

www.e-rara.ch

Résolution des équations du 3ème degré

Burnier, Frédéric

Morges, 1862

ETH-Bibliothek Zürich

Shelf Mark: Rar 5124

Persistent Link: <https://doi.org/10.3931/e-rara-3780>

www.e-rara.ch

Die Plattform e-rara.ch macht die in Schweizer Bibliotheken vorhandenen Drucke online verfügbar. Das Spektrum reicht von Büchern über Karten bis zu illustrierten Materialien – von den Anfängen des Buchdrucks bis ins 20. Jahrhundert.

e-rara.ch provides online access to rare books available in Swiss libraries. The holdings extend from books and maps to illustrated material – from the beginnings of printing to the 20th century.

e-rara.ch met en ligne des reproductions numériques d'imprimés conservés dans les bibliothèques de Suisse. L'éventail va des livres aux documents iconographiques en passant par les cartes – des débuts de l'imprimerie jusqu'au 20e siècle.

e-rara.ch mette a disposizione in rete le edizioni antiche conservate nelle biblioteche svizzere. La collezione comprende libri, carte geografiche e materiale illustrato che risalgono agli inizi della tipografia fino ad arrivare al XX secolo.

Nutzungsbedingungen Dieses Digitalisat kann kostenfrei heruntergeladen werden. Die Lizenzierungsart und die Nutzungsbedingungen sind individuell zu jedem Dokument in den Titelinformationen angegeben. Für weitere Informationen siehe auch [Link]

Terms of Use This digital copy can be downloaded free of charge. The type of licensing and the terms of use are indicated in the title information for each document individually. For further information please refer to the terms of use on [Link]

Conditions d'utilisation Ce document numérique peut être téléchargé gratuitement. Son statut juridique et ses conditions d'utilisation sont précisés dans sa notice détaillée. Pour de plus amples informations, voir [Link]

Condizioni di utilizzo Questo documento può essere scaricato gratuitamente. Il tipo di licenza e le condizioni di utilizzo sono indicate nella notizia bibliografica del singolo documento. Per ulteriori informazioni vedi anche [Link]

Résolution des équations du 3^{ème} degré.

Une équation telle que $X^3 + AX^2 + BX + C = 0$ étant donnée, on remplace X par $x - \frac{A}{3}$. L'équation résultante en x rentre dans une de celles-ci, $x^3 + px + q = 0$, ou bien $x^3 - ax + b = 0$, suivant que le coefficient de x est positif ou négatif.

1^{er} cas. $x^3 + px + q = 0$

On pose $x = y + \frac{m}{y}$; substituant, on voit qu'en prenant $m = -\frac{p}{3}$, l'équation se réduira à $y^3 + \frac{m^3}{y^3} + q = 0$; équation qui est du second degré par rapport à y^3 .

Le double signe du radical ne fait que permuter l'une dans l'autre les deux parties y et $\frac{m}{y}$ de x . — L'équation n'a qu'une seule racine de signe contraire à celui de q . On peut le reconnaître en discutant la courbe dont l'équation serait: $y = x^3 + px$.

2^{ème} cas $x^3 - ax + b = 0$

La discussion de la courbe dont l'équation est $y = x^3 - ax$ donne les résultats suivants:

L'origine est un centre

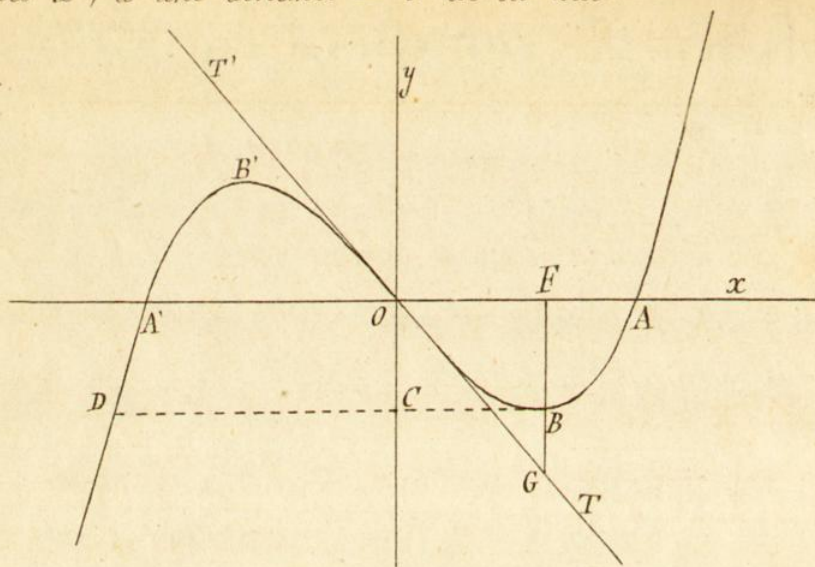
$$a = \tan g \ TOx$$

$$OA = \sqrt{a}, \ OF = \sqrt{\frac{a}{3}}, \ FB = 2 \ BG = 2 \frac{a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}}, \ CD = 2 \ BC.$$

Le lieu des sommets B & B' a pour équation $y = -2x^3$. La tangente à la courbe rencontre TT' en un point dont l'abscisse est les $\frac{2}{3}$ de l'abscisse du point de contact. —

— Résoudre $x^3 - ax + b = 0$ revient à déterminer les abscisses des points où la courbe est rencontrée par une parallèle à

2.
l'axe des x , à une distance $-b$ de cet axe.



Si $b < FB$, il y a 3 racines; leur somme est égale à zéro;
(théorie des équations). — Si $b = FB$, c'est le cas des racines
égales. — Si $b > FB$, il n'y a qu'une seule racine.
Les racines changent de ligne avec b ; l'inspection de la courbe
fait immédiatement discerner leur signe.

Soient connues les racines de $z^3 - 300z + K = 0$ pour toutes les
valeurs de l'indéterminée K . — On pose $x = \frac{z}{\sqrt{\frac{300}{a}}}$; l'équation
proposée $x^3 - ax + b = 0$, devient:

$z^3 - 300z + b \frac{300}{a} \sqrt{\frac{300}{a}} = 0$, laquelle rentre dans la
précédente en faisant $K = b \frac{300}{a} \sqrt{\frac{300}{a}}$. À cette valeur de K cor=
respondant, par supposition, des valeurs connues de z lesquelle
divisées par $\sqrt{\frac{300}{a}}$ seront les racines de la proposée.

La question est donc ramenée à résoudre $z^3 - 300z + K = 0$ pour
toutes les valeurs de K .

Sur la figure précédente, $OA = \sqrt{300} = 17,32\dots$

$$OF = \sqrt{\frac{300}{3}} = 10, \quad FB = 2 \frac{300}{3} \sqrt{\frac{300}{3}} = 2000, \quad CD = 20$$

1^o $K < 2000$ 3 racines.

La table ci-jointe donne les valeurs des deux racines de même signe, z_1 et z_2 , pour diverses valeurs de K . La 3^{ème} racine $z_3 = -(z_1 + z_2)$. — Pour obtenir une plus grande approximation, on mettra l'équation sous la forme $(z - 10)^2(z + 20) = 2000 - K$, d'où l'on tirera $z_1 = 10 - \sqrt{\frac{2000-K}{z_1+20}}$ et $z_2 = 10 + \sqrt{\frac{2000-K}{z_2+20}}$ et l'on procédera par approximations successives.

Exemple : $x^3 - 21x + 37 = 0$

$K = 37 \frac{300}{21} \sqrt{\frac{300}{21}} = \frac{37000\sqrt{7}}{49} = 1997,8122$ — On entre dans la table avec $K = 1997$; on interpole pour les 0,81, et l'on trouve les valeurs approchées, $z_1 = 9,729$, $z_2 = 10,268$, d'où $z_3 = -19,997$. Si cette approximation paraît incertaine ou insuffisante, on calculera $z_1 = 10 - \sqrt{\frac{2,1878}{29,729}}$ $z_2 = 10 + \sqrt{\frac{2,1878}{30,268}}$. Enfin les 3 racines de la proposée s'obtiendront en disant z_1, z_2 & z_3 par $\sqrt{\frac{300}{21}} = \frac{10}{\sqrt{7}}$.

2^o $K > 2000$ 1 racine.

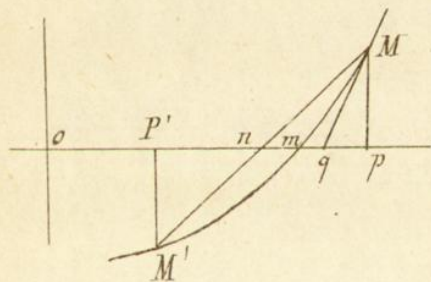
Jusqu'à $K = 25000$, ci-joint une table d'où l'on tirera une valeur approchée de z_3 . (On suppose K négatif, z_3 positif.) — Au delà de $K = 25000$, on prendra la formule approchée $z_3 = \sqrt[3]{K} + \frac{100}{\sqrt[3]{K}} + \frac{100^3}{3K^2} (\sqrt[3]{K} - \frac{100}{\sqrt[3]{K}})$ ou les 2 premiers termes suffiront même lorsque K sera très grand.

Soit α la valeur approchée ainsi obtenue de $\sqrt[3]{z}$, racine de l'équation $z^3 - 300z - K = 0$. On calculera la quantité

$$\beta = \frac{(\alpha - 20)(\alpha + 10)^2 + 2000 - K}{3(\alpha + 10)(\alpha - 10)}$$

La valeur exacte de $\sqrt[3]{z}$ sera comprise entre

$$\alpha - \beta \quad \text{et} \quad \alpha - \beta - \beta^2 \frac{2\alpha}{(\alpha + 10)(\alpha - 10)}$$



Ce dernier point se déduit de la méthode d'approximation de Newton.

Soit $OP = a$ une solution approchée de $f(x) = 0$. La méthode de Newton donne

$$OQ = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \quad \text{On détermine } OP' = a' \text{ de manière que } P'M' = -PM = -f(a).$$

Cela se fait par la série de Taylor; on néglige les puissances supérieures. à $(a - a')^2$. Le point cherché m est compris entre q et n . On trouve ainsi que la racine est comprise entre

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{et} \quad a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \left\{ \frac{f(a)}{f'(a)} \right\}^2 \frac{f''(a)}{f'(a)}.$$

Morges Août 1862. F. Burnier

Tables des racines de $z^3 - 300z + K = 0$

pour la résolution de l'équation

$x^3 - ax + b = 0$, en posant $x = \frac{z}{\sqrt{\frac{300}{a}}}$, &

$$K = b \frac{300}{a} \sqrt{\frac{300}{a}}$$

Racines de même signe de l'équation $x^3 - 300x + K = 0$

K	x_1	diff.	x_2	diff.	K	x_1	diff.	x_2	diff.
0	0		17,321		1560	5,876		13,618	
100	0,333	333	17,151	170	1570	5,927	51	13,579	39
200	0,667	334	16,977	174	1580	5,979	52	13,539	40
300	1,003	336	16,797	180	1590	6,031	52	13,499	40
400	1,341	338	16,611	186	1600	6,084	53	13,458	41
500	1,682	341	16,418	193	1610	6,137	53	13,417	41
600	2,028	346	16,217	201	1620	6,190	53	13,375	42
700	2,378	350	16,009	208	1630	6,244	54	13,333	42
800	2,735	357	15,790	219	1640	6,299	55	13,290	43
900	3,099	364	15,562	228	1650	6,355	56	13,246	44
1000	3,473	374	15,321	241	1660	6,411	56	13,201	45
1100	3,858	385	15,066	255	1670	6,468	57	13,156	45
1200	4,257	399	14,795	271	1680	6,526	58	13,110	46
1300	4,673	416	14,504	291	1690	6,585	59	13,062	48
1400	5,112	439	14,189	315	1700	6,644	59	13,014	48
1500	5,579	467	13,844	345	1710	6,705	61	12,965	49
1510	5,627	48	13,807	37	1720	6,766	61	12,916	49
1520	5,676	49	13,770	37	1730	6,828	62	12,866	50
1530	5,725	49	13,733	37	1740	6,891	63	12,815	51
1540	5,775	50	13,695	38	1750	6,955	64	12,762	53
1550	5,825	50	13,657	38	1760	7,020	65	12,709	53
1560	5,876	51	13,618	39	1770	7,086	66	12,654	55

suiuant les diuerses valeurs de K

K	z_1	diff.	z_2	diff.	K	z_1	diff.	z_2	diff.
1770	7,086		12,654		1980	9,172		10,806	
1780	7,154	68	12,598	56	1981	9,193	21	10,786	20
1790	7,223	69	12,540	58	1982	9,215	22	10,765	21
1800	7,293	70	12,481	59	1983	9,238	23	10,744	21
1810	7,365	72	12,421	60	1984	9,260	22	10,722	22
1820	7,439	74	12,359	62	1985	9,283	23	10,699	23
1830	7,514	75	12,294	65	1986	9,308	25	10,676	23
1840	7,592	78	12,228	66	1987	9,334	26	10,651	25
1850	7,672	80	12,160	68	1988	9,361	27	10,626	25
1860	7,754	82	12,089	71	1989	9,388	27	10,600	26
1870	7,839	85	12,015	74	1990	9,417	29	10,572	28
1880	7,927	88	11,938	77	1991	9,447	30	10,543	29
1890	8,019	92	11,858	80	1992	9,479	32	10,512	31
1900	8,114	95	11,774	84	1993	9,513	34	10,479	33
1910	8,214	100	11,685	89	1994	9,549	36	10,444	35
1920	8,319	105	11,591	94	1995	9,589	40	10,405	39
1930	8,431	112	11,491	100	1996	9,633	44	10,363	42
1940	8,550	119	11,383	108	1997	9,682	49	10,315	48
1950	8,679	129	11,265	118	1998	9,740	58	10,257	58
1960	8,822	143	11,132	133	1999	9,817	77	10,182	75
1970	8,983	161	10,984	148	2000	10,000	183	10,000	182
1980	9,172	189	10,806	178					

Racine de l'équation $z^3 - 300z - K = 0$, pour $K > 20$

K	z_3	diff.
2000	20,00	
3000	21,04	1,04
4000	21,96	0,92
5000	22,79	83
6000	23,55	76
7000	24,26	71
8000	24,92	66
9000	25,54	62
10000	26,13	59
11000	26,69	56
12000	27,22	53
13000	27,73	51
14000	28,22	49
15000	28,69	47
16000	29,14	45
17000	29,58	44
18000	30,00	42
19000	30,41	41
20000	30,81	40
21000	31,19	38
22000	31,57	38
23000	31,94	37
24000	32,30	36
25000	32,65	35

Au delà de $K = 25000$

$$z_3 = \sqrt[3]{K} + \frac{100}{\sqrt[3]{K}} - \frac{100^3}{3K^2} \left(\sqrt[3]{K} - \frac{100}{\sqrt[3]{K}} \right)$$

Résolution de $x^3 + px + q = 0$

Poser $x = y + \frac{m}{y}$; prendre $m = -\frac{p}{3}$;

résoudre $y^3 + \frac{m^3}{y^3} + q = 0$