Institutionum calculi integralis

Methodus integrandi a primis principiis usque ad integrationem aequationum differentialium primi gradus

Euler, Leonhard

Petropoli, 1768

Persistent Link: https://doi.org/10.3931/e-rara-29419

Praenotanda.

PRAENOTANDA.
DE
CALCVLO INTEGRALI
IN GENERE.

Definitio I.

I.

Calculus integralis est methodus ex data differentialium relatione inueniendi relationem ipsarum quantitatum: et operatio, qua hoc praestatur, integratio vocari solet.

Coroll. I.

2. Cum igitur calculus differentialis ex data relatione quantitatum variabilium, relationem differentialium inuestigare doceat: calculus integralis methodum inuersam suppeditat.

Coroll. 2.

3. Quemadmodum ſcilicet in Analyſi perpetuo binae operationes ſibi opponuntur, veluti ſubtractio additioni, diuiſio multiplicationi, extractio radicum euectioni ad poteſtates, ita etiam ſimili ratione calculus integralis calculo differentiali opponitur.

Coroll. 3.

4. Propoſita relatione quaecunque inter binas quantitates variabiles x et y, in calculo differentiali methodus traditur rationem differentialium $dy:dx$ inueſtigandi: ſin autem viciſſim ex hac differentialium ratione ipſa quantitatum x et y relatio ſit definienda, hoc opus calculo integrali tribuitur.

Scholion 1.

5. In calculo differentiali iam notaui, quaeſtionem de differentialibus non abſolute ſed relatiue eſſe intelligendam, ita vt, ſi y fuerit functio quaecunque ipſius x, non tam ipſum eius differentiale dy, quam eius ratio ad differentiale dx ſit definienda. Cum enim omnia differentialia per ſe ſint nihilo aequalia, quaecunque functio y fuerit ipſius x, ſemper eſt $dy = 0$, neque ſic quicquam amplius abſolute quaeri poſſet. Verum quaeſtio ita rite proponi debet, vt dum x incrementum capit infinite paruum adeoque euaneſcens dx, definiatur ratio incrementi functionis y, quod inde capiet, ad iſtud dx: etſi enim vtrumque eſt $= 0$, tamen ratio certa inter ea intercedit, quae in calculo differentiali proprie inueſti-

vestigatur. Ita si fuerit $y = xx$, in calculo differentiali ostenditur esse $\frac{dy}{dx} = 2x$ neque hanc incrementorum rationem esse veram, nisi incrementum dx, ex quo dy nascitur, nihilo aequale statuatur. Verum tamen hac vera differentialium notione obseruata locutiones communes, quibus differentialia quasi absolute enunciantur, tolerari possunt, dummodo semper in mente saltem ad veritatem referantur. Recte ergo dicimus, si $y = xx$, fore $dy = 2xdx$, tametsi falsum non esset si quis diceret $dy = 3xdx$, vel $dy = 4xdx$, quoniam ob $dx = 0$ et $dy = 0$, hae aequalitates aeque subsisterent; sed prima sola rationi verae $\frac{dy}{dx} = 2x$ est consentanea.

Scholion 2.

6. Quemadmodum calculus differentialis apud Anglos methodus fluxionum appellatur, ita calculus integralis ab iis methodus fluxionum inuersa vocari solet, quandoquidem a fluxionibus ad quantitates fluentes reuertitur. Quas enim nos qnantitates variabiles vocamus, eas Angli nomine magis idoneo quantitates fluentes vocant, et earum incrementa infinite parua seu euanescentia fluxiones nominant, ita vt fluxiones ipsis idem sint, quod nobis differentialia. Haec diuersitas loquendi ita iam vsu inualuit vt conciliatio vix vnquam sit expectanda, equidem Anglos in formulis loquendi lubenter imitarer, sed signa quibus nos vtimur, illorum signis longe anteferenda videntur. Verum cum tot iam libri vtraque

ratione conſcripti prodierint, huiusmodi conciliatio nullum vſum eſſet habitura.

Definitio 2.

7. Cum functionis cuiuscunque ipſius x differentiale huiusmodi habeat formam Xdx, propoſita tali forma differentiali Xdx, in qua X ſit functio quaecunque ipſius x, illa functio, cuius differentiale eſt $= Xdx$, huius vocatur integrale, et praefixo ſigno $\int$ indicari ſolet, ita vt $\int Xdx$ eam denotet quantitatem variabilem, cuius differentiale eſt $= Xdx$.

Coroll. 1.

8. Quemadmodum ergo propoſitae formulae differentialis Xdx integrale, ſeu ea functio ipſius x, cuius differentiale eſt $= Xdx$, quae hac ſcriptura $\int Xdx$ indicatur, inueſtigari debeat, in calculo integrali eſt explicandum.

Coroll. 2.

9. Vti ergo littera d ſignum eſt differentiationis, ita littera $\int$ pro ſigno integrationis vtimur, ſicque haec duo ſigna ſibi mutuo opponuntur, et quaſi ſe deſtruunt ſcilicet $\int dX$ erit $= X$, quia ea quantitas denotatur cuius differentiale eſt dX, quae vtique eſt X.

Coroll. 3.

10. Cum igitur harum ipſius x functionum x^2, x^n, $\sqrt{(aa-xx)}$ differentialia ſint $2xdx$, $nx^{n-1}dx$, $\frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ ſigno integrationis $\int$ adhibendo patet fore

$\int 2x$

$\int 2x\,dx = xx$; $\int nx^{n-1}dx = x^n$; $\int \frac{-x\,dx}{\sqrt{(aa-xx)}} = \sqrt{(aa-xx)}$ vnde vſus huius ſigni clarius perſpicitur.

Scholion 1.

11. Hic vnica tantum quantitas variabilis in computum ingredi videtur, cum tamen ſtatuamus tam in calculo differentiali quam integrali ſemper rationem duorum pluriumue differentialium ſpectari. Verum etſi hic vna tantum quantitas variabilis x apparet, tamen reuera duae conſiderantur; altera enim eſt ipſa illa functio, cuius differentiale ſumimus eſſe $X dx$, quae ſi deſignetur littera y erit $dy = X dx$, ſeu $\frac{dy}{dx} = X$, ita vt hic omnino ratio differentialium $dy : dx$ proponatur, quae eſt $= X$, indeque erit $y = \int X dx$: hoc autem integrale non tam ex ipſo differentiali $X dx$, quod vtique eſt $= 0$, quam ex eius ratione ad dx inueniri eſt cenſendum. Caeterum hoc ſignum $\int$ vocabulo *ſummae* efferri ſolet, quod ex conceptu parum idoneo, quo integrale tanquam ſumma omnium differentialium ſpectatur, eſt natum; neque maiore iure admitti poteſt, quam vulgo lineae ex punctis conſtare concipi ſolent.

Scholion 2.

12. At calculus integralis multo latius quam ad huiusmodi formulas integrandas patet, quae vnicam variabilem complectuntur. Quemadmodum enim hic functio vnius variabilis x ex data differentialis forma inueſtigatur; ita calculus integralis quoque

extendi debet ad functiones duarum pluriumue variabilium inuestigandas, cum relatio quaedam differentialium fuerit proposita. Deinde calculus integralis non solum ad differentialia primi ordinis adstringitur, sed etiam praecepta tradere debet, quorum ope functiones tam vnius quam duarum pluriumue variabilium inuestigari queant, cum relatio quaedam differentialium secundi altiorisue cuiusdam ordinis fuerit data. Atque hanc ob rem definitionem calculi integralis ita instruximus, vt omnes huiusmodi inuestigationes in se complecteretur; differentialia enim cuiusque ordinis intelligi debent, et voce relationis, quae inter ea proponatur, sum vsus, vt latius pateret voce rationis, quae tantum duorum differentialium comparationem indicare videatur. Ex his ergo diuisionem calculi integralis constituere poterimus.

Definitio 3.

13. Calculus integralis diuiditur in duas partes, quarum prior tradit methodum functionem vnius variabilis inueniendi ex data quadam relatione inter eius differentialia tam primi quam altiorum ordinum.

Pars autem altera methodum continet functionem duarum pluriumue variabilium inueniendi, cum relatio inter eius differentialia siue primi siue altioris cuiusdam gradus fuerit proposita.

Coroll. 1.

14. Prout ergo functio ex data differentialium rela-

relatione inuenienda vel vnicam variabilem complectitur, vel duas pluresue inde calculus integralis commode in duas partes principales dispescitur, quibus exponendis duos libros destinamus.

Coroll. 2.

15. Semper igitur calculus integralis in inventione functionum vel vnius vel plurium variabilium versatur, cum scilicet relatio quaepiam inter eius differentialia siue altioris cuiuspiam ordinis fuerit proposita.

Scholion.

16. Cum hic primam partem calculi integralis in inuestigatione functionum vnicae variabilis ex data differentialium relatione constituamus, plures partes pro numero variabilium functionem ingredientium constitui debere videatur, ita vt pars secunda functiones duarum variabilium, tertia trium, quarta quatuor etc. complectatur. Verum pro his posterioribus partibus methodus fere eadem requiritur, ita vt si inuentio functionum duas variabiles inuoluentium fuerit in potestate, via ad eas, quae plures variabiles implicant, satis sit patefacta; vnde inuentionem eiusmodi functionum, quae duas pluresue variabiles continent, commode coniungimus, indeque vnicam partem calculi integralis constituimus posteriori libro tractandam.

Caeterum haec altera pars in elementis adhuc nusquam est tractata, etiamsi eius vsus in Mechanica

nica ac praecipue in doctrina fluidorum maximi sit vsus. Quocirca cum in hoc genere praeter prima rudimenta vix quicquam sit exploratum, noster secundus liber de calculo integrali admodum erit sterilis, ac praeter commemorationem eorum, quae adhuc desiderantur, parum erit expectandum; verum hoc ipsum ad scientiae incrementum multum conferre videtur.

Definitio 4.

17. Vterque de calculo integrali liber commode subdiuiditur in partes pro gradu differentialium, ex quorum relatione functionem quaesitam inuestigari oportet. Ita prima pars versatur in relatione differentialium primi gradus, secunda in relatione differentialium secundi gradus, quorsum etiam differentialia altiorum graduum ob tenuitatem eorum, quae adhuc sunt inuestigata, referri possunt.

Coroll. 1.

18. Vterque ergo liber constabit duabus partibus, in quarum priore relatio inter differentialia primi gradus proposita considerabitur, in posteriore vero eiusmodi integrationes occurrent, vbi relatio inter differentialia secundi altiorumue graduum proponitur.

Coroll. 2.

19. In primi ergo libri parte prima eiusmodi functio variabilis x inuenienda proponitur, vt posita ea functione $= y$, et $\frac{dy}{dx} = p$, relatio quaecunque data

data inter has tres quantitates x, y et p adimpleatur: seu proposita quacunque aequatione inter has ternas quantitates, vt indoles functionis y seu aequatio inter x et y tantum, exclusa p, eruatur.

Coroll. 3.

20. Posterioris autem partis primi libri quaestiones ita erunt comparatae, vt posito $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ etc. si proponatur aequatio quaecunque inter quantitates x, y, p, q, r etc. indoles functionis y per x, seu aequatio inter x et y eliciatur.

Scholion 1.

21. Quae adhuc in calculo integrali sunt elaborata maximam partem ad libri primi partem primam sunt referenda, in qua excolenda Geometrae imprimis operam suam collocarunt: pauca sunt quae in parte posteriore sunt praestita et alter liber, quem secundum fecimus, etiamnunc fere vacuus est relictus. Prima autem pars libri primi, in qua potissimum nostra tractatio consumetur, denuo in plures sectiones distinguitur, pro modo relationis, quae inter quantitates x, y et $p = \frac{dy}{dx}$ proponitur. Relatio enim prae caeteris simplicissima est, quando $p = \frac{dy}{dx}$ aequatur functioni cuipiam ipsius x, qua posita $= X$, vt sit $\frac{dy}{dx} = X$ seu $dy = X\,dx$; totum negotium in integratione formulae differentialis $X\,dx$ absolvitur: huius operationis iam supra mentionem feci-

 mus,

mus, quae vulgo ſub titulo integrationis formularum differentialium ſimplicium, ſeu vnicam variabilem inuoluentium tractari ſolet. Eodem res rediret, ſi $p = \frac{dy}{dx}$ aequaretur functioni ipſius y tantum, quandoquidem quantitates x et y ita inter ſe reciprocantur, vt altera tanquam functio alterius ſpectari poſſit: haec ergo ad ſectionem primam referentur. Sin autem $p = \frac{dy}{dx}$ aequetur expreſſioni ambas quantitates x et y inuoluenti, aequatio habetur differentialis huius formae $Pdx + Qdy = 0$, vbi P et Q ſunt expreſſiones quaecunque ex x, y et conſtantibus conflatae. Quanquam autem Geometrae multum in huiusmodi aequationum integratione deſudarunt, tamen vix vltra quosdam caſus ſatis particulares ſunt progreſſi. Sin autem p magis complicate per x et y determinatur, vt eius valor explicite exhiberi nequeat, veluti ſi fuerit

$$p^5 = xxp^3 - xyp + x^5 - y^5$$

ne via quidem conſtat tentanda, quomodo inde relatio inter x et y inueſtigari queat, pauca ergo, quae hic tradere licebit, cum praecedentibus ſecundam ſectionem primae partis libri primi occupabunt. Ita ex vniuerſa noſtra tractatione magis patebit, quod adhuc in calculo integrali deſideretur, quam quid iam ſit expeditum, cum hoc prae illo vt minima quaedam particula ſit ſpectandum.

Scho-

CN55AP

Scholion 2.

22. In ſingulis partibus, quas enarrauimus, fieri etiam ſolet, vt non ſolum vna quaedam functio, ſed etiam ſimul plures inueſtigentur, ita vt neutra ſine reliquis definiri poſſit, quemadmodum in Algebra communi vſu venit, vt ad ſolutionem problematis plures incognitae in calculum ſint introducendae, quae deinceps per totidem aequationes determinentur. Veluti ſi eiusmodi binae functiones y et z ipſius x ſint inueniendae, vt ſit

$$xdy + azzdx = 0 \text{ et } xxdz + bxydy = cdy$$

hinc nouae ſubdiuiſiones noſtrae tractationis conſtitui poſſent. Verum quia hic vt in Algebra communi totum negotium ad eliminationem vnius litterae reuocatur, vt deinceps duae tantum variabiles in vna aequatione ſuperſint, hinc tractatio non multiplicanda videtur.

Scholion 3.

23. In ſecundo libro calculi integralis, quo functio duarum pluriumue variabilium ex data differentialium relatione inueſtigatur, multo maior quaeſtionum varietas locum habet. Sit enim z functio binarum variabilium x et t inueſtiganda, et cum $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ denotet rationem eius differentialis ad dx ſi ſola x pro variabili habiatur, at $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ rationem eius differentialis ad dt, ſi ſola t variabilis ſumatur, prima pars eiusmodi continebit quaeſtiones, in quibus certa quaedam relatio inter quantitates x, t, z

et $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ proponitur, et quaestio huc redit, vt hinc aequatio inter solas quantitates x, t et z eruatur; inde enim qualis z sit functio ipsarum x et t, patebit. In secunda parte praeter has formulas $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ etiam istae $\left(\frac{ddz}{dx\,dx}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)$ et $\left(\frac{ddz}{dt\,dt}\right)$, in computum ingredientur: quarum significatio ita est intelligenda, vt positis prioribus $\left(\frac{dz}{dx}\right)=p$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right)=q$, vbi p et q iterum certae erunt functiones ipsorum x et t, futurum sit simili expressionis modo,

$$\left(\frac{ddz}{dx\,dx}\right)=\left(\frac{dp}{dx}\right);\ \left(\frac{ddz}{dx\,dt}\right)=\left(\frac{dp}{dt}\right)=\left(\frac{dq}{dx}\right);\ \left(\frac{ddz}{dt\,dt}\right)=\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

Proposita ergo relatione inter has formulas et praecedentes simulque ipsas quantitates x, t et z, aequatio inter ternas istas quantitates solas x, t et z erui debet. Huiusmodi quaestiones frequenter occurrunt in Mechanica et Hydraulica, quando motus corporum flexibilium et fluidorum indagatur, ex quo maxime est optandum, vt haec altera sectio secundi libri calculi integralis omni cura excolatur. Neque vero opus erit vt hanc inuestigationem ad differentialia altiora extendamus, cum nullae adhuc quaestiones sint tractatae, quae tanta calculi incrementa desiderent.

Definitio 5.

24. Si functiones, quae in calculo integrali ex relatione differentialium quaeruntur, algebraice exhiberi nequeant, tum eae vocantur *transcendentes*, quandoquidem earum ratio vires Analyseos communis transcendit.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

25. Quoties ergo integratio non ſuccedit, toties functio quae per integrationem quaeritur, pro tranſcendente eſt habenda. Ita ſi formula differentialis Xdx integrationem non admittit, eius integrale, quod ita indicari ſolet $\int Xdx$ eſt functio tranſcendens ipſius x.

Coroll. 2.

26. Hinc intelligitur, ſi y fuerit functio tranſcendens ipſius x, viciſſim fore x functionem tranſcendentem ipſius y, atque ex hac conuerſione nouae functiones tranſcendentes oriuntur.

Coroll. 3.

27. Pro variis partibus et ſectionibus calculi integralis naſcuntur etiam plura genera functionum tranſcendentium, quorum adeo numerus in infinitum exſurgit, vnde patet quanta copia omnium quantitatum poſſibilium nobis adhuc ſit ignota.

Scholion 1.

28. Iam ante quam in Analyſin infinitorum penetrauimus, ſpecies quasdam functionum tranſcendentium cognoſcere licuit. Primam ſuppeditauit doctrina logarithmorum, ſi enim y denotet logarithmum ipſius x, vt ſit $y = lx$, erit y vtique functio tranſcendens ipſius x, ſicque logarithmi quaſi primam ſpeciem functionum tranſcendentium conſtituunt.

Deinde cum ex aequatione $y = lx$ viciſſim ſit $x = e^y$, erit x vtique etiam functio tranſcendens ipſius y, ac tales functiones vocantur exponentiales. Porro autem conſideratio angulorum aliud genus aperuit, veluti ſi angulus, cuius ſinus eſt $= s$, ponatur $= \Phi$ vt ſit $\Phi = \text{Arc.} \sin. s$, nullum eſt dubium, quin Φ ſit functio tranſcendens ipſius s et quidem infinitiformis: hincque cum conuertendo prodeat $s = \sin. \Phi$, erit etiam ſinus s functio tranſcendens anguli Φ. Quanquam autem hae functiones tranſcendentes ſine ſubſidio calculi integralis ſunt agnitae, tamen in ipſo quaſi limine calculi integralis ad eas deducimur: earumque indoles ita nobis iam eſt perſpecta, vt propemodum functionibus algebraicis accenſeri queant. Quare etiam perpetuo in calculo integrali, quoties functiones tranſcendentes ibi repertas ad logarithmos vel angulos reuocare licet, eas tanquam algebraicas ſpectare ſolemus.

Scholion 2.

29. Cum calculus integralis ex inuerſione calculi differentialis oriatur, perinde ac reliquae methodi inuerſae ad notitiam noui generis quantitatum nos perducit. Ita ſi a tyrone primorum elementorum nihil praeter notitiam numerorum integrorum poſitiuorum poſtulemus, apprehenſa additione, ſtatim atque ad operationem inuerſam, ſubtractionem ſcilicet, ducitur, notionem numerorum negatiuorum aſſequetur. Deinde multiplicatione tradita, cum ad diuiſionem progreditur, ibi notionem fractionum accipiet.

cipiet. Porro poſtquam euectionem ad poteſtates didicerit, ſi per operationem inuerſam extractionem radicum ſuſcipiat, quoties negotium non ſuccedit, ideam numerorum irrationalium adipiſcetur, haecque cognitio per totam Analyſin communem ſufficiens cenſetur. Simili ergo modo calculus integralis, quatenus integratio non ſuccedit, nouum nobis genus quantitatum tranſcendentium aperit. Non enim, vti omnium differentialia exhiberi poſſunt, ita viciſſim omnium differentialium integralia exhibere licet.

Scholion 3.

30. Neque vero ſtatim ac primi conatus in integratione expedienda fuerint initi, functiones quaeſitae pro tranſcendentibus ſunt habendae; fieri enim ſaepe ſolet, vt integrale etiam algebraicum nonniſi per operationes artificioſas obtineri queat. Deinde quando functio quaeſita fuerit tranſcendens, ſollicite videndum eſt, num forte ad ſpecies illas ſimpliciſſimas logarithmorum vel angulorum reuocari poſſit, quo caſu ſolutio algebraicae eſſet aequiparanda. Quod ſi minus ſucceſſerit, formam tamen ſimpliciſſimam functionum tranſcendentium, ad quam quaeſitam reducere liceat, indagari conueniet. Ad vſum autem longe commodiſſimum eſt, vt valores functionum tranſcendentium vero proxime exhibentur, quem in finem inſignis pars calculi integralis in inueſtigationem ſerierum infinitarum impenditur, quae valores earum functionum contineant.

Theo-

Theorema.

31. Omnes functiones per calculum integralem inuentae sunt indeterminatae, ac requirunt determinationem ex natura quaestionis, cuius solutionem suppeditant, petendam.

Demonstratio.

31. Cum semper infinitae dentur functiones, quarum idem est differentiale, siquidem functionis $P+C$, quicunque valor constanti C tribuatur, differentiale idem est $=dP$: vicissim etiam proposito differentiali dP, integrale est $P+C$, vbi pro C quantitatem constantem quamcunque ponere licet, vnde patet eam functionem, cuius differentiale datur $=dP$, esse indeterminatam, cum quantitatem constantem arbitrariam in se inuoluat. Idem etiam eueniat necesse est, si functio ex quacunque differentialium relatione sit determinanda, semperque complectetur quantitatem constantem arbitrariam, cuius nullum vestigium in relatione differentialium apparuit. Determinabitur ergo huiusmodi functio per calculum integralem inuenta, dum constanti illi arbitrariae certus valor tribuitur, quem semper natura quaestionis, cuius solutio ad illam functionem perduxerat, suppeditabit.

Coroll. 1.

32. Si ergo functio y ipsius x ex relatione quapiam differentialium definitur, per constantem arbitrariam ingressam ita determinari potest, vt posito

ſito $x = a$ fiat $y = b$: quo facto functio erit determinata, et pro quouis valore ipſi x tributo functio y determinatum obtinebit valorem.

Coroll. 2.

33. Si ex relatione differentialium ſecundi gradus functio y definiatur, binas inuoluet conſtantes arbitrarias, ideoque duplicem determinationem admittit, qua effici poteſt vt poſito $x = a$, non ſolum y obtineat datum valorem b ſed etiam ratio $\frac{dy}{dx}$ dato valori c fiat aequalis.

Coroll. 3.

34. Si y ſit functio binarum variabilium x et t ex relatione differentialium eruta, etiam conſtantem arbitrariam inuoluet, cuius determinatione effici poterit, vt poſito $t = a$, aequatio inter y et x prodeat data ſeu naturam datae cuiuſpiam curuae exprimat.

Scholion.

35. Iſta functionum integralium, ſeu quae per calculum integralem ſunt inuentae, determinatio quouis caſu ex natura quaeſtionis tractatae facile deducitur, neque vlla difficultate laborat, niſi forte praeter neceſſitatem ſolutio ad differentialia fuerit perducta, cum per Analyſin communem erui potuiſſet: quo caſu perinde atque in Algebra quaſi radices inutiles ingeruntur. Cum autem haec determinatio tantum in applicatione ad certos caſus inſtituatur, hic vbi integrandi methodum in genere tradimus,

integralia in omni amplitudine eruere conabimur, ita vt constantes per integrationem ingressae maneant arbitrariae, neque nisi conditio quaedam vrgeat, eas determinabimus. Caeterum determinatio functionum ipsius x simplicissima est, qua eae casu $x = 0$, ipsae euanescentes redduntur.

Definitio 6.

36. Integrale *completum* exhiberi dicitur, quando functio quaesita omni extensione cum constante arbitraria repraesentatur. Quando autem ista constans iam certo modo est determinata, integrale vocari solet *particulare*.

Coroll. 1.

37. Quouis ergo casu datur vnicum integrale completum; integralia autem particularia infinita exhiberi possunt. Sic differentialis $x\,dx$ integrale completum est $\frac{1}{2}xx + C$, integralia autem particularia $\frac{1}{2}xx$; $\frac{1}{2}xx + 1$, $\frac{1}{2}xx + 2$ etc. multitudine infinita.

Coroll. 2.

38. Integrale ergo completum omnia integralia particularia in se complectitur; ex eoque haec omnia facile formari possunt. Vicissim autem ex integralibus particularibus, integrale completum non innotescit. Saepenumero autem, vti deinceps patebit, habetur methodus ex integrali particulari completum inueniendi.

Scholion.

39. Interdum facile eſt integrale particulare coniectura vel diuinatione aſſequi. Veluti ſi eiusmodi functio ipſius x, quae ſit y quaeritur, vt ſit $dy + yydx = dx + xxdy$, huic aequationi manifeſto ſatisfit ſumendo $y = x$, quod ergo eſt integrale particulare, quoniam, in eo nulla ineſt conſtans arbitraria: at integrale completum reperitur $y = \frac{1 + Cx}{C + x}$, quod illud particulare in ſe continet, ſumendo $C = \infty$. Simili modo ſumendo $C = 0$, hinc aliud integrale obtinetur $y = \frac{1}{x}$, quod ſuperiori aequationi perinde ſatisfacit ac prius $y = x$. Omnia autem integralia particularia, quaecunque ſatisfaciunt, contineri neceſſe eſt in formula generali $y = \frac{1 + Cx}{C + x}$, prouti conſtanti arbitrariae C alii atque alii valores tribuantur, ita ſumto $C = 1$ fit etiam $y = 1$. Plerumque autem euenire ſolet, vt etiamſi integrale quoddam particulare ſit algebraicum, tamen integrale completum ſit tranſcendens. Veluti ſi propoſita ſit haec aequatio $dy + ydx = dx + xdx$, ſtatim patet ſatisfieri poſito $y = x$, quod ergo eſt integrale particulare; verum integrale completum conſtantem arbitrariam C inuolvens eſt $y = x + Ce^{-x}$, denotante e numerum cuius logarithmus $= 1$, niſi ergo hic ſumatur $C = 0$, functio y ſemper eſt tranſcendens. Haec in genere notaſſe ſufficiat, antequam ad tractationem ipſam calculi integralis aggrediamur, quandoquidem ad omnes integrationes pertinent, nunc igitur forma tractationis expoſita ad opus tractandum pergamus.