

www.e-rara.ch

Traité élémentaire de statique ...

Monge, Gaspard

Paris, an VII de la République [1798]

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 10391

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-28584>

Chapitre I. De la composition et de la décomposition des forces.

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

CHAPITRE I.

*De la composition et de la décomposition
des forces.*

Fig. 1, 1. *LORSQU'UNE* force P , appliquée à un
2. point déterminé C d'un corps solide AB ,
tire ou pousse ce corps suivant une direc-
tion quelconque CF , il doit être permis de
considérer cette force comme si elle étoit
immédiatement appliquée à tout autre point
 D du corps, pris sur la direction de cette
force.

Car tous les points du corps qui sont sur
la droite CF ne pouvant ni se rapprocher
ni s'éloigner les uns des autres, aucun d'eux
ne peut se mouvoir suivant cette droite sans
faire mouvoir tous les autres de la même ma-
nière que si la force leur étoit immédiate-
ment appliquée.

Il doit même être permis de considérer la
force P comme si elle étoit appliquée à tout
autre point G , pris au dehors du corps, sur
sa direction, pourvu que ce point soit in-
variablement attaché au corps.

2. Il suit de là que si sur la direction de la force P il se trouve, ou en dedans du corps un point fixe D , ou en dehors un obstacle immobile G , pourvu que, dans ce dernier cas, l'obstacle soit invariablement attaché au corps, la force sera détruite, et le corps restera en repos; car on pourra regarder cette force comme immédiatement appliquée au point fixe, et son effet sera détruit par la résistance de ce point.

3. Réciproquement, si la force P , appliquée au corps AB , est détruite par la résistance d'un seul point fixe, ce point se trouve sur la direction de la force: car ce point ne peut détruire l'effet de la force qu'en s'opposant au mouvement du point d'application C ; et il ne peut empêcher ce mouvement, à moins qu'il ne soit sur la droite que la force tend à faire parcourir au point d'application.

A X I O M E S.

I.

4. *Un point ne peut aller par plusieurs chemins à la fois.*

5. Donc, lorsque plusieurs forces différemment dirigées seront appliquées en même

temps à un même point, ou ce point restera en repos, ou il se mouvra par un seul chemin, et par conséquent de la même manière que s'il étoit poussé ou tiré par une force unique dirigée suivant ce chemin, et capable du même effet.

6. Ainsi, quels que soient le nombre et les directions des forces appliquées en même temps à un même point, il existe toujours une force unique qui peut le mouvoir, ou tendre à le mouvoir de la même manière que toutes ces forces ensemble; cette force unique se nomme la *résultante* des premières, et celles-ci par rapport à la résultante se nomment forces *composantes*.

L'opération par laquelle on cherche la résultante de plusieurs forces composantes données, se nomme la *composition des forces*; et celle par laquelle on trouve les composantes, lorsqu'on connoît la résultante, se nomme la *décomposition des forces*.

I I.

7. Deux forces égales et directement opposées, appliquées en même temps à un même point, se détruisent et se font équilibre.

Réciproquement, lorsque deux forces se font équilibre, elles sont égales et directement opposées.

8. Donc, si plusieurs forces différemment dirigées sont appliquées à un même point pour leur faire équilibre, c'est-à-dire, pour détruire l'effet de leur résultante, il faut appliquer à ce point une force unique égale à cette résultante et qui lui soit directement opposée, ou appliquer plusieurs forces dont la résultante soit égale et directement opposée à la résultante des premières.

9. Réciproquement, lorsque plusieurs forces différemment dirigées et appliquées à un même point sont en équilibre, leur résultante est nulle, ou, ce qui revient au même, l'une quelconque de ces forces est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres; ou enfin la résultante d'un nombre quelconque de ces forces est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

I I I.

10. *Si plusieurs forces appliquées à un même point ont la même direction et agissent dans le même sens, elles produisent sur ce point le même effet qu'une force*

unique , qui seroit égale à leur somme , qui auroit la même direction , et qui agiroit dans le même sens ; par conséquent cette force unique est leur résultante.

11. Donc , pour faire équilibre à toutes ces forces , il faut appliquer au même point et dans le sens directement opposé une force égale à leur somme ; car cette force sera égale et directement opposée à leur résultante.

12. Il suit de là , 1^o. que si deux forces inégales sont appliquées à un même point dans des sens directement contraires , leur résultante est dirigée dans le sens de la plus grande , et est égale à leur différence : car la plus grande de ces deux forces peut être regardée comme composée de deux autres forces dirigées dans le même sens qu'elle , dont l'une seroit égale à la plus petite , et dont l'autre seroit égale à la différence ; or de ces deux dernières forces , la première est détruite par la plus petite (7) ; donc il ne reste plus , pour mouvoir le point , que la différence , qui est dirigée dans le même sens que la plus grande.

13. 2^o. Que si tant de forces qu'on voudra sont appliquées à un même point , les unes dirigées dans un sens , et les autres dans le

sens directement opposé, après avoir fait la somme de toutes celles qui agissent dans un des deux sens, et la somme de toutes celles qui agissent dans le sens contraire, la résultante de toutes ces forces est égale à la différence de ces deux sommes (12), et est dirigée dans le sens de la plus grande.

14. Donc, pour faire équilibre à toutes ces forces, il faut appliquer au même point, et dans la direction de la plus petite des deux sommes, une force égale à la différence de ces sommes: car cette force sera égale et directement opposée à leur résultante.

T H É O R È M E .

15. *Si aux extrémités d'une droite in-* Fig. 3.
flexible AB sont appliquées deux forces égales P, Q, dont les directions AP, BQ soient parallèles entre elles, et qui agissent dans le même sens:

1°. *La direction de la résultante R de ces deux forces est parallèle aux droites AP, BQ, et passe par le milieu de AB;*

2°. *Cette résultante est égale à la somme $P+Q$ des deux forces;*

DÉMONSTRATION. I^{re} Partie. Soit une autre

droite inflexible DE, perpendiculaire aux directions des deux forces, et attachée invariablement à la droite AB; et soient prolongées les directions des deux forces P, Q, jusqu'à ce qu'elles coupent cette droite aux deux points D, E; on pourra supposer que ces deux forces sont appliquées aux points D, E. Cela posé, soit divisée DE en deux parties égales au point C, et soit placé en C, du côté vers lequel les forces tendent à mouvoir cette droite, un obstacle invincible; il est évident que la droite DE ne prendra aucun mouvement, parce que, tout étant égal de part et d'autre de l'obstacle C, il n'y aura pas de raison pour qu'une des deux forces l'emporte sur l'autre; donc la résultante des forces P, Q, sera détruite par la résistance de l'obstacle C; donc la direction de cette résultante passera par le point C (3). Mais si l'on menoit toute autre droite inflexible GH, parallèle à DE, et terminée en G, H, aux directions des deux forces P, Q, on démontreroit de même que la direction de la résultante de ces deux forces passe par le milieu I de cette droite: donc cette direction passe en même temps par les deux points C, I; donc elle est également éloi-

gnée de celles des deux forces P , Q , et leur est parallèle ; donc elle passe par le milieu de AB .

II^e Partie. La direction des deux forces P , Q , et celle de leur résultante R , étant parallèles , on peut les regarder comme concourant en un même point infiniment éloigné , et les deux forces P , Q , comme appliquées toutes deux à ce point : or la résultante de deux forces appliquées à un même point est égale à leur somme (10) ; donc la résultante des deux forces P , Q , est égale à la somme $P+Q$ de ces deux forces.

COROLLAIRE I.

16. Donc , pour faire équilibre aux deux forces P , Q , il faut appliquer au milieu K de la droite AB une troisième force égale à leur somme , qui agisse en sens contraire , et dont la direction soit parallèle aux droites AP , BQ ; car cette troisième force sera égale et directement opposée à leur résultante.

COROLLAIRE II.

17. Si , après avoir divisé une droite inflexible en un nombre quelconque de parties

égales, on applique à tous les points de division des forces égales, et dont les directions soient parallèles entre elles, la résultante de toutes ces forces passera par le milieu de la droite, suivant une direction parallèle à celle des forces, et sera égale à leur somme totale.

Car toutes les résultantes particulières de ces forces, considérées deux à deux, et prises à égales distances du milieu de la droite, passeront par le milieu (15), suivant cette direction, et chacune d'elles sera égale à la somme des deux forces qui la composeront; donc (10) la résultante générale passera aussi par le milieu, suivant la même direction, et sera égale à la somme de toutes les résultantes particulières, c'est-à-dire, à la somme de toutes les forces composantes.

THÉORÈME.

Fig. 4. 18. Si aux extrémités d'une droite inflexible AB sont appliquées deux forces inégales P, Q , dont les directions AP, BQ , soient parallèles entre elles, et qui agissent dans le même sens :

1°. La résultante R de ces deux forces est

égale à leur somme, et sa direction est parallèle à celles de ces forces;

2^o. Le point C d'application de la résultante partage la droite AB en deux parties réciproquement proportionnelles aux deux forces, de manière que l'on a

$$P : Q :: BC : AC.$$

DÉMONSTRATION. *I^{re} Partie.* Soit divisée la droite AB par le point D en deux parties directement proportionnelles aux deux forces P, Q, en sorte que l'on ait

$$P : Q :: AD : DB;$$

soit prolongée de part et d'autre la droite inflexible, de manière que AE soit égale à AD, et que BF soit égale à BD; et concevons que les deux forces P, Q, soient uniformément distribuées à tous les points de la droite EF, et suivant des directions parallèles à celles de ces deux forces: il est évident que la force P sera distribuée sur la partie DE de la droite inflexible, et que la force Q sera distribuée sur la partie DF. De plus, la force P sera la résultante de toutes les forces distribuées sur ED (17), et la force Q sera celle de toutes les forces distribuées sur DF; donc la résultante géné-

rale de toutes les forces distribuées sur la droite entière EF sera la même que celle des deux forces P, Q. Or cette résultante générale passe par le milieu C de la droite EF, suivant une direction parallèle à celles des composantes, et est égale à leur somme (17); donc la résultante des forces P, Q, est égale à leur somme, et sa direction, qui d'ailleurs passe par le point C, est parallèle à celle de ces mêmes forces.

II^e Partie. La droite AB étant la moitié de EF, on a $AB = EC$; et retranchant de ces deux quantités la partie commune AC, on a $BC = EA = AD$. Pareillement on a $AB = CF$; et retranchant la partie commune CB, on a $AC = BF = DB$. Donc, puisque l'on a par supposition $P : Q :: AD : DB$, on aura aussi $P : Q :: BC : AC$. Or nous venons de voir que la résultante des deux forces P, Q, passe par le point C; donc le point d'application de cette résultante partage la droite AB en deux parties réciproquement proportionnelles aux deux forces.

C O R O L L A I R E I.

19. Donc, pour faire équilibre aux deux

forces P , Q , il faut diviser la droite AB au point C en deux parties réciproquement proportionnelles à ces deux forces, et appliquer au point C une troisième force égale à la somme $P+Q$, qui agisse en sens contraire, et dont la direction soit parallèle à celle des deux forces P , Q .

Remarque.

20. Si le rapport des forces P , Q , et la longueur de la droite AB , étoient donnés en nombres, et qu'on voulût trouver les distances du point C aux points A , B , la proportion

$$P : Q :: BC : AC$$

ne pourroit pas être employée directement, parce qu'on ne connoîtroit dans cette proportion que les deux premiers termes; mais il est facile d'en déduire celle-ci,

$$P+Q : Q :: BC+AC : AC,$$

qui, à cause que $BC+AC$ est égal à AB , devient,

$$P+Q : Q :: AB : AC,$$

dans laquelle on connoît les trois premiers termes.

On trouveroit la distance BC par cette autre proportion

$$P+Q : P :: AB : BC,$$

qui se déduit de même de la première.

COROLLAIRE II.

21. Lorsqu'une force unique R est appliquée à un point C d'une droite inflexible, on peut toujours la décomposer en deux autres P, Q, qui étant appliquées à deux points A, B, donnés sur la même droite, et étant dirigées parallèlement à RC, produisent le même effet; et l'on trouve les grandeurs des deux forces P, Q, en partageant la force R en deux parties réciproquement proportionnelles aux droites AC, CB, au moyen des deux proportions suivantes,

$$AB : BC :: R : P,$$

$$AB : AC :: R : Q,$$

dans chacune desquelles on connoît les trois premiers termes: car la résultante des deux forces P, Q, a la même grandeur et la même direction, et agit dans le même sens que la force R.

COROLLAIRE

COROLLAIRE III.

22. Tout étant dans la figure 5, comme Fig. 5. dans la précédente, si l'on applique au point C de la droite AB une force S égale et directement opposée à la résultante des deux forces P, Q, de manière que l'on ait $S = R = P + Q$, les trois forces P, Q, S seront en équilibre (19), et chacune des deux forces P, Q pourra être regardée comme égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Donc la résultante des deux forces S, Q, dont les directions sont parallèles, et qui agissent en sens contraires, est une force p égale et directement opposée à la force P. Or la force P est égale à la différence des forces S, Q, et agit dans le sens contraire à la plus grande S de ces deux forces. Donc 1°. la résultante p des deux forces S, Q, est égale à leur différence $S - Q$, et elle agit dans le sens de la plus grande, suivant une direction parallèle à celle de ces deux forces.

De plus, on a $P + Q$, ou $S : Q :: AB : AC$ (20).

Donc 2°. les distances du point A d'application de cette résultante aux deux points

B

C, B, sont réciproquement proportionnelles aux forces S, Q.

Remarque.

23. Si les rapports de deux forces S, Q, et la longueur de la droite B C, étoient donnés en nombres, et qu'on voulût trouver les distances du point A aux points B, C, la proportion précédente ne pourroit pas être employée directement, parce qu'on ne connoîtroit dans cette proportion que les deux premiers termes ; mais il est facile d'en déduire celle-ci :

$S - Q : Q :: AB - AC \text{ ou } BC : AC$, dans laquelle on connoît les trois premiers termes.

On trouveroit la distance AB par cette autre proportion :

$S - Q : S :: AB - AC \text{ ou } BC : AB$, qui se déduit de même de la première.

C O R O L L A I R E I V.

14. Si les deux forces S, Q, dont les directions sont parallèles, et qui agissent en sens contraires, sont égales entre elles, 1°. leur résultante P, qui est égale à $S - Q$ (22), devient nulle ; 2°. dans la proportion $S - Q : Q ::$

BC : AC, le second terme étant infiniment grand par rapport au premier qui est nul, le quatrième terme AC est aussi infiniment grand par rapport au troisième. Donc le point A d'application de la résultante P est à une distance infinie du point C. Donc, pour faire équilibre aux deux forces S, Q, il faudroit appliquer à la droite inflexible une force nulle et dont la direction passât à une distance infinie; ce qui n'est pas absurde, mais ce qui ne peut s'exécuter.

On voit donc qu'il est impossible, au moyen d'une force unique, de faire équilibre à deux forces égales, dont les directions sont parallèles et qui agissent en sens contraires; mais au moyen de deux forces on peut leur faire équilibre d'une infinité de manières.

PROBLÈME.

25. *Un nombre quelconque de forces P, Fig. 64
Q, R, S.... etc. dont les directions sont pa-
rallèles, et qui agissent dans le même sens,
étant appliquées à des points A, B, C,
D.... etc., donnés de position, et liés entre
eux d'une manière invariable; déterminer
la résultante de toutes ces forces.*

SOLUTION. Considérant d'abord deux quel-

conques de ces forces, telles que P et Q , on déterminera leur résultante T (20) ; cette résultante sera égale à $P+Q$, sa direction sera parallèle à celle des deux forces P , Q , et l'on trouvera son point d'application E par la proportion suivante :

$$P+Q : Q :: AB : AE.$$

A la place des deux forces P , Q , on substituera leur résultante T ; puis ayant mené la droite EC , on déterminera la résultante V des deux forces T , R ; cette résultante V sera aussi celle des trois forces P , Q , R ; sa grandeur sera $T+R$ ou $P+Q+R$, et l'on trouvera sur EC son point d'application F par la proportion

$$T+R \text{ ou } P+Q+R : R :: EC : EF.$$

A la place des trois forces P , Q , R , on substituera leur résultante V , et après avoir mené la droite FD , on trouvera la résultante X des deux forces V , S ; cette résultante X sera aussi celle des quatre forces P , Q , R , S ; sa grandeur sera $V+S$, ou $P+Q+R+S$, et l'on trouvera sur FD son point d'application G par la proportion

$$V+S, \text{ ou } P+Q+R+S : S :: FD : FG.$$

En continuant ainsi de suite, on trouvera

la position de la résultante générale de toutes les forces, en quelque nombre qu'elles soient ; et la grandeur de cette résultante sera égale à la somme de toutes ces forces.

COROLLAIRE I.

26. Donc , en supposant que le point G soit lié aux autres points A, B, C, D.... d'une manière invariable, on fera équilibre à toutes les forces P, Q, R, S.... en appliquant au point G une force dont la direction soit parallèle à celles des premières , qui agisse en sens contraire, et qui soit égale à leur somme $P+Q+R+S$

COROLLAIRE II.

27. Si parmi les forces P, Q, R, S.... dont les directions sont parallèles, les unes agissent dans un sens, et les autres dans le sens contraire, on détermineroit d'abord (25) la résultante particulière de toutes celles qui agiroient dans un sens, et ensuite la résultante particulière de toutes celles qui agiroient dans le sens contraire. Par-là toutes les forces seroient réduites à deux autres agissant en sens opposés ; et en déterminant par le procédé de l'article (23) la résultante

de ces deux dernières forces, on auroit la résultante générale, et par conséquent la force qui, appliquée en sens contraire, feroit équilibre à toutes les forces proposées.

La résultante générale étant égale à la différence des deux résultantes particulières (22), et chacune de celles-ci étant égale à la somme de celles qui la composent (25), il s'ensuit que la résultante générale est égale à l'excès de la somme des forces qui agissent dans un sens, sur la somme de celles qui agissent dans le sens contraire.

C O R O L L A I R E I I I .

28. Si les forces $P, Q, R, S, \dots$, sans cesser d'être parallèles, et sans changer de grandeurs, avoient une autre direction et devenoient $p, q, r, s, \dots$; la résultante t des deux premières passeroit également par le point E et seroit égale à la somme $p+q$. Pareillement la résultante v des trois forces p, q, r , passeroit encore par le point F , et seroit égale à la somme $p+q+r$. De même la résultante x des quatre forces p, q, r, s , passeroit encore par le point G , et seroit égale à la somme $p+q+r+s$; et ainsi de suite. Donc la résultante générale de toutes les forces $p, q, r, s,$

passeroit encore par le même point que la résultante générale des premières forces $P, Q, R, S, \dots$ etc.

On voit donc que quand les grandeurs et les points d'application de forces parallèles restent les mêmes, la résultante de ces forces passe toujours par un certain même point, quelle que puisse être leur direction ; et la grandeur de cette résultante est toujours égale à leur somme.

Le point par lequel passe toujours la résultante des forces parallèles, quelle que soit leur direction, se nomme *centre des forces parallèles*.

Il est facile de voir que si les points d'application $A, B, C, D, \dots$ des forces parallèles $P, Q, R, S, \dots$ sont dans un même plan, le centre de ces forces est aussi dans ce plan ; car ce plan contient la droite AB , et par conséquent le point E de cette droite, qui est le centre des forces P, Q : il contient de même la droite EC , et par conséquent le centre F des forces P, Q, R : il contient la droite FD et par conséquent le centre G des forces P, Q, R, S ; et ainsi de suite.

On démontre de la même manière que si les points d'application sont sur une même

ligne droite, le centre des forces parallèles est aussi sur cette droite.

THÉORÈME.

29. *Deux forces appliquées à un même corps ne peuvent avoir une résultante, à moins que leurs directions ne concourent en un même point, et par conséquent ne soient comprises dans un même plan.*

DÉMONSTRATION. Lorsque les directions de deux forces ne concourent pas en un même point, ces forces ne peuvent pas être regardées comme destinées à mouvoir un point unique : donc une force unique ne peut pas produire le même effet ; donc ces forces n'ont pas de résultante.

THÉORÈME.

Fig. 7, 30. *Si les directions de deux forces P, Q, appliquées à deux points A, B d'un même corps, sont comprises dans un même plan, et par conséquent concourent en un certain point D :*

1°. *La direction de la résultante de ces deux forces passe par le point de concours D ;*

2°. *Cette direction est comprise dans le*

plan déterminé par celles des deux forces P, Q.

DÉMONSTRATION. *I^e Partie.* Le point D se trouvant sur les directions des deux forces, si l'on suppose que ce point soit attaché au corps d'une manière invariable, on pourra concevoir que les deux forces P, Q, au lieu d'être appliquées aux points A, B, le sont toutes deux au point D, et qu'elles n'ont d'autre effet que de tendre à mouvoir ce point; donc leur résultante peut aussi être regardée comme n'ayant pas d'autre effet. Or une force unique ne peut agir sur un point unique, à moins qu'elle ne soit immédiatement appliquée à ce point. Donc la résultante des deux forces P, Q peut être regardée comme appliquée au point D. Donc 1^o. la direction de cette force passe par le point de concours de ses deux composantes.

II^e Partie. Si par les deux points d'application A, B on conçoit une droite inflexible attachée au corps d'une manière invariable, l'effet des deux forces P, Q, et par conséquent celui de leur résultante, est évidemment de tendre à mouvoir la droite AB. Or une force unique ne peut mouvoir une droite unique, à moins qu'elle ne soit immédiate-

ment appliquée à quelqu'un des points de cette droite. Donc la résultante des deux forces P, Q peut être regardée comme appliquée à quelqu'un des points de la droite AB : donc la direction de cette force passe en même temps, et par le point D , et par un des points de la droite AB . Donc 2^o. elle est comprise dans le plan du triangle ABD , déterminé par les directions des deux composantes P, Q .

C O R O L L A I R E.

31. Il suit de là que si trois forces P, Q, R , appliquées à un même corps, sont en équilibre entre elles, les directions de ces trois forces concourent en un même point D , et sont comprises dans un même plan.

Car ces trois forces étant en équilibre, l'une quelconque d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante des deux autres ; donc deux quelconques de ces forces ont une résultante ; donc (29) les directions de ces deux forces sont comprises dans un même plan, et concourent en un même point ; donc (30) la direction de la résultante de ces deux forces, et par conséquent celle de la troisième force qui leur fait équilibre, passe

par le point de concours, et est comprise dans le plan déterminé par leurs directions.

LEMME.

32. Si une puissance P est appliquée à la Fig. 9.
circonférence d'un cercle mobile autour de son centre A , et suivant une direction BP tangente à la circonférence, cette force tend à faire tourner le cercle autour de son centre, de la même manière que si elle étoit appliquée à tout autre point C , et suivant une direction CQ tangente à la même circonférence.

THÉORÈME.

33. Lorsque les directions de deux forces Fig. 10.
 P, Q sont comprises dans un même plan, et concourent en un même point A , si l'on porte sur ces directions les droites AB, AC proportionnelles à ces forces, de manière que l'on ait

$$P : Q :: AB : AC,$$

et qu'on achève le parallélogramme $ABDC$, la résultante de ces deux forces sera dirigée suivant la diagonale AD du parallélogramme.

DÉMONSTRATION. Concevons pour un instant que le point D soit un obstacle invincible , et de ce point abaissons sur les directions des deux forces les perpendiculaires DE, DF ; les triangles BED, CFD seront semblables , parce que les angles en B et C , étant égaux à l'angle A , seront égaux entre eux ; et l'on aura $DC : DB :: DF : DE$.

Or on a par la supposition :

$$P : Q :: AB : AC, \text{ ou } :: DC : DB.$$

Donc on aura $P : Q :: DF : DE$.

Du point D , comme centre , et de l'intervalle DF , soit décrit l'arc de cercle FG , terminé en G au prolongement de ED : puis , regardant cet arc et la droite EG comme des lignes inflexibles , et liées d'une manière invariable au point A , concevons que la force P soit appliquée au point E de sa direction , et qu'une force M , égale à la force Q , soit appliquée au point G , suivant une direction parallèle à AP , et par conséquent tangente à l'arc FG. Cela posé , à cause de $M=Q$ et de $DF=DG$, on aura

$$P : M :: DG : DE.$$

Donc (18) la résultante des deux forces parallèles P, M , passera par le point fixe D ,

et sera détruite par la résistance de ce point ; donc ces deux forces seront en équilibre autour de ce même point.

Or la force Q , dont la direction est tangente à l'arc FG , et qu'on peut regarder comme appliquée au point F de sa direction, tend à faire tourner cet arc de la même manière que la force M (32), et peut être substituée à cette dernière force pour contrebalancer la force P : donc les deux forces P, Q seront aussi en équilibre autour du point fixe D ; donc leur résultante sera détruite par la résistance de ce point ; et par conséquent la direction de cette résultante passera par le point D .

Mais nous avons vu que la résultante des deux forces P, Q doit passer par le point A de concours de leurs directions (30) ; donc cette résultante sera dirigée suivant la diagonale AD .

COROLLAIRE I.

34. Si d'un point quelconque D , pris sur la direction AD de la résultante de deux forces P, Q , on mène les droites DB, DC parallèles aux directions de ces forces : on formera un parallélogramme $ABCD$, dont

les côtés AB, AC seront proportionnels aux forces P, Q; c'est-à-dire que l'on aura,

$$P : Q :: AB : AC, \text{ ou } :: DC : DB.$$

Car si ces côtés n'étoient pas proportionnels aux forces, leur résultante seroit dirigée suivant la diagonale du parallélogramme dont les côtés seront proportionnels à ces forces (33), et non pas suivant AD, ce qui seroit contre la supposition.

COROLLAIRE II.

35. Si d'un point quelconque D, pris sur la direction AD de la résultante de deux forces P, Q, on abaisse des perpendiculaires DE, DF sur les directions de ces deux forces, ces perpendiculaires seront entre elles réciproquement comme les forces P, Q.

Car nous venons de voir (34) que l'on a

$$P : Q :: DC : DB.$$

Et les triangles semblables DBE, DCF donnent

$$DC : DB :: DF : DE.$$

Donc on aura $P : Q :: DF : DE$.

THÉORÈME.

Fig. 11. 36. Lorsque les directions de deux forces

P, Q, sont comprises dans un même plan, et concourent en un point A, si l'on porte sur ces directions les droites AB, AC proportionnelles à ces forces, de manière que l'on ait

$$P : Q :: AB : AC,$$

et qu'on achève le parallélogramme ABDC; la résultante R de ces deux forces sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale AD du parallélogramme; c'est-à-dire que l'on aura

$$P : Q : R :: AB : AC : AD.$$

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà vu (33) que la résultante des deux forces P, Q sera dirigée suivant la diagonale AD du parallélogramme; il ne s'agit plus que de faire voir que sa grandeur sera représentée par celle de cette diagonale.

Soit appliquée au point A une force S égale et directement opposée à la résultante R, cette force sera dirigée suivant le prolongement de la diagonale DA, et les trois forces P, Q, S seront en équilibre. Donc la force Q sera aussi égale et directement opposée à la résultante des deux autres forces P, S; et par conséquent cette dernière résultante

sera dirigée suivant le prolongement de la droite CA. Soit portée CA sur son prolongement de A en H ; soit menée la droite HB qui sera parallèle à AD et par conséquent à la direction de la force S, et par le point H soit menée HK parallèle à la direction de la force P ; les deux forces P, S seront entre elles comme les côtés AK, AB du parallélogramme A B H K (34), c'est-à-dire que l'on aura

$$P : S :: AB : AK \text{ ou } HB.$$

Or, à cause du parallélogramme ADBH, on a $HB=AD$; de plus les deux forces S et R sont égales ; donc on aura

$$P : R :: AB : AD.$$

Mais on a par la supposition

$$P : Q :: AB : AC.$$

Donc, en réunissant ces deux dernières proportions, on aura

$$P : Q : R :: AB : AC : AD.$$

COROLLAIRE I.

37. Si les deux forces P, Q sont appliquées au point A, on leur fera équilibre en appliquant au même point une troisième force dirigée suivant DA, et proportionnelle
à

à la diagonale AD ; car cette force sera égale et directement opposée à la résultante de deux forces P, Q .

Si les forces P, Q , sont appliquées à d'autres points de leurs directions, on leur fera pareillement équilibre en appliquant à un point quelconque de la droite AD , et dans le sens DA , une force proportionnelle à AD , pourvu que le point d'application de cette dernière force soit lié d'une manière invariable aux points d'application des deux forces P, Q .

COROLLAIRE II.

38. On pourra toujours décomposer une force R donnée de grandeur et de direction, en deux autres forces P, Q , dirigées suivant des droites données AP, AQ , pourvu que ces directions, et celle de la force R , soient comprises dans un même plan, et concourent en un même point A .

Pour cela, on représentera la force R par une partie AD de sa direction ; puis en menant par le point D les droites DC, DB parallèles aux directions données AP, AQ , on formera un parallélogramme $ABDC$, dont les côtés AB, AC représenteront les forces

C

demandées P, Q ; car (36) la résultante de ces deux forces aura la même grandeur et la même direction que la force R.

On trouvera les grandeurs des deux forces P, Q par le moyen des deux proportions ,

$$AD : AB :: R : P.$$

$$AD : AC :: R : Q.$$

P R O B L È M E.

Fig. 12. 39. *Déterminer la résultante de tant de forces P, Q, R, S... qu'on voudra, dont les directions, comprises ou non comprises dans un même plan, concourent en un même point A.*

SOLUTION. On portera sur les directions de toutes les forces, à partir du point A, des droites AB, AC, AD, AE.... proportionnelles à leurs grandeurs; puis, considérant d'abord deux quelconques de ces forces, telles que P, Q, on achevera le parallélogramme ABFC, dont la diagonale AF représentera en grandeur et en direction la résultante particulière T de ces deux forces (36).

À la place des forces P, Q, on prendra leur résultante T, et, considérant les deux forces T, R, on achevera le parallélogramme

AFGD, dont la diagonale AG représentera en grandeur et en direction la résultante V des deux forces T, R, qui sera celle des trois forces P, Q, R.

Pareillement, à la place des forces P, Q, R, on prendra leur résultante V, et, considérant les deux forces V, S, on achèvera le parallélogramme AGHE, dont la diagonale AH représentera en grandeur et en direction la résultante X des forces V, S, qui sera aussi celle des quatre forces P, Q, R, S.

En continuant ainsi de suite, on trouvera la direction et la grandeur de la résultante générale de toutes les forces P, Q, R, S..., en quelque nombre qu'elles soient.

COROLLAIRE.

40. Si toutes les forces P, Q, R, S... sont immédiatement appliquées au point A de concours de leurs directions pour leur faire équilibre, on trouvera d'abord la grandeur et la direction de leur résultante (39); puis on appliquera au point A une force qui lui soit égale et directement opposée. Mais si les forces sont appliquées à d'autres points de leurs directions, liés entre eux d'une manière invariable, on leur fera équilibre en appli-

quant à un point quelconque de la direction de leur résultante, une force qui soit égale et directement opposée à cette résultante, pourvu que le point d'application de cette force soit aussi lié d'une manière invariable à ceux des forces $P, Q, R, S, \dots$

P R O B L È M E.

Fig. 13. 41. *Déterminer la résultante de tant de forces $P, Q, R, S, \dots$ qu'on voudra, dont les directions, comprises dans un même plan, ne concourent pas à un même point, dont les points d'application $A, B, C, D, \dots$ sont liés entre eux d'une manière invariable, et dont les grandeurs sont représentées par les parties $Aa, Bb, Cc, Dd, \dots$ de leurs directions.*

SOLUTION. Après avoir prolongé les directions de deux quelconques de ces forces, telles que P, Q , jusqu'à ce qu'elles se soient rencontrées quelque part en un point E , on portera de E en F et de E en G les droites Aa, Bb , qui représentent ces forces; et l'on achevera le parallélogramme $EFeG$, dont la diagonale Ee représentera en grandeur et en direction la résultante T de deux forces P, Q (36).

A la place des forces P, Q , on prendra leur résultante T , dont on prolongera la direction, ainsi que celle de la force R , jusqu'à ce qu'elles se rencontrent quelque part en un point H ; on portera la droite Ee de H en I , la droite Cc de H en K ; et l'on achevera le parallélogramme HI/K , dont la diagonale Hh représentera en grandeur et en direction la résultante V des deux forces T, R , qui sera aussi celle des trois forces P, Q, R .

Pareillement, à la place des trois forces P, Q, R , on prendra leur résultante V , et on prolongera sa direction, ainsi que celle de la force S , jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en un point L ; puis portant de L en M et de L en N les droites Hh, Dd , qui représentent les forces V et S , on achevera le parallélogramme LM/N , dont la diagonale Ll représentera la résultante X de ces deux forces, qui sera aussi celle des quatre forces P, Q, R, S .

En continuant ainsi de suite, on trouvera la grandeur et la direction de la résultante générale de toutes les forces proposées, en quelque nombre qu'elles soient.

42. Donc lorsque plusieurs forces, dirigées dans un même plan, sont appliquées à des points liés entre eux d'une manière invariable, ces forces ont toujours une résultante: ainsi il est possible de leur faire équilibre au moyen d'une force unique, excepté dans le cas où la direction d'une de ces forces étant parallèle à celle de la résultante de toutes les autres, cette force et cette résultante seroient égales entre elles, et agiroient en sens contraires; car nous avons vu (24) qu'alors pour leur faire équilibre il faudroit appliquer une force nulle et dont la direction passât à une distance infinie, ce qui est impraticable.

T H É O R È M E.

Fig. 14. 43. Si trois forces P, Q, R sont représentées en grandeurs et en directions par les trois arêtes AB, AC, AD , contiguës au même angle d'un parallépipède $ABFECD$, de manière que l'on ait

$$P : Q : R :: AB : AC : AD,$$

leur résultante S sera représentée, en grandeur et en direction par la diagonale

AE du parallépipède contiguë au même angle ; et l'on aura

$$P : Q : R : S :: AB : AC : AD : AE.$$

DÉMONSTRATION. Dans la face ABFC, qui contient les directions des deux forces P, Q, soit menée la diagonale AF, soit aussi menée la diagonale DE dans la face opposée DHEG : ces deux diagonales seront parallèles et égales ; car les deux arêtes AD, EF du parallépipède aux extrémités desquelles elles se terminent, sont parallèles et égales ; donc AFED sera un parallélogramme. Cela posé, les deux forces P, Q, étant représentées en grandeurs et en directions par les côtés AB, AC de la face ABFG, qui est un parallélogramme, leur résultante T sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale AF (36), et l'on aura

$$P : Q : T :: AB : AC : AF.$$

De même les deux forces T, R étant représentées par les côtés AF, AD du parallélogramme AFED, leur résultante S, qui sera aussi celle des trois forces P, Q, R, sera représentée par la diagonale AE du même parallélogramme, et l'on aura

$$T : R : S :: AF : AD : AE.$$

Donc en réunissant les deux suites proportionnelles, on aura

$$P : Q : R : S :: AB : AC : AD : AE.$$

Or la diagonale AF est en même temps celle du parallépipède ; donc la résultante des trois forces P, Q, R sera représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallépipède.

COROLLAIRE.

44. On pourra toujours décomposer une force S donnée de grandeur et de direction, en trois autres forces P, Q, R, dirigées suivant des droites données AP, AQ, AR, et non comprises dans un même plan, pourvu que ces trois directions et celle de la force S concourent en un même point A.

Pour cela, par les trois directions, considérées deux à deux, on menaera les trois plans BAC, CAD, DAB ; on représentera la force S par une partie AE de sa direction, et par le point E on menaera trois autres plans EGDH, EHBF, EFCG, respectivement parallèles aux trois premiers : ces six plans seront les faces d'un parallépipède dont AE sera la diagonale, et dont les arêtes AB, AC, AD,

qui seront prises sur les trois directions données, représenteront les grandeurs des trois forces demandées P, Q, R ; car (43) la résultante de ces trois forces aura la même grandeur et la même direction que la force S .

Autrement, on menera par le point E trois droites parallèles aux directions AP, AC, AR ; et les parties EF, EH, EG de ces droites, comprises entre le point E et les plans BAC, CAD, DAB , représenteront les grandeurs des forces demandées P, Q, R ; car ces droites étant trois arêtes du parallélépipède, elles sont respectivement égales aux autres arêtes AB, AC, AD , qui leur sont parallèles.

C H A P I T R E I I .

Des Momens.

45. **O**N appelle *moment* d'une force par rapport à un point, ou par rapport à une droite, ou par rapport à un plan, le produit de cette force multipliée par la distance de sa direction à ce point, ou à cette droite, ou à ce plan.

46. Lorsque l'on considère les momens de