts und links ausgebildete und sind enantiomorph. Man kann sie in Folge dessen als $r. \frac{mPn}{2}$ und $l. \frac{mPn}{2}$ unterscheiden (Fig. 95. 96). Alle holoëdrischen Gestalten des rhombischen Systems, mit Ausnahme der



Pyramide, erleiden durch diese Hemiëdrie keine Aenderung des Habitus. Diese Hemiëdrie hat man am Bittersalz, Zinkvitriol und an manchen anderen Salzen beobachtet.

Berechnung der rhombischen Sphenoide.

$$\cos X = \frac{b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2}{K} \text{ Polkante.}$$

$$\cos Y = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2}{K} \text{ kürzere Mittelkante.}$$

$$\cos Z = \frac{c^2a^2 + a^2b^2 - b^2c^2}{K} \text{ längere Mittelkante.}$$

$$K = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

V. Monoklines System.

Das monokline Axenkreuz besteht aus drei ungleichwerthigen Axen, von denen 2 zu einander rechtwinklig stehen, die dritte gegen die eine rechtwinklig, gegen die andere schiefwinklig gerichtet ist.

Eine der beiden schiefwinklig zu einander stehenden Axen wird als Hauptaxe c anzunehmen sein, weil ein Verticalschnitt durch die beiden als Symmetrie-Ebene aller monoklinen Krystalle erscheint. Die beiden Nebenaxen unterscheiden sich alsdann als Orthodiagonale, welche auf der Symmetrie-Ebene senkrecht steht, und als Klinodiagonale, welche in dieser rechtwinklig zur Orthodiagonalen und schiefwinklig zur Hauptaxe gerichtet ist. Das Grundaxenverhältniss der monoklinen Krystalle ist danach

$$a : b : c; \beta = \geq 90^\circ.$$

So ist für Orthoklas $a : b : c = 0,6585 : 1 : 0,5554; \beta = 116^\circ 3'$.

für Eisenvitriol $a : b : c = 1,1704 : 1 : 1,5312; \beta = 76^\circ 33'$ etc.

Die allgemeinste Form mPn ($= a : nb : mc$) ist eine einseitig schiefe 8flächige Doppelpyramide, welche dadurch gegen die rhombische Pyramide ausgezeichnet ist, dass diejenigen 4 Flächen, welche den spitzen Axen-Winkeln β gegenüberliegen, verschiedenwerthig von denen sind, die dem stumpfern Axenwinkel $180^\circ - \beta$ gegenüberliegen. Die monokline Pyramide zerfällt dadurch in zwei von einander unabhängige Hemipyramiden $+mPn$ und $-mPn$. ($+mPn$ liegt dem spitzen, $-mPn$ dem stumpfen Axenwinkel gegenüber.) Die vollständige monokline Pyramide ist daher nicht als einfache Form, sondern als Combination zweier Hemipyramiden aufzufassen, welche als solche den Krystall abschliessen. Die Hemipyramiden sind ungeschlossene Formen.

1. Die vollständige monokline Pyramide $\pm mPn$ (Fig. 97) hat dreierlei Polkanten; vier gleiche orthodiagonale, zwei kürzere schärfere und zwei längere stumpfere klinodiagonale. Ausserdem 4 gleiche Seiten- oder Mittelkanten. Der basische und orthodiagonale Hauptschnitt haben rhombische Gestalt, der klinodiagonale rhomboidische. Unter den unendlich vielen denkbaren monoklinen Pyramiden können wir zwischen solchen unterscheiden, welche durch Aenderung der klinodiagonalen entstehen, mPn ; und solchen, welche durch Aenderung der orthodiagonalen entstehen, mPn .

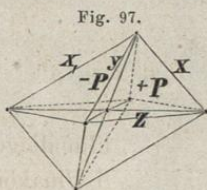


Fig. 97.

Aus der monoklinen Pyramide $\pm mPn$ lassen sich nach den bisher angewandten Methoden folgende Haupt- oder Grenzformen entwickeln.

2. Für $m = 0$, das basische Pinakoid oP (schiefe Endfläche an Krystallen).
3. Für $m = \infty$, das Hauptprisma ∞Pn von rhombischem Querschnitt. ($\infty Pn, \infty Pn$) (Fig. 98.)
4. Für $n = 0$, auf der Klinodiagonalen (mPo) = $oa : b : mc = a : \infty b : \infty c = \infty P\infty$, das Orthopinakoid, ein Flächenpaar, welches dem orthodiagonalen Hauptschnitt parallel liegt.
5. Für $n = \infty$, $mP\infty$, das Klinodoma, ein 4seitiges der Klinodiagonalen paralleles Prisma. (Fig. 99.)

Fig. 98.

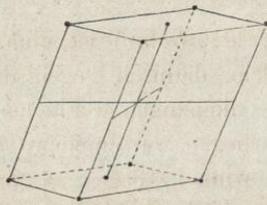


Fig. 99.

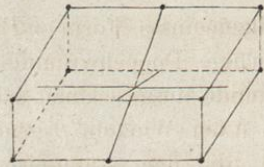


Fig. 100.

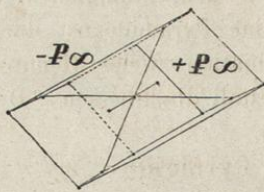
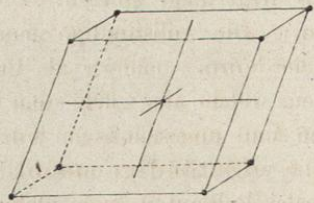


Fig. 101.



6. Für $n = 0$, auf der Orthodiagonalen (mPo) = $a : ob : mc = \infty a : b : \infty c = \infty P\infty$, das Klinopinakoid, ein dem klinodiagonalen Hauptschnitt paralleles Flächenpaar. (Die 3 Pinakoide in Fig. 101.)
7. Für $n = \infty$, $mP\infty$, das Orthodoma (Fig. 100), ein horizontales, der Orthodiagonalen paralleles Prisma, bestehend aus zwei Hemidomen $+mP\infty$ und $-mP\infty$, Flächenpaare, welche beziehentlich dem spitzen Winkel β und dem stumpfen $180 - \beta$ gegenüber liegen.

Die vollständige monokline Pyramide ist unter den Formen dieses Systems die einzige geschlossene.

Berechnung der monoklinen Formen.

Die Hemipyramiden werden begrenzt durch die Flächen $+P$ oder $-P$ und dem basischen und orthodiagonalen Hauptschnitt.

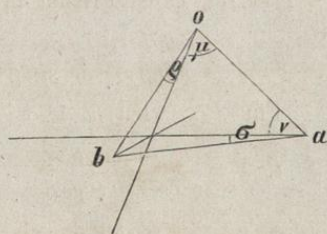
Wir bezeichnen daher mit X die klinodiagonale Polkante, durch $+P$ und den klinodiagonalen Hauptschnitt gebildet, mit Y die orthodiagonale Polkante, durch $+P$ und den orthodiagonalen Hauptschnitt gebildet, mit Z die Basiskante durch $+P$ und den basischen Hauptschnitt gebildet.

In der negativen Hemipyramide $-P$ werden die entsprechenden Kanten durch X_1 , Y_1 und Z_1 ausgedrückt.

Es sei ferner in der positiven Hemipyramide der Neigungswinkel

der klinodiagonalen Polkante gegen die Hauptaxe $= \mu$ (Fig. 102), derselben Polkante gegen die Klinodiagonale $= \nu$, der orthodiagonalen Polkante gegen die Hauptaxe $= \rho$, der basischen Kante gegen die Klinodiagonale $= \sigma$.

Fig. 102.



In der negativen Hemipyramide die beiden ersten Winkel mit μ_1 und ν_1 bezeichnet. Der schiefe Axenwinkel $= \beta$, die Orthodiagonale $= a$, die Hauptaxe $= c$; dann findet man

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{b \cdot \sin \beta}{c - b \cdot \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} \nu_1 = \frac{c \cdot \sin \beta}{b + c \cdot \cos \beta}.$$

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{c \cdot \sin \beta}{b - a \cdot \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} \rho = \frac{a}{c}.$$

$$\operatorname{tg} \mu_1 = \frac{b \cdot \sin \beta}{c + b \cdot \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{a}{b}.$$

$$\cos X = \frac{bc \cdot \sin \beta}{\sqrt{K}}, \quad \operatorname{tg} X = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\sin \nu} = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\sin \mu}, \quad \operatorname{tg} X_1 = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\sin \nu_1} = \frac{\operatorname{tg} \rho}{\sin \mu_1}.$$

$$\cos Y = \frac{a(c - b \cdot \cos \beta)}{\sqrt{K}}, \quad \operatorname{tg} Y = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\sin \rho}, \quad \operatorname{tg} Y_1 = \frac{\operatorname{tg} \mu_1}{\sin \rho}.$$

$$\cos Z = \frac{a(b - c \cdot \cos \beta)}{\sqrt{K}}, \quad \operatorname{tg} Z = \frac{\operatorname{tg} \nu}{\sin \sigma}, \quad \operatorname{tg} Z_1 = \frac{\operatorname{tg} \nu_1}{\sin \sigma}.$$

$$\sqrt{K} = \sqrt{a^2 b^2 + c^2 a^2 + b^2 c^2 \cdot \sin^2 \beta - 2 b c a^2 \cdot \cos \beta}.$$

Für die negative Hemipyramide sind die mit $\cos \beta$ behafteten Glieder als positiv einzuführen.

Prismen und Domen.

Setzt man in obigen Formeln für $c = \infty$ so erhält man für die Hauptprismen ∞P :

$$\operatorname{tg} X = \frac{a}{b \cdot \sin \beta} = \operatorname{cotg} Y.$$

$$\cos X = \frac{b \cdot \sin \beta}{\sqrt{a^2 + b^2 \cdot \sin^2 \beta}} = \sin Y.$$

$$\cos Y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 \cdot \sin^2 \beta}}$$

$$\cos Z = \frac{a \cdot \cos \beta}{\sqrt{a^2 + b^2 \cdot \sin^2 \beta}} = \cos Y \cdot \cos \beta.$$

Da für jedes Prisma $v_1 = \beta$ wird, so bestimmt sich

$$\operatorname{tg} X = \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\sin \beta} = \frac{a}{b \cdot \sin \beta} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} Z = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \sigma}, \quad \text{wobei} \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{a}{b}.$$

Für $P\infty$ wird $a = \infty$ (Orthodomen).

$$\operatorname{tg} Y = \frac{b \cdot \sin \beta}{c - b \cdot \cos \beta} \quad \cos X = 0 = \cos 90^\circ.$$

$$\operatorname{tg} Z = \frac{c \cdot \sin \beta}{b - c \cdot \cos \beta} \quad \cos Y = \frac{c - b \cdot \cos \beta}{\sqrt{c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos \beta}}.$$

$$\operatorname{tg} Y_1 = \frac{b \cdot \sin \beta}{c + b \cdot \cos \beta} \quad \cos Z = \frac{b - c \cdot \cos \beta}{\sqrt{c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos \beta}}.$$

$$\operatorname{tg} Z_1 = \frac{c \cdot \sin \beta}{b + c \cdot \cos \beta}.$$

Da in jedem Hemidoma $Z = \nu$ und $Y = \mu$ wird, so wird auch

$$\operatorname{tg} Z = \frac{c \cdot \sin \beta}{b - c \cdot \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} Y = \frac{b \cdot \sin \beta}{c - b \cdot \cos \beta}.$$

Führt man in diesen Ausdrücken $\cos \beta$ negativ ein, so verwandeln sich dieselben in diejenigen, welche für das negative Hemidoma $-P\infty$ gelten.

$$\cos Y_1 = \frac{c + b \cdot \cos \beta}{\sqrt{c^2 + b^2 + 2bc \cdot \cos \beta}} \quad \operatorname{tg} Y_1 = \frac{b \cdot \sin \beta}{c + b \cdot \cos \beta}.$$

$$\cos Z_1 = \frac{b + c \cdot \cos \beta}{\sqrt{c^2 + b^2 + 2bc \cdot \cos \beta}} \quad \operatorname{tg} Z_1 = \frac{c \cdot \sin \beta}{b + c \cdot \cos \beta}.$$

Für $P\infty$ ist $b = \infty$, (Klinodomen.)

$$\cos X = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sqrt{a^2 + c^2 \cdot \sin^2 \beta}} = \sin Z. \quad \text{tg } X = \frac{\text{tg } \beta}{\sin \varrho}, \text{ wobei } \text{tg } \varrho = \frac{a}{b}.$$

$$\cos Y = \frac{a \cdot \cos \beta}{\sqrt{a^2 + c^2 \cdot \sin^2 \beta}} = \cos X \cdot \cos \beta. \quad \text{tg } Z = \frac{\text{tg } \varrho}{\sin \beta} = \frac{a}{c \cdot \sin \beta}.$$

$$\cos Z = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2 \cdot \sin^2 \beta}}.$$

Berechnung der Axen aus den Winkeln.

In Combinationen $\infty P \cdot oP$ findet man den schiefen Neigungswinkel β , wenn man $\infty P : \infty P = W$ (an der Orthodiagonale) und $oP : \infty P$ (den schärferen Winkel) $= W_1$ misst. Dann ist

$$\cos \beta = \frac{\cos W_1}{\sin \frac{1}{2}(180^\circ - W)},$$

oder man findet β aus den Formeln:

$$\text{tg } \beta = \frac{2 \sin \mu \cdot \sin \mu_1}{\sin(\mu - \mu_1)}, \text{ oder } \text{tg } \beta = \frac{2 \sin \nu \cdot \sin \nu_1}{\sin(\nu - \nu_1)}.$$

Ist μ und ν oder μ_1 und ν_1 bekannt, so ist

$$\beta = 180^\circ - \mu - \nu = \mu_1 + \nu_1.$$

Die Hauptschnittwinkel findet man durch die Relationen:

$$\cos \mu = \frac{\cos Y}{\sin X}, \quad \cos \varrho = \frac{\cos X}{\sin Y} = \frac{\cos X_1}{\sin Y_1}, \quad \cos \mu_1 = \frac{\cos Y_1}{\sin X_1}.$$

$$\cos \nu = \frac{\cos Z}{\sin X}, \quad \cos \sigma = \frac{\cos X}{\sin Z} = \frac{\cos X_1}{\sin Z_1}, \quad \cos \nu_1 = \frac{\cos Z_1}{\sin X_1}.$$

Kennt man β und die Winkel zweier verschiedener Hauptschnitte, so ist das Verhältniss $a:b:c$ oder $a:nb:mc$ leicht zu berechnen.

VI. Triklines System.

Indem wir das dikline System, als an Krystallen noch nicht sicher nachgewiesen, hier übergehen, betrachten wir dasselbe als einen besonderen Fall des triklinen, in welchem einer der Axenwinkel $= 90^\circ$ ist.

Das Wesen des triklinen Systems besteht darin, dass dessen Formen auf ein Axenkreuz reducirbar sind, welches aus drei un-

gleichwerthigen Axen a , b und c besteht, die sich allesammt unter schiefen Winkeln α , β , γ (Axenwinkel) schneiden. Wählen wir Eine der Axen als Hauptaxe c , so unterscheiden wir unter den Nebenaxen die kürzere als Brachydiagonale a und längere als Makrodiagonale b und wählen die Bezeichnung der Axenwinkel so, dass der Axe a der Winkel α , der Axe b der Winkel β und der Axe c der Winkel γ gegenüberliegt.

Durch die Lineardimensionen der Axen und ihre Neigung zu einander ist ein triklines Axenkreuz vollkommen bestimmt.

So ist z. B. das Axenkreuz

des Natronfeldspaths (Albits)

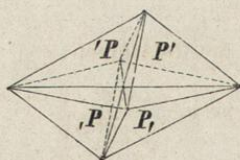
$$a:b:c = 0,6333:1:0,5575 \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 85^{\circ} 56' \\ \beta = 116^{\circ} 28' \text{ und} \\ \gamma = 88^{\circ} 8' \end{array} \right.$$

des Kupfervitriols

$$a:b:c = 0,5656:1:0,5499 \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 97^{\circ} 39' \\ \beta = 106^{\circ} 49' \\ \gamma = 77^{\circ} 37' \end{array} \right.$$

1. Die allgemeine Form des triklinen Systems ist die trikline Pyramide (Fig. 103). Eine aus 8 isoparametrischen Flächen begrenzte Gestalt, welche

Fig. 103.



kraft der 4fachen Verschiedenheit der Octanten im Axenkreuz als aus 4 Partialformen (Tetartopyramiden) zusammengesetzt betrachtet werden muss. Jede dieser Tetartopyramiden wird durch ein paralleles Flächenpaar, im Octanten und Gegenoctanten repräsentirt; denn nur die Gegenoctanten sind einander gleich, weil sie die gleichen Scheitelwinkel eines gegebenen Octanten in sich aufnehmen. Alle Hauptschnitte der vollständigen Pyramide sind Rhomboide; die Krystallflächen ungleichseitige Dreiecke, deren Kanten als Durchschnitte mit den drei Hauptschnitten angesehen werden. Die Kanten zerfallen in sechs durch Länge und Winkelmaass unterschiedene Kantenpaare. Die Ecken enthalten alle vierlei Kanten und sind dreierlei Art, Polecken, makrodiagonale und brachydiagonale Basisecken.

In den triklinen Formen drückt sich, im Gegensatz zu den regulären Gestalten, der höchste Grad von Unsymmetrie aus. Die trikline Pyramide so gestellt, dass die Hauptaxe vertical steht, die

In den triklinen Formen drückt sich, im Gegensatz zu den regulären Gestalten, der höchste Grad von Unsymmetrie aus. Die trikline Pyramide so gestellt, dass die Hauptaxe vertical steht, die

Makrodiagonale von links nach rechts und die Brachydiagonale von vorn nach hinten, zeigt auf der vorderen Seite des makrodiagonalen Hauptschnittes 4 ungleiche Octanten, welche durch 4 ungleiche Flächen gedeckt sind. Die 4 gleichen und parallelen Gegenflächen befinden sich auf der hinteren, abgewandten Seite und decken die diametralen Gegenoctanten. Dieser Stellung der triklinen Pyramide angemessen, hat man die Bezeichnung der Tetartopyramiden als Partialformen der vollständigen Pyramiden gewählt, indem man die Fläche rechts oben vorn, mit ihrer parallelen Gegenfläche links unten hinten durch das Zeichen P' , die Fläche links oben vorn mit ihrer Gegenfläche durch $'P$ und diesen entsprechend die rechts und links unten gelegenen mit ihren bezüglichlichen Gegenflächen mit dem Zeichen P , und $,P$ zum Ausdruck bringt. Die vollständige Pyramide erscheint alsdann bezeichnet durch: $m, 'P, n$. Alle Partialformen sind kristallographisch von einander unabhängig.

2. Wird in der triklinen Pyramide die Hauptaxe = o , so geht daraus das basische Pinakoid hervor.

3. Wird der Hauptaxenoefficient = ∞ , so entsteht das triklinen Prisma (Fig. 104), ein schiefes, geschoben 4seitiges, der Hauptaxe

Fig. 104.

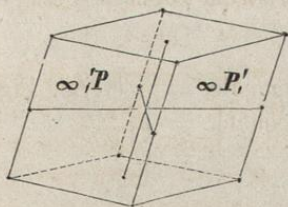
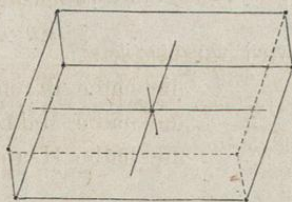


Fig. 107.



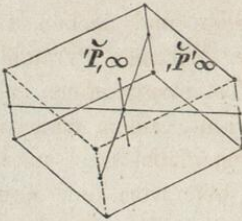
paralleles Prisma von rhomboidischem Querschnitt, welches in 2 Partialformen, Hemiprismen, zerfällt, indem eine Fläche oben rechts mit einer unten rechts, und eine oben links mit einer unten links in Eine Ebene fällt und diesen entsprechend die hinteren Gegenflächen. Man bezeichnet sie daher als Formen $\infty P, n$ und $\infty, P n$.

4. Wird der Coefficient der Makrodiagonale = o , so fällt die rechte und linke Hälfte der Pyramide mit dem brachydiagonalen Hauptschnitt zusammen, als ein diesem paralleles Flächenpaar, $a:ob:mc = \infty a:b:\infty c = \infty \check{P}\infty$, das Brachypinakoid.

5. In analoger Weise, wenn der Coefficient der Brachydiagonalen = o wird, $oa:nb:mc = a:\infty b:\infty c = \infty \check{P}\infty$, entsteht das Makropinakoid. (Die 3 Pinakoide in Fig. 107.)

6. Für den Coëfficienten der Brachydiagonalen, $n = \infty$, also $\infty a : b : mc = m\check{P}\infty$, entsteht ein dieser Axe paralleles Prisma, indem

Fig. 105.



die Flächen rechts oben vorn und rechts oben hinten in Eine Ebene fallen, eben so die anderen vorn gelegenen Flächen mit den anstossenden hinteren. Sie bilden das Brachydoma (Fig. 105), welches in die zwei Hemidomen $m, \check{P}\infty$ und $m', \check{P}'\infty$ zerfällt, durch die Accente ausdrückend, dass die Gegenflächen gleichwerthig, und ein der Brachydiagonale paralleles Flächenpaar

darstellen.

7. Für $n = \infty$ auf der Makrodiagonale, $a : \infty b : mc = m\bar{P}\infty$, fallen die beiden Nachbarflächen oben vorn und unten vorn in je Eine Ebene und laufen der Makrodiagonalen mit den Gegenflächen parallel. Da die Querschnitte aller Pyramiden des triklinen Systems Rhomboide sind, so zerfällt auch das Makrodoma in zwei Partialformen, mit den Zeichen $m', \bar{P}'\infty$ und $m, \bar{P}\infty$. (Fig. 106^a.)

Berechnung der triklinen Formen.

Es wird vorausgesetzt:

- die halbe Brachydiagonale = a (vergl. Fig. 106^b),
- die halbe Makrodiagonale = b ,
- die halbe Hauptaxe = c .

Fig. 106 a.

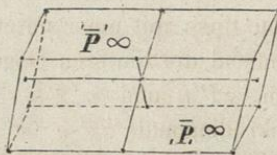
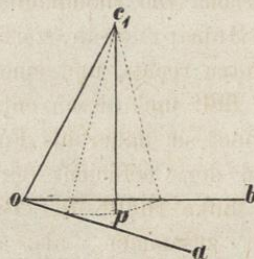


Fig. 106b.



Die Neigungswinkel der Hauptschnitte an $a = A$,
 an $b = B$,
 an $c = C$.

Die Mittelpunktswinkel gegenüber $a = \alpha$,
 $b = \beta$,
 $c = \gamma$.

Es sei ferner

die makrodiagonale Polkante der Tetartopyramide = X ,
 die brachydiagonale Polkante „ „ = Y ,
 die basische Kante „ „ = Z .

Ferner:

die Winkel der Kantenlinie X gegen $c = \mu$,
 „ „ „ $b = \nu$.
 die Winkel der Kantenlinie Y „ „ $c = \alpha$,
 „ „ „ $a = \rho$.
 die Winkel der Kantenlinie Z „ „ $b = \sigma$,
 „ „ „ $a = \tau$.

Man findet aus A , B und C die Mittelpunktswinkel α , β , γ , wie folgt.

$$\cos \alpha = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}.$$

$$\cos \beta = \frac{\cos B + \cos C \cdot \cos A}{\sin C \cdot \sin A}.$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}.$$

Uebrigens ist $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sin A : \sin B : \sin C$, sodass nur einer der Mittelpunktswinkel berechnet zu werden braucht.

Es ist ferner

$$\begin{aligned} \mu + \nu + \gamma &= 180^\circ. \\ \alpha + \rho + \beta &= 180^\circ. \\ \sigma + \tau + \alpha &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Die Hauptschnittwinkel findet man durch:

$$tg \mu = \frac{b \cdot \sin \alpha}{c - b \cdot \cos \alpha}, \quad tg \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{c - a \cdot \cos \beta}, \quad tg \sigma = \frac{c \cdot \sin \gamma}{b - a \cdot \cos \gamma}.$$

$$tg \nu = \frac{c \cdot \sin \alpha}{b - c \cdot \cos \alpha}, \quad tg \rho = \frac{c \cdot \sin \beta}{a - c \cdot \cos \beta}, \quad tg \tau = \frac{b \cdot \sin \gamma}{a - b \cdot \cos \gamma},$$

wobei darauf zu achten ist, dass die stumpfen Winkel negativ einzuführen sind.

Die Kantenwinkel X , Y , Z lassen sich am bequemsten vermittelst der Neper'schen Analogien finden.

1) X und Y , aus C , μ und α .

$$tg \frac{1}{2} (X + Y) = cotg \frac{1}{2} C \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \mu)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \mu)}$$

$$tg \frac{1}{2} (X - Y) = cotg \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \mu)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \mu)}$$

2) X und Z , aus B , ν und σ .

$$tg \frac{1}{2} (X + Z) = cotg \frac{1}{2} B \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (\sigma - \nu)}{\cos \frac{1}{2} (\sigma + \nu)}$$

$$tg \frac{1}{2} (X - Z) = cotg \frac{1}{2} B \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (\sigma - \nu)}{\sin \frac{1}{2} (\sigma + \nu)}$$

3) Y und Z , aus A , ρ und τ .

$$tg \frac{1}{2} (Y + Z) = cotg \frac{1}{2} A \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (\tau - \rho)}{\cos \frac{1}{2} (\tau + \rho)}$$

$$tg \frac{1}{2} (Y - Z) = cotg \frac{1}{2} A \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} (\tau - \rho)}{\sin \frac{1}{2} (\tau + \rho)}$$

Zwischen Kantenwinkeln und Hauptschnittwinkeln herrschen die Relationen:

$$\sin X : \sin Y = \sin \alpha : \sin \mu.$$

$$\sin Y : \sin Z = \sin \tau : \sin \rho.$$

$$\sin Z : \sin X = \sin \nu : \sin \sigma.$$

Sucht man die Winkel X , Y , Z eines Hemiprisma's oder Hemidoma's, so bestimmt man zunächst aus den Queraxen des Prisma's und dem von ihnen eingeschlossenen Mittelpunktswinkel die ebenen Winkel desjenigen Hauptschnitts, welcher die Längsaxe des Prisma's schneidet; durch die Neper'schen Analogien kann man alsdann zwei Winkel bestimmen, und endlich den dritten durch die Relationen, welche zwischen den Längskanten der Formen und Einem der Winkel A , B , C herrschen.

Berechnung der Axen aus den Kantenwinkeln.

Man sucht zunächst durch Messung die Neigungswinkel der Hauptschnitte, A , B und C zu bestimmen. Daraus berechnet man die Mittelpunktswinkel α , β , γ .

Für jede Tetartopyramide lässt sich alsdann aus je zwei Kanten X , Y , Z das Parameterverhältniss bestimmen, weil dieses aus zwei ungleichnamigen Hauptschnittwinkeln sich ergibt.

Diese Hauptschnittwinkel finden sich folgendermaassen:

$$\cos \mu = \frac{\cos Y + \cos X \cdot \cos C}{\sin X \cdot \sin C}$$

$$\cos \nu = \frac{\cos Z + \cos X \cdot \cos B}{\sin X \cdot \sin B}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos X + \cos Y \cdot \cos C}{\sin Y \cdot \sin C}$$

$$\cos \rho = \frac{\cos Z + \cos Y \cdot \cos A}{\sin Y \cdot \sin A}$$

$$\cos \sigma = \frac{\cos X + \cos Z \cdot \cos B}{\sin Z \cdot \sin B}$$

$$\cos \tau = \frac{\cos Y + \cos Z \cdot \cos A}{\sin Z \cdot \sin A}$$

wobei die stumpfen und spitzen Winkel zu berücksichtigen sind. Nach diesen Formeln braucht man nur Einen Hauptschnittwinkel zu berechnen, die andern finden sich durch die Verhältnisse

$$\sin X : \sin Y = \sin \alpha : \sin \mu.$$

$$\sin Y : \sin Z = \sin \tau : \sin \rho.$$

$$\sin Z : \sin X = \sin \nu : \sin \sigma,$$

sowie noch leichter dadurch, dass

$$\mu + \nu + \gamma = 180^\circ.$$

$$\alpha + \rho + \beta = 180^\circ.$$

$$\sigma + \tau + \alpha = 180^\circ.$$

Alsdann bestimmt sich das Parameterverhältniss der Tetartopyramide $a:b:c$ aus den Proportionen:

$$\sin \mu : \sin \nu = b : c.$$

$$\sin \alpha : \sin \rho = a : c.$$

$$\sin \sigma : \sin \tau = a : b.$$

Hemimorphismus der Krystalle.

Die Eigenschaft des Hemimorphismus besteht darin, dass Krystalle an den entgegengesetzten Enden der einen oder der anderen Axe eine verschiedene Ausbildungsweise besitzen. Er findet sich nicht bei Krystallen des regulären Systems. Substanzen, an denen

der Hemimorphismus ausgezeichnet aufzutreten pflegt, sind der rhomboëdrische Turmalin (Fig. 103 a und b) und das rhombische Kieselzinkerz (Fig. 104). Am Turmalin ist das eine Ende der Hauptaxe

Fig. 103.

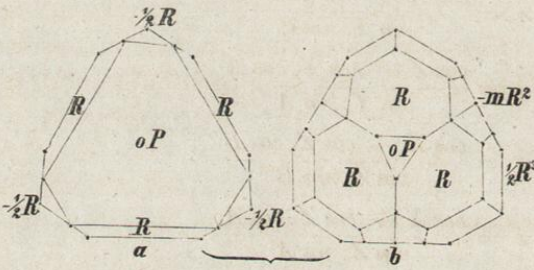
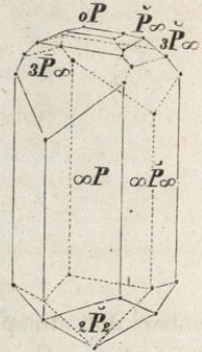


Fig. 104.



durch R . — $\frac{1}{2}R$. oR , das andere durch R . oR . $\frac{1}{2}R^3$ und $-mR^2$ begrenzt, während die Prismen durch $\infty P2$ und ∞R gebildet werden. Das Kieselzinkerz zeigt am einen Ende der Hauptaxe oP . $3\bar{P}\infty$. $2R\infty$. $3\bar{P}\infty$, am andern dagegen $2\bar{P}2$.

Mit dem Hemimorphismus der Krystalle pflegt die Eigenschaft der Pyroëlectricität, d. h. unter der Wirkung des Erwärmens und Erkaltes innerhalb gewisser Temperaturgrenzen polar elektrisch zu werden, in innigem Zusammenhange zu stehen. Diese Eigenschaft wurde bekanntlich am Turmalin (Aschentreckler, Aschenzieher) entdeckt.

Verzerrungen der Krystalle.

Wenn an Krystallen die Winkel die constantesten Elemente sind, so zeigen die Krystallflächen häufig verschiedene Centraldistanzen, wodurch ebene oder lineare Verzerrungen idealer Krystalle erzeugt werden.

Vom Zeichnen der Krystallformen.

Das Zeichnen der Krystalle ist eine der einfachsten und erfolgreichsten Methoden für die räumliche Orientirung in Krystallgebilden.

Der Zweck desselben ist: das Kantennetz der Krystallformen der Art auf eine Ebene zu projiciren, dass es auf den Beobachter den Eindruck einer wirklichen, körperlichen Krystallgestalt macht. Um dieses Ziel zu erreichen kann man sich sehr verschiedener Projectionen bedienen. Für die krystallographische Praxis ist es von Wichtigkeit, eine solche zu wählen, welche mit möglich grosser Deutlichkeit und Richtigkeit die Einfachheit der Ausführung von Zeichnungen verbindet. Eine solche Projection ist diejenige, welche H. Kopp in seiner „Einleitung in die Krystallographie“* zur Anwendung gebracht. Ich lege dieselbe auch hier zu Grunde.

Das Wesen dieser Projection besteht darin, dass man die Projections- oder Bildebene durch einen verticalen Hauptschnitt der Krystallform gelegt denkt, so dass die in diesem gelegenen Axen, die Hauptaxe und eine Nebenaxe, in jener unverkürzt erscheinen. Die dritte Axe, welche in dieser Stellung von hinten nach vorn gerichtet und rechtwinklig auf der Projectionsebene steht, erscheint in dieser unter einem nicht zu grossen Winkel W (Uebereinkunftswinkel) gegen die andere Nebenaxe gerichtet und auf $\frac{1}{3}$ ihrer wahren Länge verkürzt (vergl. Fig. 107 p. 96).

Die Krystallzeichnung erscheint alsdann auf der Bildfläche transparent, wenn man die vor ihr gelegenen Kantensysteme mit kräftigen Strichen auszieht, die hinter ihr gelegenen aber zart punktirt.

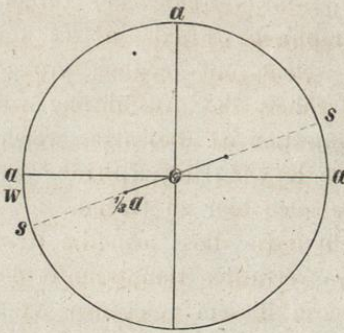
Das Auge wird bei Betrachtung der Krystallform in unendlicher Ferne gedacht, wodurch alle projicirenden Linien dem Normalgesichtsstrahl (vom Auge nach dem Mittelpunkt des Krystalls) parallel werden, und alle wirklich parallelen Begrenzungselemente des Krystalls auch in der Zeichnung parallel sind.

Ist uns ein Axenkreuz von bestimmtem Charakter gegeben, so hat es keine Schwierigkeit, in dasselbe Krystallflächen von bekanntem Parameterverhältnisse so einzutragen, dass aus ihren gegenseitigen Durchschnitten sich das Kantennetz auf jenes bezogener Formen construirt. Es ist das der individuellen Uebung anheim gegeben. Im Folgenden soll daher die adoptirte Projectionsmethode lediglich auf das Entwerfen von Axenkreuzen der verschiedenen Krystallsysteme als der Grundlage aller Krystallzeichnungen, in Anwendung gebracht werden.

* Verlag von Vieweg & Sohn in Braunschweig. Zweite Auflage. 1862.

Das reguläre Axenkreuz bildet die Grundlage der Projectionen aller übrigen orthometrischen Axenkreuze. Man schlägt einen

Fig. 107.



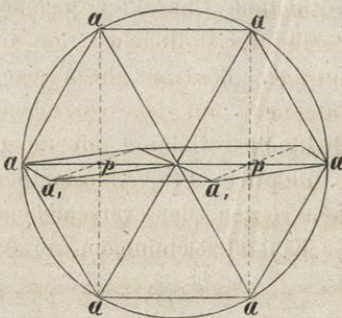
Kreis und construirt in denselben zwei rechtwinklige Durchmesser, von denen der eine vertical (oben-unten) der andere horizontal (links-rechts) liegt. Trägt man $\frac{1}{3}$ der Länge des Halbmessers als Sehne des Kreises vom Ende der linken Halbaxe nach unten und vom Ende der rechten Halbaxe nach oben ab, so schliesst eine die Punkte *s* verbindende Gerade mit der Axe links-rechts den Uebereinkunftswinkel *W* ein,

unter welchem die Axe vorn hinten auf $\frac{1}{3}$ ihrer wahren Länge, also um $\frac{1}{3}$ des Halbmessers verkürzt erscheint. Die Länge der Sehne *as* ist demnach gleichzeitig die der vorderen und hinteren Halbaxe in der Projection.

Für ein quadratisches und rhombisches Axenkreuz bleibt, wie eine einfache Betrachtung lehrt, die Construction dieselbe, nur werden die Axen, wie es jedes specielle Linearverhältniss des Axenkreuzes verlangt, entsprechend verlängert oder verkürzt werden müssen; selbstverständlich ist die vordere Axe in der Zeichnung immer $\frac{1}{3}$ der wahren Länge.

Das hexagonale Axenkreuz zu construiren kommt auf die

Fig. 108.



einfache Aufgabe hinaus: ein reguläres Sechseck *aa* etc. aus dem Grundriss in den Horizont zu projectiren.

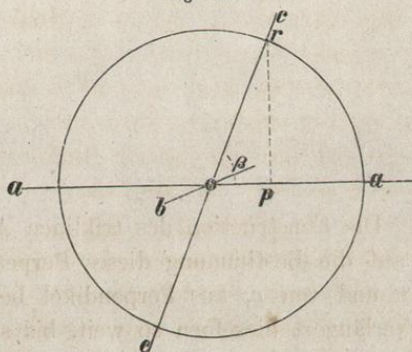
Ist eine Axe *a* (links-rechts) die Drehungsaxe, um welche das Sechseck um 90° gewendet wird, so dass die oberen Endpunkte der Axen *aa* sich vorn nieder, die unteren sich nach hinten in die Höhe bewegen, so werden die von *a* aus auf die Drehungsaxe gefällten Perpendikel *ap* in der Projection unter dem

Uebereinkunftswinkel und auf $\frac{1}{3}$ ihrer wahren Länge in *pa* projectirt

erscheinen. Der Uebereinkunftswinkel ist as (Fig. 107). Der Linie ss parallel werden demnach in den Fusspunkten der Perpendikel ap (Fig. 108) Linien gezogen und auf diesen $\frac{1}{3} ap = a_1p$ nach vorn und hinten abgetragen. So erhält man die Eckpunkte a_1a_1 etc. des regulären Sechsecks in Projection. Linien, welche diese Eckpunkte diametral verbinden, sind die projecirten Nebenaxen. Errichtet man im Centrum des Axenkreuzes ein Perpendikel auf aa links-rechts (der unverkürzten Nebenaxe) und giebt ihm eine dem Verhältniss $a : c$ entsprechende Länge, so erhält man die unverkürzte Hauptaxe c .

Das monokline Axenkreuz. Hat man aus dem regulären Axenkreuz durch Abtragung

Fig. 109.



der Längen $a : b : c$ ein rhombisches construirt, so lässt sich aus irgend einer goniometrischen Function, etwa der Tangente des schiefen Axenwinkels β , die Lage der Hauptaxe c finden; es ist in Fig. 109:

$\frac{rp}{op} = tg \beta$. Trägt man das

Verhältniss $\frac{rp}{op}$, wie es aus $tg \beta$

folgt, auf a (op) und auf einem in p errichteten Perpendikel ab, so er giebt sich die Neigung der Axe, indem man eine Gerade von o nach r zieht und soweit als erforderlich nach oben und unten verlängert.

Das triklinen Axenkreuz (Fig. 110 und 111 p. 98) lässt sich ohne complicirte Rechnung, wesentlich durch Construction, auf folgende Weise projeciren.

Die körperliche Ecke $o(abc)$ (Fig. 110) repräsentire einen Octanten, etwa denjenigen, welcher rechts-oben-vorn liegt, im triklinen Axenkreuz. Das Linearverhältniss $a : b : c$ ist gegeben, ebenso die Mittelpunktswinkel α, β, γ , so lässt sich die Ecke so auseinanderlegen, dass alle drei Axen in Eine Ebene fallen und zwischen sich die Winkel α, β, γ einschliessen. In dieser Lage werden diese Winkel entweder mit einem Gradbogen abgetragen oder aus einer goniometrischen Function construirt. Die Axe oc (Fig. 111) erscheint dann nach den beiden Richtungen oc und oc_1 getheilt. Denkt man sich oc um ob , ebenso oc_1 um oa so lange gedreht, bis c mit c_1 wieder zusammenfällt, so ist die körperliche Ecke geschlossen und würde durch ein Perpen-

dikel cp , von c aus auf die gegenüberliegende Fläche boa , bestimmt

Fig. 110.

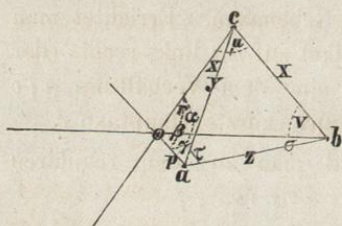
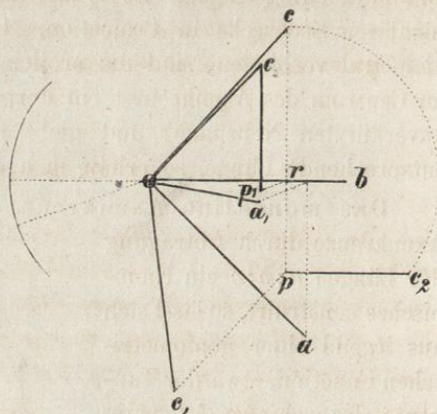


Fig. 111.



sein. Die Construction des triklinen Axenkreuzes läuft nun wesentlich auf die Bestimmung dieses Perpendikels cp hinaus. Fällt man von c und von c_1 aus Perpendikel beziehungsweise auf ob und oa , und verlängert dieselben so weit, bis sie in p zum Durchschnitt gelangen, so erscheinen diese verlängerten Perpendikel gleichzeitig als geradlinige Projectionen von Kreisen, welche die Punkte c und c_1 (um ob und oa gedreht) beschrieben haben. Der Gipfelpunkt des Perpendikels fällt, wenn c und c_1 zusammentreffen, in dieser Horizontalprojection mit seinem Fusspunkte zusammen. Legt man nun den von c beschriebenen Kreis in die Horizontalebene um, so erscheint er als ein Kreis, der aus r durch c beschrieben ist, während sich jenes Perpendikel als die auf pc Senkrechte pc_2 erweist. Diese ist dann die unverkürzte Länge des Höhenperpendikels der körperlichen Ecke, in deren Projection auf die Bildfläche sie als Verticale auf dem basischen Hauptschnitt ebenfalls unverkürzt erscheinen wird.

So kennen wir die Lage des Fusspunktes und die wahre Länge des Perpendikels, welches die triklone Tetartopyramide bestimmt. Setzt man nun nach unserer adoptirten Methode diesen Fusspunkt in Projection unter dem Uebereinkunftswinkel W , unter welchem die Entfernung rp in rp_1 um $\frac{1}{3}$ der wahren Länge verkürzt wird, ebenso den Punkt a , welcher nach a_1 fällt und zieht die Linie oa_1 , so erscheint diese als projecirte Axe a und bestimmt die Lage des Haupt-

schnitts boa_1 . Errichtet man nun in p_1 ein Perpendikel pc_3 von der Länge pc_2 auf die Basisebene, so ist damit die Spitze c_3 der körperlichen Ecke bestimmt, und die Linie oc_3 stellt die Hauptaxe der Pyramide in Projection dar. Verlängert man endlich oc_3 , ob , oa_1 um die gleichen Längen nach entgegengesetzten Richtungen, so ist das triklone Axenkreuz construirt.

Zwillingskrystalle.

Die bisher betrachteten Krystalle haben wir in ihrer Einzelercheinung erfasst, als einfache Individuen, welche sich auf Ein Axenkreuz zurückführen lassen. In der Natur aber kommen auch solche Krystallisationen vor, welche als Aggregate zweier oder mehrerer Individuen zu betrachten, und in bestimmt ausdrückbaren Lagen mit einander verwachsen sind. Sehen wir von den unregelmässigen Aggregaten, wie sich solche in Gesteinen, Krystalldrusen und Krystallgruppen finden, ab, so lassen sich zwei Arten von regelmässigen Verwachsungen der Krystall-Individuen unterscheiden.

1. Parallele Verwachsungen von Krystallen. Lässt man auf einer Krystallfläche oder Krystalllamelle eine Lösung derselben Substanz, welche den Krystall bildet, verdunsten, so scheiden sich entweder kleinere Krystalle darauf in paralleler Stellung ab, oder der Krystall wächst an der betreffenden Stelle der Art, dass die abgeschiedene Substanz mit dem Krystall einheitlich orientirt ist. In der Natur findet man nicht selten Aggregate von gleichartigen Krystallen, welche sich auf der Oberfläche eines anderen angesiedelt haben und welche eine solche Lage zu einander einnehmen, dass alle gleichliegenden Flächen der zusammensetzenden Individuen das Licht gleichzeitig reflectiren. Das ist eine Folge vom Parallelismus der Axenkreuze aller Theil-Individuen. Es sind parallele Verwachsungen.

2. Nicht parallele Verwachsungen von Krystallen, Zwillinge. Für gewisse Körper, und es finden sich solche in der Natur sehr häufig, ist es indessen eine charakteristische Eigenschaft, zu zweien, oder zu mehreren verwachsene Krystalle zu erzeugen, deren Verwachsungsart zwar krystallographisch gesetzmässig, aber nicht parallel ist. Solche nennt man je nach ihrer Anzahl Zwillinge, Drillinge, Vierlinge etc. oder vielfach zusammengesetzte, polysynthetische Zwillinge.

Nach der Verwachsungsart unterscheidet man Contactzwillinge (Juxtapositionszwillinge) und Durchwachsungs-, Durchkreuzungs- oder Penetrationszwillinge. Die ersteren lassen eine krystallographisch bestimmbare Fläche als Verwachsungsfläche (Zwillingssebene) erkennen, deren Normale in der Regel als eine Axe erscheint, um welche das eine Individuum gegen das andere um eine gewisse Winkelgrösse gedreht erscheint, um 60° , 90° oder 180° . Solche Contact-Zwillinge, bei denen das eine Individuum gegen das andere um 180° , also um eine halbe Umdrehung verwendet ist, pflegt man Hemitropien zu nennen. Diese Arten von Zwillingen sind bestimmt charakterisirt, wenn die Lage der Zwillingssebene, die Stellung der Drehungs- oder Zwillingsaxe zu ihr und die Grösse der Umdrehung des einen Individuums gegen das andere gegeben sind. Gewöhnliche Zwillinge im regulären System sind z. B. solche, für welche die Zwillingssebene eine Octaëderfläche, die Zwillingsaxe die Normale darauf und die Grösse der Drehung $= 180^\circ$ ist. (Spinell, Magneteisen etc.)

Penetrationszwillinge sind Durchdringungen je zweier Krystalle, so, dass sie einen Theil ihrer Masse gemeinschaftlich einschliessen. Bei der Bestimmung derselben geht man von Einem Individuum aus, denkt sich ein zweites mit dem ersten denselben Raum einnehmend, und giebt an, um welche Axe und um welche Winkelgrösse dieses zweite Individuum aus der ursprünglichen Lage gedreht werden musste, um die Zwillingslage einzunehmen. So z. B. kommen im regulären System häufig Penetrationszwillinge vor, für welche die Drehungsaxe eine trigonale Zwischenaxe ist (eine die diametralen Würfecken verbindende), um welche der eine Würfel gegen den anderen um 180° gedreht erscheint.

Bei hemiëdrischen Krystallen sind auch Penetrationszwillinge mit parallelen Axenkreuzen möglich, indem eine Form gegen die andere so gedreht erscheint, dass sie in die Lage der correlaten Form fällt. (Häufig am Tetraëder und Pentagondodekaëder. Eisernes Kreuz des Schwefelkieses.)

Zwillingsbildungen können sich nach demselben Gesetze vielfach wiederholen. Sind die Zwillingssebenen der Contactzwillinge unter sich parallel, so kann die Aggregation der Individuen bis ins Unendliche fortgesetzt gedacht werden. Da in der Aggregationsrichtung die Individuen sich gegenseitig an Masse zuzunehmen verhindern, so sind dieselben mehr oder minder fein lamellär ausgebildet. Wenn

solche Aggregate, polysynthetische Zwillinge, eine mit der Zwillingsebene nicht zusammenfallende Spaltbarkeit besitzen, so erzeugen sie auf Spaltungsflächen die sogenannte Zwillingstreifung, hervorgerufen durch den Lichtreflex der Spaltungsflächen abwechselnd, gleich- und ungleich-gerichteter Individuen. (Ausgezeichnet bei triklinen Feldspathen, und für diese sehr bezeichnend im Gegensatz zu Orthoklas.)

Mehr- oder vielfache Wiederholungen der Zwillingbildung bei nicht parallelen Lagen der Zwillingsebenen führen zu endlich in sich geschlossenen Zwillinggruppen. (Arragonit, Rutil etc.)

Auch bei Penetrationszwillingen können Wiederholungen der Zwillingbildungen vorkommen, wenn alle gleichwerthigen Zwillingsexen einer Form zur Wirksamkeit gelangen.

Zwillingkrystalle sind im Allgemeinen daran leicht kenntlich, dass sie einspringende Winkel an der Zwillingsebene besitzen. Doch giebt es auch solche, bei denen das nicht der Fall ist, wie z. B. bei den Hemitropien des Rhombendodekaeders, für welche die Zwillingsebene eine Octaederfläche, die Drehungsaxe die trigonale Zwischenaxe ist.

Fig. 112 ist ein hemitropischer Zwilling des Octaeders, Zwillingsebene: die Fläche *O*. Zwillingsexaxe: die Normale dazu, (trigonale Zwischenaxe), Drehung = 180° .

Fig. 112.

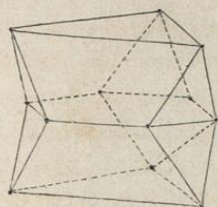


Fig. 113.

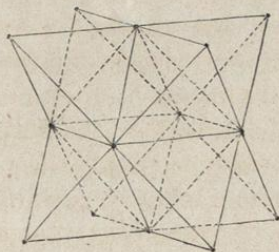


Fig. 114.

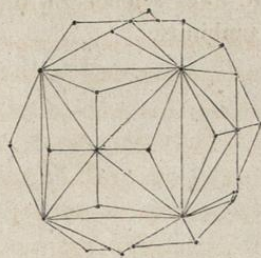


Fig. 113. Penetrationszwilling zweier Tetraëder, welche entweder die correlaten sein können, oder andere um 90° um die Hauptaxe gedrehte.

Fig. 114. Penetrationszwilling des Pentagondodekaeders nach demselben Gesetze wie in Fig. 113. Sogenanntes eisernes Kreuz des Schwefelkieses.

Fig. 115. Hemitropie des Kalkspathskalennoöders R^3 nach oP . Drehungsaxe die Haupttaxe.

Fig. 116. Carlsbader Zwilling des Orthoklas, Zwillingsaxe die Haupttaxe. Individuen der Combination $\infty P \infty \infty P oP P \infty$ durch Penetration verbunden.

Fig. 117. Baveno-Zwilling. Zwillingsenebene: $2P \infty$. Drehungsaxe: die Normale darauf. Drehung: 180° . Orthoklas.

Fig. 115.

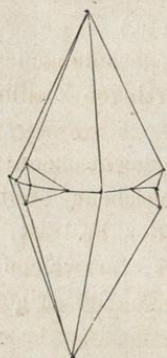


Fig. 116.

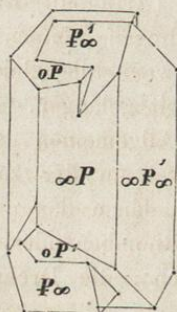


Fig. 117.

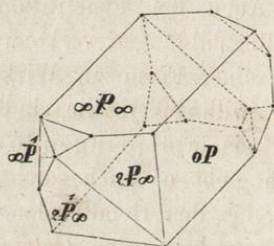


Fig. 118. Albitzwilling (Tetartin). Triklone Combination: $\infty \check{P} \infty$. $\infty P'$, $\infty P'_3$, oP , $\check{P} \infty$. Zwillingsenebene: $\infty \check{P} \infty$. Axe: die Normale. Drehung: 180° . Häufig vielfach wiederholt und Zwillingsstreifung auf oP erzeugend. Neigung der Flächen oP zu einander = $172^\circ 48'$. Je zwei solcher Zwillinge sind mitunter nach dem Carlsbader Gesetz combinirt.

Fig. 118.

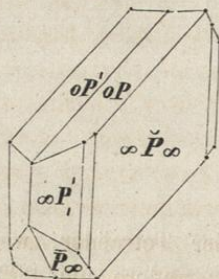


Fig. 119.

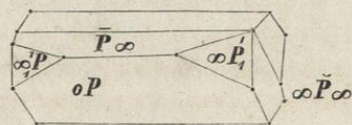


Fig. 119. Albit (Periklin). Zwillingsenebene die Basis oP . Axe: die in der Basis liegende Normale zur Brachydiagonale. Combination: $oP \cdot \infty \check{P} \infty \cdot \check{P} \infty \cdot \infty P'_1 \cdot \infty P'_1$. Die Flächen $\infty \check{P} \infty$ bilden an der Seite einen Winkel von $173^\circ 22'$ mit einander.

Durch Druck auf zwei künstlich angefeilte Gegenflächen ∞R oder auch mittelst einer stumpfen Spitze auf Krystalllamellen gelingt es nach Reusch (Pogg. Ann. 132 pag. 444. auch 147 p. 307), bei Kalkspath bleibende innere Deformationen der Molekularordnung hervorzurufen, welche eine Zwillingslamellen-Structur nach $-\frac{1}{2}R$ zur Folge haben, deren optisches Verhalten bereits von Fr. Pfaff (Pogg. Ann. 107 p. 336) beobachtet wurde, aber auch durch Spaltung direct nachgewiesen werden können.

Pseudomorphosen.

Unter Pseudomorphosen oder Afterkrystallen verstehen wir im Allgemeinen solche Krystalle, deren äussere Form mit der sie erfüllenden Substanz nicht in directem Zusammenhange steht. Die Gestalt ist für die Substanz eine falsche (daher der Name, von *ψεύδος*, belügen, *μόρφωσις*, Gestalt, also Truggestalt). Ihr Auftreten in der Natur ist dadurch erklärlich, dass der Raum eines ursprünglich vorhanden gewesenen und durch Auflösung verschwundenen Krystalls durch eine oder mehrere andere Stoffe ausgefüllt wurde; dass die ursprünglich dem Krystall angehörige Substanz durch Einwirkung von Lösungen anderer Stoffe, durch Oxydationen und Reductionen, durch Zersetzungen oder durch Wirkungen höherer Temperatur umgewandelt wurde, während die äussere Gestalt erhalten blieb. In wiefern uns nun die Formenerhaltung der Pseudomorphosen die ursprünglich vorhanden gewesene Substanz verräth, die Substanzen derselben aber das Endresultat von chemischen oder physikalischen Vorgängen, welche im Innern der Erde gewirkt haben, um die secundären Producte aus den primitiv gegebenen Stoffen herauszuarbeiten, insofern muss uns gewissermaassen die Lehre von diesen Erscheinungen als ein Ariadnefaden erscheinen, welcher uns durch das Labyrinth chemischer und chemisch-physikalischer Vorgänge unseres Erdinnern zu führen geeignet ist. In der That verdankt die Geologie den Pseudomorphosen viele mineralogische Aufklärungen. Erst am Anfange dieses Jahrhunderts richtete sich die Aufmerksamkeit der Mineralogen auf diese Gebilde, welche man für Curiosa und für locale Erscheinungen hielt. Sie wurden zuerst von Breithaupt (Ueber die Aechtheit der Krystalle. Freiberg 1815) und Landgrebe (Ueber die Pseudomorphosen im Mineralreiche. Cassel 1841) beobachtet, besonders aber von R. Blum (Pseudomorphosen des Mineral-

reichs, Stuttgart 1843) ausgedehnt gesammelt und eingehend beschrieben. Gestützt auf Blums Werk zeigte G. Bischof (Lehrb. der chem. u. phys. Geologie, Bonn 1847—1855), dass die Pseudomorphosen keineswegs nur auf beschränkte einzelne Räume zufällig angewiesen, sondern dass dieselben als zwar specielle Fälle der Formerhaltung zu betrachten seien, jedoch unter der Wirkung von Vorgängen, welche in der Natur allgemein verbreitet sind. In Folge dieser Auffassung ist das Studium der Pseudomorphosen noch heute von grossem wissenschaftlichem Werth und wird von den Mineralogen und Geologen mit Interesse gepflegt.

Nach dem chemischen Unterschied der Pseudomorphosen vor und nach der Umwandlung classificirt Blum, nach dem Vorgange von Landgrebe, dieselben in folgender Weise.

I. Umwandlungspseudomorphosen. Das sind solche, in denen ein Theil der ursprünglichen Substanz, oder diese ganz noch vorhanden ist, während neue Bestandtheile hinzugetreten oder vorhanden gewesene ausgeschieden sind.

a) durch Verlust von Bestandtheilen. Z. B. gediegen Kupfer nach Rothkupfererz. $CuO - O = Cu$. Kupferglanz nach Kupferkies $CuFeS_4 - FeS_3 = CuS$ u. s. f.

b) durch Aufnahme von Bestandtheilen. Z. B. Gyps nach Anhydrit $CaSO_4 + 2\text{aqu.} = (CaSO_4, 2\text{aqu.})$, Malachit nach Rothkupfererz, $CuO + CO_2 + O + H_2O = (CuCO_3 + CuH_2O_2)$ etc.

c) durch Austausch von Bestandtheilen. Z. B. Kalkspath ($CaCO_3$) nach Anhydrit ($CaSO_4$), wobei SO_4 gegen CO_3 ausgetauscht ist.

Kaolin = $\left. \begin{array}{l} \text{I} \\ H_2Al \\ H_2Al \end{array} \right\} Si_4O_{16} + 2\text{aqu.}$, nach Feldspath = $\left. \begin{array}{l} \text{II} \\ RAl \\ RAl \end{array} \right\} Si_4O_{16}$, ist ein Feldspath, worin R gegen H_2 + 2 aqu. ausgetauscht ist.

II. Verdrängungspseudomorphosen sind solche, in denen das primäre Mineral mit dem secundären keinen binären Bestandtheil gemein hat.

Z. B. Anhydrit ($CaSO_4$) nach Steinsalz ($NaCl$), Quarz (SiO_2) nach Gyps ($CaSO_4 + 2\text{aqu.}$) etc.

III. Paramorphosen (Stein) Allomorphosen (Dana) sind solche,

welche ohne Aufnahme und ohne Verlust von Bestandtheilen gebildet werden. Sie sind lediglich Umsetzungen einer pleomorphen Modification in eine andere.

Z. B. α Schwefel nach β Schwefel, Kalkspath nach Arragonit, Rutil nach Anatas.

Den Pseudomorphosen entsprechen durchaus die Versteinerungen, man kann diese als Pseudomorphosen nach organischen Gebilden auffassen.

Eine Classification der Pseudomorphosen nach der chemischen Differenz ist gewiss sehr nützlich und für die erste Forschung auf diesem Gebiete geboten. Doch darf man sich dabei nicht der Meinung hingeben, dass durch die Angabe des chemischen Unterschiedes auch der Weg angegeben sei, auf welchem die Pseudomorphose gebildet worden sei. Diesen Weg zu erforschen ist eine nicht in allen Fällen leichte Aufgabe, weil die Natur unter Bedingungen arbeitet, die für uns nicht immer unmittelbar erkennbar sind.

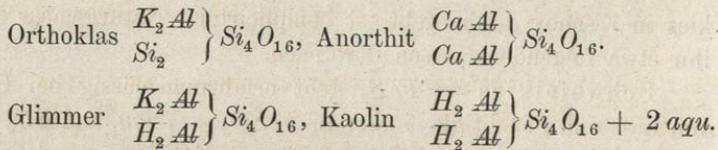
So kommt häufig die Pseudomorphose von Eisenoxyd nach Schwefelkies vor. Schwefelkies ist FeS_2 , Eisenoxyd FeO_3 . Vergleichen wir $2FeS_2 = Fe_2S_4$ mit FeO_3 , so ist die chemische Differenz gegeben durch $+S_4$ und $-O_3$. Aber es ist damit durchaus nicht behauptet, dass in der Natur S_4 des Schwefelkieses durch O_3 direct verdrängt worden wäre. Der Vorgang unter welchem Schwefelkies in Eisenoxyd übergeht ist complicirter. Naturgemäss kann man ihn etwa folgendermaassen darstellen.

Schwefelkies = FeS_2 geht erfahrungsmässig bei Gegenwart von Luft und Feuchtigkeit über in $FeSO_4 + 7aqu.$ und $SO_3 + n aqu.$, d. h. in Eisenvitriol und Schwefelsäure. Enthalten in der Natur die Gewässer, welche eine solche Oxydation bewirken, gleichzeitig (wie das in der Gesteinsfeuchtigkeit voranzusetzen) kohlen-saure Alkalien, oder kohlen-sauren Kalk, so setzt sich Eisenvitriol damit zu kohlen-saurem Eisenoxydul und schwefelsauren Alkalien oder Gyps um, während das freie Äquivalent Schwefelsäure sich mit den Basen unter Austreibung der Kohlensäure zu denselben Salzen verbindet. Solche Gewässer enthalten aber gleichzeitig Sauerstoff gelöst. Dieser wird vom kohlen-sauren Eisenoxydul aufgenommen, und aus $2FeCO_3 = Fe_2C_2O_6$, O und Wasser geht Eisenoxydhydrat ($FeO_3 + aqu.$) und Kohlensäure ($2CO_2$) hervor, welche letztere mit dem Wasser fortgeführt wird. Pseudomorphosen von Eisenoxydhydrat (Goethit) nach Schwefelkies kommen in der Natur nicht selten vor.

Eisenoxydhydrat verliert aber unter Wasser allmählig seinen Wassergehalt und geht in Eisenoxyd über, und damit endet der Process in einer Pseudomorphose von Eisenoxyd nach Schwefelkies.

Eine einfache chemische Differenz zeigt auch die Pseudomorphose von gediegen Kupfer nach Rothkupfererz. Man könnte geneigt sein, *Cu* als aus einem Reductionsprocess aus *CuO* hervorgegangen anzusehen. Indessen ist es wahrscheinlicher, dass gediegen Kupfer lediglich durch Einwirkung von verdünnter Schwefelsäure auf Rothkupfererz entstand, wodurch $\left. \begin{matrix} Cu \\ Cu \end{matrix} \right\} O + SO_3 + aqu.$ sich in $CuSO_4 + 5 aqu.$ und in dendritisch krystallinisches Kupfer zerlegt und eine sehr poröse Pseudomorphose nach Rothkupfererz bildet. In der Natur entsteht freie Schwefelsäure durch Oxydation von Schwefelkies, und das gediegene Kupfer auch in Pseudomorphosen, im eisernen Hut von Kupferkieslagerstätten, wo nicht Reductions- sondern Oxydationsprocesse walten. Künstlich ist diese Pseudomorphose leicht herzustellen, wenn man Rothkupfererzkrystalle längere Zeit in sehr verdünnter Schwefelsäure liegen lässt. Sie sind den natürlichen Vorkommnissen zum Verwechseln ähnlich.

Von Interesse sind auch die Pseudomorphosen von Kaolin und Glimmer (Pinitoide) nach Feldspathen. Man kann sich diese drei Körper als von ähnlichem chemischen Typus vorstellen, nämlich:



Feldspath mit Wasser längere Zeit in Berührung erhalten, nimmt Wasser auf (fein pulverisirt sogar unter nachweisbarer Erwärmung) und verwandelt sich dadurch in einen zeolithartigen Körper. Durch Wasseraufnahme wird der Feldspath leicht zersetzbar durch Säuren, selbst durch schwache, er wird reactionsfähig. Nimmt nun die Kohlensäure der atmosphärischen Gewässer dem Feldspath alles Alkali oder alle alkalischen Erden weg und wird deren Stelle durch Wasser vertreten, so entsteht Kaolin, wird nur die Hälfte oder ein aliquoter Theil derselben durch Wasser ersetzt, so entstehen die pinitoidischen Körper, Uebergänge zu Glimmer, welche so häufig unter Quarzabscheidung pseudomorph nach Orthoklas erscheinen. Kaolin findet sich gewöhnlich auf der Oberfläche von Feldspath-

gesteinen, die Pinitoide in tieferen Lagen. Beide im Gemenge, Kaolin und Pinitoide sind Bestandtheile der alkalihaltigen, nicht feuerbeständigen Thone.

Solchen Zersetzungs- und Umbildungsvorgängen entsprechend tragen die meisten Pseudomorphosen mehr oder minder die Spuren von Zerstörungen auch an der Krystallform zur Schau. Innerlich aber stellen sie gewöhnlich ein unregelmässiges Aggregat von Individuen des neuen Minerals dar, wenn dieses nicht etwa (wie Opal, Speckstein etc.) amorph erscheint. Der Mangel an einheitlicher Spaltbarkeit ist daher ein wichtiges Merkmal für die Pseudomorphosen. Mitunter sind Krystallgestalten nur durch ein Häutchen eines fremden Minerals erhalten geblieben, während der innere Raum hohl ist.

Die Verdrängungspseudomorphosen kann man sich auf verschiedene Weise gebildet erklären. Entweder ist ein ringsum von einer Gesteinsmasse umgebener Krystall durch Auflösung verschwunden, so dass er einen Abdruck seiner Gestalt als Hohlraum hinterlässt, welcher sich später mit irgend einem andern Mineral oder Mineralaggregat ausfüllt, oder die Substanz eines Krystalls bildet das Präcipitationsmittel für eine andere, welche in Lösungen damit in Berührung kommt.

Wenn man z. B. in eine vollkommen gesättigte Lösung von Salmiak einen Würfel von Chlorkalium bringt, so geht er verhältnissmässig rasch in eine Pseudomorphose von Salmiak nach Chlorkalium über. In dem Maasse als Chlorkalium gelöst wird, scheidet sich an der Stelle Salmiak ab und bildet opake, radial schuppig-fasrige Aggregate an Stelle des hexaëdrisch spaltbaren durchsichtigen Chlorkaliums.

Aehnlich erklärt man sich Pseudomorphosen von kohlensaurem Eisenoxydul (Spatheisen), kohlensaurem Manganoxydul (Manganspath) und kohlensaurem Zinkoxyd (Zinkspath) nach Kalkspath oder Dolomit, Speckstein nach Quarz etc.